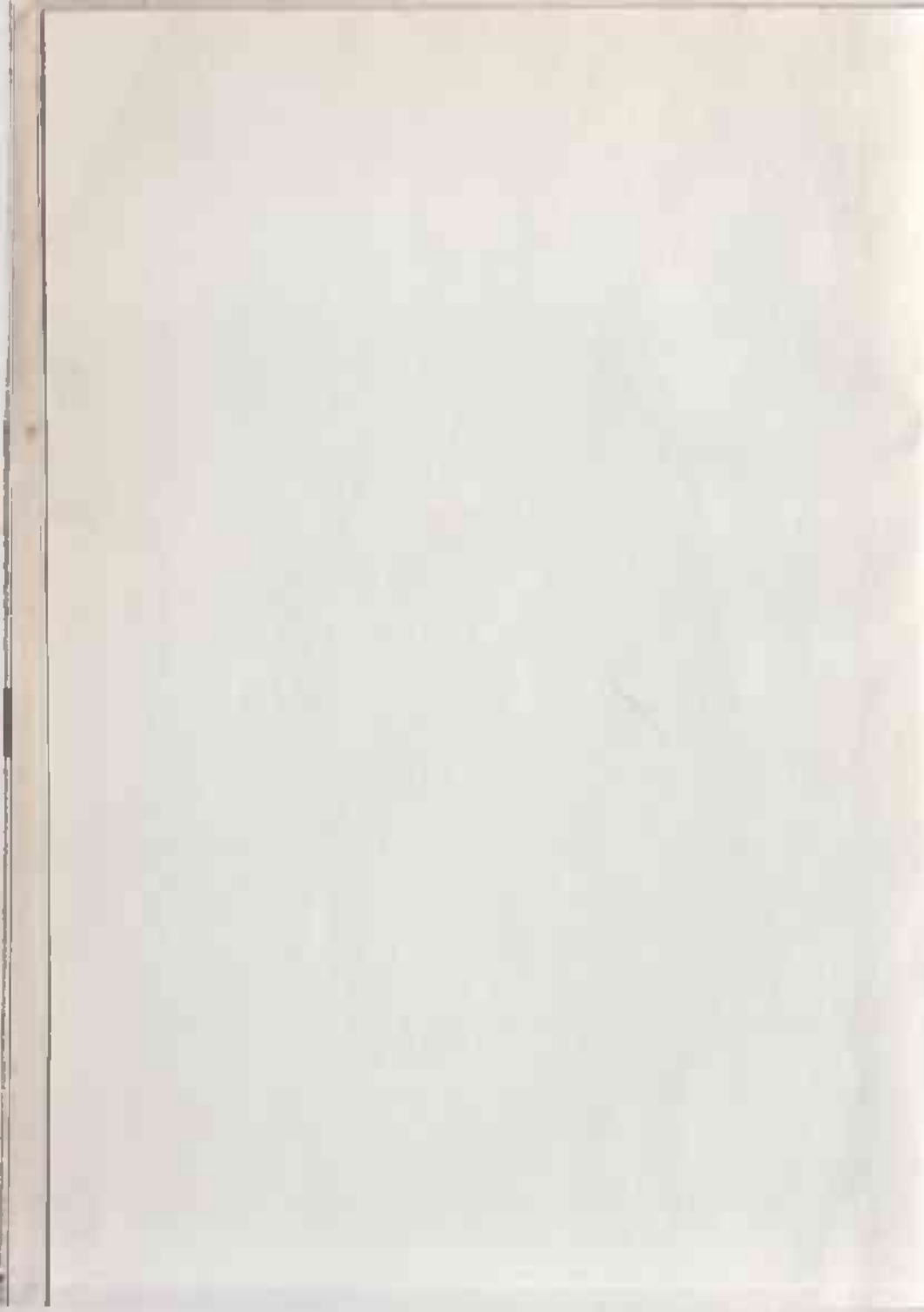


ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ, ФИЗИКЕ И ХИМИИ

$$V = \int_0^t \Delta A dt$$





САРАТОВСКИЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ

САРАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИЗАЦИИ
СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА ИМЕНИ М. И. КАЛИНИНА

САРАТОВСКИЙ ЗООВЕТЕРИНАРНЫЙ ИНСТИТУТ

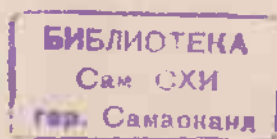
501
K-829

ИССЛЕДОВАНИЯ

ПО МАТЕМАТИКЕ,

ФИЗИКЕ, ХИМИИ

044.566



ПРИВОЛЖСКОЕ КНИЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
САРАТОВ 1973

Редакционная коллегия:

Иванов В. Н., канд. мат. наук; Иванова С. Н., канд. физ. наук; Медокс Г. В., канд. хим. наук; Милованов Е. Д., канд. техн. наук (ответственный за выпуск); Патрушев В. Л., докт. физ.-мат. наук; Рязанова Г. Е., канд. хим. наук (секретарь); Храмов В. П., канд. хим. наук.

МАТЕМАТИКА

АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ СО СЛУЧАЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

ИВАНОВ В. Н., кандидат физико-математических наук
(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Исследуем решения задачи Коши (АЗК) со случайным оператором с помощью некоторых методов теории возмущений линейных операторов. Это исследование является продолжением нашей работы «Абстрактная задача Коши и теория возмущения замкнутых операторов» [7] и мы часто ссылаемся на методы и результаты ее, но основные, необходимые для понимания изложения факты и определения здесь приводятся.

1. Уравнение со случайным оператором и уравнение регрессии

Пусть (Ω, S) — измеримое пространство, B — не пустое сепарабельное банахово пространство, которое мы будем считать в этой статье топологической алгеброй, состоящей из числовых функций одной или нескольких переменных, наделенных свойствами алгебры b — σ -алгебра всех подмножеств Бореля в B ; P — полная вероятностная мера на S ; D — плотное в B множество; R^1 — числовая ось переменной t .

Образование $A(t, \omega)$ прямого произведения $\Omega \times R^1 \times D$ в банаховом пространстве B назовем линейным стохастическим операторным процессом в B , если для $(t, x) \in R^1 \times D$ имеем:

$$a) \{ \{ \omega : A(t, \omega)x \in \Delta \}, t \in R^1, x \in D, \Delta \in b \} \subset S;$$

б) при каждом фиксированном $t \in R^1$ $A(t, \omega)$ — случайный линейный оператор. Это фактически означает, что для каждой фиксированной пары $(t, x) \in R^1 \times D$ $A(t, \omega) \cdot x$ является случайным элементом в B .

Будем предполагать известным исчисление случайных функций второго порядка, развитое М. Лозным и изложенное в его известной монографии по теории вероятностей, а также в монографиях

И. Н. Гихмана и А. В. Скорохода, А. А. Свечникова и других авторов. Это исчисление называют также гильбертовым пространством случайных функций, или корреляционной теорией.

Свойства второго порядка обобщаются простой перефразировкой с функций одной независимой переменной на случайные элементы в функциональном банаховом пространстве B , зависящие от параметра t (если B является вместе с тем и алгеброй, что будем постоянно иметь в виду). Для этого абсолютные величины мы должны заменить нормой, а сходимость понимать как сильную. Например, известная теорема Гавца об условиях интегрируемости и дифференцируемости случайных элементов второго порядка, зависящих от параметра, формулируется так [11, стр. 544].

Теорема 1.1. Пусть $x(t, \omega)$; $t \in [0, T]$ есть случайный элемент второго порядка в банаховом пространстве B , с непрерывной по t, t' ковариацией $\Gamma(t, t') = E x(t, \omega) \cdot x(t', \omega)$. Тогда с точностью до эквивалентности:

I. Интеграл в сильном среднеквадратичном смысле $Y(t) = \int_a^t x(s, \omega) ds$ существует, $x(t, \omega)$ — его производная в сильном средне-

квадратичном смысле. И если $Y_0(t)$ является первообразной в том же смысле от $x(t, \omega)$, тогда $Y(t) = Y_0(t) - Y_0(a)$ (то есть имеет место аналог формулы Ньютона — Лейбница). Непрерывный в сильном среднеквадратичном смысле случайный элемент $x(t, \omega)$ в B является борелевской, выборочно интегрируемой в сильном смысле и выборочно интегрируемой в квадрате функцией параметра t , причем ее неопределенный выборочный интеграл и интеграл в среднеквадратичном почти-наверное совпадают.

II. Если сильная производная $\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \Gamma(t, t')$ существует и конечна, то $x(t, \omega)$ сильно дифференцируема в среднеквадратичном (то же самое для старших производных), и если $\Gamma(t, t')$ сильно бесконечно дифференцируема, то $x(t, \omega)$ — бесконечно выборочно сильно дифференцируема.

Область определения $D \subseteq B$ неограниченного случайного операторного процесса $A(t, \omega)$ будем считать не зависящей от t и ω и плотной в B . В отношении значений процесса на элементах $x \in D$ примем на всем протяжении данной статьи следующее условие I: $A(t, \omega) \cdot x$ является случайным элементом второго порядка в B с непрерывной по t, t' ковариацией

$$\Gamma_A(t, t') = E(A(t, \omega) \cdot x) \cdot (A(t', \omega) \cdot x). \quad (1.1)$$

Из выполнения этого условия сразу же следует существование математического ожидания в виде линейного оператора

$$E A(t, \omega) \cdot x = \bar{A}(t) \cdot x = \int A(t, \omega) \cdot dP(\omega) x, \quad (1.2)$$

выражаемого интегралом Бохнера (или Петтиса). Если обозначить $V(t, \omega) \cdot x = \int_0^t [A(\tau, \omega) - \bar{A}(\tau)] \cdot x \cdot d\tau$, то $E V(t, \omega) \cdot x = 0$ (нуль в H -пространстве).

Для операторного процесса, удовлетворяющего условию I, рассмотрим абстрактную задачу Коши, в которой все встречающиеся соотношения между случайными элементами являются почти-наверное (п.н.) соотношениями. В дальнейшем, исследуя случайные уравнения и их решения, будем опускать п.н. и все равенства понимать с точностью до эквивалентности:

$$\alpha \cdot \frac{dx}{dt} = A(t, \omega) \cdot x; \quad x(0) = x_0(\omega); \quad 0 \leq t < T. \quad (1.3)$$

Здесь производная понимается как сильный предел в среднеквадратичном, α — неслучайный комплексный параметр, x_0 — случайный элемент из D .

Решением случайного уравнения (1.3) будем называть случайный элемент из D , то есть распределение на D , для которого на $[0, T]$ существует сильная среднеквадратичная производная $x'(t, \omega)$ и который удовлетворяет этому уравнению и начальному условию.

Оператор $A(t, \omega)$ будем считать замкнутым для каждой пары $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Тогда $A(t)$ — замкнутый оператор с той же областью определения D . Если теперь ввести норму:

$$\|x\|_D = \|x\| + \|A_0 \cdot x\|; \quad A_0 = A(0), \quad (1.4)$$

то D превращается в банахово пространство, а операторный процесс $A(t, \omega)$ становится ограниченным, то есть

$$\|A(t, \omega) \cdot x\|_B \leq q(t, \omega) \|x\|_D \quad (1.5)$$

так что $A(t, \omega)$ можно считать распределением на $G(D, B) \times [0, T]$, а

$$q(t, \omega) = \sup_{\|x\|_D \leq 1} \|A(t, \omega) \cdot x\|_B. \quad (1.6)$$

Обозначим через $C\{B, [0, T]\}$ банахово пространство сильно непрерывных функций на $[0, T]$ с нормой:

$$\|x\|_C = \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|_B. \quad (1.7)$$

есть резольвента оператора L . В остальных случаях разрешающий оператор есть произведение операторов, представимое в виде выражений (соответственно):

$$\begin{aligned} U &= R(\alpha, L_0) \cdot (I_\mu - K)^{-1} \cdot \alpha \cdot \mu; \\ U &= \alpha \cdot \mu \cdot (I_\alpha - L_0)^{-1} \cdot R(\mu, K); \\ U &= \alpha \cdot \mu \cdot (I_\alpha - L_0)^{-1} \cdot (I_\mu - K)^{-1}. \end{aligned}$$

§ 2. Случайный разрешающий оператор

Рассмотрим теперь исходную задачу со случайным оператором (1.3), которую в соответствии с (1.8) будем записывать в виде случайного уравнения:

$$[I_\alpha - (L_0 + \tau V(\omega))] \cdot x = \alpha \cdot x_0(\omega), \quad (2.1)$$

$$\text{где } L_0 = \int_0^1 A(\tau) \cdot d\tau; \quad V(\omega) = \int_0^1 \Delta A(\tau, \omega) d\tau;$$

$\Delta A(\tau, \omega)$ — замкнутый случайный операторный процесс, τ — неслучайный комплексный параметр.

Будем искать сильно непрерывное в среднеквадратичном решении интегрального уравнения (2). Для этого достаточно наличия у решения $x(\omega)$ сильно непрерывной ковариационной функции $\Gamma_x(t, t')$ в $C[B, (0, T)]$. Последнее обеспечивается наложением следующих условий:

- а) начальное значение $x_0(\omega)$ независимо от $V(\omega) \cdot x$; $x \in D$;
- б) вводимый ниже оператор $K_\alpha(\omega)$ ограничен в B или D и существуют все моменты:

$$E\|x_0(\omega)\|^n < \infty; \quad E\|K_\alpha\|^n < \infty; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

(Подробное его построение для одного случая осуществлено в § 3).

В данном параграфе мы показываем, что для интегрального уравнения существует при определенных условиях решение $x(\omega) = U(\omega) \cdot x_0(\omega)$ с разрешающим оператором вида:

$$U(\omega) = U_1(\omega) \cdot I_p + U_2(\omega) \cdot I_{cs} + U_3(\omega) \cdot I_{ps},$$

где I_p, I_{cs}, I_{ps} — индикаторы компонент спектра оператора $K_\alpha(\omega)$. Из свойств этого оператора (применением оператора и неравенства Шварца) будут следовать существование и сильная непрерывность функции $\Gamma_x(t, t')$.

Рассмотрим последовательно встречающиеся здесь случаи:

1. Пусть $\alpha \in P(L_0)$. Тогда оператор $K_\alpha(\omega) = V(\omega) \cdot R(\alpha, L_0)$ будет ограниченным случайным оператором в $C[B, (0, T)]$; $\Delta(\alpha) = \{\omega : \|K_\alpha(\omega)\| < |\mu| \in S; \mu = \frac{1}{\tau} \text{ (может быть } \tau=1)\}$, а случайное преобразование $I - \mu - K_\alpha(\omega)$ является обратимым для каждого $\omega \in \Delta(\alpha)$, причем:

$$R_\mu(K_\alpha(\omega)) = - \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \cdot K_\alpha^n(\omega).$$

Для $\omega \in \Delta(\alpha)$ разрешающий оператор АЗК

$$U_1(\omega) = \alpha \cdot \tau \cdot R(\alpha, L_0) \cdot R(\mu, K_\alpha(\omega))$$

является измеримым по Борелю случайным преобразованием относительно σ -алгебры $\Delta(\alpha) \cap S$. Очевидно, что дополнение к ω -множеству $\Delta(\alpha)$ также принадлежит S , то есть

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \{\omega : \|K_\alpha(\omega)\| \geq |\mu| \in S\}.$$

Если μ не является собственным значением $K_\alpha(\omega)$ для $\omega \in \Delta(\alpha)$, то существует обратный $(I - \mu - K_\alpha(\omega))^{-1}$, который является измеримым по Борелю случайным оператором относительно σ -алгебры $\Delta(\alpha) \cap S$. В этом случае характер области определения этого обратного Q (плотная, неплотная в B) служит критерием для принадлежности точки μ к одной из двух компонент спектра $S\sigma(K_\alpha(\omega))$ или $R\sigma(K_\alpha(\omega))$. Если начальный элемент x_0 принадлежит этой области Q , то мы получим случайный разрешающий оператор $U(\omega)$:

$$U_1(\omega) = \alpha \cdot \tau \cdot R(\alpha, L_0) \cdot (I - \mu - K_\alpha(\omega))^{-1}.$$

Если же $\mu \in P\sigma(K_\alpha(\omega))$, то уравнение (1.8) имеет решение для тех, и только тех, $\alpha \cdot x_0 \in D$, для которых при $\omega \in \Delta(\alpha)$ $g(\alpha \cdot x_0) = 0$, при всех g , удовлетворяющих сопряженному уравнению:

$$(I \cdot \alpha - L^*(\omega)) \cdot g = 0.$$

В рассматриваемом случае индикатор множества $\{K_\alpha : I_\alpha - K_\alpha - \text{сингулярно}\}$, как показал У. Гренандер [1, стр. 198], также измерим по Борелю.

Отметим, что если $V(\omega)$ есть ограниченный случайный оператор, то вид решения можно несколько уточнить и решение получить с вероятностью единица. Действительно, разыскивая решение уравнения (2.1) в виде

$$x(t, \omega) = X(t) + \xi(t, \omega), \quad (2.2)$$

где $X(t)$ — решение невозмущенного уравнения:

$$(I \cdot x - L_0) X = x \cdot x_0(\omega),$$

получим для определения случайного элемента $\xi(t, \omega)$ уравнение:

$$\xi(t, \omega) = \tau \cdot R(x, L_0) \cdot V(\omega) \cdot (X + \xi(t, \omega)) \equiv F(\xi). \quad (2.3)_1$$

Если $\|\tau\| \cdot \|V(\omega)\| < \|R(x, L_0)\|^{-1}$ почти-наверное, то $F(\xi)$ есть оператор сжатия и измеримый по Борелю случайный элемент. Отсюда следует существование однозначно определенного измеримого по Борелю случайного элемента ξ со значениями в D , удовлетворяющего случайному уравнению (2.3). Это решение может быть получено итерационным процессом исходя из элемента $\xi_1 = 0$; $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, так что почти-наверное:

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n.$$

В силу единственности решения для достаточно малых по модулю значений τ , для которых F (п.н.) есть оператор сжатия, имеем:

$$\xi = \tau \cdot (I - \tau \cdot R(x, L_0) \cdot V(\omega))^{-1} \cdot R(x, L_0) \cdot V(\omega) \cdot X. \quad (2.3)_2$$

Пусть, наконец, сам оператор $A(t, \omega)$ является ограниченным операторным процессом, заданным как распределение $P_t \in P(X)$, где $P(X)$ — полугруппа вероятностных мер на банаховой алгебре X ограниченных преобразований. Банахово пространство B мы предположили уже в топологической алгебре с единичным элементом, а в отношении распределения P_t имеем существование моментов второго порядка, что обеспечивается требованием $E\|A(t, \omega) \cdot x\|^2 < \infty$. Таким образом, можем использовать топологию гильбертова пространства $L_2(X)$. Рассматривая АЗК (1.3) с таким оператором и соответствующее ему интегральное уравнение (1.8), получим решение в форме оператора:

$$\begin{aligned} x(t, \omega) &= (I + \sum_{n=1}^{\infty} L^n(\omega)) \cdot x_0 = (I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(s_k, \omega) \cdot \\ &\quad \cdot ds_{k-1} \dots \int_0^{s_k} A(s_k, \omega) \cdot ds_k) \cdot x_0(\omega) \equiv \Omega_0^t(A) \cdot x_0(\omega), \end{aligned} \quad (2.4)$$

сходящегося почти-наверное на множествах (t, ω) , для которых

$$P\{(\omega, t) : \|\int_0^t A(t, \omega) \cdot dt\| \leq c < \infty\} = 1,$$

и в среднеквадратичном в силу топологии в $L_2(X)$.

Используя свойства операторанта от суммы $A(t, \omega) = A(t) + \Delta A(t, \omega)$, запишем:

$$x(t, \omega) = \Omega_0^t(A(t)) \cdot \Omega_0^t \{ [\Omega_0^t(A)]^{-1} \cdot \Delta A(t, \omega) \cdot \Omega_0^t(A(t)) \} \cdot x_0(\omega). \quad (2.5)$$

Если $A = A_0$ есть оператор, не зависящий от t , то $\Omega_0^t(A_0) = e^{A_0 \cdot t}$ и предыдущий результат имеет вид:

$$x(t, \omega) = e^{A_0 \cdot t} \cdot \Omega_0^t \{ e^{-A_0 \cdot t} \cdot \Delta A(t, \omega) \cdot e^{A_0 \cdot t} \} \cdot x_0(\omega) \quad (2.6)$$

Если дополнительно окажется, что $A(t, \omega) \cdot x$ для любого x имеет независимые приращения с распределением вероятностей, зависящим от длины соответствующего интервала времени и кроме того:

$$P_s * P_t = P_{s+t}, \quad (s, t \geq 0), \quad (2.7)$$

где $*$ означает композицию вероятностных мер, то $A(t, \omega) \cdot x$ называется однородным аддитивным процессом.

Для двух ограниченных независимых операторных процессов A и B можно определить произведение $C = A \cdot B$. Если P_A, P_B и P_C соответствующие вероятностные меры этих процессов на X , то будем писать:

$$P_C = P_A \cdot P_B.$$

Процесс с независимыми мультипликативными приращениями (таким, что $P_s \cdot P_t = P_{s+t}, s, t \geq 0$) называется однородным мультипликативным процессом.

Для нашего процесса мы, очевидно, имеем выполненным условие

$$C_1: \sum E \|A(t, \omega) \cdot x - A(t_{n-1}, \omega) \cdot x\| \leq M < \infty$$

для любого разбиения заданного интервала $[0, t]$. Это последнее условие наряду со всеми предшествующими позволяет воспользоваться теоремой У. Гренандера [1, стр. 191] и заключить, что если $A(t, \omega)$ — однородный случайный процесс, принимающий значения в банаховой алгебре X с единичным элементом 1 , то

$$x(t, \omega) = \{ 1 - \int_0^t A(s, \omega) \cdot ds + \int_{0 < s_1 < s_2 < t} A(s_1, \omega) \cdot A(s_2, \omega) ds_1 \cdot ds_2 - \dots \} x_0(\omega)$$

представляет собой однородный мультипликативный процесс. В частности, если $A(s, \omega) \cdot A(t, \omega) = A(t, \omega) \cdot A(s, \omega)$ для любых $s, t \in [0, T]$ (то есть $A(t, \omega)$ — распределение на коммутативной ал-

гебре), то

$$x(t, \omega) = \left[I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t A(s, \omega) ds \right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right] \cdot x_0 = e^{\int_0^t A(s, \omega) ds} \cdot x_0(\omega). \quad (2.8)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.1. Пусть $\alpha \in \rho(L_0)$ и $\Delta A(t, \omega)$ — замкнутый случайный операторный процесс в B , удовлетворяющий условию I. Тогда АЗК со случайным оператором (1.3) имеет разрешающий случайный оператор $U(\omega)$ следующего вида:

- а) при $\omega \in \Delta(\alpha)$: $U_1(\omega) = \alpha \cdot \tau R(\alpha, L_0) \cdot R(\mu, K_\alpha(\omega))$,
измерим по Борелю относительно σ -алгебры $\Delta(\alpha) \cap S$;
б) при $\omega \in \bar{\Delta}(\alpha)$: $\mu \in P\sigma(K_\alpha(\omega))$; $x_0 \in D[I\alpha - K_\alpha(\omega)]^{-1}$,

$$U_\alpha(\omega) = \alpha \cdot \tau R(\alpha, L_0) \cdot (I - \mu - K_\alpha(\omega))^{-1}.$$

При $\omega \in \Delta(\alpha)$; $\mu \in P\sigma(K_\alpha(\omega))$ решение существует для тех и только тех $\alpha \cdot x_0$, для которых $g(\alpha \cdot x_0) = 0$. Если $V(\omega)$ — ограниченный случайный оператор и почти-наверное

$$\|\tau \cdot \|V(\varphi)\| < \|K(\alpha, L_0)\|^{-1},$$

то решение с вероятностью единица дается формулами (2.2), (2.3). Когда же $A(t, \omega)$ — ограниченный операторный процесс (распределение $(P_t$ на $L_2(X)$), то решение уравнения (1.3) представимо в форме операторанта (2.4), сходящегося почти-наверное на множестве (t, ω) , для которого

$$P\left[\left\|\int_0^t A(s, \omega) ds\right\| \leq c < \infty\right] = 1,$$

и в среднеквадратичном в силу топологии в $L_2(X)$. Если при этом

$A = A_0$ — не зависящий от t оператор, то решение имеет вид (2.6). Когда ограниченный операторный процесс $A(t, \omega)$ имеет независимые приращения и его мера удовлетворяет условию (2.7), операторант представляет собой мультипликативный процесс, который в коммутативном случае изображается показательной функцией (2.8).

II. Пусть $\alpha \in \sigma(L_0)$. Тогда оператор $(I \cdot \alpha - L_0)^{-1}$ определен в плотной области $B_0 \subset B$. Предполагаем, что область значений случайного оператора $V(\omega)$ не зависит от ω и включается в $B_0 \subset B$, то есть

$$R(V(\omega)) \subseteq B_0.$$

и $x_0(\omega)$ есть распределение на B_0 .

Тогда оператор

$$K_\alpha(\omega) = (I \cdot \alpha - L_0)^{-1} \cdot V(\omega)$$

оператором, переводящим D в D и ограниченным как оператор от D в B , вследствие того, что он допускает замыкание. Действительно, оператор $V(\omega)$ замкнут при каждом ω , а $(I - L_0)^{-1}$ замкнут как оператор, обратный замкнутому, поэтому для $\{f_n\} \subset D$ и $f_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ имеем $V \cdot f_n \rightarrow 0$, но так как $V \cdot f_n \in B_0$, то $K_*(\omega) f_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ при каждом ω или в среднеквадратичном, или в D . Более того, вследствие замкнутости $V(\omega)$ из соотношений: $f_n \in D$, $f_n = f$, $V(\omega) f_n = V(\omega) f$ и $f \in D$ (п.н. или для каждого ω или в среднеквадратичном), получаем $K_*(\omega) f_n \rightarrow K_*(\omega) f$ и, значит, $K_*(\omega)$ замкнут.

Но линейный случайный оператор, определенный всюду в банаховом пространстве D и замкнутый (в каком-либо смысле), непременно ограничен (в том же смысле) в D .

Рассмотрим теперь «операторное тождество»:

$$I \cdot \alpha - L(\omega) = \tau \cdot (I \cdot \alpha - L_0) [I \cdot \mu - K_*(\omega)].$$

Согласно теореме 2.1:

$$\Delta_1(\alpha) = \{\omega : \|K_*(\omega)\|_D < |\mu|\} \in S.$$

Тогда для $\omega \in \Delta_1(\alpha)$ имеем представление резольвенты:

$$(I \cdot \mu - K_*(\omega))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \cdot K_*(\omega))^n,$$

где ряд сходится в смысле нормы в D и мы можем написать:

$$(I \cdot \alpha - L(\omega))^{-1} = \mu \cdot [I \cdot \mu - K_*(\omega)]^{-1} \cdot (I \cdot \alpha - L_0)^{-1}. \quad (2.9)$$

Область определения данного оператора есть $B_0 \subset B$, и он измерим по Борелю относительно σ -алгебры $\Delta_1(\alpha) \cap S$. Следовательно, $\alpha \in C\sigma(L(\omega))$, $\omega \in \Delta_1(\alpha)$. Если $P(\Delta_1(\alpha)) = 1$, то мы получим аналогичные заключения в терминах почти-навсего.

Когда B_0 не плотно в B , $x_0 \in B_0$, то есть $\alpha \in R\sigma(L_0)$, подобное рассуждение даст нам обратный оператор (2.9) и $\alpha \in R\sigma(L(\omega))$; $\omega \in \Delta_1(\alpha)$.

Если μ не есть собственное значение оператора $K_*(\omega)$, то из соотношения

$$\bar{\Delta}_1(\alpha) = \{\omega : \|K_*(\omega)\| \geq |\mu|\} \in S.$$

следует, что для $\omega \in \Delta_1(\alpha)$ обратный оператор $(I \cdot \mu - K_*(\omega))^{-1}$ измерим относительно $\Delta_1(\alpha) \cap S$ и может иметь различные области определения.

Здесь уже представление разрешающего оператора возможно только при условии:

$$(I \cdot \alpha - L_0)^{-1} \cdot x_0 \in D [(I \cdot \mu - K_*(\omega))^{-1}]. \quad (2.10)$$

Когда же μ есть собственное число оператора $K_\alpha(\omega)$, решение задачи (1.8) возможно для тех и только тех $\alpha \cdot x_0$, для которых $g(\alpha \cdot x_0) = 0$, где g — есть решение сопряженного уравнения: $(I \cdot \alpha - L^*(\omega)) \cdot g = 0$. Если $V(\omega)$ — ограниченный в B случайный оператор, то $K_\alpha(\omega)$ как произведение ограниченного и замкнутого оператора есть ограниченный в B оператор и, следовательно, для него можно пользоваться нормой в B .

Уравнение (1.8) теперь можно рассматривать так же, как и в предыдущем пункте. В результате получим, что при условии $P\{\omega: \|(I\alpha - L_0)^{-1} \cdot V\| \leq c < \infty\} = 1$ F есть оператор сжатия. И тогда решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$x(\omega) = X + \xi(\omega) = \{\tau \cdot |I - \\ - \tau \cdot (I \cdot \alpha - L_0)^{-1} \cdot V(\omega)|^{-1} \cdot (I \cdot \alpha - L_0)^{-1} \cdot V(\omega) + I\} \cdot X. \quad (2.11)$$

III. Пусть $\alpha \in P\sigma(L_0)$ и L_0 имеет только изолированный дискретный спектр. Тогда обратный для $I\alpha - L_0$ не существует и операторное тождество не имеет места. Если α -изолированное собственное значение для L_0 , то при случайном возмущении $V(\omega)$ оно может перейти лишь в резольвентное множество $\rho(L(\omega))$ для ω , принадлежащих некоторым событиям типа Δ''_2 , поэтому разрешающий оператор представим в форме резольвенты $R(\alpha \cdot L(\omega))$, как измеримого по Борелю случайного оператора относительно некоторой σ -алгебры $S'' \subset S$.

Результаты пункта II и III теперь можно сформулировать так.

Теорема 1.5. Если $\alpha \in C\sigma(L_0)$, $V(\omega)$ замкнут (при каждом $\omega \in \Omega$, п.н. или в среднеквадратичном) и выполнено условие $R_\nu \subset B_0$, то для $\omega \in \Delta_1(\alpha)$ разрешающий случайный оператор представим в виде (2.9) и измерим относительно σ -алгебры $\Delta_1(\alpha) \cap S$, ($x_0 \in B_0$). Если $\omega \in \Delta_1(\alpha)$ и выполняется условие (2.10), ($\mu \in P\sigma(K_\alpha(\omega))$), то разрешающий оператор имеет тот же вид и измерим относительно σ -алгебры $\Delta_1 \cap S$; когда же применяется

$$P\{\omega: |\tau| \cdot \|(I \cdot \alpha - L_0)^{-1} \cdot V(\omega)\| \leq C < \infty\} = 1,$$

то решение АЗК со случайным оператором (2.11). Если $\alpha \in P\sigma(L_0)$ изолированное собственное значение, то существует σ -алгебра $S'' \subset S$, относительно которой измерим разрешающий оператор $U = \tau \cdot R(\alpha, L(\omega))$. (В последнем случае L имеет изолированный дискретный спектр.)

§ 3. О вероятностных характеристиках решений и связи решений детерминированного и случайного уравнений.

Этот вопрос рассмотрим вначале для детерминированного уравнения со случайным начальным условием.

В двух случаях при $\alpha \in \rho(L_0)$ и $\alpha \in C\sigma(L_0)$ мы уже упомянули интегральное уравнение:

$$(I\alpha - L_0) \cdot X = \alpha \cdot x_0(\omega), \quad (3.1)$$

где $x_0(\omega)$ — распределение в области $D[(I\alpha - L_0)^{-1}] = B_\alpha \subseteq B$, и использовали его решение при построении решения уравнения (1.8), когда случайный оператор возмущения $V(\omega)$ ограничен.

Будем считать, что $I\alpha - L_0$ есть ограниченный оператор из D в H и обратный ему $(I\alpha - L_0)^{-1}$ ограничен из B в D . Тогда решение рассматриваемого уравнения $X(t, \omega) = \alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1} x_0(\omega)$ является случайным элементом в B . Действительно, согласно конструктивному определению случайного элемента $x_0(\omega)$ он может быть равномерно аппроксимирован последовательностью $\{x_n^{(0)}(\omega)\}$ значений случайных элементов. Обозначим

$$v_n = \alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1} \cdot x_n^{(0)}(\omega).$$

Тогда для $\Delta \in B$ имеем:

$$\{\omega : v_n(\omega) \in \Delta\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\omega : \alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1} \cdot y_j \in \Delta\} \cap \{\omega : x_n^{(0)}(\omega) = y_j\},$$

так что $\{v_n(\omega)\}$ — последовательность случайных элементов в D . Но так как оператор $\alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1}$ является непрерывным из B в D , то вышеуказанная последовательность сходится к случайному элементу $v^{(0)}$, который по предельной теореме Ганша есть случайный элемент в D .

Так как уже принято предположение рассматривать только пространства $L_2(B)$ и $L_2(X)$, то $EX_0(\omega)$ существует. Тогда по свойству математического ожидания [1, стр. 156] существует математическое ожидание решения, то есть

$$EX(t, \omega) = \alpha \int (I\alpha - L_0)^{-1} \cdot x_0(\omega) \cdot dP(\omega) = \alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1} \cdot EX_0(\omega), \quad (3.2)$$

и ковариационная функция:

$$\Gamma(t, t') = EX(t, \omega) \cdot \overline{X(t', \omega)}.$$

В гильбертовом пространстве функций вводят также в качестве вероятностной характеристики решения ковариационный оператор S , определяемый равенством

$$(Sz, z) = E(X(t, \omega) - EX(t, \omega), z)^2,$$

который, как известно, (1, стр. 156), является оператором Гильберта — Шмидга (неотрицательным, эрмитовым, с конечным следом). В случае когда $U_t = \alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1}$ ограниченный в H опера-

тор (то есть $\alpha \in \rho(L_0)$), этот ковариационный оператор выражается через ковариационный оператор S_0 элемента $x_0(\omega)$ равенством:

$$S_{x(t, \omega)} = U_t \cdot S_0 \cdot U_t^* \quad (3. 4)$$

С. Г. Крейнм установлено [8, стр. 111]: если $\tilde{A}(t) = A_0$ — оператор, не зависящий от t , то, чтобы АЗК-1 в H отвечала полугруппе $U_t = \alpha \cdot (I\alpha - L_0)^{-1}$ изометрических операторов, необходимо и достаточно, чтобы A_0 был максимальным диссипативным консервативным оператором, то есть чтобы он удовлетворял условию:

$$\operatorname{Re}(A_0 x, x) = 0; \quad x \in D(A_0).$$

Пусть эти условия выполняются и дополнительно оказывается, что U_t — трансляционная полугруппа сохраняющих меру преобразований (в смысле Д. Дуба, стр. 405), то наше решение $X(t, \omega) = U_t \cdot x_0(\omega)$ будет стационарным, в широком смысле, процессом со значениями в H .

Рассмотрим теперь важный вопрос о связи решений детерминированного уравнения (1.9), (1.10) с решениями случайного операторного уравнения (1.3), (1.8), о которых мы говорили выше.

Прежде всего запишем уравнение (1.8) в следующем виде:

$$(I \cdot \alpha - L_0)x = \alpha \cdot x_0(\omega) + V(\omega) \cdot x. \quad (3. 4)$$

Будем предполагать, что $\alpha \in \rho(L_0)$. Тогда, учитывая сказанное, получим:

$$x(t, \omega) = X(t, \omega) + \tau \cdot R(\alpha, L_0) \cdot V(\omega)x(t, \omega) = T(t, \omega, x), \quad (3. 5)$$

где

$$X(t, \omega) = \alpha \cdot R(\alpha, L_0)x_0(\omega).$$

Решение детерминированного уравнения здесь имеет вид:

$$x = EX(t, \omega) = \alpha \cdot R(\alpha, L_0) \cdot E x_0(\omega)$$

и для любого элемента $x \in D$

$$ER(\alpha, L_0) \cdot V(\omega) \cdot x = R(\alpha, L_0) \cdot E(V(\omega) \cdot x) = \theta$$

(нуль в B -пространстве).

Оператор $R(\alpha, L_0) \cdot V(\omega) = \tilde{K}_\alpha(\omega)$ переводит пространство D в D и определен всюду в D . Так как он представляет собой произведение замкнутых операторов, то нетрудно проверить, исходя из определения, что он замкнут. Но известно, что всякий линейный оператор, если он определен всюду в D и замкнут, непременно ограничен как оператор в D , то есть существует норма:

$$\|R(\alpha, L_0) \cdot V(\omega)\|_D = \|\tilde{K}_\alpha(\omega)\|_D.$$

В соответствии с результатами работ [2] и [3] можем написать

$$\Delta = \{\omega : \|R(\alpha, L_0) \cdot V(\omega)\|_D \leq c\} \in S; \quad (c > 0).$$

Предположим простоты ради, что $P(\Delta) = 1$ и существуют все моменты $E K_\alpha^n(\omega)$: $n = 1, 2, 3, \dots$ (условие б).

$$\text{Тогда } E \|K_\alpha(\omega)\|^n \leq c^n \text{ и для } |\tau| < \frac{1}{c}$$

с вероятностью единица сходится ряд:

$$x(t, \omega) = [I + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \cdot K_\alpha^n(\omega)] \cdot X(t, \omega), \quad (3.6)$$

являющийся решением уравнения (3.4). Его математическое ожидание имеет вид:

$$E x(t, \omega) = x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \cdot E [K_\alpha^n(\omega) \cdot X(t, \omega)]. \quad (3.7)$$

Применим неравенство Шварца для оценки слагаемых этого ряда:

$$\begin{aligned} E \|K_\alpha^n(\omega) \cdot X(t, \omega)\| &\leq E \{ \|K_\alpha^n(\omega)\|_D \cdot \|X(t, \omega)\|_D \} \leq \\ &\leq E \{ \|K_\alpha(\omega)\|_D^n \cdot \|X(t, \omega)\|_D \} \leq (E \|K_\alpha(\omega)\|_D^{2n})^{1/2} : \\ &: (E \|X(t, \omega)\|_D^2)^{1/2} \leq c^n \cdot (E \|X(t, \omega)\|_D^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Получаем при $|\tau| < \frac{1}{c}$ сходимость ряда для математического ожидания и следующее неравенство:

$$\|E x(t, \omega) - x(t)\| \leq \frac{|\tau| \cdot C}{1 - |\tau| \cdot C}, \quad (3.8)$$

которое позволяет заключить, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E x(t, \omega) = x(t).$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_n(t, t') &= E [X(t, \omega) \cdot K_\alpha^n(\omega) \cdot X(t', \omega)] + E [X(t', \omega) \cdot \\ &\cdot K_\alpha^n(\omega) \cdot X(t, \omega)] - E [C_n(\omega) \cdot X(t, \omega) \cdot X(t', \omega)]; \\ C_n(\omega) &= \sum_m K_\alpha^m(\omega) \cdot K_\alpha^{n-m}(\omega). \end{aligned}$$

Тогда ковариационная функция для процесса $\Gamma(t, t') = E[X(t, \omega) \cdot X(t', \omega)]$ примет вид:

$$\Gamma_x(t, t') = \Gamma_x(t, t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t, t') \cdot \varepsilon^n. \quad (3.9)$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3.1. Если выполнено условие (б), $\alpha \in p(L_0)$ и $|\alpha| < \frac{1}{c}$, то решение АЗК (1.3) представимо в виде ряда (3.6), сильно сходящегося в норме пространства $C[D, (0, T)]$ с вероятностью единица. Для его математического ожидания (3.7) имеет место соотношение (3.8), а ковариационная функция представима (3.9).

Дальнейшее рассмотрение уравнения поведем в некоторых предположениях относительно оператора $T(\omega, t, x)$. Следуя Ганшу [3], введем определение.

Определение 1. Оператор T будем называть стационарным операторным процессом в широком смысле, если он есть отображение прямого произведения $\Omega \times [0, \infty) \times D$ в D и если для каждого целого n можно указать набор значений аргумента $t_1, t_2, \dots, t_n$ и набор соответствующих им ω -множеств из σ -алгебры S , так что для каждого положительного n и любого $x \in D$ имеем:

$$P \left\{ \prod_{k=1}^n \{ \omega : T(\omega, t_k, x) \in B_k \} \right\} = P \left\{ \prod_{k=1}^n \{ \omega : T(\omega, t_k, \cdot, x) \in B_k \} \right\}.$$

Очевидно, что если $X(t, \omega)$ — стационарный процесс второго порядка и коэффициенты дифференциального оператора $V(\omega)$ также стационарные в широком смысле процессы, то оператор $T(\omega, t, x)$, фигурирующий в уравнении (3.5), будет удовлетворять и определению 1.

Определение 2. Операторный процесс из определения 1 будем называть эргодическим операторным процессом, если для каждого функционала $x^* \in D^*$ и любого $x \in D$ есть с вероятностью единица

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x^* [T(\omega, s, x)] \cdot ds = Ex^* [T(\omega, 0, x)].$$

В рассматриваемом случае имеем равенство для $X(t, \omega) = U_t x_0(\omega)$

$$Ex^* [U_0 x_0(\omega)] = Ex^* [x_0(\omega)].$$

Применяя интеграл Бохнера или Петтиса, для эргодических процессов будем писать сильные пределы в B (или в D):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(\omega, s, x) ds = ET(\omega, 0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} EI(\omega, t, x)$$

(среднее понимается в среднеквадратичном или почти-навсрное).

Пусть $V(\omega, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) e^{i\lambda_k t}$ стационарный процесс, представляющий сильно сходящимся рядом на элементах из D (п. н.); резольвента $R(\alpha, L_0)$ представляет собой унитарный оператор $R(\alpha, L_0) = \omega e^{i\alpha L_0}$, $(L_0 - iA_1)$ с самосопряженным оператором A_0 , имеющим простой дискретный спектр $\{\lambda_k\}$. Тогда оператор

$$K_\alpha(\omega) = R(\alpha, L_0) \cdot V(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\omega) \cdot e^{i\lambda_k t}$$

также стационарен.

Если дополнительно потребовать, чтобы для любых целых N, n_k выполнялось неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^N n_k \cdot \lambda_k \right| > \alpha > 0,$$

то решение АЗК, определяемое рядом (3.6), представляет собой почти-периодический процесс. Такие процессы мы изучаем в статье этого сборника «Случайные почти-периодические операторы и дифференциальные уравнения». Они в силу ограниченности на $R^{(1)}$ обладают устойчивостью по Ляпунову. Представляет интерес выяснить условия асимптотической устойчивости. Это возможно, если подчинить другим условиям A_0 .

Пусть $L_0 + A(t, \omega)$ — стационарный эргодический операторный процесс второго порядка, ограниченный с вероятностью единица, и L_0 — детерминированный оператор. Тогда АЗК, соответствующая этому оператору, эквивалентна следующему уравнению:

$$x(t, \omega) = e^{A_0 t} \cdot x_0(\omega) + \int_0^t e^{A_0(t-s)} \cdot A(s, \omega) \cdot x(s, \omega) \cdot ds,$$

из которого следует неравенство:

$$\|x(t, \omega)\| \leq \|e^{A_0 t}\| \cdot \|x_0(\omega)\| + \int_0^t \|e^{A_0(t-s)}\| \cdot \|A(s, \omega)\| \cdot \|x\| \cdot ds.$$

Так как $\|e^{A_0 \cdot t}\| \leq c \cdot e^{at}$, $a = \text{const}$, $c > 0$, $c = \text{const}$, то из последнего соотношения получаем:

$$\|x(t, \omega)\| \cdot e^{-at} \leq \|x_0(\omega)\| \cdot c + c \int_0^t \|x(s, \omega)\| \cdot e^{-as} \cdot \|A(s, \omega)\| \cdot ds.$$

Применим к нему стохастический вариант леммы Гранауэлла — Беллмана:

$$\|x(t, \omega)\| \leq c \cdot \|x_0(\omega)\| \cdot \exp \left\{ a \cdot t + c \cdot \int_0^t \|A(s, \omega)\| \cdot ds \right\}.$$

Предположение стационарности и эргодичности в соответствии с вышеуказанными определениями 1 и 2 даст нам:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(s, \omega)\| \cdot ds = E \|A(0, \omega)\|.$$

И с вероятностью единица окончательно получим:

$$\begin{aligned} \|x(t, \omega)\| &\leq c \cdot \|x_0(\omega)\| \cdot \exp \{ t \cdot [a + c \cdot E \|A(0, \omega)\|] \}, \\ E \|x(t, \omega)\| &\leq c \cdot E \|x_0(\omega)\| \cdot \exp \{ t \cdot [a + c \cdot E \|A(0, \omega)\|] \}. \end{aligned}$$

Наложением условий $a < 0$; $E \|A(0, \omega)\| < \frac{|a|}{c}$ из этих оценок легко получить асимптотическую устойчивость с вероятностью единица. Решение АЗК в данном случае записываем в форме оператора:

$$x(t, \omega) = e^{A_0 \cdot t} \cdot \Omega_0^t \{ e^{-A_0 \cdot s} \cdot A(t, \omega) \cdot e^{A_0 \cdot s} \} \cdot x_0(\omega),$$

сходящегося с вероятностью единица, если $P\{\omega; \|A(t, \omega)\| \leq c\} = 1$, $c > 0$ в некоторой окрестности $t=0$. Полученная здесь оценка решения и способ рассуждения обобщаются на случай, когда $A_0 + A(t, \omega)$ неограниченный процесс (точнее ограниченный из D в B) с областью определения $D \subseteq B$, если только

$$e^{-A_0 \cdot t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} \cdot A_0 \right)^{-n}$$

ограниченный в B оператор. Достаточным условием для того, чтобы этот предел существовал в равномерной операторной топологии, является [9, гл. IX, § 1]:

а) A_0 — замкнутый оператор с областью определения D , плотной в B ;

Линейная действительная ось принадлежит резольвентному множеству A_0 и

$$\|R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{1}{\lambda}; \quad \lambda > 0.$$

Для получения обобщенных оценок заметим, что интегральное уравнение в этом случае имеет тот же вид.

Получаясь нормами пространств D и $G(D, B)$, запишем аналогичные неравенства с вероятностью единица:

$$\|x(t, \omega)\|_D \leq c \cdot \|x_0(\omega)\|_D \cdot \exp \{a \cdot t + c \cdot \int_0^t \|A(s, \omega)\|_G \cdot ds\},$$

или

$$\|x(t, \omega)\|_D \leq c \cdot \|x_0(\omega)\|_D \cdot \exp \{a + c \cdot E \|A(0, \omega)\|_G\} \cdot t.$$

Так как $a < 0$, то при $E \|A(0, \omega)\|_G < \frac{|a|}{c}$ решение асимптотически устойчиво с вероятностью единица. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть линейный оператор A_0 удовлетворяет условиям а), б) или является ограниченным в B ; $A(t, \omega)$ — ограниченный из D в B стационарный эргодический операторный процесс второго порядка с непрерывной ковариацией), $\|e^{-A_0 t}\| \leq c \cdot e^{\alpha t}$;

$$\alpha < 0; \quad c > 0 \text{ и } E \|A(0, \omega)\|_G < \frac{|\alpha|}{c}.$$

Тогда решение АЗК асимптотически устойчиво с вероятностью единица.

Замечание. О представлении случайных обратных операторов с помощью операторантов

Пусть, как отмечалось в § 2, для некоторого ω -множества $\Delta(\alpha)$ существует обратный случайный оператор $U(\omega) = (I \cdot \alpha - L(\omega))^{-1} \cdot \alpha$, области определения операторов $L^n(\omega)$ не зависят от ω и для любого n

$$D(L^n) = D(L) = D \subseteq B.$$

Так как по определению $D(L^n)$ имеем $L^{n-1}x \in D$, то $U(\alpha, \omega)$ есть оператор, отображающий D в D , и, будучи замкнутым, ограниченным в D . Следовательно, имеет смысл рассматривать ряд:

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \cdot L^n(\omega),$$

который мы называем операторантом и обозначаем $\Omega(L)$, и соответствующий ему ряд случайных величин:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|^n} \cdot \|L(\omega)\|_D^n$$

Обозначим через $\epsilon_n = \frac{1}{|\alpha|^n} \cdot \|L(\omega)\|_D^n$

Эти случайные величины определены на исходном вероятностном пространстве (Ω, S, P) . Тогда из теорем о случайных рядах непосредственно получаются следующие утверждения:

а) если существует последовательность чисел $\epsilon_n > 0$; $n = 1, 2, 3, \dots$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\|L_n\| > \epsilon_n\} < \infty$, тогда операторант сходится с вероятностью единица в равномерной операторной топологии. В частности, это выполняется, если с вероятностью единица $\|L(\omega)\|_D < |\alpha|$;

б) предыдущее утверждение справедливо также, если

$$E\|L(\omega)\|_D < |\alpha|.$$

Для ω -множества $\Delta(\alpha)$ операторант в этих случаях совпадает с разрешающим оператором, и мы будем писать:

$$U(\alpha, \omega) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \cdot L^n(\omega); \quad \omega \in \Delta(\alpha).$$

В частности, если $L(\omega) = \int_0^t A(\omega, \tau) \cdot d\tau$, то для любого $\omega \in \Omega$ справедливо

$$\|L^n(\omega)\|_D \leq \frac{1}{n!} \left(\int_0^t \|A(\omega, \tau)\|_D \cdot d\tau \right)^n,$$

и следовательно, если с вероятностью единица $\|A(t, \omega)\|_D \leq C$, то такого рода операторант сходится с вероятностью единица в равномерной операторной топологии.

Пусть $X(D)$ или $X(B)$ — алгебра ограниченных преобразований $D \rightarrow D$ или $B \rightarrow B$. Если на них задана вероятностная мера μ , которая порождается мерой $K_\alpha(\omega)$, то можно говорить об условном распределении вероятностей:

$$\mu \{ (I\mu_0 - K_\alpha(\omega))^{-1} \in \Delta; (I\mu_0 - K_\alpha(\omega)) \in R \} = \\ \frac{\mu \{ (I\mu_0 - K_\alpha(\omega))^{-1} \in \Delta; (I\mu_0 - K_\alpha(\omega)) \in R \}}{\mu \{ (I\mu_0 - K_\alpha(\omega)) \in R \}} \cdot \left(\mu_0 = \frac{1}{\tau} \right),$$

134 Δ — множество регулярных элементов в X , имеющее в нашем случае положительную меру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гривандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М., «Мир», 1966.
2. Нанз О. Generalized random variables. Trans. Prague conf. Prague, 1957.
3. Нанз О. Random operator equations. Fourth Berkeley Symposium, 1961.
4. Иваниц Н. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М., «Наука», 1971.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., ГИТТЛ, 1954.
6. Зенффорд Н. и Шварц Дж.-Т. Линейные операторы (общая теория). «Иностранная литература», 1962.
7. Унаков В. И. Абстрактная задача Коши и теория возмущений замкнутого оператора. Саратов, Приволжск. кн. изд., 1966.
8. Красс С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
9. Като Г. Perturbation theory. Springer Verlag, 1966.
10. Канторович Л. В. и Акимов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматиздат, 1959.
11. Дубин М. Теория вероятностей. М., «Иностранная литература», 1962.
12. Гапо-Данилевский П. А. Теория функций от матриц и системы дифференциальных уравнений. М. — Л., ОНТИ, 1934.
13. Рисс Ф. и Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М., «Иностранная литература», 1954.
14. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., «Иностранная литература», 1962.

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИВАНОВ В. Н., кандидат физико-математических наук
(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

§ 1. Случайные почти-периодические операторы и их спектры

Пусть B_0 — сепарабельное банахово пространство, b_0 — σ -алгебра всех борелевских подмножеств в нем; (Ω, S, P) — вероятностное пространство с полной вероятностной мерой P . Введем пространства почти-периодических функций $x(t)$ со значениями в B_0 и нормой:

$$|x| = (M_t \{ \|x(t)\|_{B_0}^2 \})^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|x(t)\|_{B_0}^2 \cdot dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

или нормой $|x| = (\overline{M}_t \{ \|x(t)\|_{B_0}^2 \})^{\frac{1}{2}}$, которые будем обозначать $B_1(B_0)$ и $B_2(B_0)$ — соответственно. Они обладают всеми основными свойствами, присущими пространствам почти-периодических (п.п.) функций Бора или Безиковича, то есть средним значениям: рядом Фурье, равенством Парсеваля, теоремой Фавара и т. п.

П.п. пространства являются замыканиями линейала тригонометрических многочленов $\sum_{k=1}^n a_k \cdot e^{i\omega_k t}$, $\{a_k \in B_0, \omega_k \text{ — вещественные числа}\}$ в метрике $B_{1,2}(B_0)$.

Отображение $x(\omega)$ пространства Ω в пространство $B_{1,2}(B_0)$ назовем случайным элементом в $B_{1,2}(B_0)$ или п.п. процессом со значениями в B_0 , если $\{\omega : x(\omega) \in \Delta; \Delta \in b_{1,2}(B_0)\} \in S$; $b_{1,2}$ — σ -алгебра в $B_{1,2}$. Очевидно, что мера P порождает распределение μ на измеримом пространстве $(B_{1,2}(B_0), b_{1,2}(B_0))$, и в этом смысле п.п. процесс со значениями в B_0 есть распределение на $B_{1,2}(B_0)$.

Отображение $T(\omega)$ прямого произведения $\Omega \times D$, где D плотное в B_0 множество, называется случайным оператором в B_0 , если для

элемент $x \in D$ $T(\omega, x)$ является случайным элементом в B_0 аналогично указанному.

Изображение $T(t, \omega, \cdot)$ произведения пространств $\Omega \times D \times R^{(1)}$ в пространство $B_{1,2}(B_0)$ называется стохастическим почти-периодическим оператором, если для любого $x \in D[T, (t, \omega, x)]$ является случайным элементом в $B_{1,2}(B_0)$.

Известна предельная теорема Ганша, согласно которой $x(\omega)$ — случайный элемент в $B_{1,2}(B_0)$, если существует последовательность элементарных элементов в $B_{1,2}(B_0)$, сходящаяся почти-навстречу к изображению $x(\omega)$ пространства элементарных событий в пространстве $B_{1,2}(B_0)$.

Согласно другой теореме Ганша отображение $x(\omega)$ пространства Ω в $B_{1,2}(B_0)$ является случайным элементом в $B_{1,2}(B_0)$ тогда и только тогда, когда для каждого функционала $x^* \in B_0^*$ $x^*(x(\omega))$ является действительно значимым п.п. процессом в $B_{1,2}$ (со значениями в $R^{(1)} = (-\infty, +\infty)$).

Рассмотрим почти-периодический операторный процесс $A(t, \omega)$, определенный следующим образом:

$$\Lambda) A(t, \omega) = A_0 + \Delta A(t, \omega) \equiv A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) \cdot e^{i k t},$$

причем $A_0, A_1, A_2, \dots$ — линейные операторы с областью определения $D = B_0$, не зависящей от t, ω и плотной в сепарабельном банаховом пространстве B_0 . Показатели Фурье представляют собой расширение на сепарабельном метрическом пространстве S .

Пусть A_0 — замкнутый детерминированный оператор и для любого $x \in D$ ряд случайных величин

$$\|A_0 x\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k(\omega) x\|$$

сходится с вероятностью единица, в силу хотя бы одного из следующих двух достаточных условий:

1) Существует последовательность чисел $\{\varepsilon_n > 0\}$ так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\|A_n(\omega) x\| > \varepsilon_n\} < \infty;$$

2.

$\sum_{n=1}^{\infty} E \|A_n(\omega) x\| < \infty$; ($E \xi$ — математическое ожидание).

Эти условия выполняются, если имеются три таких постоянных $a > 0$; $b > 0$; $0 < p < 1$, что с вероятностью единица:

$$\|A_k(\omega)x\| \leq p^{k-1}(\alpha\|x\| + b\|A_0x\|), \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Тогда $A(t, \omega)$ будет случайным линейным оператором с областью определения $D \subset B_0$. Если дополнительно $(p+b) < 1$, то $A(t, \omega)$ окажется замкнутым с P вероятностью единица.

Если случайные величины $\|A_n(\omega)x\|$ независимы, то необходимое и достаточное условие почти-наверное сильной сходимости нашего ряда дается теоремой А. Н. Колмогорова о трех рядах.

Б) Пространство B_0 — также и топологическая алгебра. Значения $A(t, \omega)x$, $x \in D$ являются случайными элементами второго порядка в B_0 с непрерывной ковариацией, и существуют все моменты $E\|A_n(\omega) \cdot R(z, A_0)\|^r < \infty$.

В) Детерминированный оператор A_0 и оператор $A(t, \omega)$ при каждом $(\omega, t) \in \Omega \times R^{(1)}$ обладают дискретными спектрами с конечнократными собственными значениями, погруженными в резольвентные множества. Причем счетная последовательность покрытий спектра такова, что для проекторов $P_k(\omega, t)$ на соответствующие спектральные подпространства выполняется условие: $P_k(t, \omega) \rightarrow I$ (тождественный оператор); $(t, \omega) \in \Omega \times R^{(1)}$ при

$$k \rightarrow \infty \text{ и } P_k(t, \omega) = \sum_{r=1}^{m_k} P_{kr}(t, \omega).$$

Г) Ориентированные огибающие γ_n окрестностей собственных чисел оператора A_0 , а также числа p , a , b могут быть выбраны так, что

$$\left(p + \gamma_n + \frac{M_n \|z\|^{p-1}}{2\pi}\right) < 1, \quad (1.1)$$

где $|\gamma_n|$ — длина огибающей γ_n ; $\alpha_n = a \cdot M_n + b \cdot N_n$;

$$M_n = \max_{z \in \gamma_n} \|R(z, A_0)\|; \quad N_n = \max_{z \in \gamma_n} \| \cdot \|.$$

Тогда резольвента $R[z, A(t, \omega)]$ является почти-периодическим оператором, представимым рядом, сходящимся в равномерной операторной топологии с вероятностью единица:

$$\begin{aligned} R[z, A(t, \omega)] &= R(z, A_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) \cdot R(z, A_0) e^{i \cdot z \cdot k \cdot t} \right]^n = \\ &= R(z, A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z, \omega) \cdot e^{i \cdot z \cdot k \cdot t} : z \in \Gamma_{\omega} \end{aligned}$$

1. $B_k(z, \omega)$ — суммы произведений операторов $A_k(\omega) R(z, A_0)$, а

2. имеет вид $\delta_k = \sum_{j=1}^n m_j^k \cdot \Delta_j$, где m_j^k — целые. Действительно, так

как $\|A_n(\omega) R(z, A_0)\| \leq p^{n-1} \cdot \alpha_k$ (п. н.) и $(p + \alpha_k) < 1$, то написанный ряд в силу упомянутых в начале параграфа достаточных условий сходится с вероятностью единица в равномерной операторной топологии. А отсюда следует его измеримость и возможность разложить ряд по показателям δ_k так, как это делается, например, в рядах Фурье почти-периодических функций.

При сформулированных выше условиях (1.1) проектор $P_{\gamma_r}(t, \omega)$ на соответствующее γ_r спектральное подпространство

$$P_{\gamma_r}(t, \omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int R[z, A(t, \omega)] \cdot dz = P_{\gamma_r}^{(0)} + \Delta P_{\gamma_r}(t, \omega)$$

представляет собой также случайный почти-периодический оператор аналогичного вида, причем с вероятностью единица справедливо неравенство:

$$\|P_{\gamma_r}(t, \omega) - P_{\gamma_r}^{(0)}\| < 1.$$

Отсюда следует, что если $\lambda_k^{(0)} = m_k$ — кратное собственное число оператора A_0 , а $\gamma_k = C_{r_k}$ — круг радиуса r_k с центром в $\lambda_k^{(0)}$, целиком лежащий в резольвентном множестве $\rho(A_0)$, то с вероятностью единица возмущенные собственные значения $\lambda_{kj}(t, \omega)$; $j = 1, 2, \dots, r \leq m_k$ оператора $A(t, \omega)$ в числе не более m_k принимают свои значения внутри C_{r_k} . В простейшем случае, когда $m_k = 1$ (собственная и главная кратности единица) возмущенные собственные элементы можно представить в виде:

$$\varphi_k(t, \omega) = P_{\gamma_k}(t, \omega) \cdot \varphi_k^{(0)} = \varphi_k^{(0)} + \Delta P_{\gamma_k}(t, \omega) \varphi_k^{(0)}, \quad (1.2)$$

где $\varphi_k^{(0)}$ — невозмущенный собственный элемент оператора A_0 , соответствующий $\lambda_k^{(0)}$, а собственные числа определяются формулами:

$$\lambda_k(t, \omega) = \lambda_k^{(0)} + \frac{([A(t, \omega) - \lambda_k^{(0)} I] \cdot \varphi_k(t, \omega), \varphi_k^*)}{(\varphi_k(t, \omega), \varphi_k^*)} = f_k(t, \omega); \quad (1.3)$$

представляющими собой разложения почти-периодического процесса Гора (распределения на пространстве почти-периодических функций Гора). Собственные элементы $P_{\gamma_k}(\omega, t) \cdot \varphi_k^{(0)}$ — почти-периодический процесс в $B_1(B_0)$, то есть распределение на этом пространстве.

Фактическое построение вероятностных мер на рассматриваемых

пространствах, соответствующих собственным числам и элементам — трудная задача, решение которой возможно пока только в некоторых частных случаях.

Одним из таких является тот, когда оператор $\Delta A(t, \omega)$ зависит от конечного числа случайных параметров с известной плотностью их совместного распределения. Тогда, исходя из вида функции $I_k(t, \omega)$ и этой плотности, можно построить согласованное семейство конечномерных распределений. Наиболее общим способом задания рассматриваемого нами почти-периодического случайного оператора можно считать задание меры μ как произведения мер $\mu_1(B_0) \times \mu_s$, где $I_1(B_0)$ — множество элементов $\{A_k(\omega)x\} \subset B_0$

для которых $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k(\omega)x\| < \infty$,

а s — известное полное метрическое сепарабельное пространство числовых последовательностей.

Приведем простейшие примеры случайных почти-периодических операторов:

а) почти-периодические стохастические квадратные или одно-столбцовые матрицы;

б) случайные унитарные операторы $U_t(\omega) = e^{iH(\omega)t}$, порожденные случайным самосопряженным оператором с чисто дискретным простым случайным спектром $\{\lambda_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$.

Из условия (Б) следует, что для ограниченного конечномерного оператора $A_k(t, \omega) = A(t, \omega) \cdot P_k(t, \omega)^*$ имеет место сходимость к $A(t, \omega)$ в таком смысле:

$$\|A(t, \omega) - A_k(t, \omega)\|_{G(D, B_0)} \leq \|A(t, \omega)\|_{G(D, B_0)} \cdot \|I - P_k(t, \omega)\|_{G(D, B_0)} \rightarrow 0,$$

$k \rightarrow \infty$ (почти-навсегда), $G(D, B_0)$ — банахово пространство ограниченных операторов из D в B_0 . Заметим, что при каждом $\omega \in \Omega$ замкнутый оператор $A(t)$ может быть сделан ограниченным оператором из D в B_0 , если ввести норму $\|x\|_{(D, B_0)} = \|x\|_{B_0} + \|A_0 x\|_{B_0}$. Тогда D превращается в банахово пространство. Когда же операторы $A_k(\omega)$, $k=0, 1, 2, \dots$ ограничены, следует рассматривать также ряды более общего вида:

$$A(z, \omega) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) \cdot z^k; \quad E \|A_k(\omega)\|^n < \infty; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

* Оператор проецирования $P_k(t, \omega)$ является случайным почти-периодическим оператором в силу равенства: $P_k(t, \omega) = \sum_{r=1}^{m_k} P_{kr}(t, \omega)$ и свойства Γ , а поэтому $A_k(t, \omega)$ и также случайный п. п. оператор.

в которых z — комплексное переменное, а сумма ряда $A(z, \omega)$ представляет собой на каждом элементе $x_0 \in B_0$ аналитический почти-периодический случайный элемент.

В следующих параграфах рассмотрим абстрактную задачу Коши (АЗК) со случайным почти-периодическим оператором. Общие методы исследования решений АЗК со случайным оператором изложены в статье, помещенной в данном сборнике. Здесь мы используем эти методы. Подробности выкладок в некоторых случаях опускаются, так как их можно найти в упомянутой статье. Заменяя случайный оператор задачи и начальное условие математическими ожиданиями, получим АЗК с детерминированными данными — так называемое уравнение регрессии. Условия разрешимости детерминированных задач Коши, выраженные в спектральных признаках, изложены ранее [7]. Исходные пространства $B_{1,2}(B_0)$ будут в дальнейшем обозначаться также и в виде $B_0 \times B_{1,2}$.

Из вышеуказанной работы используем здесь важное понятие операторанта в пространствах $B_0 \times B_{1,2}$:

$$\Omega_t^{\varepsilon}(A) = I + \sum_{n=1}^{\infty} L^n,$$

$$L = \int_0^t A(t, \omega) dt.$$

В случае полиномиального оператора $A(z) = \sum_{k=1}^n A_k \cdot z^{\Delta_k}$ мы подробно исследовали вид этого операторанта в упомянутой выше брошюре. В частности, если все показатели $\Delta_k = \kappa$ — целые, из него выделяется показательный множитель при условии, что интегральная подстановка в любой точке допускает представление:

$$V(z_0) = \int [I + A(z) dz] = e^{2\pi i W(z_0)},$$

где $W(z_0)$ — линейный оператор. Это условие эквивалентно условию одной из теорем Х. Массера и Х. Шеффера (т. 4, стр. 390, 111 А).

§ 2. АЗК с почти-периодическим оператором. Исследование решений уравнения регрессии

Рассмотрим АЗК

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \omega) \cdot x; \quad x(0) = x_0(\omega), \quad (2.1)$$

в которой случайный оператор $A(t, \omega)$ удовлетворяет условиям А), Б), В), Г) предыдущего параграфа, за исключением спектри показателей Фурье, предполагающегося не случайным фиксированным числовым множеством $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Эквивалентное задаче (2.1) интегральное уравнение в пространстве $C[B_0, R^{(1)}]$ функций со значениями в B_0 , непрерывных на $R^{(1)}$ запишем так:

$$[I - (L_0 + V(\omega))]x = x_0; \quad L(\omega) = L_0 + V(\omega),$$

$$\text{где } L_0 = \int_0^t A_0 dt; \quad V(\omega) = \int_0^t \Delta A(t, \omega) dt.$$

Пусть $1 \in \rho(L_0)$, то есть существует резольвента $R(1, L_0)$ оператора L_0 в точке $z=1$; $\Delta_1 = \{\omega : \|V(\omega) \cdot R(1, L_0)\| < 1\} \in s$; $P(\Delta_1) = 1$. Тогда для $\omega \in \Delta_1$ разрешающим оператором задачи (2.1) является резольвента оператора $L(\omega)$ в точке $z=1$:

$$R(1, L(\omega)) = R(1, L_0) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [V(\omega) \cdot R(1, L_0)]^n.$$

Следуя методу § 1, построим последовательность АЗК в конечномерных пространствах

$$\frac{du_n}{dt} = A_n(t, \omega) \cdot u_n; \quad u_n(0, \omega) = x_0(\omega) \quad (2.2)$$

и последовательность соответствующих им уравнений регрессии

$$\frac{d\bar{u}_n}{dt} = \bar{A}_n(t) \cdot \bar{u}_n; \quad \bar{u}_n(0) = E x_0(\omega); \quad \bar{A}_n(t) = E A_n(t, \omega), \quad (2.3)$$

в которых $\bar{A}_n(t)$ — конечномерные почти-периодические операторы.

$$\text{Пусть } \bar{A}^{(0)} = M_t \{ \bar{A}_n(t) \}; \quad \Delta \bar{A}_n = \bar{A}_n(t) - \bar{A}^{(0)}.$$

Тогда установленные в [7] свойства оператора $\Delta \bar{A}_n$ позволяют записать решение уравнения регрессии:

$$u_n(t) = e^{\bar{A}^{(0)} \cdot t} \cdot \mathcal{Q}_0^t \left\{ e^{-\bar{A}^{(0)} \cdot t} \cdot \Delta \tilde{A}_n(t) \cdot e^{\bar{A}^{(0)} \cdot t} \right\} \cdot E x_0(\omega) = R(1, \tilde{L}_n) \cdot E x_0(\omega). \quad (2.4)$$

Аналогично можно записать решения случайных уравнений (2.2), если вместо $\Delta \bar{A}_n$ взять $\Delta A_n(\omega) = A_n(t, \omega) - \bar{A}^{(0)}$ и вместо $E x_0$ x_0 , то

где $u_n(t, \omega) = R(1, L_n(\omega)) \cdot x_0$. Показательная функция в конечномерном подпространстве имеет следующее разложение:

$$e^{A_n^{(0)} t} = \sum_{\lambda \in \sigma(A_n^{(0)})} \sum_{\tau=0}^{v(\lambda)-1} \left\{ \frac{(A_n^{(0)} - \lambda \cdot I)^\tau}{\tau!} \cdot t^\tau \right\} \cdot e^{\lambda t} \cdot E(\lambda) \quad (2.5)$$

[А, стр. 599], где $E(\lambda)$ — проектор на спектральное подпространство, соответствующее собственному значению λ . С помощью правой части этой формулы можно уточнить вид решения для $u_n(t, \omega)$. Мы не осуществим ниже для уравнений с ограниченными и матричными операторами.

Известно, что между всеми линейными ограниченными операторами в конечномерном пространстве и квадратными матрицами существует изоморфизм $A_k(t) \cdot x_j^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}^{(k)}(t) \cdot x_i^{(n)}$ в произвольной координатной системе $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$, сохраняющий сумму, умножение на скаляры, произведения, 0 и 1. В этом изоморфизме почти-периодический конечномерный оператор $A_n(t)$ представляется почти-периодической квадратной матрицей $[a_{ij}^{(n)}(t)]_{i,j=1}^n$.

Из [1] показано, что с вероятностью единица оператор

$$V_n(\omega) = \int_0^t [A(t, \omega) - A_n(t, \omega)] \cdot dt$$

равномерно сходится к аннулирующему оператору в каждом конечном интервале $(0, t)$. Тогда, исходя из очевидного неравенства:

$$\|R(1, L(\omega)) - R(1, L_n(\omega))\| \leq \frac{\|V_n(\omega) \cdot R(1, L(\omega))\|}{1 - \|V_n(\omega) \cdot R(1, L(\omega))\|}, \quad (2.6)$$

можно записать разрешающий оператор задачи как почти-наверное верно в равномерной операторной топологии:

$$R(1, L(\omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(1, L_n(\omega)) \quad (2.7)$$

равномерно в каждом конечном интервале изменения t).

Последующий вид разрешающего оператора уравнения регрессии, соответствующего задаче [2, 1], предполагая, что $A(z)$ — ограниченная в B_0 аналитическая почти-периодическая операторная функция. Причем черту сверху опустим.

Приближенные результаты будут справедливы в определенном вероятностном смысле и для уравнения со случайным ограниченным

оператором такого же вида. Заметим, что рассмотрение уравнения регрессии позволяет избежать ненужных усложнений при выяснении чисто аналитических конструктивных вопросов (уравнения регрессии рассмотрены в статьях [7], [8], [9], [10], [11]). Таким образом, мы свели АЗК с неограниченным п.п. случайным оператором к АЗК с конечномерным случайным оператором, а последнюю — к линейной системе дифференциальных уравнений с матрицей почти-периодических коэффициентов (процессов). В связи с этим исследуем в дальнейшем АЗК с ограниченным аналитическим п.п. случайным оператором вида $A(z, \omega) = \sum_{k=1}^m A_k(\omega) \cdot z^{\lambda_k}$ (λ_k — действительные числа, среди которых могут быть и отрицательные), то есть задачу

$$\frac{dx}{dz} = A(z, \omega) \cdot x; \quad x(z_0) = x_0(\omega). \quad (2.8)$$

Для соответствующего ей уравнения регрессии

$$\frac{dx}{dt} = A(z) \cdot x; \quad x(z_0) = E x_0(\omega); \quad E A_k(\omega) = A_k;$$

$$\tilde{A}(z) = \sum_{k=1}^m A_k \cdot z^{\lambda_k}$$

[7, стр. 46] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение регрессии с ограниченной аналитической п.п. оператор-функцией $A(z)$ имеет разрешающий оператор

$$\text{вида: } \Omega_{z_0}^z(\tilde{A}(z)) = I + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} A_{k_1} \cdot A_{k_2} \cdot \dots \cdot A_{k_m} \cdot L_{(z, z_0)}^{(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_m})},$$

где $L_{(z, z_0)}^{(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_m})}$ указаны в [11], и ряд равномерно по модулю z сходится в равномерной операторной топологии в области $G_0(z = re^{i\varphi})$: $r_1 \leq r \leq r_2$; $-\alpha < \varphi < \alpha < \infty$. Если же λ_k — целые и существует логарифм $\ln V(z_0)$ — интегральной подстановки, то

$$\Omega_{z_0}^z(\tilde{A}(z)) = Z(z) \cdot z^H \cdot X^{-1}(z_0),$$

где операторы Z , H и X^{-1} определены в [7] и [11]. Положив в этих формулах $z = e^{it}$, получим результат, относящийся к почти-периодическим операторам уже рассмотренного в пункте А) § 1 вида.

Теорема 1 без существенных изменений переносится на тот случай, когда $A(z)$ есть сумма бесконечного ряда с конечным числом отрицательных степеней λ_k .

В работах [8], [9], [10], [11] было рассмотрено уравнение регрессии в виде матричного $(n \times n)$ уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = P(t) \cdot X; \quad X(0) = E,$$

где $P(t) = A_0 + \sum_k A_k e^{i\lambda_k t}$ — матрица п.п. функций Бора. Системы такого рода мы отнесли к двум типам:

а) к первому, если для любых целых m_k : $\sum_k^R m_k \lambda_k \neq 0$; $A_0 = 0$; если же $A_0 \neq 0$, то для любых целых m_k : $|\sum_{k=1}^R m_k \lambda_k + i \operatorname{Im}(\mu_k - \mu_s)| > \alpha > 0$; где $\{\mu_s\}$ — спектр матрицы A_0 ;

б) ко второму, если $A_0 \neq 0$; $|\sum_{k=1}^R m_k \lambda_k + i \operatorname{Im}(\mu_k - \mu_s)| > \alpha \geq 0$; m_k — целые, а μ_s — числа спектра A_0 и существует конечное или счетное множество таких линейных комбинаций, обращающихся в нуль. Для матричного уравнения доказана другая теорема.

Теорема 2. Для систем 1-го типа существует решение в виде:

$$\Omega'_0(P(t)) = Q(t) \cdot Q^{-1}(0); \quad (A_0 = 0)$$

$$\text{или } \Omega'_0(P(t)) = Q(t) \cdot e^{A_0 t} \cdot Q^{-1}(0); \quad (A_0 \neq 0),$$

где $Q(t)$ — п.п. матрица Бора, представляемая в виде абсолютного равномерно сходящегося ряда п.п. матриц.

Для уравнений 2-го типа $Q(t)$ представляет собой сумму ряда по степеням t с п.п. матрицами-коэффициентами. Целью следующего параграфа является доказательство теоремы 3.

Теорема 3. Случайное уравнение (2.8) при условии

$$\lambda_k + 1 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^R \lambda_{kj} + R \neq 0; \quad (R - \text{целые})$$

имеет решение со случайным почти-периодическим разрешающим оператором вида (3.2), когда p достаточно мало. Если случайные операторы $\{A_k(\omega)\}$ и $x_0(\omega)$ зависят от конечного числа случайных параметров с известной плотностью совместного распределения, то почти-периодический процесс — решение АЗК — полностью характеризуется согласованным множеством конечномерных распределений. В частности, для матричного уравнения, если известна плотность совместного распределения параметров и начальных значений, плотность распределения почти-периодических решений системы может быть представлена формулами (3.7), (3.9).

В этом же параграфе уточнен вид ковариационного оператора и

исследован случай независимости и одинаковой распределенности оператор-коэффициентов $A_k(\omega)$. Аналогичные результаты доказываются и в § 4 для линейного неоднородного уравнения.

§ 3. Однородное случайное уравнение. Почти-периодические процессы как решения задачи Коши

Рассмотрим теперь случайные уравнения, для которых в статьях [8]—[11] исследованы уравнения регрессии.

Легко видеть, что задача § 2 может быть обобщена на случай неограниченных замкнутых операторов A_k в B_0 , которые определены и имеют область значений в $D \subseteq P_0$. Действительно, в силу замкнутости их можно считать ограниченными в D (как банаховом пространстве) операторами, тогда все результаты § 2 будут верны и в этом более общем случае.

Для конструктивного построения решения случайного уравнения есть теперь два метода. Первый состоит в том, что в решении уравнения регрессии § 2 оператор-коэффициенты A_k заменяются случайными операторами $A_k(\omega)$ и полученные ряды, в силу стохастического варианта банаховской теоремы о неподвижной точке, будут сходиться с вероятностью единицы в равномерной операторной топологии пространства B_0 (или D) к разрешающему оператору АЗК (конечно, при выполнении условий, обеспечивающих в соответствующем интегральном уравнении оператор сжатия). Второй метод состоит в построении разрешающего оператора в форме резольвенты возмущенного оператора, причем за невозмущенный оператор принимается оператор уравнения регрессии. Ограничимся случаем, когда решение уравнения есть п.п. процесс. Когда $A(z)$ — полиномиальный оператор, условия существования п.п. процесса будут иметь вид:

$$\lambda_k + 1 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^m \lambda_{kj} + m \neq 0; \quad k_j, m, k=1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.1)$$

Само решение для любого случайного элемента $x_0(\omega) = x(0, \omega)$ при $z = e^{it}$ можно представить так:

$$x(t, \omega) = \left\{ I + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} A_{k_1}(\omega) \cdot A_{k_2}(\omega) \cdot \dots \cdot A_{k_m}(\omega) \cdot x_0(\omega) \right] \cdot \right. \\ \left. e^{i \left(\sum_{j=1}^m k_j \right) t} \right\} \quad (3.2)$$

Распределение этого процесса характеризуется в силу § 1 распределением всей совокупности его коэффициентов:

$$c_k(\omega) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} A_{k_1}(\omega) \cdot A_{k_2}(\omega) \cdot \dots \cdot A_{k_m}(\omega) \cdot x_0(\omega);$$

$$k=1, 2, \dots,$$

как случайного элемента в $l_1(B_0)$. Но распределение в $l_1(B_0)$ как в n -мерном пространстве определяется последовательностью конечномерных распределений $\{c_1(\omega); c_2(\omega); \dots; c_n(\omega)\}$. Конечномерные же распределения такого вида полностью характеризуют теоретико-вероятностную структуру процесса:

$$x_k(t, \omega) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot e^{i \lambda_k t},$$

так как конечномерные распределения последнего могут быть вычислены, исходя из данной формулы и совместного распределения коэффициентов $c_k(\omega)$.

Для завершения рассуждений о существовании распределения на $B_0 \subset B_1$ достаточно вспомнить, что ряд справа в формуле (3.2) в силу стохастического варианта банаховской теоремы о неподвижной точке сильно сходится с вероятностью единица и ряд для разрешающего оператора также сходится с вероятностью единица в равномерной операторной топологии пространств D или B и представляет собой почти-периодический операторный процесс на произведении $G(D, D) \times B_1$ или $X(B_0) \times B_1$, если p достаточно мало.

Итак, получая случайный процесс в виде оператора или мультипликативного интеграла и предполагая, что операторные коэффициенты $A_k(\omega)$ зависят от конечного числа случайных параметров, для которых известно совместное распределение, всегда можно вычислить обычные конечномерные распределения процесса. Рассмотрим некоторые частные случаи этих распределений. Пусть

$$y_m = \prod_{k=1}^m \|y_{k, \lambda}\|,$$

$$\Delta_m = \sum_{k=1}^m \lambda_{k, \lambda} + m; \quad a_k = E \ln \|A_{k, \lambda}\|; \quad b_k = \sigma^2(\ln \|A_{k, \lambda}\|);$$

$A_{k, \lambda}$ существуют на основании предположения Б) § 1, а случайные величины $\|A_{k, \lambda}\|$ независимы в совокупности и одинаково распределены, то есть $a_k = a; \lambda_k = b; k=1, 2, \dots;$

$$E_{y_m} = (E \|A_{k, \lambda}\|)^m.$$

Тогда случайная величина

$$\frac{\ln y_m - m \cdot a}{\sqrt{m \cdot b}} \quad (3.3)$$

асимптотически нормальна и можно ожидать, что y_m имеет порядок e^{ma} .

Предположения, сделанные об операторе задачи, обеспечивают существование и непрерывность по t, t' ковариаций

$$R_x(t, t') = Ex(t, \omega) \cdot \overline{x(t', \omega)} = \sum_{k, s} E[C_k(\omega) \cdot \overline{C_s(\omega)}] \cdot e^{i(\lambda_k t - \lambda_s t')}.$$

Если $E[C_k(\omega) \cdot \overline{C_s(\omega)}] = \theta$ (θ — нуль в банаховом пространстве B_0 , которое вместе с тем и топологическая алгебра числовых функций) для $k \neq s$, то ковариация — почти-периодическая функция аргумента $\tau = t - t'$. А при дополнительном условии $Ec_k(\omega) = 0$ п.п. процесс будет стационарным. В этом последнем случае, когда нуль есть точка спектра процесса, $Ex(t, \omega) = M_t[x(t, \omega)]$. Предположим, что операторы $A_k(\omega)$ — случайные конечные $(n \times n)$ матрицы и система уравнения регрессии 1-го типа (или выполнены условия существования п.п. (решения с неслучайными показателями Фурье), тогда построенный п.п. процесс — решение случайного уравнения в теоретико-вероятностном смысле — полностью определяется совместным распределением конечногo числа случайных величин — коэффициентов, образующих матрицы $A_k(\omega)$.

Плотность распределения п.п. интегралов (процессов) как решений системы может быть получена следующим общим методом.

Запишем систему линейных уравнений:

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{kj}(t, \omega) \cdot y_j = f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$$

$$y_k(0) = y_k^{(0)}; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — случайные параметры, являющиеся коэффициентами почти-периодических процессов $A_{kj}(t, \omega)$. Для (3.4) известна совместная плотность вероятности $p_0(y_1^{(0)}, \alpha_j)$ системы начальных значений и параметров. Тогда совместная плотность вероятности $P(y_k, \alpha_j, t)$ интегралов системы (3.4) есть решение уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial (f_k \cdot p)}{\partial y_k} = 0. \quad (3.5)$$

Пусть система (3.4) имеет п.п. интегралы:

$$y_k = \varphi_k(t, \alpha_j, y^{(0)}); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Искомая плотность может быть получена в результате интегрирования уравнения (3.5):

$$p(t, y_1, \alpha_i) = p_0 [\varphi_k(x_0, t, y_j), x_k] \cdot \exp \left[- \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_j} \cdot d\tau_j \right], \quad (3.7)$$

$$y_j = \varphi_j(\tau, x_0, \varphi_k(x_0, t, y_k)); \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Так как интегралы системы в § 3 построены в виде рядов, то, исходя из известных фактов относительно плотности, возможно получить тот же результат и непосредственно. Действительно, решение уравнений (3.6) относительно $y_j^{(n)}$ выражается при помощи тех же функций φ_k :

$$y_j^{(n)} = \varphi_j(t_0, x_0, t, y_k); \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Поэтому:

$$p(y_1, \dots, y_n, t) = p_0 [z_j(t_0, x_0, t, y_k); \alpha_i] \cdot \left| \frac{\partial [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]}{\partial [y_1, y_2, \dots, y_n]} \right|. \quad (3.9)$$

Вместо $y_k^{(0)}$ в якобиане следует взять правые части формул (3.8).

В связи со сказанным в начале данного параграфа о сведении задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений легко видеть, что переход от нашей системы к общему случаю АЗК и переход от полиномиальных операторов задачи А(т, ω) к общему случаю связаны с предельным переходом в распределениях P_n , построенных с помощью вышеуказанных плотностей $P_n(y_k, \alpha_i, t)$. Но для слабой сходимости таких распределений P_n необходимо и достаточно, чтобы меры P_n были равномерно компактны и сходились соответствующие им преобразования Фурье для всех функционалов из сопряженного пространства B'_1 . Известны также и некоторые достаточные условия для такой сходимости [1], [4]. В каждом конкретном случае необходимо проверять и обеспечивать их выполнение.

Второй метод построения решения случайного уравнения рассмотрен подробно в статье «АЗК со случайным оператором» данной сборника. Там получено решение в форме ряда:

$$x(t, \omega) = X(t, \omega) + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}^n(\omega) \right] \cdot X(t, \omega),$$

$$R(\omega) = R(1, L_0) \cdot V(\omega); \quad X(t, \omega) = R(1, L_0) \cdot x_0.$$

С помощью второго метода можно рассмотреть более общую задачу, когда оператор $A(t, \omega)$ задан как распределение на $l_2(B_0) \times S$ в том смысле, что совместные распределения любых конечномерных распределений $l_2^n(B_0) \times S^n$ образуют компактное непрерывное семейство со сходящимися преобразованиями Фурье. Тогда по этим

конечномерным распределениям могут быть вычислены обычные конечномерные распределения решений АЗК с полиномиальным оператором.

Завершающий предельный переход позволяет построить распределение исходной задачи на основе теоремы о необходимом и достаточном условии слабой сходимости.

Простейшим примером АЗК, решением которой является п.п. процесс, служит задача Коши для уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \cdot \psi, \quad \psi(x, 0) = f(x), \quad (3.10)$$

где H — одномерный самосопряженный в L_2 оператор со случайной потенциальной энергией, а $\hbar$ — постоянная Планка. Решение ее, как известно, имеет вид:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi, t) f(\xi) d\xi$$

где ядро оператора представимо абсолютно сходящимся с вероятностью единица рядом:

$$K(x, \xi, t) = \sum_n \psi_n^{(0)}(\xi) \cdot \psi_n^{(0)}(x) e^{-\frac{E_n \cdot t}{\hbar}},$$

причем $\psi_n(x)$ и E_n суть собственные элементы и числа оператора H , то есть $H\psi_n^{(0)} = E_n \psi_n^{(0)}$. Это решение можно записать в виде почти-периодического процесса:

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \cdot \psi_n^{(0)}(x) \cdot e^{-\frac{E_n \cdot t}{\hbar}}, \quad (3.11)$$

в котором собственные элементы ψ_n , собственные числа E_n и коэффициенты c_n — случайные величины и элементы. Распределение их и представление формулами теории возмущений мы изучали в § 1.

Ковариация решения, как мы видели выше, представляет собой двояко почти-периодическую функцию, непрерывную по обеим переменным на всей оси.

Пусть $EH(\omega) = H_0$ — математическое ожидание оператора $H(\omega)$, обладающее простым (однократным) дискретным спектром $\{E_n^{(0)}\}$ и $\{\psi_n^{(0)}\}$ — соответствующая последовательность собственных элементов. Рассуждая аналогично § 1, запишем для собственных чисел и элементов оператора формулы:

$$E_n(\omega) = E_n^{(0)} + \frac{[(H(\omega) - E_n^{(0)}) \psi_n^{(0)}(\omega); \varphi_n^{(0)}]}{(\psi_n^{(0)}(\omega), \varphi_n^{(0)})} = f_n(\omega);$$

$$\varphi_n^{(0)}(\omega) = \varphi_n^{(0)} + \Delta P_{\gamma_n}(\omega) \cdot \varphi_n^{(0)}; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Из распределения выражаются через вероятностные характеристики оператор $H(\omega)$. Наиболее просто распределения конечных совокупностей $\{E_1(\omega), E_2(\omega), \dots, E_n(\omega)\}; \{C_1\varphi^{(0)}(\omega), \dots, C_n\varphi^{(0)}(\omega)\}$ могут быть получены, когда оператор $H(\omega)$ зависит от конечного числа случайных параметров с известной плотностью совместного распределения.

В последнем случае может быть вычислен характеристический функционал решения уравнения Шредингера или согласованные моменты конечномерных распределений.

§ 4. Линейные неоднородные уравнения и п.п. процессы

Рассмотрим теперь условия существования п.п. процессов как решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений в сепарабельном банаховом пространстве B_0 :

$$\frac{du}{dt} = A(t, \omega)u + f(t, \omega); \quad u(0, \omega) = u_0; \quad (4.1)$$

$$u_0 \in D(A(t, \omega)); \quad f(t, \omega) \in D(A(t, \omega)),$$

где $A(t, \omega)$ — операторный п.п. процесс, удовлетворяющий условию, сформулированным в конце § 1, а $f(t, \omega)$ — п.п. процесс в $B_0 \times H^{(n)}$.

Переходя к соответствующему интегральному уравнению:

$$[I - (L_0 + V(\omega))] \cdot u = u_0 + F, \quad (4.2)$$

$$L_0 = \int_0^t E A(\tau, \omega) \cdot d\tau; \quad V(\omega) = \int_0^t [A(\tau, \omega) - E A(\tau, \omega)] \cdot d\tau,$$

$$F = \int_0^t f(\tau, \omega) \cdot d\tau,$$

находим его решение:

$$u(t, \omega) = R(1, L_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [V(\omega) \cdot R(1, L_0)]^n (u_0 + F); \quad (4.3)$$

$$\omega \in \Delta; \quad \mu(\Delta) = 1; \quad \Delta = \{\omega : \|V(\omega) \cdot R(1, L_0)\| < 1\} \in s.$$

Если выполнены условия существования п.п. решения уравнения (4.2) и для соответствующего однородного уравнения $u(t) = R(t, L_0) \cdot u_0$ и $V(\omega)$ — п.п. операторный процесс, то в силу сходи-

мости ряда Неймана в равномерной операторной топологии (с вероятностью единица) ряд (4.3) будет представлять собой операторный п.п. процесс. При условии, что F — п.п. процесс в $B_0 \times B_1$, решение (4.3) окажется п.п. процессом. В общем случае установить его вероятностные характеристики, как мы уже видели в § 1, можно только в рамках корреляционной теории.

Но когда оператор возмущения $V(\omega)$ зависит от конечного числа случайных параметров, для которых известна совместная плотность распределения, можно построить конечномерные распределения процесса. Если же эти случайные параметры независимы, входят в оператор $V(\omega)$ (линейно) и имеют нормальное распределение, то первое приближение решения:

$$u^{(1)}(t, \omega) = [R(1, L_0) + R(1, L_0) \cdot V(\omega) \cdot R(1, L_0)] \cdot (u_0 + F)$$

будет также распределено нормально при условии, что u_0 и F — детерминированные (неслучайные) элементы в B_0 . В этом случае параметры нормального распределения легко определяются и можно построить плотность конечномерных распределений первого приближения.

Более подробно исследуем вышеуказанную схему на двух частных случаях. Во-первых, рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений, записанную в матричной форме как уравнение (4.1), где

$$A(t, \omega) = \sum_k A_k(\omega) \cdot e^{i k t}$$

квадратная, $(n \times n)$, а $f(t, \omega) = \sum_k B_k \cdot e^{i k t}$ — одностолбцовая матрицы, составленные из п.п. процессов Бора, с фиксированными неслучайными спектрами показателей Фурье и случайными коэффициентами, конечномерные совокупности которых имеют известные плотности распределений.

Пусть

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y + f(t) \quad (4.4)$$

соответствующее (4.1) уравнение регрессии. Выясним условия существования у него п.п. решения.

Обозначим через $\{\mu_s\}$ — спектр показательной матрицы k в § 2 или матрицы $A = M_t \{P(t)\}$ в § 3. В этих параграфах показано, что соответствующая система имеет интегральную матрицу: $x(t) = Q(t) \cdot e^{k t}$. Допустим, что матрица $Q(t)$ выходит почти-периодической по Бору. (Соответствующие условия указаны в § 3.) Тогда в силу неособенности матрицы $Q(t)$ обратная к ней матрица $U(t) = Q^{-1}(t)$ также будет почти-периодической по Бору. Решени-

матрица Коши для уравнения регрессии, как известно, является нижней треугольной матрицей вида:

$$y(t) = Q(t) \cdot e^{k \cdot t} \cdot [y_0 + \int_0^t e^{-k \cdot \tau} \cdot u(\tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau].$$

В частности, если $y_0 = 0$, то

$$y(t) = Q(t) \cdot e^{k \cdot t} \cdot \int_0^t e^{-k \cdot \tau} \cdot u(\tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau.$$

Это решение будет почти-периодической матрицей в следующих случаях: а) $\text{Re } p_s \neq 0$; $s=1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Обозначим через $\varphi_s(t) = \sum_{j=1}^n u_{sj}(t) \cdot f_j(t)$ элементы матрицы $U(t) \cdot f(t)$ и через n_k кратность собственного числа p_k матрицы k . Тогда для элементов одностробцовой матрицы под знаком интеграла в соответствии с § 3 получим (при $\text{Re } p_k < 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{\tau=0}^{n_k-r} \varphi_{\tau}^{(r)} \cdot \frac{t^{\tau}}{\tau!} \cdot e^{-p_k \cdot t} \cdot d\tau &= \sum_{\tau=0}^{n_k-r} \sum_{s=0}^{\tau} \varphi_{\tau-s}(t) \cdot \frac{t^s}{s!} \cdot e^{-p_k \cdot t} = \\ &= \sum_{\tau=0}^{n_k-r} \psi_{\tau}(t) \cdot \frac{t^{\tau}}{\tau!} \cdot e^{-p_k \cdot t}; \quad (1 \leq r \leq n_k), \end{aligned}$$

где $\psi_{\tau}(t)$ — суммы п. п. функций $\varphi_{\tau-s}(t)$, полученных после интегрирования

$$\int_0^t e^{-k \cdot \tau} \cdot u(\tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau = e^{-k \cdot t} \cdot \psi(t), \quad \text{где}$$

$\psi(t)$ — п.п. одностробцовой матрица. Решение системы получим теоретически в виде п.п. матрицы $y(t) = Q(t) \cdot \Psi(t)$;

б) $k = i \cdot W$ или $k = i \cdot A = M, \{P(t)\}$ — чисто мнимая матрица простой структуры с мнимыми простыми собственными числами и

$$|\sum_{j=1}^n \lambda_k + \Delta_s - i m \cdot p_j| > \alpha > 0, \quad m, s = \overline{1, \infty}; \quad j = \overline{1, 2, \dots, r} \leq n.$$

Действительно, в этом случае под знаком интеграла оказывается п.п. матрица Бора, для элементов которой выполнены условия известной теоремы Фавара об условиях почти-периодичности интеграла;

в) пусть среди чисел $\{p_s\}_1^n$ есть группы нулевых и чисто

минимых, каждому из которых соответствует в интегральной матрице число групп решений, равное их кратностям. Тогда для существования у системы (4.4) почти-периодической матрицы решения $u(t)$ достаточна ограниченность соответствующих им интегралов в матрице:

$$\int_0^t e^{-h \cdot \tau} \cdot u(\tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

или выполнение неравенств случая б).

Доказательство следует из известных условий почти-периодичности интегралов от п.п. функций Бора и предыдущих замечаний.

Рассмотрим далее исходное случайное уравнение в предположении, что $f(t)$ и u_0 — детерминированные (неслучайные) матрицы. В соответствии с указанной в начале данного параграфа схемой мы уже имеем нормированную интегральную матрицу (случай б)):

$$R(1, L_0) = Q(t) \cdot e^{t \cdot W \cdot t} \cdot Q^{-1}(0).$$

Тогда решение случайного уравнения представимо рядом

$$u(t, \omega) = R(L_0, 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \{V(\omega) \cdot R(1, L_0)\}^n \cdot (u_0 + F). \quad (4.5)$$

В силу предположения $|\lambda_k| > \alpha > 0$; $\kappa = \overline{1, \infty}$ матрица

$$V(\omega) = \int_0^t [A(t, \omega) - EA(t, \omega)] \cdot dt$$

состоит из п.п. процессов, поэтому в фигурных скобках также будет матрица п.п. процессов. Если же для матрицы $V(\omega)$ выполняются условия малости случайных возмущений так, что почти-навсегда

$$\|V(\omega)\| < \{\|Q(t) \cdot e^{t \cdot W \cdot t} \cdot Q^{-1}(0)\|\}^{-1}, \quad (4.6)$$

то ряд (4.4) будет почти-навсегда сходящимся в равномерно операторной топологии, а его сумма — матрицей почти-периодических процессов.

Первое приближение к решению $u^{(1)}(t, \omega)$ линейно зависит от матрицы $V(\omega)$. Поэтому ее математическое ожидание в силу условия $\Delta_k > \alpha > 0$ при неслучайных $u_0 + F$ будет представлять собой п.п. матрицу. В случае когда матрица $V(\omega)$ составлена из тригонометрических полиномов, коэффициенты которых независимы в совокупности и имеют нормальное распределение, коэффициенты в разложении первого приближения также выйдут нормально распределенными.

В качестве второго примера можно взять краевую задачу для линейного параболического уравнения:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{|k| \leq 2m} a_k(x, \omega) \cdot D^{(k)} + f(x, t); \quad (x \in G; t > 0); \quad (4.7)$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ (п.н.) ($u_0(x)$ — неслучайная функция из $C^{(\infty)}$) и граничными условиями:

$$u \Big|_r = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_r = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} \Big|_r = 0.$$

Здесь $D^{(k)} = \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x, \omega, t)$ — п.п. процесс с непрерывной ковариацией, все реализации которого бесконечно дифференцируемы по x (то есть распределение на $C^\infty \times B_1$; $z_k(x) = E z_k + z_k(\omega, x)$ — действительные случайные функции, распределенные на $C^{(\infty)}$ с непрерывными ковариациями, а n — нормаль к Γ).

Оператор $A(\omega)$ соответствующей абстрактной задачи Коши можно рассматривать, например, как замкнутый в $L_2(G)$ оператор, определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих граничным условиям. Предположим, что для соответствующего ему оператора $L_0 = \int_0^t E A(\omega) dt$ и случайного оператора возмущения $V(\omega)$, линейно зависящего от $a_k(\omega, x)$, выполняется условие:

$$\mu \{ \omega : \| V(\omega) R(1, L_0) \| < 1 \} = 1.$$

Тогда решение АЗК представимо формулой (4.3).

В двух нижеследующих предположениях можно получить вероятностные характеристики первого приближения:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, t, \omega) &= \{ R(1, L_0) + R(1, L_0) \cdot V(\omega) \cdot R(1, L_0) \} \cdot (u_0 + F) = \\ &= u_{1,0}(x, t, \omega) + u_{1,1}(x, t, \omega). \end{aligned}$$

Здесь $a_k(x, \omega)$ — независимые нормально-распределенные случайные элементы в $C^{(\infty)}$, а $f(t)$ — неслучайная п.п. функция Гаври. В силу вышеуказанных обозначений и условий имеем:

$$E u^{(1)}(t, x, \omega) = R(1, L_0) \cdot (u_0 + F) = m(t),$$

$$\rho_{ij}(t) = E \{ u^{(1)}(x_i, t) \cdot u^{(1)}(x_j, t) \}.$$

Тогда n -мерное совместное распределение первого приближения будет нормальным с плотностью:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} B^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2B} \sum_{k, l=1}^n B_{kl} (y_k - \bar{y}_k) \cdot (y_l - \bar{y}_l) \right\},$$

где B_{kl} — алгебраические дополнения элемента ρ_{kl} в матрице (ρ_{kl}) ; $B = \det (\rho_{kl})$. Это распределение в гильбертовом пространстве $L_2(G) \times B_1$ можно также однозначно определить преобразованием Фурье и так называемым S -оператором [1, стр. 171]. Нормально распределенный случайный элемент в этом пространстве $u^{(1)}$ может быть разложен по ортогональному базису этого пространства.

б) если $a_k(x, \omega)$ — стационарные эргодические случайные функции, а $f(t, \omega)$ — не зависящий от них также эргодический н.п. процесс, ограниченный в среднеквадратичном с

$$E z_k = 0; \quad E [z_k(t') \cdot z_j(t'')] = S_{kj} \cdot \delta(t' - t''),$$

где S_{kj} — постоянные смешанные спектральные плотности, а δ — дельта-функция Дирака. Тогда н. п. процесс в первом приближении также можно охарактеризовать в рамках корреляционной теории

$$E u^{(1)}(x, t, \omega) = R(1, L_0) \cdot (u_0 + EF),$$

$$\Gamma_u^{(1)}(t, t') = E [u^{(1)}(x, t, \omega) \cdot \overline{u^{(1)}(x, t', \omega)}].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М., «Мир», 1965.
2. Hans O. Generalized random variables. Trans. Furst, Prague conf. Prague, 1957.
3. Hans O. Random operator equations. Furth Berkeley Symposium, 1961.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М., «Наука», 1971.
5. Данфорд Н. и Шварц Дж. Линейные операторы. М., «Иностранная литература», 1962.
6. Доступов Б. Г., Пугачев В. С. Уравнение, определяющее закон распределения интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих случайные параметры. — «Автоматика и телемеханика», 1957, № 7, XVIII.
7. Иванов В. П. Абстрактная задача Коши и теория возмущений замкнутых операторов. Саратов, Приволжск. кн. изд., 1966.

8. Ильянов В. Н. Мультипликативный интеграл и почти-периодическая матрица. ДАН СССР, 1956, № 5.
9. Ильянов В. Н. О почти-периодических решениях линейных и нелинейных систем. Труды СИМСХ, т. 14, 1959.
10. Ильянов В. Н. К спектральной теории систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами. Труды СИМСХ, вып. 11, 1958.
11. Ильянов В. Н. О выделении показательных множителей из интегральных решений систем. Т. XIII, вып. 2(80). М., УМН, 1958.
12. Леппаи Б. М. Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
13. Липпо-Данилевский П. А. Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений. М. — Л., ОНТИ, 1934.
14. Мессера Х. и Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., «Мир», 1970.

СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОЛУГРУПП И МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

ИВАНОВ В. Н., кандидат физико-математических наук
(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. П. Калинина)

В данной статье известная детерминированная теория возмущений полугрупп линейных операторов, принадлежащая в основном Т. Като, распространяется на случайные возмущения. Полученные таким образом результаты прилагаются к построению переходной функции и переходной плотности возмущенных марковских процессов.

Конечной целью работы является создание алгоритма, позволяющего строить переходные функции и переходные плотности сложных и общих процессов, отталкиваясь от более простых и хорошо изученных переходных функций и переходных плотностей.

Рассматриваемые проблемы тесно связаны с абстрактной задачей Коши (АЗК) со случайным оператором, которая изучена в одной из статей данного сборника:

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega)x; \quad x(0, \omega) = x_0(\omega); \quad 0 \leq t < T \quad (1)$$

и соответствующим ей уравнением регрессии:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A_0 \bar{x}; \quad \bar{x}(0) = E x_0(\omega); \quad A_0 = E A(\omega). \quad (2)$$

Будем говорить, что АЗК (2) поставлена корректно на отрезке $[0, T]$, если для любого начального условия $x_0 \in D(A_0)$ существует единственное решение уравнения (2), непрерывно зависящее от начального значения $x(0)$. Задача (2) называется равномерно корректной, если из стремления к нулю последовательности начальных значений $x_0^{(m)} \rightarrow 0$ следует стремление к нулю соответствующей им последовательности решений $\bar{x}(t, x_0^{(m)})$ равномерно на отрезке

Известной в теории полугрупп теоремы Хилле — Йосиды — Филлипса легко получается, что для равномерной корректности АЗК (2) необходимо и достаточно выполнение любого целого положительного n -неравенства:

$$\|R^{(n)}(\lambda, A_0)\| \leq M \cdot (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-n}; \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

в некоторых положительных M и ω , причем

$$\|(I\lambda - L_0)^{-1}\| = \|R(\lambda, L_0)\| \leq M \cdot e^{\omega t}; \quad L_0 = \int_0^t A_0 dt.$$

В дальнейшем ограничимся полугруппами класса C_0 , то есть непрерывными полугруппами U_t при $t > 0$, удовлетворяющими условию $\lim_{t \rightarrow +0} U_t x = x$ при любом $x \in B$.

Для того чтобы уравнение регрессии (2) с замкнутым оператором $I: A(t, \omega) = A_0$ было равномерно корректным, необходимо и достаточно, чтобы оператор A_0 был производящим оператором полугруппы класса C_0 . Это означает, что класс уравнений (2) с замкнутыми операторами A_0 совпадает с классом уравнений, у которых оператор A_0 является производящим для полугруппы класса C_0 . Отсюда следует, что с методологической точки зрения вместо изучения случайных возмущений АЗК с замкнутым оператором достаточно рассмотреть вопрос о случайных возмущениях полугрупп класса C_0 ограниченных операторов на основе возмущений, соответствующих им производящих операторов.

Известно, что спектр производящего оператора полугруппы класса C_0 всегда лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega$. Из исследований Г. Като по теории полугрупп известно, что если A_0 — замкнутой линейный оператор с областью $D(A_0)$, плотной в банаховом пространстве B ; отрицательная действительная полуось принадлежит резольвентному множеству A_0 , а резольвента $(A_0 + \lambda \cdot I)^{-1}$ удовлетворяет неравенству:

$$\|(A_0 + \lambda \cdot I)^{-1}\| < \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

то существует в равномерной операторной топологии предел

$$U_t = e^{-A_0 t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n} \cdot A_0\right)^{-n}, \quad (4)$$

образующий собой сжимающую полугруппу и эта функция от оператора удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dU_t/dt}{dt} = -A_0 \cdot U_t x_0; \quad t \geq 0; \quad x_0 \in D(A_0).$$

Формула (4) определяет полугруппу, не обязательно сжимающую, если неравенство (3) заменить на более общее, которое укажем далее.

В случае ограниченности оператора A_0 наличие его спектра в левой полуплоскости есть достаточное условие ограниченности решений АЗК на полуоси. Сохранение этого свойства при случайных возмущениях оператора A_0 характеризует устойчивость решений при случайных возмущениях оператора АЗК. Это один из стимулов к изучению случайных возмущений полугрупп.

Вторым стимулом является проблема построения случайных переходных функций марковских процессов, тесно связанная со случайными возмущениями сжимающих полугрупп.

После некоторых замечаний общего характера, мы, следуя в основном методам Т. Като по детерминированным возмущениям, положим «почти-наверным» образом проблему случайных возмущений полугрупп класса C_0 .

Пусть $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ — вероятностное пространство с полной вероятностной мерой μ ; $A(\omega)$ — случайный линейный оператор с областью определения $D(A)$ — не зависящей от ω и плотной в банаховом пространстве B ; A_0 — замкнутый детерминированный линейный оператор с областью определения $D(A_0) = D(A) = D$. Рассмотрим случайный линейный оператор с комплексным параметром τ

$$A(\tau, \omega) = A_0 + \tau \cdot A(\omega),$$

в предположении (условие 1), что случайный линейный оператор

$$K_\lambda(\omega) = A(\omega) \cdot R(\lambda, A_0); \quad \lambda \in \rho(L_0)$$

является ограниченным для каждого $\omega \in \Omega$ (или почти-наверное) $E \|K_\lambda(\omega)\|^n < \infty$; $n = 1, 2, 3, \dots$ Это предположение выполняется, если $A(\omega)$ замкнут при каждом $\omega \in \Omega$ (почти-наверное) или существуют две случайные величины $a(\omega) \geq 0$ и $b(\omega) \geq 0$, определенные на исходном вероятностном пространстве, такие, что для каждого $\omega \in \Omega$ (или п.н.) и любого $x \in D$ выполняется неравенство:

$$\|A(\omega) \cdot x\| \leq a(\omega) \cdot \|x\| + b(\omega) \cdot \|A_0 \cdot x\|. \quad (5)$$

В частности, при $a = 0$ случайный оператор $A(\omega)$ оказывается подчиненным оператору A_0 , если $b < \frac{1}{2}$, а при $b = 0$ почти-наверное ограниченным.

Согласно теоремам Ганша для каждого $\tau \neq 0$ имеем:

$$\Delta_0(\tau) = \left\{ \omega : \|K_\lambda(\omega)\| < \frac{1}{|\tau|} \right\} \in S$$

Для таких $\omega \in \Delta_0$ сходится в равномерной операторной топологии ряд:

$$R(\lambda, A(\tau, \omega)) = R(\lambda, L_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \cdot K_\lambda^n(\omega). \quad (6)$$

Для каждого счетного множества e ($0 \in e$) комплексной плоскости аналогично вышеуказанному можно записать:

$$\Delta_e = \bigcap_{\tau \in e} \left\{ \omega : \left(\omega, \frac{1}{\tau} \right) \in p(K_\lambda(\omega)) \right\} \in S.$$

Обозначим через r открытое множество элементов банаховой алгебры X ограниченных преобразований банахова пространства B на себя. Пусть на X дано распределение вероятностей P так, что $P(r) > 0$. Тогда условное распределение для резольвенты

$R(\lambda, (\omega), \frac{1}{\tau})$ (или для $R(\lambda, A(\tau, \omega))$) запишется в виде:

$$\begin{aligned} P \left(R \left(K_\lambda(\omega), \frac{1}{\tau} \right) \in Q / K_\lambda(\omega) - \frac{1}{\tau} \cdot I \in r \right) = \\ = \frac{P \left(R \left(K_\lambda(\omega), \frac{1}{\tau} \right) \in Q; K_\lambda(\omega) - \frac{1}{\tau} \cdot I \in r \right)}{P \left(\left(K_\lambda(\omega) - \frac{1}{\tau} \cdot I \right) \in r \right)} \end{aligned}$$

Если τ — малый параметр, то в первом приближении распределение резольвенты можно охарактеризовать, исходя из соотношения:

$$R(\lambda, A(\tau, \omega)) \simeq R(\lambda, A_0) + \tau \cdot R(\lambda, A_0) K_\lambda(\omega); \quad \omega \in \Delta_0$$

на основе распределения оператора $K_\lambda(\omega)$ на X .

Вопрос о случайных возмущениях полугруппы ограниченных линейных операторов в значительной мере сводится к построению и исследованию резольвенты возмущенного оператора $A(\tau, \omega)$. Следовательно, кто, обозначим через $I(M, \beta)$ совокупность линейных операторов A , удовлетворяющих условиям:

1) A — замкнутый линейный оператор с областью $D(A)$, плотной и сепарабельном банаховом пространстве B ;

2) полубесконечный интервал $\lambda > \beta$ принадлежит резольвентно-

му множеству оператора A и кроме того существует константа c так что

$$\|(A + \lambda \cdot I)^{-k}\| \leq \frac{c}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^k}; \quad \gamma > \beta; \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Согласно следствию из упомянутой выше теоремы Хилле — Йосида — Филлипса A — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы тогда и только тогда, когда $A \in I(1, 0)$. Заметим, что в данном определении вместо условия 2) можно потребовать следующее:

$$\|(A + \lambda \cdot I)^{-k}\| \leq \frac{C}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^k}; \quad \operatorname{Re} \lambda > \beta; \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Если же наряду с условием 1) выполняется следующее предположение:

2) * резольвентному множеству A вместе с $\operatorname{Re} \lambda > 0$ принадлежит и сектор $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \omega$; $\omega > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$\|(A + \lambda \cdot I)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\lambda|}; \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon$$

то такое множество замкнутых линейных операторов обозначим $H(\omega, 0)$. Операторы вида $A = A_0 - \beta \cdot I$, в которых $A_0 \in H(\omega, 0)$, обозначим через $H(\omega, \beta)$.

Теорема 1. Пусть $A_0 \in I(1, \beta)$ и $A(\omega)$ — случайный элемент банаховой алгебры X -ограниченных преобразований $B \rightarrow B$ (то есть распределение P на X), причем $P\{\|A\| \leq c < \infty\} = 1$, тогда почти наверное $A_0 + A(\omega) \in I(1, \beta + c)$ и соответствующая стохастическая полугруппа $e^{-t(A_0 + A(\omega))}$ есть борелевски измеримая (голоморфная) функция случайного оператора $A(\omega)$, распределение которой выражается через распределение элемента $A(\omega)$ на X .

Доказательство. Первая часть теоремы получается с помощью оценки почти-навсегда:

$$\|K_\lambda(\omega)\| = \|A(\omega) \cdot R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{c}{\operatorname{Re} \lambda - \beta} < 1$$

для $\operatorname{Re} \lambda > \beta + c$. А это означает сходимость ряда (σ) с вероятностью единица и, следовательно, с той же вероятностью наличие оценки

$$\|R^k(\lambda, A(\omega))\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta - c)^k}.$$

Для доказательства измеримости полугруппы заметим, что она является разрешающим оператором равномерно корректной задачи Коши со случайным оператором:

$$\frac{du}{dt} = (A_0 + \bar{A}(\omega)) u; \quad u_0 \in D(A_0) = D(A).$$

Но решение этой АЗК должно удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$u(t) = u_0(t) - \int_0^t u_0(t-s) \cdot \bar{A}(\omega) \cdot u(s) \cdot ds = Z(\omega) \cdot u, \quad (7)$$

где $U_0(t)$ — полугруппа, соответствующая порождающему оператору A_0 .

Применим теперь к интегральному уравнению теорему Ганша о стохастическом варианте принципа неподвижной точки, заметим, что $Z(\omega)$ и есть измеримый по Борелю случайный элемент. Согласно этой теореме существует однозначно определенный, измеримый по Борелю случайный элемент $u(\omega)$ со значениями из B , удовлетворяющий случайному уравнению $Z(\omega) \cdot u = u$. Этот элемент может быть получен итерационным процессом исходя из детерминированного начального элемента u_0 : $z(\omega) \cdot u_n = u_{n+1}$; $n = 1, 2, 3, \dots$, так что почти-навсего $u(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\omega)$. Отсюда немедленно вытекает, что

оператор $U_{A_0 + \bar{A}(\omega)}(t)$, определяемый равенством:

$$u(\omega, t) = U_{A_0 + \bar{A}(\omega)}(t) \cdot u_0$$

является случайным.

На принципа неподвижной точки следует также почти-навсего сходимость ряда:

$$U_{A_0 + \bar{A}(\omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{A_0 + \bar{A}(\omega)}^{(n)}(t),$$

$$U_{A_0 + \bar{A}(\omega)}^{(n+1)}(t) = - \int_0^t U_0(t-s) \cdot \bar{A}(\omega) U_{A_0 + \bar{A}(\omega)}^{(n)}(s) \cdot ds$$

и, следовательно, почти-навсего аналитичность его суммы по $\bar{A}(\omega)$.

Распределение этой функции от оператора характеризуется распределением $\bar{A}(\omega)$ на X для каждого t . Полученная полугруппа является локально компактной. Но для локально компактной полу-

группы, как показано рядом авторов, проходит конструкция А. Н. Колмогорова на прямом произведении S^T , $T=[0, \infty]$, построенная первоначально для R_1^T (R_1 — прямая).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу возмущения случайным оператором $A(\omega)$ более общего вида.

Пусть $A_0 \in H(\omega, \beta)$ и выполнено условие почти-наверное относительно ограниченности оператора $A(\omega)$ ($\tau=1$). Из оценок

$$\|R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{c_0}{|\lambda|}, \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon,$$

$$\|A(\omega) \cdot R(\lambda, A_0)\| \leq a(\omega) \cdot \|R(\lambda, A_0)\| + b(\omega) \cdot \|A_0 \cdot R(\lambda, A_0)\| \quad (\text{п. н.}),$$

$$\|A_0 \cdot R(\lambda, A_0)\| \leq 1 + c_\varepsilon$$

получаем

$$\|k_\lambda(\omega)\| \leq a(\omega) \cdot \frac{c_0}{|\lambda|} + b(\omega) \cdot (1 + c_\varepsilon) \quad (\text{п. н.}).$$

Если

$$\Delta_\lambda = \{\omega : [a(\omega) \cdot \frac{c_0}{|\lambda|} + b(\omega) \cdot (1 + c_\varepsilon)] < 1\},$$

то для $\omega \in \Delta_\lambda$; $\Delta_\lambda \in \mathcal{S}$ следует

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A(\omega))\| &\leq \frac{c_0 \cdot |\lambda|^{-1}}{1 - a(\omega) \cdot c_\varepsilon \cdot |\lambda|^{-1} - b(\omega) \cdot (1 + c_\varepsilon)} = \\ &= \frac{c_\varepsilon \cdot [1 - b(\omega) \cdot (1 + c_\varepsilon)]^{-1}}{|\lambda| - a(\omega) \cdot c_\varepsilon [1 - b(\omega) \cdot (1 + c_\varepsilon)]^{-1}}. \end{aligned}$$

Обозначим: $\Delta_b = \{\omega : b(\omega) < (1 + c_\varepsilon)^{-1}\}$.

Тогда для $\omega \in \Delta_\lambda \cap \Delta_b = \Delta'$ имеем:

$$\|R(\lambda, A(\omega))\| \leq \frac{c'(\omega)}{|\lambda - \gamma(\omega)|} \quad (\text{п. н.}),$$

где $c'(\omega)$ и $\gamma(\omega)$ — случайные величины, выражаемые через $a(\omega)$, $b(\omega)$, c_ε .

Таким образом, для $\omega \in \Delta_\lambda \cap \Delta_b = \Delta'$ имеем

$$A_0 + A(\omega) \in H(\omega - \varepsilon, \gamma)$$

аналогично, существует так же, как и в теореме 1, аналитическая относительно $A(\omega)$ полугруппа $e^{-t \cdot (A_0 + A(\omega))}$, измеримая для каждого t относительно σ -алгебры $\Delta' \cap S$, распределение которой характеризуется по формуле (Като — Данфорда):

$$e^{-t \cdot (A_0 + A(\omega))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} \cdot R(\lambda, A_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} K_n^t(\omega) \cdot d\lambda$$

и мерное распределение $K_\lambda(\omega)$ на X . (Здесь Γ — ориентированная отрицательная часть спектра A_0).

Сформулируем полученные результаты (с учетом рассуждений предыдущей теоремы).

Теорема 2. Пусть $A_0 \in H(\omega - \varepsilon, 0)$ и $A(\omega)$ почти-навсего A_0 относительно ограничен. Тогда существует ω -множество $\Delta' \cap S$, такое, что $A_0 + A(\omega) \in H(\omega - \varepsilon, \gamma)$ и соответствующая полугруппа измерима относительно σ -алгебры $\Delta' \cap S$, а ее распределение выражается через распределение $K_\lambda(\omega)$ на X (или через условное распределение резольвенты $R(\frac{1}{\tau}, K_\lambda(\omega))$).

Следствие: Если $A_0 \in I(1, 0)$, а оператор $A(\omega)$ (п.н.) подчинен оператору A_0 , то есть

$$\|A(\omega) \cdot x\| \leq b(\omega) \cdot \|A_0 \cdot x\|,$$

тогда $\mu \left\{ \omega : b(\omega) < \frac{1}{2} \right\} = 1$, то $A_0 + A(\omega) \in H(0, 0)$ (п.н.).

Аналогично, в этом случае с вероятностью единица

$$\|A(\omega) \cdot R(\lambda, A_0)\| \leq b(\omega) \|I + \lambda \cdot R(\lambda, A_0)\| \leq 2 \cdot b(\omega) < 1,$$

следовательно, $\|R(1, K_\lambda(\omega))\| < c$

и поэтому $\|R(\lambda, A(\omega))\| \leq \frac{1}{\lambda} \cdot c$.

Очевидно, ω -множество Δ_λ изменится, если требование A_0 п.н. относительно ограниченности $A(\omega)$ заменим, чтобы $A(\omega)$ был почти-навсего замкнут и $\tau \neq 1$. Тогда, привлекая ω -множество $\Delta_0(\tau)$, получим для $\omega \in \Delta_0(\tau)$ представление резольвенты в виде (σ) .

Обозначим теперь

$$\Delta_\tau(\tau) = \left\{ \omega : \left\| R\left(\frac{1}{\tau}, K_\lambda(\omega)\right) \right\| \leq c \right\} \in S; \quad c = \text{const} > 0.$$

Тогда для $\omega \in \Delta_3 = \Delta_0(\tau) \cap \Delta_1(\tau)$ будем иметь:

$$\|R(\lambda, A(\omega))\| \leq \|R(\lambda, A_0)\| = \frac{c_\varepsilon}{|\lambda|},$$

$$|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \omega - \varepsilon,$$

то есть

$$A(\omega) = A_0 + \tau \cdot A(\omega) \in H(\omega - \varepsilon, 0).$$

Итак, теорема доказана.

Теорема 3. Если $A_0 \in H_c(\omega - \varepsilon, 0)$ и $\bar{A}(\omega)$ (почти-наверное) замкнут, то для ω -множества Δ_3 :

$$A(\omega) = A_0 + \tau \cdot A(\omega) \in H(\omega - \varepsilon, 0)$$

и соответствующая полугруппа измерима относительно σ -алгебры $\Delta_3 \cap S$, ее распределение характеризуется распределением резольвенты $R\left(\frac{1}{\tau} K_\lambda(\omega)\right)$ или в первом приближении распределением $K_\lambda(\omega)$ на X относительно σ -алгебры $\Delta' \cap S$.

Следствие. Если $A_0 \in I(1, 0)$ и $\bar{A}(\omega)$ (почти-наверное) замкнут, то

$$A_0 + \bar{A}(\omega) \in I(1, 0)$$

при условии, что $\omega \in \Delta'$, $\Delta_1(\tau) \cap \Delta_0(\tau) \neq \emptyset$,

где $\Delta_1(\tau) = \left\{ \omega : \|R\left(\frac{1}{\tau}\right) K_\lambda(\omega)\| \leq 1 \right\} \in S; (\lambda > 0)$,

причем соответствующая полугруппа также измерима относительно σ -алгебры $\Delta' \cap S$.

Теорема 4. Пусть $A_0 \in I(1, 0)$; $A(\omega)$ (почти-наверное) принадлежит $I(1, 0)$ и подчинен оператору A_0 , то есть

$$\|A(\omega) \cdot x\| \leq b(\omega) \cdot \|A_0 \cdot x\|,$$

причем $\mu\left\{b(\omega) < \frac{1}{2}\right\} = 1$.

Тогда почти-наверное $A(\omega) = A_0 + A(\omega) \in I(1, 0)$.

Доказательство. Из условий теоремы следует оценки $\|K_\lambda(\omega)\| < 1$ и, значит, существование резольвенты $R(\lambda, A(\omega))$.

Применим эту резольвенту, следуя методу Като. Рассмотрим элемент:

$$x(t, \omega) = e^{-t \cdot A(\omega)} \cdot e^{-t(A_0 + \lambda \cdot I)} \cdot u;$$

$$u \in D(A_0) = D(A(\omega));$$

$$u - x(t, \omega) = (u - e^{-t \cdot A(\omega)} \cdot u) + e^{-t \cdot A(\omega)} \cdot (u - e^{-t(A_0 + \lambda \cdot I)} \cdot u).$$

Из-за того что полугруппа есть решение АЗК с производящим оператором $A(\omega)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u - x(t, \omega)}{t} = A(\omega)u + (A_0 + \lambda \cdot I)u = (A_0 + A(\omega) + \lambda \cdot I) \cdot u, \quad (\text{п. н.}).$$

По

$$\|x(t, \omega)\| \leq e^{-t \cdot \lambda} \cdot \|u\|; \text{ так как } \|e^{-\tilde{A} \cdot t}\| \leq 1 \text{ (п. н.) и } \|e^{-t \cdot A_0}\| \leq 1.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\|u - x(t, \omega)\|}{t} \geq \frac{\|u\| - e^{-t \cdot \lambda} \cdot \|u\|}{t} \rightarrow \lambda \cdot \|u\|$$

при $t \rightarrow 0$. Сопоставляя это с предыдущим равенством, заключаем:

$$\|(A_0 + A(\omega) + \lambda \cdot I) \cdot u\| \geq \lambda \cdot \|u\|$$

$$\|(A_0 + A(\omega) + \lambda \cdot I)^{-1}\| < \frac{1}{\lambda}, \quad \text{то есть } A_0 + A(\omega) \in I(1, 0) \text{ (п. н.).}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Если в рассматриваемой нами АЗК с оператором $A(\omega) = A_0 + \tilde{A}(\omega)$ выполнены условия:

$$a) 1 \in \rho(L_0); \quad \|L(\omega) \cdot x\| \leq a \cdot \|x\| + b \|L_0 \cdot x\| \quad (\text{п. н.});$$

$$b) \|R(\lambda, A_0)\| < \frac{1}{\lambda - w}; \quad \lambda > w = \|A_0\| \sigma;$$

$$в) x \in D_\infty = D(A_0) = D(A(\omega)) = D(\tilde{A}(\omega));$$

то существует такая случайная функция второго порядка с непрерывной ковариацией, что с вероятностью единица:

$$\|A(\omega) \cdot \mathcal{Q}_0'(A_0)\| \leq K_t(\omega)$$

и существует интеграл

$$\int_0^t K_t(\omega) dt \leq \beta < 1; \quad \beta = \text{const}; \quad \text{для } t > 0.$$

то операторант АЗК со случайным оператором $A(\omega)$ является полугрупповым оператором, для которого $A(\omega)$ служит производящим оператором.

Доказательство следует из того, что A_0 — производящий оператор полугруппового операторанта $\mathfrak{Q}_0(A_0)$ и разрешающий оператор АЗК есть резольвента оператора $A(\omega)$, так как ряд $R[1, A(\omega)] = R[1, A_0] \cdot \sum_n [A(\omega) \cdot R(1, A_0)]^n$ сходится с вероятностью единица в равномерной операторной топологии в силу условия г). Условия в) и г) на основании известной теоремы Хилле — Данфорда гарантируют полугрупповой характер разрешающего оператора АЗК.

Приближенное распределение полугрупп ограниченных операторов, зависящих от малого параметра τ , можно получить на основе асимптотических формул.

Именно для всякого $x_0 \in D$ имеет место асимптотическое разложение полугруппы:

$$U(t, \tau, \omega) \cdot x_0 = U_0(t) \cdot x_0 + \tau \cdot U^{(1)}(t, \omega) + O(\tau, \omega) \quad (\text{н. п.})$$

$$\text{при } \tau \rightarrow 0; \quad \omega \in \Delta_k; \quad U^{(1)}(t, \omega) = - \int_0^t U(t-s) \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot U(s) \, ds, \quad (8)$$

если

а) $A_0 \in I(M, \beta)$ и для $\tilde{A}(\omega)$ выполняется почти-наверное неравенство (5);

б) выполняются условия предыдущих теорем, обеспечивающие включение $A(\omega) \in I(M, \beta)$ для достаточно малых по модулю τ и некоторых ω -множеств Δ_k . Для достаточно малых τ вышеуказанная формула прямо получается из интеграла Данфорда, в котором Γ — ориентированная огибающая спектра оператора, проходящая от $-\infty$ по стороне угла $\arg \lambda = -\left(\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon\right)$ до $+\infty$ по стороне угла $\arg \lambda = \frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon$.

Действительно, подставляя разложение резольвенты (6), получим

$$U_{A_0 + \tau \cdot \tilde{A}(\omega)} = e^{-\tau(A_0 + \tau \cdot \tilde{A}(\omega))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \cdot R(\lambda, A_0) \cdot d\lambda + \\ + \tau \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \cdot R(\lambda, A_0) \cdot K_{\lambda}(\omega) \cdot d\lambda + O(\tau, \omega).$$

Для более широких ω -множеств это асимптотическое представление можно получить, отправляясь от абстрактной задачи Коши, решением которой является полугруппа:

$$\frac{dY}{dt} = -(A_0 + \tau \cdot \tilde{A}(\omega)) \cdot Y; \quad Y(0) = I \quad (\text{п. н.}).$$

(Здесь производную нужно понимать в среднеквадратичном.)

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$Y = U_{A_0}(t) \cdot Z; \quad U_{A_0}(t) = e^{-t A_0}.$$

Тогда, обычным образом вычисляя производную, получим:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dU_{A_0}}{dt} \cdot Z + U_{A_0}(t) \cdot \frac{dZ}{dt};$$

$$-(A_0 + \tau \cdot \tilde{A}(\omega)) \cdot U_{A_0}(t) \cdot Z = -A_0 \cdot U_{A_0} \cdot Z + U_{A_0}(t) \cdot \frac{dZ}{dt};$$

$$\frac{dZ}{dt} = U_{A_0}^{-1}(t) \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot U_{A_0}(t) \right) \cdot Z; \quad Z(0) = I_0$$

(I_0 — единичный элемент B -пространства).

Рассуждая аналогично началу доказательства теоремы 1, заключаем, что если $A(\omega)$ замкнут (п.н.), то $\tilde{A}(\omega) \cdot U_{A_0}(t)$ ограничен, тогда из замкнутости $U_{A_0}(t)$, а значит и $U_{A_0}^{-1}(t)$ следует ограниченность оператора

$$U_{A_0}^{-1} \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot U_{A_0}.$$

Для ограниченных операторов АЗК всегда разрешима в форме следующего ряда, сходящегося почти-наверное равномерно в каждом отрезке $[0, T]$:

$$\begin{aligned} Z(t) &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[- \int_0^t U_{A_0}^{-1}(s) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot U_{A_0}(s) \cdot ds \right]^n \equiv \\ &\equiv I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n(t); \end{aligned} \quad (9)$$

$$Z(t) = I_0 + \tau \cdot \int_0^t U_{A_0}^{-1}(s) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot U_{A_0}(s) \cdot ds + O(\tau, \omega);$$

$$\|O(\tau, \omega)\| \leq \frac{|\tau|^2 \cdot \|q\|^2}{1 - \|q\| + |\tau|} \quad (\text{п. н.})$$

($\|q\|$ — норма оператора в $C(B, (0, T))$).

Из асимптотического представления полугруппы следует, что при достаточно малых значениях параметра t распределение полугруппы определяется распределением оператора q на банаховой алгебре $X(B)$. В случае стохастической сжимающей полугруппы вероятностный процесс P_t на ней можно охарактеризовать следующим образом. Наличие оценки $\|U_t(\omega)\| \leq 1$ означает компактность полугруппы, а для компактных полугрупп проходит конструкция, созданная А. Н. Колмогоровым для R^T ; $T=[0, \infty]$, следовательно, существует вероятностная мера P_t . Вследствие сильной непрерывности и наличия сильного предела $U_t(\omega) \rightarrow I$ (п. н.) при $t \downarrow 0$ имеет место слабая сходимость P_t к собственному распределению.

По распределению оператора q на X или по распределению $A(\omega)$, по крайней мере, принципиально можно построить распределение для производящего оператора при каждом t и, исходя из соотношения $U_t \cdot U_s = U_{t+s}$, проверить выполнимость равенства $P_t * P_s = P_{t+s}$, то есть однородность процесса P_t ; $0 \leq t < s < \infty$, где, как обычно:

$$P_t * P_s(B) = \int_{S_0} \int_{S_0} I_{B_0}(u \cdot v) \cdot P_t(du) \cdot P_s(dv),$$

S_0 — полугруппа, а I_B — индикатор B_0 в S_0 .

В теории стохастических полугрупп известна теорема Гренандера о том, что если P_t — непрерывный однородный процесс на компактной стохастической полугруппе, то существует такая вероятностная мера M и связанная с ней мера $Q = \frac{1}{\lambda} \cdot M + \delta_I$, что P_t есть предел сложных пуассоновских процессов

$$\exp^*(t \cdot M) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t\lambda) \cdot \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot Q^n,$$

то есть предел вида $P_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp^*(t \cdot M_\epsilon)$, где $M_\epsilon = \frac{P_\epsilon - \delta_I}{\epsilon}$.

Резюмируем сказанное.

Теорема 5. Если распределение P_t на сжимающей полугруппе $e^{-t(A_0 + \tau A(\omega))}$ удовлетворяет условию однородности

$$P_t * P_s = P_{t+s},$$

то P_t есть предел сложных пуассоновских процессов вышеуказанного вида.

Приведем кратко одно из основных приложений теории случайных движений сжимающих полугрупп, относящихся к переходным функциям $P(t, x, \Gamma)$ однородных марковских процессов. Будем придерживаться обозначений и определений, принятых в известной монографии Е. Б. Дынкина по теории марковских процессов. Пусть H, B — измеримое пространство, E — компакт, а $P(t, x, \Gamma)$ — непрерывная нормальная переходная функция, то есть $P[+0, x, E] = 1$ для всех $x \in E$ и $P(t, x, E) + 1$, для всех $t > 0$; $x \in E$.

$$\text{Обозначим: } -A_0 f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int P(t, x, dy) \cdot f(y) - f(x)}{t}; \quad B = B(E, B) —$$

пространство ограниченных измеримых функций $f(x)$, B — метрическое пространство с нормой $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$; $C = C(E, B)$ — линейное пространство, состоящее из всех ограниченных непрерывных функций с той же нормой.

Если полугруппа $T_t \cdot f = \int P(t, x, dy) \cdot f(y)$ переводит в себя $B(E, B)$, то $P(t, x, \Gamma)$ называется феллеровской переходной функцией.

Е. Б. Дынкин показал, для того чтобы сжимающая полугруппа T_t линейных операторов в $B(E, B)$ соответствовала некоторой переходной функции $P(t, x, \Gamma)$ в (E, B) необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

- а) если $f(x) \geq 0$ при всех $x \in E$, то $T_t f(x) \geq 0$ для всех $x \in E$;
 - б) если $f(x_0) = 0$, то $T_0 f(x_0) = 0$, в этом случае $T_t f(x) = \int P(t, x, dy) \cdot f(y)$.
- Переходная функция $P(t, x, \Gamma)$, заданная в $B(E, B)$, называется стохастически непрерывной, если для любого $t > 0$ и для любого $x \in E$

$$\lim_{U \rightarrow 0} P(t, x, U) = 1.$$

Основная теорема теории марковских процессов о связи переходных функций с полугрупповыми операторами [2, стр. 87] утверждает, что всякая стохастически непрерывная переходная функция в (E, B) однозначно определяется своим инфинитезимальным оператором A_0 . Так как E — компакт, то $P(t, x, \Gamma)$ будет стохастически равномерно непрерывной. Кроме того, будем считать, что $T_t \cdot f$ для $f \in B(E, B)$ принадлежит $C(E, B)$. Такие переходные функции называют сильно-феллеровскими.

Отправным пунктом для построения случайных переходных функций является теорема Е. Б. Дынкина [2].

Пусть E — компакт и A_0 — линейный оператор в $C(E)$. Для то-

го чтобы A_0 являлся инфинитезимальным оператором некоторой сильно-феллеровской переходной непрерывной функции в E (консервативной и нормальной), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $D(\overline{A_0}) = C[E]$;
- 2) $\lambda > 0$; $\lambda \in \rho(A_0)$;
- 3) $U_s f \in D(A_0)$; $f(x_0) \geq 0$; $f(x_0) \geq f(x)$; x_0 — точка максимума в E для $f(x)$, следует $A_0 f(x_0) = 0$.
- 4) $A_0 \cdot 1 = 0$.

Теперь можем применить теорему 4 или следствие из теоремы 4 таким образом. Пусть A_0 — инфинитезимальный оператор сильно-феллеровской консервативной и переходной функции $P_0(t, x, \Gamma)$, и пусть в отношении возмущающего оператора $A(\omega)$ выполняются условия теоремы (4) или следствия из теоремы (3) и дополнительно удовлетворяются условия 3) и 4) предыдущей теоремы (почти наверное). Тогда случайный оператор $A_0 + A(\omega)$ будет инфинитезимальным оператором сильно-феллеровской переходной функции $P(\omega, t, x, \Gamma)$, определенной на исходном вероятностном пространстве за исключением, может, событий нулевой вероятности, являющейся измеримой по Борелю функцией от ω , определенной равенством:

$$e^{-t(A_0 + A(\omega))} \cdot f = \int_E f(y) \cdot P(\omega, t, x, dy).$$

Выше получено разложение этой стохастической полугруппы в ряд, сходящийся в равномерной операторной топологии с вероятностью единица. Именно, пусть

$$T_0(t)f = e^{-A_0 t} \cdot f = \int_E f(y) \cdot P_0(t, x, dy).$$

Тогда

$$e^{-t(A_0 + \tau \cdot A(\omega))} f = \int_E f(y) \cdot P_\tau(\omega, t, x, dy) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\tau)^n \cdot S_n(t)f; \quad t \geq 0. \quad (10)$$

$$S_0(t) = T_0(t); \quad S_n(t) = \int_0^t T_0(t-s) \cdot A(\omega) \cdot S_{n-1}(s) ds.$$

Если $\tau \rightarrow 0$, то возмущенный марковский процесс со случайной

переходной функцией $P_\tau(\omega, t, x, \Gamma)$ слабо сходится с вероятностью единица к невозмущенному процессу и имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \int_E f(y) \cdot P_\tau(\omega, t, x, dy) &= \int_E f(y) \cdot P_0(t, x, dy) - \\ &- \tau \cdot \int_0^t T_0(t-s) \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot T_0(s) f \cdot ds + O(\tau); \\ P_0(\omega, t, x, dy) &= P_0(t, x, dy) - \\ &- \tau \cdot \int_0^t P_0(t-s, x, dy) \cdot \tilde{A}(\omega) \cdot \left(\int_E f(z) \cdot P_0(s, x, dz) \right) \cdot ds + O(\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

В случае диффузионных процессов в качестве A_0 возьмем дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа:

$$A_0 f = \sum_{i,j=1}^l a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^l b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} - c(x) \cdot f, \quad (12)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию Гельдера в E ; $c(x) \geq 0$; $x \in E$ и для любого x и любого набора действительных чисел $\{\lambda_i\}_1^l$ существует константа $\gamma > 0$, так что

$$\sum_{i,j=1}^l a_{ij}(x) \cdot \lambda_i \cdot \lambda_j \geq \gamma \cdot \sum_{i=1}^l \lambda_i^2.$$

В качестве $A(\omega)$ возьмем оператор того же вида, но со случайными коэффициентами, представляющими собой распределения на $C^0(E)$

удовлетворяющими неравенству (5). Тогда оператор $A_0 + \tau \cdot A(\omega)$ будет порождать в E канонический диффузионный процесс со случайной функцией плотности распределения. Эта случайная плотность будет решением уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - (A_0 + \tau \tilde{A}(\omega)) \cdot p.$$

Мы рассмотрим более общее дифференциальное уравнение в базисном пространстве B со счетным базисом:

$$\frac{dx}{dt} [A_0 + \varepsilon \cdot \tilde{A}(t, \omega)] \cdot x.$$

Искать его сильное решение, обладающее среднеквадратичной

производной, надо в предположении, что для любого $x \in D(\tilde{A}(t, \omega))$ ковариация $\Gamma(t, t') = E[\tilde{A}(t, \omega)x \cdot \tilde{A}(t', \omega)x]$ существует и непрерывна по t, t' в $C[B, (0, \infty))$, выполнено неравенство (5), $E\tilde{A}(t, \omega)x = 0$ и детерминированный оператор A_0 имеет простой дискретный спектр $\{\lambda_n^{(0)}\}$; $\lambda_n^{(0)} < 0$ и его собственные элементы $\{\varphi_n^{(0)}\}$ образуют базис в нашем пространстве B . Тогда решение уравнения регрессии легко получить:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{(\lambda_k^{(0)})t} \cdot \varphi_k^{(0)},$$

причем коэффициенты c_k находятся из сходящегося разложения

$$\tilde{x}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k^{(0)}.$$

Будем искать решение исходной задачи в виде:

$$\tilde{x}(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t, \omega) \cdot \varphi_k^{(0)} \cdot e^{(\lambda_k^{(0)})t}, \quad (13)_1$$

Для определения неизвестных процессов $C_k(t, \omega)$ получим бесконечную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dc_k(t, \omega)}{dt} = \sum_i v_{ki} \cdot c_i(t, \omega) \cdot e^{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})t},$$

где

$$v_{ki} = (\varphi_k^*, \tilde{A}(t, \omega) \cdot \varphi_i^{(0)}).$$

Применяя к этой системе стохастический вариант банаховской теоремы о неподвижной точке, получим почти-наверное предель:

$$C_k(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_k^{(n)}(t, \omega), \text{ где}$$

$$c_k^{(0)}(t) = c_k(0) \equiv c_k, \quad (13)_2$$

$$c_k^{(n)}(t, \omega) = c_k + \epsilon \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ v_{ki} \cdot e^{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})t} \cdot c_i^{(n-1)} \cdot dt, \right.$$

.....

$$c_k^{(n)} = c_k^{(n-1)} + \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^k \int_0^t v_{ki} \cdot c_i^{(n-1)}(t) \cdot e^{(\lambda_i^{(n)} - \lambda_k^{(n)})t} dt.$$

Когда же возмущающий случайный оператор $A(t, \omega)$ не зависит от t , последовательная подстановка вышеуказанных формул дает ряды для коэффициентов $C_k(t, \omega)$ ряды:

$$C_k(t, \omega) = C_k + \varepsilon \cdot \sum_i v_{ki} \cdot \left[\frac{e^{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})t} - 1}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \right] \cdot C_i +$$

$$+ \varepsilon^2 \cdot \sum_i \sum_m \frac{v_{ki} \cdot v_{im}}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \left[\frac{e^{(\lambda_m^{(0)} - \lambda_k^{(0)})t} - 1}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} - \frac{e^{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})t} - 1}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \right] \cdot C_m + \dots, \quad (14)$$

в которых при $k=i$ вместо дробей, написанных в квадратных скобках, следует положить t . Эти ряды сходятся с вероятностью единицы.

Функционалы U_{ki} являются обыкновенными случайными величинами. Вычисляя математическое ожидание и ковариационную функцию, получим:

$$E x(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} [E c_k(t, \omega) \cdot \varphi_k^{(0)} \cdot e^{\lambda_k^{(0)} t}],$$

$$\Gamma_x(t, t') = E \{x(t, \omega) \cdot \bar{x}(t', \omega)\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t, t'),$$

$$A_n(t, t') = \sum_{k=1}^n E \left[C_k(t, \omega) \cdot \varphi_k^{(0)} \cdot e^{\lambda_k^{(0)} t} \right] \cdot \left[\bar{C}_{n-k}(t', \omega) \cdot \bar{\varphi}_{n-k}^{(0)} \cdot e^{\lambda_{n-k}^{(0)} t'} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^n E \left[C_k(t, \omega) \cdot \bar{C}_{n-k}(t', \omega) \right] \cdot \varphi_k^{(0)} \cdot \bar{\varphi}_{n-k}^{(0)} \cdot e^{\lambda_k^{(0)} t + \lambda_{n-k}^{(0)} t'}.$$

Предположения, сделанные о коэффициентах дифференциального уравнения Колмогорова, обеспечивают существование фундаментальных решений при каждом $\omega \in \Omega$ на основании известных теорем о параболических уравнениях. Выше мы указали ряды, в которых разлагаются фундаментальные решения при дополнительных предположениях об инфинитезимальном операторе $A_0 + \varepsilon \cdot A(t, \omega)$.

Эти ряды позволяют получить асимптотические формулы для решений при $\varepsilon \rightarrow 0$, в частности для плотности возмущенного процесса.

Пусть для инфинитезимального оператора A_0 известна переходная плотность $p_0(t, x)$, которая как решение уравнения регрессии (при $\varepsilon=0$) представлена сходящимся разложением

$$p_0(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k^{(0)}(x) \cdot e^{-\lambda_k^{(0)} t}; \quad t \geq 0,$$

в частности, при $t=0$ имеем сходящийся ряд:

$$p_0(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k^{(0)}(x).$$

Тогда переходная плотность, соответствующая инфинитезимальному оператору $A_0 + \varepsilon \cdot A(t, \omega)$, имеет вид:

$$p_\varepsilon(\omega, t, x) = p_0(t, x) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_i c_i \int_0^t v_{ki}(t, \omega) e^{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})t} \cdot dt \right) \varphi_k^{(0)} \cdot e^{-\lambda_k^{(0)} t} + O(\varepsilon). \quad (15)$$

Когда же оператор $A(t, \omega)$ от t не зависит, здесь все интегралы, как мы видели выше, вычисляются и можно взять несколько первых членов асимптотического разложения, исходя из вида рядов для функций $c_k(t, \omega)$ (14).

Сформулируем полученный результат.

Теорема. Пусть в отношении инфинитезимальных операторов A_0 и $A(\omega)$ выполняются следующие условия:

- а) $A_0 \in I(1, 0)$; $A(\omega) \in I(1, 0)$; $D(A_0) = D(A(\omega))$; $\omega \in \Omega$;
- б) A_0 — инфинитезимальный оператор сильно-феллеровской консервативной в E переходной функции $P_0(t, x, F)$;

$$\text{в) } \|A(\omega)x\| \leq a \cdot \|x\| + b \|A_0 x\| \quad (\text{п. н.}) \quad b < \frac{1}{2};$$

- г) из $f \in D(A_0)$; $f(x_0) > f(x)$; $x \in E$ следует $A(\omega)f(x_0) = 0$ (п. н.);
- $A(\omega) \cdot 1 = 0$ (п. н.).

Тогда $A_0 + A(\omega)$ — инфинитезимальный случайный оператор

только феллеровской консервативной в E переходной функции $P(t, t, x, I)$, для которой справедливы формулы (10), (11).

Если дополнительно A_0 — эллиптический дифференциальный оператор вышеуказанного вида, а $A(t, \omega)$ — оператор такого же рода с коэффициентами, распределенными в $C^{(1)}[E, (0, \infty)]$, то переходная плотность при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет асимптотическое представление (15), которое в случае независимости A от t может быть уточнено на основании формулы (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М., «Мир», 1967.
2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматиздат, 1963.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
4. Като Т. Perturbation theory New York. Springer Verlag, 1966.
5. Кунгер Г.-Д. ж. Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969.

К ВОПРОСУ О ВОЗМУЩЕНИИ ПОЛУГРУПП СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

ОСИПОВА И. К., аспирантка

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

В данной заметке рассматривается задача инвариантности инфинитезимального производящего свойства [3] возмущенного оператора $A_0 + V$ сжимающей полугруппы. Непосредственно этот вопрос уже рассматривался Т. Като [1]. Но полученное им условие относится к случаю, когда оба оператора — данный A_0 и возмущающий V — являются производящими операторами сжимающих полугрупп. В нашем варианте указываются другие достаточные условия, отличные от условий теоремы Т. Като, при выполнении которых сохраняется инфинитезимальное свойство данного оператора, причем рассматриваются полугруппы, относящиеся только к классу S_0 [5]. Эти условия формулируются в виде четырех утверждений. В заключение доказывается теорема о разрешимости абстрактной задачи Коши [2] с переменным возмущенным оператором.

Теорема 1. Пусть в банаховом пространстве B задан неограниченный оператор $A = A_0 + V$, где A_0 — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной сжимающей полугруппы в B , V — неограниченный, замкнутый, возмущающий оператор с областью определения $D(V) = D(A_0)$ и множеством значений $R(V) \subseteq B$. Предпологается, что $Q = R(A) \cap B$ — непустое, замкнутое множество.

Если для ограниченного оператора $V \cdot R(1, A_0)$ [5, стр. 214] при любом $y \in B$ и λ , принадлежащем резольвентному множеству оператора A_0 , имеет место неравенство

$$\|(I - (1 - V)R(1, A_0))x\| \geq (1 + \lambda)\|x\|, \quad (1)$$

тогда A представляет собой в пространстве B инфинитезимальный оператор сжимающей сильно непрерывной полугруппы.

Доказательство. Для линейного оператора T , переводящего линейное пространство B в себя, известна следующая теорема об альтернативе [9, стр. 96]:

1) либо на области образов $R(T)$ существует обратный оператор T^{-1} ;

2) либо оператор T имеет нетривиальное решение.

Для существования оператора $(\lambda I - (A_0 + V))^{-1}$ в пространстве B на множестве образов линейного оператора $\lambda I - A$, где λ принадлежит резольвентному множеству оператора A_0 , $\lambda \in \rho(A_0)$, достаточно показать согласно теореме об альтернативе, что уравнение $[(\lambda I - (A_0 + V))]y = 0$ имеет только тривиальное нулевое решение.

Покажем, что второй пункт теоремы не имеет места.

Предположим обратное: пусть существует элемент $y \neq 0$, $R(\lambda, A)$, такой, что при любом $\lambda \in \rho(A_0)$

$$[(\lambda I - (A_0 + V))]y = 0 \text{ или } \|(\lambda I - A_0)y\| = \|Vy\|. \quad (2)$$

Так как существует оператор $(\lambda I - A_0)^{-1}$, то для $y \neq 0$, $(\lambda I - A_0)^{-1}z(\lambda)$ имеем $z(\lambda) \neq 0$ и $y = (\lambda I - A_0)^{-1}z(\lambda)$. Полагая в условии (1) $\lambda = 1$, перепишем соотношение (2) при $\lambda = 1$:

$$\|z(1)\| = \|VR(1, A_0)z(1)\| \geq 2\|z(1)\|, \quad \|z(1)\| \neq 0,$$

$$\|z(1)\| \geq 2\|z(1)\|.$$

Построенное противоречие указывает на существование ограниченного оператора $(\lambda I - (A_0 + V))^{-1}$, $\lambda \in \rho(A_0)$ (ограниченность оператора $(\lambda I - A)^{-1}$ устанавливаем далее) в пространстве B , предельного также левый обратный оператор для $\lambda I - (A_0 + V)$ [6, стр. 59]. Из существования левого ограниченного обратного оператора для $\lambda I - (A_0 + V)$ вытекает замкнутость оператора $\lambda I - (A_0 + V)$ [6, стр. 71], а следовательно, согласно определению замкнутого оператора и замкнутость $A = A_0 + V$.

Покажем, что норма оператора $R(\lambda, A)$ ограничена сверху величиной $\frac{1}{1-\lambda}$. Для этого будет использовано следующее резольвентное тождество:

$$R(\lambda, A_0) - R(1, A_0) = (1 - \lambda)R(\lambda, A_0)R(1, A_0)$$

$$\text{или } R(1, A_0) = R(\lambda, A_0)[I - (1 - \lambda)R(1, A_0)].$$

Из условия (1) следует:

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - (A_0 + V))R(1, A_0)y\| &= \|(\lambda I - A_0)R(1, A_0)y - VR(1, A_0)y\| = \\ &= \|(\lambda I - A_0)R(\lambda, A_0)[I + (\lambda - 1)R(1, A_0)]y - VR(1, A_0)y\| = \\ &= \|(I + (\lambda - 1 - V)R(1, A_0))y\| \geq (1 + \lambda)\|y\| - \|y\| = \lambda\|y\|, \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Наличие неравенства (3) указывает на существование в пространстве B ограниченного оператора $[(\lambda I - (A_0 + V))R(1, A_0)]^{-1}$ с нормой, не превосходящей величины $\frac{1}{\lambda}$ [5, стр. 55].

Кроме того, имеем

$$[(\lambda I - (A_0 + V)) R(1, A_0)]^{-1} = (I - A_0) [(\lambda I - (A_0 + V))]^{-1}.$$

Отсюда получаем, что

$$[\lambda I - (A_0 + V)]^{-1} = R(1, A_0) [(\lambda I - (A_0 + V)) R(1, A_0)]^{-1}.$$

ограниченный оператор и, следовательно, $\lambda \in \rho(A)$, причем

$$\begin{aligned} \|[\lambda I - (A_0 + V)]^{-1} y\| &\leq \|R(1, A_0)\| \cdot \|[(\lambda I - (A_0 + \\ &+ V)) R(1, A_0)]^{-1} \cdot \|y\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\|. \end{aligned}$$

Область $D(A)$ всюду плотна в B по условию.

Итак, A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ с нормой $\|T(t)\| \leq 1$ [3, стр. 667].

Теорема 2. Пусть A_0 — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы в банаховом пространстве B ограниченных

функций вещественного переменного $t \geq 0$ и $\int_s^t V(\tau) d\tau$, $0 \leq s \leq t < \infty$ — возмущающий, неограниченный, замкнутый оператор

Область определения его $D\left(\int_s^t V(\tau) d\tau\right)$ не зависит от t и всюду

плотна в B . Исключается, что норма $\left\| \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right\| = 1$.

Для того чтобы оператор $A = A_0 - \int_s^t V(\tau) d\tau$, для которого существует непустая, замкнутая область $Q = R(A) \cap B$, являлся инфинитезимальным оператором сжимающей полугруппы, достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n \quad (1)$$

на каждом элементе пространства B к операторной функции S нормой $\|S\| \leq 1$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве B произведение операторов:

$$\lambda I - (A_0 - \int_s^t V(\tau) d\tau) = (I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau) (\lambda I - A_0). \quad (5)$$

Так как $\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau$ ограничен, то можно оценить снизу

норму оператора $I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau$:

$$\|I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\| \geq \begin{cases} \|I\| - \|\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\|, \\ \text{если } \|\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\| < 1 \\ \|\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\| - \|I\|, \\ \text{если } \|\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\| < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Из условий (5), (6) следует существование в пространстве B обратных операторов:

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, A_0) (I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A),$$

$$\text{и } (I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau)^{-1}.$$

Теперь покажем, что из условия (4) следует

$$(I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n.$$

Рассмотрим случай, когда $\|\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\| > 1$, так как при

$$\|\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau\| < 1 \quad \text{разложение резольвенты} \quad (I - \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau)^{-1} \quad \text{в ряд общеизвестно.}$$

Для любого элемента $y \in B$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n y(t) = z(t) \in B.$$

Учитывая непрерывность оператора $\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau$, можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 (I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau) z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n y(t) + \\
 &+ \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n y(t) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n y(t) + \\
 &+ \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^{n+1} y(t) = \\
 &= y(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n y(t) + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^{n+1} y(t) = \\
 &= y(t) + \left[- \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau y(t) + \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^2 y(t) - \right. \\
 &- \left. \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^3 y(t) + \dots \right] + \left[\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau y(t) - \right. \\
 &- \left. \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^2 y(t) + \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^3 y(t) - \dots \right] = y(t).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z(t) = (I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau)^{-1} y(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right)^n y(t) = (I + \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau)^{-1} y(t)$$

и

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \|R(\lambda, A_0)\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\| \int_s^t V(\tau) R(\lambda, A_0) d\tau \right\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

тогда верно $D(A) = B$. Замкнутость оператора A можно доказать так же, как доказывалась замкнутость возмущенного оператора в теореме 1. Следовательно, A — искомый оператор.

Теорема 3. Для того чтобы $A = A_0 - V$ являлся инфинитезимальным оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы в банаховом пространстве B , где

A_0 — оператор, удовлетворяющий тем же условиям, что и в предыдущих теоремах,

V — неограниченный замкнутый оператор с областью определения $D(V) = D(A_0)$ и множеством значений $R(V) \subseteq B$, для которого на $R(V)$ существует обратный ограниченный оператор V^{-1} ; достаточно, чтобы норма ограниченного оператора $(VR(\lambda, A_0))^{-1}$ не превышала

$$\|(VR(\lambda, A_0))^{-1}\| < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор:

$$I + VR(\lambda, A_0) = VR(\lambda, A_0) [I + (VR(\lambda, A_0))^{-1}]. \quad (7)$$

Из условия теоремы следует, что

$$[I - (-VR(\lambda, A_0))^{-1}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(VR(\lambda, A_0))^{-1}]^n.$$

Тогда на основании (7) можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [I - (-VR(\lambda, A_0))^{-1}]^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(VR(\lambda, A_0))^{-1}]^n (VR(\lambda, A_0))^{-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(VR(\lambda, A_0))^{-1}]^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [(VR(\lambda, A_0))^{-1}]^m \\ \text{и поэтому} \quad \left\| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [(VR(\lambda, A_0))^{-1}]^m \right\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1. \end{aligned}$$

Из второго резольвентного уравнения [5, стр. 214] вытекает, что разность операторов

$$\begin{aligned} R(\lambda, A_0)R(\lambda, -VR(\lambda, A_0)) &= R(\lambda, A_0) [I + VR(\lambda, A_0)]^{-1} = \\ &= R(\lambda, A_0) [I - (-VR(\lambda, A_0))^{-1}]^{-1} (VR(\lambda, A_0))^{-1} \end{aligned}$$

представляет ограниченный резольвентный оператор $R(\lambda, A)$ с нор-

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \|R(\lambda, A_0)\| \cdot \left\| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [(VR(\lambda, A_0))^{-1}]^m \right\| \cdot \| (VR(\lambda, A_0))^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Область $D(A)$ всюду плотна в B по условию. Замкнутость оператора A обусловлена существованием его резольвентного оператора. Значит, A — производящий оператор сжимающей сильно непрерывной полугруппы в пространстве B .

Теорема 4. Пусть в гильбертовом пространстве H ограниченных функций $x(t)$ вещественного переменного $t \geq 0$ определен ограниченный замкнутый оператор V с областью определения $D(V) = D(A_0)$, где A_0 — производящий оператор сильно непрерывной сжимающей полугруппы $T^0(t)$. Тогда возмущенный оператор вида $A = A_0 - (VR(\lambda, A_0))^* V$, где $(VR(\lambda, A_0))^*$ — сопряженный оператор для $VR(\lambda, A_0)$, представляет собой также производящий оператор сжимающей сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ в H . Из неотрицательности оператора $T^0(t)$ получается неотрицательность полугруппы $T(t)$. Для $t \in (s, s + \frac{1}{2})$, $0 \leq s < \infty$ имеет место следующее представление полугруппы:

$$\begin{aligned} T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\int_s^t Id\tau - I \right) (\lambda R(\lambda, A) - I)^n \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} T(\tau) d\tau [I + \right. \\ \left. + (VR(\lambda, A_0))^* VR(\lambda, A_0)]^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Доказательство. Известно, что для ограниченного оператора в гильбертовом пространстве существует сопряженный ему оператор [6, стр. 85]. С помощью сопряженного оператора $(VR(\lambda, A_0))^*$ составим операторное тождество:

$$\lambda I - [A_0 - (VR(\lambda, A_0))^* V] = [I + (VR(\lambda, A_0))^* VR(\lambda, A_0)] (\lambda I - A_0) \quad (8)$$

Из теоремы о существовании для замкнутого оператора T со всюду плотной областью определения ограниченного, положительного, симметрического оператора $(I + T^* T^{-1} = B_0$ с нормой $\|B_0\| < 1$ [4, стр. 332] и условия (8) следует существование ограниченного резольвентного оператора для A :

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, A_0) [I + (VR(\lambda, A_0))^* VR(\lambda, A_0)]^{-1}, \|R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Замкнутость оператора A может быть доказана аналогично предыдущим случаям. Область $D(A) = H$. Значит, A — производящий

оператор некоторой сжимающей, сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ в H .

На основании известных формул, выражающих полугруппу $T(t)$ через резольвенту его производящего оператора A [5, стр. 367]

$$R(\lambda, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} T^0(\tau) d\tau [I + (VR(\lambda, A_0))^* VR(\lambda, A_0)]^{-1}$$

и условия $T^0(t)x(t) \geq 0$ при $x(t) \in H$, $x(t) \geq 0$ получаем неотрицательность полугруппы $T(t)$.

Укажем новую формулу, выражающую $T(t)$ через $T^0(t)$.

Известно, что корректное решение абстрактной задачи Коши (АК-11)

$$\lambda \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad x(s) = x_0 \quad 0 \leq s < t < \infty$$

определяется разрешающим оператором $(\lambda I - \int_s^t A d\tau)^{-1}$, представляющим собой полугруппу, соответствующую A [7, стр. 41, 64].

Выразим оператор $(\lambda I - \int_s^t A d\tau)$ через произведение операторов:

$$(\lambda I - \int_s^t A d\tau)x(t) = (\lambda I - A)(R(\lambda, A)\lambda - \int_s^t R(\lambda, A)A d\tau)x(t),$$

где замкнутый оператор $\lambda I - A$, не зависящий от t , можно вносить под знак интегрирования по t . Проведем следующие преобразования

$$\begin{aligned} (\lambda I - \int_s^t A d\tau)x(t) &= (\lambda I - A)[I + R(\lambda, A)A - \int_s^t R(\lambda, A)A d\tau]x(t) = \\ &= (\lambda I - A)[I + (\lambda R(\lambda, A) - I) - \int_s^t (\lambda R(\lambda, A) - I) d\tau]x(t) = \\ &= (\lambda I - A)[I - (\int_s^t I d\tau - I)(\lambda R(\lambda, A) - I)]x(t). \end{aligned}$$

Укажем одно из условий, при котором норма ограниченного

оператора $\left(\int_s^t d\tau - I\right) (\lambda R(\lambda, A) - I)x(t)$ не превосходит единицы

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_s^t I d\tau - I \right) (\lambda R(\lambda, A) - I)x(t) \right\| &\leq (t-s) \cdot \left\| 1 - \frac{1}{\lambda} \right\| \cdot \\ &\cdot (\|\lambda R(\lambda, A)\| + \|I\|) \cdot \|x(t)\| \leq 2(t-s) \|x(t)\| < \|x(t)\|. \end{aligned}$$

Для этого достаточно положить, чтобы $(t-s) < \frac{1}{2}$. Значит, при $t \in \left(s, s + \frac{1}{2}\right)$, $0 < s < \infty$ оператор $(\lambda I - \int_s^t A d\tau)^{-1}$ может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} (\lambda I - \int_s^t A d\tau)^{-1} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\int_s^t I d\tau - I \right) (\lambda R(\lambda, A) - \right. \\ &\left. - I) \right]^n \int_0^t e^{-\lambda \tau} T^0(\tau) [I + (VR(\lambda, A_0))^* VR(\lambda, A_0)]^{-1} x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, для каждого начального элемента $x_0 \geq 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} T^0(\tau) [I + (VR(\lambda, A_0))^* VR(\lambda, A_0)]^{-1} x_0 d\tau = q_0 \geq 0$$

и если

$$T^0(t)x_0 \geq 0,$$

$$(\lambda R(\lambda, A) - I)q_0 \leq \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} \|T_0(\tau)\| \cdot \|B_0\| q_0 d\tau = q - l_0 \leq 0,$$

$$\|T^0(t)\| \cdot \|B_0\| \leq 1.$$

Отсюда следует, что $\left(\int_s^t d\tau - I\right)l_0 \geq 0$. А на основании непрерывности функции $(t-s)l_0 - l_0$ по t и необращения ее в нуль при $0 < (t-s) < \frac{1}{2}$ вытекает, что

$$(\lambda R(\lambda, A) - I)((t-s)l_0 - l_0) \leq 0 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, построенное решение АЗК-II $T(t)x_0$ неотрицательное, если неотрицательна пологруппа $T^0(t)x_0$ для начального элемента $x_0 \geq 0$.

В заключение покажем, как можно сформулировать условия корректной разрешимости задачи Коши для уравнения с перемен-

этим оператором, используя возмущения полугрупп сжимающих операторов. В отличие от условий [6, стр. 179], обеспечивающих корректную постановку этой задачи Коши, найденные дают возможность построить конструкцию самого решения задачи. Способ доказательства этой теоремы проводится на основании метода теоремы возмущенных замкнутых операторов, распространенного на АЗК-II. Изложим коротко содержание этого метода.

Типа АЗК-I:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad x(0) = x_0 \quad t \in [0, T].$$

$A(t)$ — неограниченный замкнутый оператор с областью определения $D(A(t))$ и областью значений $R(A(t))$, принадлежащих одному и тому же банахову пространству B .

Область $D(A(t))$ всюду плотна в B и не зависит от t . Предполагается, что $A(t)$ — сильно непрерывная операторная функция, α — фиксированный нулю комплексный параметр. Решением АЗК является сильно непрерывная и непрерывно дифференцируемая на любом конечном интервале $[0, t] \subset [0, T)$ функция $x(t)$ со значениями из $D(A(t))$ при любых t .

Для АЗК-I строится более простая АЗК-II с постоянным оператором

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) \quad x(0) = x_0 \quad t \in [0, T],$$

где $A_0 = A(t_0)$, t_0 — некоторая точка из интервала $[0, T]$.

Абстрактные задачи Коши записываются в эквивалентной интегральной форме:

$$x(t) - L(t)x(t) = \alpha x_0, \quad L(t) = \int_0^t A d\tau, \quad (\alpha I - L_0)x(t) = \alpha x_0, \quad L_0 = \int_0^t A_0 d\tau.$$

Считаются известными условия корректной разрешимости АЗК-II. Если полугрупповой разрешающий оператор $aR(\alpha, L_0) = (\alpha I - L_0)^{-1}$ в пространстве B рассматривается замкнутый оператор $K = \Delta L(t)$.

$$K(\alpha, L_0), \quad \text{где } \Delta L(t) = \int_0^t \Delta A(\tau) d\tau, \quad \Delta A(t) \text{ — возмущающий оператор,}$$

такой, что $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$. Область значений оператора $R(\alpha, L_0)$ $H(R(\alpha, L_0))$ совпадает с областью определения $D(L_0)$ и $D(L_0) = D(\int_0^t \Delta A(\tau) d\tau) = D(\Delta A(t)) = D(A(t))$. Так как класс замкнутых операторов не является линейной системой, то предполагается замкнутость оператора $\Delta A(t)$. Отсюда вытекает замкнутость операторов $\Delta L(t)$ и K . Поскольку замкнутый оператор K определен на всем пространстве B , то он также является ограниченным и непрерывным. Для опре-

деления разрешающего оператора АЗК-1 $\alpha(\alpha I - L(t))^{-1}$ вводится связанное с оператором K следующее тождество:

$$\alpha I - L(t) = (I - K)(\alpha I - L_0)$$

и выясняется существование обратных операторов $(\alpha I - L(t))^{-1}$ или $(I - K)^{-1}$.

Теорема 5. Пусть в банаховом пространстве B ограниченные функций $x(t)$ вещественного переменного $t \geq 0$ задана АЗК-1 [2]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad \lim_{t \rightarrow s} x(t) = x_0(s) \quad 0 \leq s < t < \infty,$$

где $A(t) = A_0 - \Delta A(t)$, $A_0 = A(t)_{t=0}$, $t_0 \in (a, \infty)$, $D(A(t)) = D(A_0) = D(\Delta A(t))$ и A_0 — инфинитезимальный оператор сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Пусть в этом пространстве

определен ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t \Delta A(\tau) R(1, L_0) d\tau \right)^n$, сходящийся к ограниченному оператору $S(t, s)$ с нормой $\|S(t, s)\| \leq 1$. Тогда АЗК-1 корректно разрешима. Ее единственное решение определяется эволюционным оператором:

$$\begin{aligned} x(t, s) &= U(t, s) x_0(s) = \left(I - \int_s^t A(\tau) d\tau \right)^{-1} x_0(s) = R(1, L_0) \cdot \left(I - \int_s^t -\Delta A(\tau) R(1, L_0) d\tau \right)^{-1} x_0(s) = \\ &= R(1, L_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t \Delta A(\tau) R(1, L_0) d\tau \right)^n x_0(s). \end{aligned}$$

Доказательство. Из равномерно корректной разрешимости задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) \quad \lim_{t \rightarrow s} x(t) = x_0(s) \quad 0 \leq s < t < \infty$$

с постоянным инфинитезимальным оператором сжимающей полугруппы [7, стр. 64] следует корректность задачи Коши с параметром

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Theta A_0 x(t) \quad \lim_{t \rightarrow s} x(t) = x_0(s) \quad 0 \leq s < t < \infty,$$

где $\Theta = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$, $\lambda \in \sigma(A_0)$ [7, стр. 51]. Ее единственное решение определяется ограниченным разрешающим оператором $(\lambda I - \int_s^t A_0 d\tau)^{-1} = U(\lambda, t)$, причем известно, что для всех $0 < \lambda < 1$

$$\|U(\lambda, t)\| \leq 1 \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Покажем, что для любого $\mu \in \rho\left(\int_s^t A_0 d\tau\right)$ также имеет место неравенство $\|U(\mu, t)\| \leq \frac{1}{\mu}$. Вначале предположим, что $\lambda < 2\lambda$, $\lambda \in [0, 1]$. Так как операторы $R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)$, $R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)$ ограничены и, следовательно, определены на всем пространстве B , то справедливо равенство:

$$R(0, \int_s^t A_0 d\tau) - R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau) = (\mu - \lambda) R(0, \int_s^t A_0 d\tau) R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)$$

или

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)\| &\geq \|R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)\| - |\lambda - \mu| \cdot \|R(0, \int_s^t A_0 d\tau)\| \cdot \|R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)\| \\ &\geq \|R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)\| \cdot [1 - |\lambda - \mu| \cdot \|R(0, \int_s^t A_0 d\tau)\|]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)\| \leq \frac{\|R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)\|}{1 - |\lambda - \mu| \cdot \|R(0, \int_s^t A_0 d\tau)\|}$$

Положим $(\lambda - \mu) < \lambda$, так как $-\lambda < \mu - \lambda < \lambda$, $0 < \lambda < \mu < 2\lambda$. Предположим, что

$$\frac{\|R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)\|}{1 - |\lambda - \mu| \cdot \|R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)\|} < \frac{1}{\mu}. \quad (10)$$

тогда

$$\mu \|R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)\| \leq 1 - |\lambda - \mu| \cdot \|R(\lambda, \int_s^t A_0 d\tau)\|$$

$$2\mu - \lambda < \frac{1}{\|R(\lambda, L_0)\|}, \quad \mu \leq \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\|R(\lambda, L_0)\|}.$$

Отсюда следует, что если выбрать μ из правой полуокрестности точки λ , так, чтобы

$$\mu - \lambda \leq \frac{1}{2\|R(\lambda, L_0)\|} - \frac{\lambda}{2},$$

то выполнится при этом неравенство (10).

Далее, выбрав в качестве $\lambda_1 = \mu$, можно аналогично показать, что для $\lambda_1 < \mu_1 < 2\lambda_1$

$$\|R(\mu_1, \int_s^t A_0 d\tau)\| \leq \frac{1}{\mu_1} \text{ и т. д.}$$

Итак, при любом $\mu > 0$ существует для замкнутого оператора $\int_s^t A_0 d\tau$ со всюду плотной областью определения $D(L_0) = D(A_0)$ оператор $R(\mu, \int_s^t A_0 d\tau)$ с нормой, не превосходящей $\frac{1}{\mu}$. Значит, $\int_s^t A_0 d\tau$ представляет собой инфинитезимальный оператор некоторой сильно непрерывной полугруппы в пространстве B . Из инфинитезимального свойства оператора $\int_s^t A_0 d\tau$ и условия теоремы следует на основании теоремы 2 существование в пространстве B ограниченного резольвентного оператора для оператора

$$\int_s^t A(\tau) d\tau = \int_s^t A_0 dt - \int_s^t \Delta A(\tau) d\tau;$$

$$\begin{aligned} (I - \int_s^t A(\tau) d\tau)^{-1} &= R(1, \int_s^t A_0 d\tau) [I + \int_s^t \Delta A(\tau) R(1, \int_s^t A_0 d\tau)]^{-1} = \\ &= R(1, L_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t \Delta A(\tau) R(1, L_0) d\tau \right)^n, \end{aligned}$$

не превосходящего по норме единицы и представляющего собой разрешающий оператор АЗК-1. Из единственности существования

обратного, резольвентного оператора $(I - \int_s^t A(\tau) d\tau)^{-1}$ следует единственность решения АЗК-I:

$$x(t, s) = (I - \int_s^t A(\tau) d\tau)^{-1} x_0(s),$$

удовлетворяющего начальному условию $x_0(s)$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_s^t \Delta A(\tau) R(1, L_0) d\tau \right)^n$ относительно t и дифференцируемости полугруппы $U(t)$ по t $x(t, s)$, $x^1(t, s)$ непрерывны по t, s , а при $x_{0n}(t, s) \rightarrow 0$ равномерно независимы от t, s $\Delta_n(t, s) \rightarrow 0$.

Итак, АЗК-I равномерно корректна. Из равномерно корректной постановки следует, что $(I - \int_s^t A(\tau) d\tau)^{-1}$ — эволюционный оператор [7, стр. 237].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kato T. Perturbation theory. New York. Springer Verlag, 1966.
2. Ивинков В. Н. Абстрактная задача Коши и теория возмущения замкнутых операторов. Саратов, Приволжск., кн. изд., 1966.
3. Данфорд Н. Линейные операторы. М., «Иностранная литература», 1962.
4. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу. М., «Иностранная литература», 1954.
5. Хилле Е., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., «Иностранная литература», 1962.
6. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. М., «Наука», 1964.
7. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
8. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматиздат, 1963.
9. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Машин», 1969.

НЕАДИАБАТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КРАТКОВРЕМЕННОГО УДАРА

СОЛДАТОВ Г. П., старший преподаватель

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Рассматривается поведение газодинамических параметров газа за фронтом сильной ударной волны при истечении газа в вакуум в условиях некоторого теплового режима, допускающего автомодельность движения.

В 60-х годах внимание ряда исследователей было обращено на изучение автомодельного движения газа, которое характеризуется линейным распределением скорости по независимой автомодельной переменной и невозможностью определения показателя автомодельности по законам сохранения импульса и энергии. Трудность, связанная с определением показателя автомодельности, была ранее преодолена Гудерлеем в задаче о сходящихся цилиндрических и сферических ударных волнах; Бюргерсом были предложены примеры движений межзвездного газа с линейным распределением скорости. С другой стороны, в газодинамике интересно выяснить влияние различных начальных условий на решение уравнений.

Как меняются решения, соответствующие различным начальным условиям, с течением времени? Оказывается, что в плоском одномерном случае имеется решение уравнений газовой динамики, к которому стремятся решения с произвольными условиями. По характеру начальных физических условий, приводящих к такому роду движения, проблема была названа задачей о кратковременном плоском ударе [1]. Различные способы осуществления удара обсуждаются в книге [1]. Они сводятся к удару поршня или пластинки в газ или взрыву границы между газом и вакуумом.

Задача о движении газа, вызванном ударом, представляет математическую идеализацию процесса падения быстрых метеоритов на планеты, имеющие разреженную атмосферу, или на искусственные спутники Земли. Явления, наблюдающиеся при метеоритных ударах, могут быть описаны уравнениями газовой динамики, в силу того что относительная скорость метеоритов велика (для Земли она составляет несколько десятков километров в секунду) и в момент

удара они ведут себя подобно газу, так как энергия, получаемая веществом в момент удара, превышает энергию, необходимую для испарения вещества.

Понижение газа под действием удара в неоднородной атмосфере рассмотрено в работах [2, 3], а поправки к автомодельному движению, выражающие влияние начального малого давления газа перед фронтом волны, приведены в [4, 5, 6]. Важность физических явлений, приводящих к такому виду движения, и необходимость их изучения отмечались на Всесоюзных конференциях по механике жидкостей и газов [7, 8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим полупространство $x > 0$, заполненное газом с постоянной плотностью ρ_1 , начальными нулевой скоростью и нулевым давлением p_1 . Полупространство $x < 0$ — пустое, поверхность $x=0$ отделяет газ от вакуума.

В некоторый момент времени на поверхность $x=0$ действует быстро спадающее давление. В результате действия импульса давления образуется сильная ударная волна, распространяющаяся по невозмущенному газу. Положение ударной волны характеризуется функцией $x=R(t)$. В полупространстве $x \leq R(t)$ газ подвергается некоторому тепловому режиму, который характеризуется тем, что скорость изменения подводимой или отводимой энергии пропорциональна разности между энергией $\sigma_1 = p_1/\rho_1$ невозмущенного газа и энергией теплового режима:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\tau} \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) величина τ имеет размерность времени и зависит от скорости движения ударной волны.

Понижение, возникающее при ударе в плоском случае, удобно рассматривать в переменных m, t Лагранжа, где m — масса частицы, определяемая выражением $dm = \rho dx$.

Одномерное неуставившееся течение газа с вводом энергии описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \rho \frac{du}{dm} = -(\gamma - 1) \rho \frac{d\sigma}{dt},$$

где u — скорость, ρ — плотность, p — давление.

Необходимо найти решение уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющее условиям на сильной ударной волне:

$$u^2 = \frac{2}{\gamma + 1} R, \quad p_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1,$$

$$p_2 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \dot{R}^2 p_1 a_1^{-2}, \quad (1.3)$$

$$\Sigma_2 = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} R^2 \frac{p_1 a_1^{-2}}{p_1},$$

где R — координата, $\dot{R}$ — скорость ударной волны, $a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$ — квадрат скорости звука для невозмущенного газа.

2. Автомодельные уравнения. В уравнения (1.1), (1.2) введем автомодельную переменную $\eta = m/M$, $M = bt^n$ и новые функции по формулам:

$$u = c_0 t^\omega f(\eta), \quad z = c_1 t^\nu g(\eta), \quad p = c_2 t^\chi h(\eta),$$

$$\sigma = c_3 t^\nu \Sigma(\eta), \quad \tau^{-1} = (M/M_0) \tau_0^{-1}.$$

Воспользовавшись зависимостями $\omega = n-1$, $\chi = 0$, $\nu = 2(n-1)$, $C_1 = \rho_1$,

$$c_2 p_1^2 = b^2 n^2 p_1 a_1^{-2}, \quad \rho_1 c_3 = b^2 n^2 p_1 a_1^{-2},$$

являющимися следствиями условий (1.3), получим автомодельные уравнения:

$$\begin{aligned} -\eta \frac{df}{d\eta} + \frac{2}{\gamma-1} g^2 \frac{df}{d\eta} &= 0, \\ \frac{n}{n-1} f - \eta \frac{df}{d\eta} + \frac{dh}{d\eta} &= 0, \\ \frac{2(n-1)}{n} h - \eta \frac{dh}{d\eta} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} gh \frac{df}{d\eta} &= \frac{\gamma-1}{\tau_0} \Sigma, \\ \Sigma &= \beta_0 \eta^2, \quad \Delta = \tau_0^{-1} + 2(n-1)/n \end{aligned} \quad (2.1)$$

и граничные условия на ударной волне

$$\eta = 1, \quad f(1) = g(1) = h(1) = 1, \quad \Sigma(1) = \beta_0, \quad (2.2)$$

где β_0 — некоторая постоянная, характеризующая подвод или отвод энергии на поверхности ударной волны.

3. Решение автомодельных уравнений. Для произвольных значений γ , τ_0 , β_0 решение системы (2.1) с условиями (2.2) находится методом попыток. Аналитическое решение удастся получить для одного частного значения γ_0 отношения удельных теплоемкостей газа:

$$f = a_0 \eta^{A_0} + b_0, \quad g = \eta^{1-A_0}, \quad h = \eta, \quad \Sigma = \beta_0 \eta^{A_0}. \quad (3.1)$$

Подставив значения (3.1) в системы (2.1), (2.2), получим

$$a_0 = -1/2 [1 + (\gamma_0 - 1)\beta_0], \quad b_0 = -1/\Delta_0, \\ \Delta_0 = -\frac{1}{\gamma_0} = \frac{n_0 - 1}{n_0} = \frac{\gamma_0 - 1}{2 - \gamma_0 + (\gamma_0 - 1)\beta_0}, \\ \gamma_0 = 1 + \frac{1}{2\beta_0} \{2\beta_0 - 5 \pm \sqrt{(2\beta_0 - 5)^2 + 8\beta_0}\}.$$

Например, если $\beta_0 = 1$, то

$$f = a_0 \eta^{\Delta_0} + b_0, \quad g = \eta^{1-\Delta_0}, \quad h = \eta, \quad \Sigma = \eta^{\Delta_0}, \\ a_0 = -\gamma_0/2, \quad b_0 = 1/(\gamma_0 - 1), \quad \gamma_0 = (\sqrt{17} - 1)/2, \\ \Delta_0 = -\frac{1}{\gamma_0} = \frac{n_0 - 1}{n_0} = -(\gamma_0 - 1).$$

Рассматриваемая задача относится к автомодельным движениям, в которых показатель автомодельности n не определяется по законам сохранения импульса и энергии. Показатель n ищут методом попыток, численно. Этот метод состоит в определении решения уравнений (2.1), которые можно записать в виде

$$\eta \Delta_1 g' = \frac{2}{\gamma - 1} g' \Delta_1, \quad \Delta_1 f' = \Delta_2, \\ \eta \Delta_1 h' = \frac{n-1}{n} f \Delta_1 + \eta \Delta_2, \\ \Delta_1 = \eta^2 = -\frac{2\gamma}{\gamma-1} g h, \\ \Delta_2 = \frac{n-1}{n} f \eta - \frac{\gamma-1}{\gamma} g \Sigma + \frac{2(n-1)}{n} h,$$

проходящего через особую точку. Необходимо найти такое значение n , чтобы в точке $\eta = \eta_*$, в которой $\Delta_1 = 0$, равнялся бы нулю и определитель Δ_2 . Легко проверить, что решение (3.1) обладает этим свойством. Показатель автомодельности равен

$$n = n_0 = \frac{1 + (\gamma_0 - 1)(\beta_0 - 1)}{\gamma_0 + (\gamma_0 - 1)(\beta_0 - 1)}.$$

Общий характер движения аналогичен автомодельному движению без учета теплового режима. Из формул

$$f = a_0 N + b_0, \quad g = N^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad h = N^{\Delta_0}, \quad \Sigma = \beta_0 N, \\ N = 1 + \frac{(\gamma_0 - 1)\Delta_0}{\gamma_0 - 1} (\xi - 1),$$

Аналогично рассуждая, для 3-го года получим:

$$N_1 p_3 + (N_2 - N_1 + N_1 p_1) p_2 + [N_3 - N_2 + (N_2 - N_1 + N_1 p_1) p_1] p_1 = M_3.$$

Обозначая N_k^* — количество приборов, введенных в k -м году для n лет получим систему уравнений для определения p_k :

$$\begin{cases} N_1 p_1 = M_1, \\ N_1 p_2 + N_2^* p_1 = M_2, \\ N_1 p_3 + N_2^* p_2 + N_3^* p_1 = M_3, \\ \dots \\ N_1 p_n + N_2^* p_{n-1} + N_3^* p_{n-2} + \dots + N_n^* p_1 = M_n, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{cases} N_2^* = N_2 - N_1 + N_1 p_1, \\ N_3^* = N_3 - N_2 + N_2^* p_1, \\ \dots \\ N_n^* = N_n - N_{n-1} + N_{n-1}^* p_1. \end{cases} \quad (2)$$

Решая одновременно системы (1) и (2), можно последовательно определить все p_k и N_k^* .

Систему (1) можно упростить, если отбросить члены со степенью выше второй. В этом случае получим линейную систему:

$$\begin{cases} N_1 p_1 = M_1, \\ N_1 p_2 + (N_2 - N_1) p_1 = M_2, \\ \dots \\ N_1 p_n + (N_2 - N_1) p_{n-1} + \dots + (N_n - N_{n-1}) p_1 = M_n. \end{cases} \quad (3)$$

Последовательно складывая все уравнения, окончательно имеем

$$\begin{cases} N_1 p_1 = M_1, \\ N_1 p_2 + N_2 p_1 = M_1 + M_2, \\ N_1 p_3 + N_2 p_2 + N_3 p_1 = M_1 + M_2 + M_3, \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n N_k p_{n-k+1} = \sum_{k=1}^n M_k. \end{cases} \quad (4)$$

Если разность $1 - \sum_{k=1}^n p_k$ есть величина порядка $\frac{1}{n^2}$, то $E(n)$ определится с точностью до $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Отсюда видно, что чем больше срок наблюдения, тем точнее определяется средний срок службы прибора за n лет. Истинный средний срок теоретически подсчитывается по формуле: $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E(n)$.

Часто на практике встречаются моменты, когда срок наблюдения сравнительно мал, а величину E требуется знать в интересах планирования производства. В частности, это имеет место при $n < E$. В этом случае распределение вероятностей p_k считаем близким к некоторой кривой $y = f(x)$; тогда

$$E = \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx,$$

где вид функции $f(x)$ определяется при качественном изучении графика распределения, пределы x_1 и x_2 задаются функцией $y = f(x)$.

Наиболее распространенным распределением является нормальное, плотность которого $\Phi(x, E, \sigma)$ дается равенством

$$\Phi(x, E, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-E)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (5)$$

Величину E в равенстве (5) будем считать средним сроком службы прибора (σ — среднеквадратичное отклонение). Наша задача — найти такую кривую нормального распределения, которая бы наименее уклонялась от вычисленных значений p_k . Следовательно, задача сводится к отысканию min суммы

$$S = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{(k-E)^2}{2\sigma^2} \right) - p_k \right]^2. \quad (6)$$

Тогда, приравнявая к нулю соответственно $\frac{\partial S}{\partial E}$ и $\frac{\partial S}{\partial \sigma}$, получим:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(k-E)^2}{2\sigma^2} \right] - p_k \right\} \exp \left[-\frac{(k-E)^2}{2\sigma^2} \right] (k-E) = 0, \\ \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(k-E)^2}{2\sigma^2} \right] - p_k \right\} \exp \left[-\frac{(k-E)^2}{2\sigma^2} \right] [(k-E)^2 - \sigma^2] = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Если обозначить

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(k-E)^2}{2\sigma^2} \right] - p_k = \Delta p_k,$$

то система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_1^n \Delta p_k (p_k + \Delta p_k) (k - E) = 0, \\ \sum_1^n \Delta p_k (p_k + \Delta p_k) [(k - E)^2 - \sigma^2] = 0, \end{cases} \quad (8)$$

или

$$\begin{cases} E = \frac{\sum_1^n \Delta p_k (p_k + \Delta p_k) k}{\sum_1^n \Delta p_k (p_k + \Delta p_k)}, \\ \sigma^2 = \frac{\sum_1^n \Delta p_k (p_k + \Delta p_k) (k - E)^2}{\sum_1^n \Delta p_k (p_k + \Delta p_k)}. \end{cases} \quad (9)$$

Отбрасывая члены второго порядка относительно Δp_k , получим:

$$\begin{cases} E = \frac{\sum_1^n \Delta p_k p_k k}{\sum_1^n \Delta p_k p_k}, \\ \sigma^2 = \frac{\sum_1^n \Delta p_k p_k (k - E)^2}{\sum_1^n \Delta p_k p_k}. \end{cases} \quad (10)$$

Если в системе (10) отклонения Δp_k считать по абсолютной величине равными, то для определения величин E и σ получим два уравнения, контролирующие друг друга:

$$E = \frac{\sum_1^n (-1)^{l_k} p_k k}{\sum_1^n (-1)^{l_k} p_k}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum_1^n (-1)^{l_k} p_k (k - E)^2}{\sum_1^n (-1)^{l_k} p_k},$$

где показатель l_k соответствует знаку Δp_k .

К ТЕОРЕМЕ Н. Н. МЕЙМАНА О СДВИГАХ

РУНИЧ А. А., аспирант

(Саратовский сельскохозяйственный институт)

1 Представляет большой интерес как сам по себе, так и по своим приложениям ответ на следующий вопрос: как изменяются свойства функции $\sin \pi z$, если сдвинуть нули этой функции на ограниченную величину?

Н. Н. Мейману [1] принадлежит следующая теорема.

Теорема. Пусть последовательность $\{\xi_k\}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ получается из последовательности нулей функции $\sin \pi z$ путем вещественных сдвигов нулей:

$$\xi_k = (k + \delta(k)) \frac{\pi}{\sigma}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad (1)$$

$$-\infty < a \leq \delta(k) \leq b < \infty, \quad (2)$$

$$|k(\delta(k+1) - \delta(k))| \leq c < \infty, \quad (3)$$

и пусть $V(z; \{\xi_k\})$ — целая функция с нулями в точках ξ_k :

$$V(z; \{\xi_k\}) = (z - \delta(0)) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z - \delta(-k)\pi}{k\pi} \right) e^{-\frac{\sigma z - \delta(-k)\pi}{k\pi}} \times \\ \times \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma z - \delta(k)\pi}{k\pi} \right) e^{\frac{\sigma z - \delta(k)\pi}{k\pi}}. \quad (4)$$

Функция $V(z; \{\xi_k\})$ обладает следующими свойствами:

- 1) $V(z)$ — целая функция типа σ с индикатриссой $h(\varphi) = \sigma / \sin \varphi$;
- 2) на вещественной оси

$$V(x; \{\xi_k\}) = \prod_{j=1}^{\infty} (x - a_{[x]+j}) \cdot B(x; \{\xi_k\}) \exp \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\pi} \right]} \frac{\delta(-k) - \delta(k)}{k}, \quad (5)$$

где $l = \max \{ \lfloor |a| \rfloor + 1, \lfloor |b| \rfloor + 1 \}$, $a_{[x]+j}$ — ближайшие к точке x , $2l+1$ точка ξ_k , а целая функция $B(x; \{\xi_k\})$ ограничена на вещественной оси сверху и снизу:

$$\alpha(a; b) < B(x; \{\xi_k\}) < \beta(a; b). \quad (6)$$

2. В теореме Н. Н. Меймана на сдвиги наложено стеснительное условие (3). Освобождение теоремы от этого условия позволило нам предложить теорему, в которой сдвиги только ограничены.

Теорема. Пусть $\delta(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям $-\infty < a \leq \delta(x) \leq b < \infty$, и пусть имеется функция:

$$V(x) = (x - \delta(0)) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sigma x - \delta(-k)\pi}{k\pi} \right) e^{-\frac{\sigma x(-\delta) - k\pi}{k\pi}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma x - \delta(k)\pi}{k\pi} \right) e^{\frac{\sigma x - \delta(k)\pi}{k\pi}}. \quad (7)$$

Тогда

$$V(x) = \prod_{j=-l}^l (x - a_{[x]+j}) B(x; \{\xi_k\}) \cdot C(x) \exp \sum_{k=1}^{\lfloor |x| \rfloor} \frac{\delta(-k) - \delta(k)}{k}, \quad (8)$$

где $l = \max \{ \lfloor |a| \rfloor + 1, \lfloor |b| \rfloor + 1 \}$, $a_{[x]+j}$ — ближайшие к точке x слева и справа нули функции $V(x)$, $B(x; \{\xi_k\})$ ограничена на вещественной оси сверху и снизу:

$$\alpha(a; b) < B(x; \{\xi_k\}) < \beta(a; b),$$

а функция $C(x)$ ограничена в смысле роста:

$$|x|^{a-b} \leq |C(x)| \leq |x|^{b-a}. \quad (9)$$

3. Доказательство: Условия теоремы симметричны относительно знака x , поэтому достаточно доказать ее при $x > 0$. Без уменьшения общности можно считать, что $\sigma = \pi$. Будем считать, что $x > 2l+1$.

Все величины, ограниченные при $x \rightarrow \infty$, будем обозначать $O(1)$, в случаях, когда не нужно их явное выражение. При оценке сумм будем исходить из тождества:

$$\sum_{m_1}^{m_2} f(k) = \int_{m_1}^{m_2} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2} [f(m_1) + f(m_2)] + \\ + \sum_{k=m_1}^{m_2-1} \left[\frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{2} f(k+1) - \int_k^{k+1} f(\tau) d\tau \right]. \quad (10)$$

Интеграл удается оценить, а сумма справа есть не что иное, как погрешность при вычислении интеграла по формуле трапеций, и оказывается достаточно малой, так как

$$\left| \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{2} f(k+1) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right| < \max_{k < x < k+1} |f''(x)|. \quad (11)$$

Логарифмируя и производя соответствующие преобразования, получим:

$$\ln |V(x)| = O(1) - 2l \ln x + \sum_{k=1}^{[x]} \frac{\delta(-k) - \delta(k)}{k} + \\ + \ln \prod_{j=-l}^l |x - a_{[x]+j}| + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i, \quad (12)$$

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(1 + \frac{x - \delta(-k)}{k} \right),$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(\frac{x - \delta(k)}{k} - 1 \right),$$

$$\sigma_3 = \sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{k - \delta(-k)} \right) - \frac{x}{k} \right\},$$

$$\sigma_4 = \sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{x}{k + \delta(k)} \right) + \frac{x}{k} \right\}.$$

Используя условие (2) ограниченности сдвигов, можно записать:

$$\sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(1 + \frac{x-b}{k} \right) \leq \sigma_1 \leq \sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(1 + \frac{x-a}{k} \right),$$

$$\sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(\frac{x-b}{k} - 1 \right) \leq \sigma_2 \leq \sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(\frac{x-a}{k} - 1 \right),$$

$$\sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{k-a} \right) - \frac{x}{k} \right) \leq \sigma_3 \leq \sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{k-b} \right) - \frac{x}{k} \right\},$$

$$\sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{x}{k+a} \right) + \frac{x}{k} \right\} \leq \sigma_4 \leq \sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{x}{k+b} \right) + \frac{x}{k} \right\}$$

При оценке левых и правых частей неравенств используем тождество (10) и оценку (11).

Оценим σ_1 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(1 + \frac{x-b}{k} \right) &= 2x \ln 2 - \ln x + O_1(1) + \frac{1}{2} \ln x + \\ &+ O_2(1) + O_3(1) = 2x \ln 2 - \frac{1}{2} \ln x + O(1). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(1 + \frac{x-a}{k} \right) = 2x \ln 2 - \frac{1}{2} \ln x + O(1),$$

или

$$\sigma_1 = 2x \ln 2 - \frac{1}{2} \ln x + O(1).$$

Оценим σ_2 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(\frac{x-b}{k} - 1 \right) &= (l-b) \ln x + O_1(1) + O_2(1) + O_3(1) = \\ &= (l-b) \ln x + O(1). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\sum_{k=1}^{[x]-l-1} \ln \left(\frac{x-a}{k} - 1 \right) = (l-a) \ln x + O(1),$$

или

$$(l-b) \ln x + O(1) \leq \sigma_2 \leq (l-a) \ln x + O(1).$$

Оценим σ_3 :

$$\begin{aligned} \sum_{[x]+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{k-a} \right) - \frac{x}{k} \right\} &= x - 2x \ln 2 + O_1(1) + O_2(1) + \\ &+ O_3(1) = x - 2x \ln 2 + O(1). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sum_{\{x\}+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{k-b} \right) - \frac{x}{k} \right\} = x - 2x \ln 2 + O(1),$$

$$\sigma_3 = x - 2x \ln 2 + O(1).$$

Оценим σ_4 :

$$\begin{aligned} \sum_{\{x\}+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{x}{k+a} \right) + \frac{x}{k} \right\} &= (l+1+a) \ln x - x + O_1(1) - \\ &- \frac{1}{2} \ln x + O_2(1) + O_3(1) = \left(l + \frac{1}{2} + a \right) \ln x - x + O(1). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sum_{\{x\}+l+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{x}{k+b} \right) + \frac{x}{k} \right\} = \left(l + \frac{1}{2} + b \right) \ln x - x + O(1),$$

$$\left(l + \frac{1}{2} + a \right) \ln x - x + O(1) \leq \sigma_4 \leq \left(l + \frac{1}{2} + b \right) \ln x - x + O(1).$$

Подставляем полученные оценки в (12). Теорема доказана.

4. Доказательство этой теоремы основано на доказательстве теоремы Н. Н. Меймана о сдвигах, с которым мы ознакомились в разделе (оно не было опубликовано). В предложенной нами теореме избавление от условия гладкости происходит за счет некоторого ухудшения оценок (8) и (9) по сравнению с оценками (5) и (10), что тем не менее позволяет пользоваться ею в различных приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейман Н. Н. О полноте нулей целых функций. ДАН СССР, 141, № 4, (1961).

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ

РУНИЧ А. А., аспирант

(Саратовский сельскохозяйственный институт)

В работе рассматриваются характеристики для одного класса целых функций экспоненциального типа, имеющие то же значение, что и для полинома его степень. Впервые такие характеристики дал Н. Н. Мейман [1], [2] для последовательностей с некоторыми стеснительными условиями, наложенными на сдвиги. Рассматривались монотонные последовательности вещественных точек, получаемые из последовательности целых чисел с помощью сдвигов, которые являются значениями некоторой ограниченной и гладкой функции.

Покажем, что некоторые теоремы, предложенные Н. Н. Мейманом, имеют место и для сдвигов, получаемых из произвольной, ограниченной на вещественной оси функции.

Определение. Монотонную последовательность вещественных точек $\{\xi_k\}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ будем называть регулярной с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$, если точки ξ_k допускают представление

$$\xi_k = (k + \delta(k)) \frac{\pi}{\sigma},$$

где сдвиги $\delta(k)$ удовлетворяют условию:

$$-\infty < a \leq \delta(k) \leq b < \infty,$$

а p — наименьшее целое положительное число, при котором величина

$$\chi(N) = \sum_{k=1}^N \frac{a - b + \psi(-k) - \delta(k)}{k} + 2p \ln N$$

ограничена снизу.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — целая вещественная функция экспоненциального типа не выше σ , $L_f = \sup |f(x)| < \infty$, $-\infty < x < \infty$ и

точки регулярной последовательности $\{\xi_k\}$ с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$ являются ее нулями.

Если функция $f(z)$ не сводится тождественно к нулю, то $f(z)$ имеет не более $2p$ нулей, отличных от точек $\{\xi_k\}$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что число нулей функции $f(z)$, отличных от точек $\{\xi_k\}$, больше $2p$. Из этого числа выделим любые $2p$ нулей и построим функцию:

$$V_1(z; \{\xi_k\}) = g(z) \cdot (z - \delta(0)) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sigma z - \delta(-k)\pi}{k\pi}\right) e^{-\frac{\sigma z - \delta(-k)\pi}{k\pi}} \times \\ \times \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma z - \delta(k)\pi}{k\pi}\right) e^{\frac{\sigma z - \delta(k)\pi}{k\pi}},$$

где $g(z)$ — вещественный полином степени $2p$ с выделенными нулями, а остальная часть — целая функция типа σ с нулями в точках $\{\xi_k\}$.

Построим вспомогательную функцию:

$$\varphi(z) = f(z) : V_1(z; \{\xi_k\}).$$

Очевидно, $\varphi(z)$ есть целая функция не выше минимального типа.

Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)/x^\sigma$ при $x \rightarrow \infty$, существование которого обусловлено построением функции $\varphi(z)$.

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)/x^\sigma$ отличен от бесконечности и $f(z)$ не сводится тождественно к нулю, то число нулей функции $f(z)$, отличных от точек $\{\xi_k\}$, не более $2p$, что и требуется доказать.

Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(x)| = \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Знаменатель этого выражения обращается в нуль только в тех точках x , в которых и числитель обращается в нуль. Предел знаменателя отличен от нуля, поэтому равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(x)| = \infty$ возможно только в том случае, когда $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$, что противоречит условию:

$$L_f = \sup |f(x)| < \infty, \quad -\infty < x < \infty.$$

Следовательно, наше предположение не верно и теорема доказана.

Замечание. Интересен тот случай, когда мы имеем дело с монотонной последовательностью вещественных точек, регулярной с обобщенной характеристикой $(\sigma; 0)$. Тогда имеет место следующее.

Если функция $f(z)$ — целая вещественная экспоненциального типа не выше σ , $L_f = \sup |f(x)| < \infty$, $-\infty < x < \infty$, имеет своими нулями все точки регулярной последовательности $\{\xi_k\}$ с обобщенной характеристикой $(\sigma; 0)$, то все ее корни вещественны и совпадают с точками $\{\xi_k\}$.

Это следствие является аналогом теоремы о совпадении числа корней полинома с его степенью, но приведенной для определенного класса целых функций.

Воспользуемся определением, предложенным Н. Н. Мейманом [2].

Определение. Пусть $\{a\}$ — последовательность нулей некоторой функции $f(z)$. Если из этой последовательности можно удалить q точек так, что оставшиеся нули будут перемежаться с последовательностью $\{\xi\}$, то будем говорить, что число нетривиальных нулей функции $f(z)$ относительно последовательности $\{\xi\}$ равно q .

Пусть имеется регулярная последовательность с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$. Очевидно, что последовательность $\{\xi_k\} = \left\{ \frac{1}{2} (\xi_k + \xi_{k-1}) \right\}$ также будет регулярной с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$. Следуя Н. Н. Мейману, введем функции:

$$u(\sigma; \{\xi\}) = v(\sigma; \{\eta\}), \quad u_1 = R_{2p}(\sigma) v(\sigma), \quad u_1 = Q_{2p}(\sigma) u(\sigma),$$

где $R_{2p}(\sigma)$ и $Q_{2p}(\sigma)$ — произвольные вещественные полиномы степени $2p$ с комплексными нулями, принимающие значения разного знака на вещественной оси. Тогда функция $\omega(\sigma) = u_1(\sigma) + i v_1(\sigma)$ согласно теореме VI. 18 из [3] принадлежит классу B с p нулями в верхней полуплоскости.

Теперь можно предложить теоремы, аналогичные теоремам, предложенным Н. Н. Мейманом [2], но распространенные на регулярные последовательности с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$.

Теорема 2. Пусть $f(\sigma)$ — целая вещественная функция экспоненциального типа не выше σ , $L_f = \sup |f(x)| < \infty$, $-\infty < x < \infty$.

Если во всех точках некоторой регулярной последовательности $\{\xi_k\}$ с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$ для некоторой функции $u(\sigma) = v\left(\sigma; \left\{ \frac{1}{2} (\xi_k + \xi_{k-1}) \right\}\right)$ выполняется неравенство $f(\xi) : u_1(\xi) < 1$, то все нули разности $u(\sigma) - f(\sigma)$, за исключением, быть может, $2p$ нулей, вещественны и перемежаются с точками $\{\xi_k\}$.

Доказательство. Доказательство аналогично предложенному Н. Н. Мейманом для теоремы 2 в [2].

Теорема 3. Если в соседних точках некоторой регулярной последовательности $\{\xi\}$ с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$ целая вещественная функция $f(\sigma)$ экспоненциального типа не выше σ , ограниченная на вещественной оси, принимает значения разных знаков или, что более общо, во всех точках ξ , в которых $f(\sigma) \neq 0$, отношение $f(\xi) : u_1(\xi)$ имеет один и тот же знак, то функция имеет не более $2p$ нетривиальных нулей относительно последовательности $\{\xi\}$.

Доказательство. В силу того что отношение $f(\xi) : u_1(\xi)$

имеет один и тот же знак во всех точках ξ , мы можем выбрать такое действительное λ , что $0 \leq \lambda f(\xi) : u_1(\xi) < 1$. Тогда вспомогательная функция $f_1(z) = u_1(z) - \lambda f(z)$ является целой вещественной функцией экспоненциального типа не выше σ , $L_{f_1} = \sup |f_1(x)| < \infty$, $-\infty < x < \infty$, и все точки регулярной последовательности с обобщенной характеристикой $(\sigma; p)$ являются ее нулями. Следовательно, вспомогательная функция $f_1(z)$ имеет не более $2p$ нулей, отличных от точек $\{\xi\}$, и поэтому функция $f(z) = \lambda^{-1}[u_1(z) - f_1(z)]$ имеет не более $2p$ нетривиальных нулей относительно последовательности $\{\xi\}$.

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $f(z)$ — целая вещественная функция экспоненциального типа не выше σ , $L_f = \sup |f(x)| < \infty$, $-\infty < x < \infty$ и $\{\xi\}$ — регулярная последовательность с обобщенной характеристикой $(\sigma; 0)$.

Если $f(z)$ принимает значения попеременно разного знака на множестве, состоящем из точек x_1, x_2 и последовательности $\{\xi\}$, то $f(z)$ тождественно равна нулю.

Доказательство. Если из множества $\{x_1, x_2, \{\xi\}\}$ удалять две любые соседние точки, то оставшаяся последовательность будет по определению регулярной с обобщенной характеристикой $(\sigma; 0)$. Так как функция $f(z)$ принимает значения попеременно разного знака на множестве $\{x_1, x_2, \{\xi\}\}$, то число нетривиальных нулей функции $f(z)$ относительно оставшейся последовательности не меньше 2, что невозможно, если только $f(z)$ тождественно не равна нулю. Следовательно, $f(z)$ тождественно равна нулю и теорема доказана.

Эта теорема аналог того, что полином степени n не может принимать значения попеременно разного знака в $n + 2$ точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейман Н. Н. Несколько теорем о нулях и экстремальных свойствах целых функций. ДАН СССР, 140, № 4, 1961.
2. Мейман Н. Н. О полноте нулей целых функций. ДАН СССР, 141, № 4, (1961).
3. Чебитарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Труды математического института имени В. А. Стеклова, т. 26, 1949.

РАСЧЕТ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВОЙ КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

ПАТРУШЕВ В. Л., доктор технических наук
(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Ранее автором было показано, что, пользуясь методом криволинейных координат, можно вычислить собственную частоту колебаний четвертьволновой коаксиальной линии с бесконечно тонким центральным проводником. Развивая этот метод, мы убедились в возможности рассчитать электромагнитное поле и собственную частоту четвертьволновой коаксиальной линии с центральным стержнем конечных размеров. Результаты такого расчета изложены в данной статье.

Определение координатных функций

Рассмотрим четвертьволновую коаксиальную линию, отнесенную к цилиндрической системе координат r, z, α (рис. 1). Обозначим радиус внешнего цилиндра r_0 , радиус внутреннего проводника r_1 и длину его l .

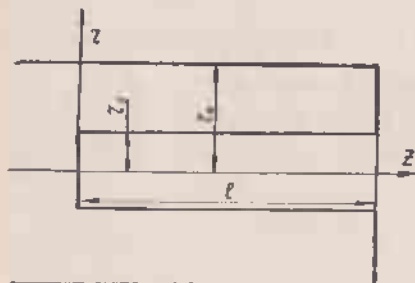


Рис. 1.

Для упрощения дальнейших расчетов построим новую систему координат ξ, η, α , в которой координатная поверхность $\xi=0$ образуета бы поверхность внешнего цилиндра, $\xi=1$ — поверхность внутреннего проводника, а $\eta=\eta_0$ — поверхность диска закорачивающего коаксиальную линию (рис. 2 а). Для построения такой системы координат расположим фигуру аксиального сечения изучаемой коаксиальной ли-

нии в некоторой комплексной плоскости $x = z + jr$ так, как это указано на рис. 2 а. Далее отобразим конформно заштрихованную область комплексной плоскости x на верхнюю полуплоскость $\bar{w}$ (рис. 2 б). Такое отображение по формуле Шварца—Кристоффеля осуществляет функция

$$z + jr = A \int \frac{\sqrt{(\bar{w} + 1)(\bar{w} + \eta)}}{\bar{w}(\bar{w} - 1)} d\bar{w} + C, \quad (1)$$

где $1, \eta$ — соответственно координаты точек 1 и 2 на плоскости $\bar{w}$; A и C — постоянные, определяемые в дальнейших расчетах.

Если на верхнюю полуплоскость $\bar{w}$ отобразить еще бесконечно

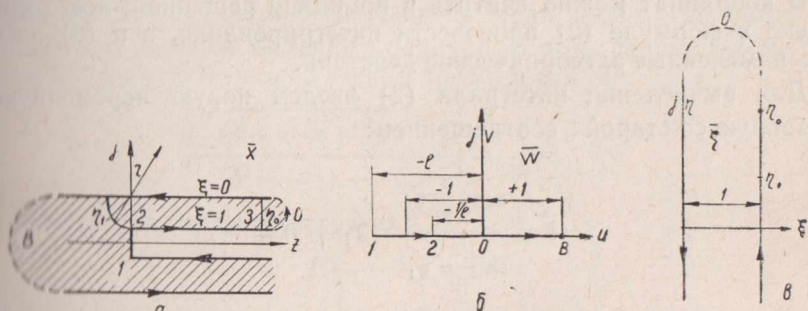


Рис. 2.

маленькую полосу шириной, равной единице комплексной плоскости $x = z + jr$, то такое конформное отображение осуществляет функция $w = e^{j\xi}$. Подставляя последнее соотношение в подынтегральную функцию формулы (1), имеем

$$z + jr = \pi A \int \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{2} \bar{\xi} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \eta_1}}{\sin \frac{\pi}{2} \bar{\xi}} d\bar{\xi} + C, \quad (2)$$

где η_1 — координата точки 2 на плоскости $\bar{\xi}$.

Полученная формула (2) является основной функциональной зависимостью, позволяющей отобразить однозначно любую точку плоскости $\bar{\xi}$ на заштрихованную область плоскости x . Следовательно, координатная сетка плоскости $\bar{\xi}$ перейдет в сложную систему криволинейных координатных линий на плоскости x . Масштабный множитель этой криволинейной системы координат h_0 определится

как модуль подынтегрального выражения (2), то есть

$$h_0 = \left| \pi A \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{2} \xi + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \eta_1}}{\sin \frac{\pi}{2} \xi} \right| \quad (3)$$

Если к образованной криволинейной системе координат добавить третью координату α (угол вращения около оси z), то получим пространственную систему координат, координатные поверхности которой образуют проводящие поверхности четвертьволновой коаксиальной линии.

Таким образом, задачу построения нужной криволинейной системы координат можно считать в принципе решенной, необходимо только в формуле (2) произвести интегрирование, а в (3) закончить намеченные алгебраические действия.

Для вычисления интеграла (2) введем новую переменную $\bar{t}$, связанную со старой ξ соотношением:

$$\bar{t} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \xi}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \eta_1} = t_1 + jt_2,$$

где

$$t_1 = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \xi \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \eta_1},$$

$$t_2 = - \frac{\sin \frac{\pi}{2} \xi \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \eta_1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \eta_1}.$$

После введения новой комплексной переменной $\bar{t}$ интеграл (2) примет вид:

$$z + jr = 2A \int \frac{\sqrt{1 + \bar{t}^2}}{\bar{t}^2 - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \eta_1}} d\bar{t} + C.$$

Рассчитывая последний интеграл, имеем

$$z + jr = 2A \cdot \ln \left(\bar{t} + \sqrt{1 + \bar{t}^2} \right) - A \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1 \cdot$$

$$\cdot \ln \frac{\sqrt{1 + \bar{t}^2} + \bar{t} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1}{\sqrt{1 + \bar{t}^2} - \bar{t} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1} + C. \quad (4)$$

Постоянную интегрирования C легко определить, если начало координат совместить с концом центрального стержня, то есть $r = 0$ и $z = 0$ при $\xi = 1$ и $\eta = 0$. В этом случае $\bar{t} = 0$ и из уравнения (4) следует $C = 0$.

Постоянная A может быть найдена, если проинтегрировать (1) по окружности очень большого радиуса. В этом случае $\bar{w} = Re^{j\varphi}$ и поинтегральную функцию можно представить так:

$$\frac{\sqrt{(w+e)(\bar{w}+1/e)}}{\bar{w}(\bar{w}-1)} \approx \frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{R} e^{-j\varphi}.$$

Тогда из формулы (1) следует

$$j(r_0 - r_1) = j\pi A.$$

$$A = \frac{r_0 - r_1}{\pi}.$$

Подставляя в формулу (4) найденные значения C и A , получим

$$z + jr = 2 \frac{r_0 - r_1}{\pi} \ln \left(\bar{t} + \sqrt{1 + \bar{t}^2} \right) - \frac{r_0 - r_1}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1 \cdot \ln \frac{\sqrt{1 + \bar{t}^2} + \bar{t} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1}{\sqrt{1 + \bar{t}^2} - \bar{t} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1}. \quad (5)$$

Координату η_1 (рис. 2а) можно определить, если в предыдущую формулу (5) подставить координаты точки 2 ($\xi = 1$ и $\eta = \eta_1$).

Тогда $t_1 = 0$, $t_2 = -1$, $\bar{t} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $\bar{t}^2 = -1 = e^{-j\pi}$ и

$$z + jr = 2 \frac{r_0 - r_1}{\pi} \ln e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{r_0 - r_1}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1 \cdot \ln e^{-j\pi}$$

$\xi=1$. Кроме того, из физических соображений следует добавить, что напряженность магнитного поля должна стремиться к нулю при приближении η к нулю при любых значениях ξ .

Найденные значения Q позволяют вычислить все составляющие электромагнитного поля по формулам:

$$H = \frac{Q}{r}, \quad E_z = j \frac{1}{k_0 h_0 r} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad E_\xi = -j \frac{1}{k_0 h_0 r} \frac{\partial Q}{\partial \eta}.$$

Точное решение волнового уравнения (8) ввиду сложности функций r и h_0 сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому следует использовать приближенные способы его интегрирования, например метод Ритца.

Согласно методу Ритца решение представляется в виде линейной комбинации подходящих функций φ_k , заранее удовлетворяющих выбранным граничным условиям, то есть

$$Q_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k.$$

Коэффициенты a_k находятся из системы линейных уравнений.

Для практических целей можно, как правило, ограничиться вторым приближением ($n=2$), которое обеспечивает точность порядка 1%. В таком приближении достаточно найти только два коэффициента a_1 и a_2 из двух линейных уравнений:

$$(\gamma_{21} - k_0^2 \gamma_{11}) a_1 + (\alpha_{12} - k_0^2 \gamma_{12}) a_2 = 0,$$

$$(\alpha_{11} - k_0^2 \gamma_{21}) a_1 + (\alpha_{22} - k_0^2 \gamma_{22}) a_2 = 0.$$

В данных уравнениях k_0 — волновое число, определяющее собственную частоту электромагнитных колебаний в изучаемой коаксиальной линии. Это число является наименьшим корнем уравнения, представленного в форме определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - k_0^2 \gamma_{11} & \alpha_{12} - k_0^2 \gamma_{12} \\ \alpha_{21} - k_0^2 \gamma_{21} & \alpha_{22} - k_0^2 \gamma_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$\alpha_{ik} = \int_0^1 \int_0^{\eta_0} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) d\xi \cdot d\eta,$$

$$\gamma_{ik} = \int_0^1 \int_0^{\eta_0} \frac{k_0^2}{r} \varphi_k \cdot \varphi_i d\xi \cdot d\eta, \quad (10)$$

вычисляемым функционалами соответствующей вариационной задачи.

При возбуждении в изучаемой полости электромагнитных колебаний основной частоты можно принять, что электрические силовые линии совпадают с координатными линиями $\eta = \text{const}$. В этом случае $E_\eta = 0$ и функция Q не зависит от координат ξ и α . Учитывая граничное условие $E_\xi = 0$ при $\eta = \eta_0$ и конечность E_ξ при $\eta \rightarrow 0$, представим n -ое приближение искомой функции в виде:

$$Q_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin^{2k} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\eta}{\eta_0} \right).$$

Имея выбранное значение Q , а также величины r и h_0^2 , вычисляем функционалы α и γ . При их вычислении выполнить точное интегрирование двойных интегралов довольно затруднительно. Это заставляет прибегнуть к приближенному их расчету, для чего интегрирование по координате η разобьем на два участка. На первом участке координата η будет изменяться от 0 до η_1 ; приближенно полагая $t_1 \ll 1$ и $|t_2| \ll 1$, $\eta \ll \eta_1$ и $\xi \rightarrow 1$, из уравнения (5) можно найти:

$$r \cong r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1} \frac{\eta}{\sin \frac{\pi}{2} \xi}.$$

На втором участке η будет изменяться от η_1 до η_0 и при $\eta \gg 1$ из формулы (5) приближенно следует:

$$r \cong r_0 - (r_0 - r_1) \xi.$$

Масштабный множитель на первом и втором участках примем приближенно равным $r_0 - r_1$.

После таких упрощений можно вычислить двойные интегралы в функционалах (10) и получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = & \frac{\pi}{4 \eta_0^2} \left\{ \frac{1}{r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left(\ln \gamma 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - \text{ci } 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{r_0 - r_1} \frac{\eta_0}{4} \left[\sin 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + 2\pi \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$\xi=1$. Кроме того, из физических соображений следует добавить, что напряженность магнитного поля должна стремиться к нулю при приближении η к нулю при любых значениях ξ .

Найденные значения Q позволяют вычислить все составляющие электромагнитного поля по формулам:

$$H = \frac{Q}{r}, \quad E_\eta = j \frac{1}{k_0 h_0 r} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad E_\xi = -j \frac{1}{k_0 h_0 r} \frac{\partial Q}{\partial \eta}$$

Точное решение волнового уравнения (8) ввиду сложности функций r и h_0 сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому следует использовать приближенные способы его интегрирования, например метод Рунца.

Согласно методу Рунца решение представляется в виде линейной комбинации подходящих функций φ_k , заранее удовлетворяющих выбранным граничным условиям, то есть

$$Q_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k.$$

Коэффициенты a_k находятся из системы линейных уравнений.

Для практических целей можно, как правило, ограничиться вторым приближением ($k=2$), которое обеспечивает точность порядка 1%. В таком приближении достаточно найти только два коэффициента a_1 и a_2 из двух линейных уравнений:

$$(\alpha_{21} - k_0^2 \gamma_{11}) a_1 + (\alpha_{12} - k_0^2 \gamma_{12}) a_2 = 0,$$

$$(\alpha_{11} - k_0^2 \gamma_{21}) a_1 + (\alpha_{22} - k_0^2 \gamma_{22}) a_2 = 0.$$

В данных уравнениях k_0 — волновое число, определяющее собственную частоту электромагнитных колебаний в изучаемой коаксиальной линии. Это число является наименьшим корнем уравнения, представленного в форме определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - k_0^2 \gamma_{11} & \alpha_{12} - k_0^2 \gamma_{12} \\ \alpha_{21} - k_0^2 \gamma_{21} & \alpha_{22} - k_0^2 \gamma_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$\alpha_{ik} = \int_0^1 \int_0^{\eta_0} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) d\xi \cdot d\eta,$$

$$\gamma_{ik} = \int_0^1 \int_0^{\eta_0} \frac{h_0^2}{r} \varphi_k \cdot \varphi_i \cdot d\xi \cdot d\eta. \quad (10)$$

вычисляемым функционалами соответствующей вариационной задачей.

При возбуждении в изучаемой полости электромагнитных колебаний основной частоты можно принять, что электрические силовые линии совпадают с координатными линиями $\eta = \text{const}$. В этом случае $E_\xi = 0$ и функция Q не зависит от координат ξ и α . Учитывая граничное условие $E_\xi = 0$ при $\eta = \eta_0$ и конечность E_ξ при $\eta \rightarrow 0$, представим n -ое приближение искомой функции в виде:

$$Q_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin^{2k} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\eta}{\eta_0} \right).$$

Имея выбранное значение Q , а также величины r и h^2_0 , вычислим функционалы α и γ . При их вычислении выполнить точное интегрирование двойных интегралов довольно затруднительно. Это заставляет прибегнуть к приближенному их расчету, для чего интегрирование по координате η разобьем на два участка. На первом участке координата η будет изменяться от 0 до η_1 ; приближенно полагая $t_1 \ll 1$ и $|t_2| \ll 1$, $\eta \ll \eta_1$ и $\xi \rightarrow 1$, из уравнения (5) можно найти:

$$r \cong r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1} \frac{\eta}{\sin \frac{\pi}{2} \xi}.$$

На втором участке η будет изменяться от η_1 до η_0 и при $\eta > 1$ из формулы (5) приближенно следует:

$$r \cong r_0 - (r_0 - r_1) \xi.$$

Масштабный множитель на первом и втором участках примем приближенно равным $r_0 - r_1$.

После таких упрощений можно вычислить двойные интегралы в функционалах (10) и получить следующие формулы:

$$\alpha_{11} = \frac{\pi}{4 \eta_0^2} \left\{ \frac{1}{r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left(\ln \gamma 2\pi \frac{\eta_1}{r_0} - \text{ci} 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{r_0 - r_1} \frac{\eta_1}{4} \left[\sin 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + 2\pi \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \right\}.$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} = \alpha_{21} = & 2 \frac{\pi}{\eta_0^2} \left[\frac{1}{16 r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left[2 \ln \gamma \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \ln \frac{4}{3} - \text{ci} \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right. \right. \\
& - 2 \text{ci} 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \text{ci} 3\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \left. \right] + \frac{\eta_0}{3} \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{r_0 - r_1} \left[\cos \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \left(\frac{1}{4} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \frac{3}{16} \left(\sin \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \pi - \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \Bigg\}, \\
\alpha_{22} = & \frac{\pi}{\eta_0^3} \left[\frac{1}{16 r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left[5 \ln \gamma \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 4 - \text{ci} \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 4 \text{ci} 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right. \right. \\
& \left. \left. + 4 \text{ci} 3\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - \text{ci} 4\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 0.228 \right] + \eta_0 \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{r_0 - r_1} \left[\cos \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot (0.208 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} - \sin^4 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \frac{5}{32} \left(\sin \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \pi - \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \Bigg\}, \\
\gamma_{11} = & \frac{(r_0 - r_1)^2}{4\pi r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left(3 \sin \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 4 \text{ci} \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \text{ci} 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - \right. \\
& \left. - \ln 2 \right) + \frac{\eta_0}{2\pi} (r_0 - r_1) \cdot \ln \frac{r_0}{r_1} \cdot \left\{ \cos \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} \left[\sin \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \pi \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \right\}, \\
\gamma_{12} = \gamma_{21} = & \frac{(r_0 - r_1)^2}{16\pi r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left(10 \ln \gamma \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 6 \ln 2 + \ln 3 - \right. \\
& \left. - \text{ci} 3\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 6 \text{ci} 2\pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 15 \text{ci} \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \frac{\eta_0 (r_0 - r_1) \cdot \ln \frac{r_0}{r_1}}{3\pi} \times \\
& \times \left\{ \cos \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot \left(\frac{3}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{15}{16} \left[\sin \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \pi \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_{12} = \frac{(r_0 - r_1)^2}{64 \pi r_1 \sqrt{2 \frac{r_0}{r_1} - 1}} \left(35 \ln \gamma \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 30 \ln 2 + 8 \ln 3 + \right. \\ \left. + \operatorname{ci} 4 \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 8 \operatorname{ci} 3 \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + 28 \operatorname{ci} 2 \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} - 54 \operatorname{ci} \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \\ + \frac{\ln(r_0 - r_1) \ln \frac{r_2}{r_1}}{4 \pi \frac{r_1}{r_0}} \left[\cos \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \left(\frac{35}{24} + \frac{7}{6} \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin^4 \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) + \frac{105}{96} \left[\sin \pi \frac{\eta_1}{\eta_0} + \pi \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \right] \right].$$

В формулах (11) введены следующие обозначения:

ci — интегральный косинус,

$\gamma = 1,781$,

η_1 — координата точки 2 (рис. 2 а), вычисляемая по формуле (6),

η_0 — координата точки 3 (рис. 2 а), которая может быть вычислена с погрешностью менее 1% по приближенной формуле (7), то

$$\eta_0 = \frac{1}{r_0 - r_1} + \frac{r_2}{\pi (r_0 - r_1)} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1 + 1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \eta_1 - 1} + \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \eta_1.$$

Таким образом, найденные значения α и γ позволяют вычислить отношение a_1/a_2 и составляющие электромагнитного поля, что вместе взятое полностью решает поставленную задачу.

В качестве иллюстрации теоретических расчетов рассмотрим конкретный пример. Объектом расчета будет четвертьволновая волноводная линия следующих геометрических размеров: $r_0 = 6,05$ см, $r_1 = 1,40$ см, $l = 14,1$ см, которая практически возбуждается на основной волне $\lambda = 63,28$ см.

Расчет начнем с определения основных параметров криволинейной системы координат, к которой должен быть отнесен данный резонатор. Первый параметр находится из соотношения (6), и непосредственный расчет дает $\eta_1 = 0,542$. Второй параметр определяется по формуле (12), из которой следует $\eta_0 = 4,64$. Далее по формуле (11) находим $\alpha_{11} = 0,095$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,105$, $\alpha_{22} = 0,136$, $\gamma_{11} = 8,29$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 6,77$, $\gamma_{22} = 5,91$. Подставляя полученные значения в детерминант (9), приходим к биквадратному уравнению, наименьший корень которого $k_0 = 0,0978$ см. Следовательно, теоретически рассчитанная основная резонансная длина волны равна 64,3 см, которая отличается на 1,6% от найденной опытным путем.

Возбужденное в данной линии электромагнитное поле будет определяться следующими составляющими ($a_1=1$):

$$H = \frac{1}{r} (\sin^2 0,34 \eta - 0,387 \cdot \sin^4 0,34 \eta),$$

$$E_z = -j \frac{0,34}{0,0978 \cdot h_0 r} (1 - 0,774 \sin^2 0,34 \eta) \sin 0,68 \eta,$$

$$E_\eta = 0.$$

На рис. 3 изображена сетка криволинейной системы координат, соответствующая данному конкретному резонатору. На этом же

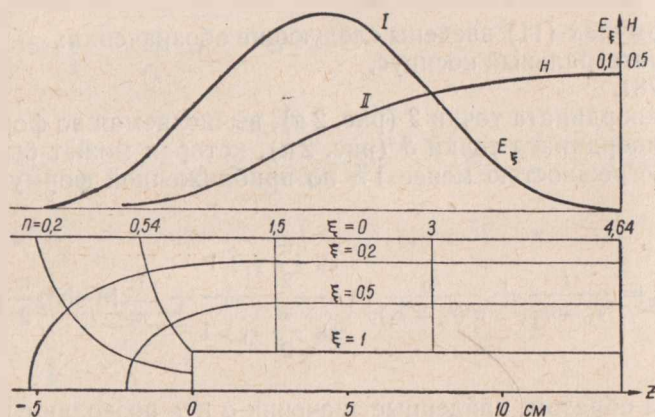


Рис. 3.

рисунке приведен график, на котором двумя кривыми представлено изменение напряженности электрического (I) и магнитного (II) полей на поверхности внешнего цилиндра ($\xi=0$) в функции координаты Z . Из рассмотрения первой кривой I следует, что максимум напряженности электрического поля сдвинут в сторону закороченной части линии. Вторая кривая II свидетельствует о малости напряженности магнитного поля в первой области ($\eta < \eta_1$), что оправдывает упрощения, принятые при расчете интегралов в формулах (11).

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ СВЧ НА НЕКОТОРЫЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОЛОКА

БНДЮТИН Б. С., старший преподаватель
(Саратовский зооветеринарный институт)

Молоко, как источник жиров, углеводов, белков, минеральных веществ и витаминов, — незаменимый продукт питания. Однако оно таит в себе при определенных условиях и опасность для здоровья человека, через него от животных могут передаваться различного рода заболевания, при хранении происходит изменение его физико-химических свойств.

Для увеличения сроков сохранности молока и уничтожения в нем патогенных микроорганизмов в настоящее время широко используют способ тепловой обработки его с применением паровых или пластинчатых пастеризаторов. Но тепловая пастеризация изменяет физико-химические [2, 3], биологические [1, 4] и другие свойства молока.

Большой практический интерес представляет пастеризация молока без изменения его свойств с использованием методов физического воздействия.

За последние годы предложено много способов, позволяющих значительно уменьшить количество микрофлоры в молоке: использование консервантов, охлаждение, радиоизотопное и ультрафиолетовое облучение, обработка ультравысокими температурами, антибиотиками, ультразвуковыми волнами, электрическим током и др. Анализируя высказывания, сделанные на XII, XIV, XV Международных конгрессах, следует отметить, что все эти методы обработки находятся в стадии развития и не исключают возможности применения других с учетом новейших данных науки и техники.

В связи с развитием электронной промышленности в Советском Союзе с 1961 года стали работать над проблемой по использованию токов сверхвысокой частоты (СВЧ) для обработки различных материалов, в том числе и пищевых продуктов. С этого времени на кафедре технологии продуктов животноводства, ветсанэкспертизы и

микробиологии Саратовского зооветинститута начали проводить исследования по использованию СВЧ-нагрева для пастеризации молока.

Проведенные исследования [5, 6] показали возможность пастеризации таким способом. При этом изучалось в основном бактерицидное действие СВЧ-колебаний.

Продолжая работы по облучению молока СВЧ-колебаниями, мы поставили задачу изучить некоторые данные по его составу и свойствам.

Объектом изучения служило сборное молоко, получаемое с молокозавода и облучаемое на установке, в которой электромагнитные колебания частотой 2375 мГц ($\lambda = 12,6$ см) генерируются магнетроном непрерывной модуляции. Пастеризация молока электромагнитным полем (ЭМП) СВЧ во всех случаях происходила при его непрерывном движении по стеклянной трубке диаметром 0,4 см и со скоростью, приблизительно равной 36 см/сек. Данная скорость и диаметр трубки обеспечивали турбулентность движения молока, что способствовало равномерному и быстрому облучению его.

Средняя проба молока делилась на 5: первая — сырое (контроль), вторая — паровая пастеризация, третья — пастеризация СВЧ-нагревом при температуре 76°C, четвертая — СВЧ=80°C и пятая — СВЧ=84°C. Как в опытных, так и в контрольной пробах плотность определяли с помощью ареометра, кислотность — стандартным методом по Тернеру, общий белок — методом Кьельдаля, количество казеина — методом кислотного титрования, содержание сухого вещества и сухого обезжиренного остатка — расчетным методом, процент жира — кислотным методом, количество сывороточных белков — по разности между общим белком и казеином.

Из полученных в лабораторных условиях данных следует, что изучаемые свойства существенно не изменились как при паровой пастеризации, так и при пастеризации СВЧ-нагревом. Незначительная разница между опытными и контрольной пробами статистически недостоверна ($P < 0,95$).

Проведенные исследования при различных температурных режимах пастеризации не выявили заметных отклонений свойств молока. Наблюдается лишь незначительное изменение вкуса: пастеризованное приобретает специфический привкус при более высоких температурах.

Однако предпочтение следует отдать пастеризации при температуре 76°C, так как при этом не только не наблюдается заметных изменений в молоке, но и привкус пастеризованного обнаруживается лишь опытными дегустаторами, а по своим вкусовым качествам оно напоминает сырое. Эта же температура является той минимальной температурой нагрева ЭМП СВЧ, при которой достигается поч-

Некоторые данные по составу молока, обработанного СВЧ-нагревом

Молоко (образцы)	Жир, %	Белок общий, %	Казеин, %	Сывороточные белки, %	Кислотность, T°	Плотность, А	Сухое вещество, %	Сомо. S
Сырое (контроль)	3,72 ± 0,08	3,52 ± 0,611	2,65 ± 0,08	0,87 ± 0,14	17,2 ± 0,4	27,8 ± 0,6	12,35 ± 0,18	8,67 ± 0,23
Обработанное паром	3,71 ± 0,08	3,53 ± 0,13	2,66 ± 0,09	0,96 ± 0,13	16,7 ± 0,4	27,5 ± 0,4	12,08 ± 0,17	8,35 ± 0,22
СВЧ=76°	3,72 ± 0,09	3,51 ± 0,09	2,62 ± 0,107	0,89 ± 0,16	17,2 ± 0,6	27,2 ± 0,5	12,03 ± 0,18	8,33 ± 0,28
СВЧ=80°	3,69 ± 0,104	3,59 ± 0,11	2,65 ± 0,12	0,87 ± 0,12	17,5 ± 0,7	27,2 ± 0,5	12,10 ± 0,12	8,37 ± 0,20
СВЧ=84°	3,70 ± 0,17	3,60 ± 0,09	2,71 ± 0,06	0,83 ± 0,104	17,3 ± 0,5	27,5 ± 0,4	12,17 ± 0,15	8,34 ± 0,17

ти полная стерильность молока. Не происходит и разрушения витаминов.

Пастеризованное молоко независимо от методов воздействия сохранялось дольше, чем сырое, молоко же, обработанное ЭМП СВЧ, дольше, чем пастеризованное паром.

Выводы:

1. Использование ЭМП СВЧ для пастеризации молока является эффективным и перспективным методом (несложность, компактность технологического оборудования. Это способствует высвобождению значительной производственной площади).

2. Равномерный и быстрый нагрев позволяет значительно снизить время выдержки молока в нагретом состоянии, что сохраняет его свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давидов Р. и др. Факторы, влияющие на изменение качества тиамина в молоке. — Известия Тимирязевской сельскохозяйственной академии, вып. 2, 1956.
2. Инихов Г. Биохимия молока. М., Пищепромиздат, 1956.
3. Кон С. Влияние тепловой обработки и света на состав и качество молока. — «Молочная промышленность», 3, 1960.
4. Мутовин В. Об устойчивости лизоцима молока к облучению гамма-лучами. Труды ВНИИВС, 14, 1959.
5. Чернова А., Аронс Р. Изменчивость микробов под влиянием СВЧ-энергии. Труды Саратовского зооветинститута, 16, 1969.
6. Яковлев Л. и др. Пастеризация молока СВЧ-нагревом. Труды Саратовского зооветинститута, 13, 1965.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕРНА РАЗЛИЧНЫХ КУЛЬТУР ОТ ВЛАЖНОСТИ

БРОХИНА Е. Е., ассистент

(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Зерно и продукты его переработки с физической точки зрения являются диэлектриками, которые подчиняются общим законам, присущим твердым диэлектрикам. Однако электрические характеристики зерна не только менее изучены, но и менее определены. Под электрическими характеристиками мы понимаем диэлектрическую проницаемость и тангенс угла потерь диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость зерна — диэлектрическая проницаемость гетерогенной системы, состоящей из зерна, воздуха и воды. Поэтому на величину ϵ влияет методика заполнения измерительного сосуда (датчика), в частности уплотнение зерна. Чтобы можно было сравнить результаты измерений ϵ , необходимо учитывать это уплотнение, для чего некоторые исследователи [1] вводят коэффициент заполнения $x = \frac{V_{\text{зерна}}}{V_{\text{сосуда}}}$; другие [2] указывают «объемный» вес

зерна $d = \frac{P}{V_{\text{сосуда}}}$, где P — вес зерна в измерительном сосуде.

Для учета плотности укладки зерна мы пользовались формулой расчета диэлектрической проницаемости гетерогенных систем. Для двухкомпонентной системы эта формула имеет следующий вид:

$$\epsilon = \epsilon_1 x + \epsilon_2 (1 - x), \quad (1)$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — диэлектрические проницаемости каждой компоненты;
 ϵ — диэлектрическая проницаемость системы;
 x — объем, занимаемый одной компонентой, обычно выражаемый в долях объема измерительного сосуда.

Таким образом, чтобы найти диэлектрическую проницаемость зерна ϵ_1 , необходимо измерить диэлектрическую проницаемость системы ϵ и определить объем, занимаемый зерном.

Диэлектрическую проницаемость системы определяли резонансным методом по разработанной ранее методике [3]. Были произведены измерения ϵ зерна различных культур в зависимости от изменения влажности в пределах от 10 до 20%, для чего заранее приготавливалось зерно определенной влажности (B). Влажность определялась по методу высушивания [1] при $t=130^\circ$ в течение 40 минут и находилась как отношение потери в весе зерна к взятой навеске, выраженное в процентах. Зерно определенной влажности засыпалось в полиэтиленовый стаканчик, и с помощью отсчетного микроскопа измерялась с точностью до 0,01 мм глубина погружения этого стаканчика в резонатор. Затем по заранее рассчитанному градуировочному графику находилась диэлектрическая проницаемость зерна, а методом пикнометра — объем зерна. По формуле (1) проводился расчет диэлектрической проницаемости чистого зерна. После чего зерно той же влажности снова засыпалось в измерительный стаканчик, и все измерения повторялись с целью учета разной укладки зерна при различных засыпках.

Другой важной величиной, определяющей электрические характеристики зерна, является тангенс угла потерь $\text{tg}\delta$. Согласно современным воззрениям на механизм диэлектрических потерь следует различать:

1) потери ионного характера, вызванные поступательным движением ионов. К этой группе относятся поляризационные потери, связанные с образованием объемных и поверхностных зарядов. Потери такого типа будут наблюдаться в зерне даже при отсутствии гигроскопической влаги;

2) потери, связанные с вращением полярных молекул под действием переменного электрического поля. Потери этого рода в зерне могут быть связаны исключительно с наличием воды. Поэтому диэлектрические потери в зерне зависят от его влажности.

Следовательно, представляет интерес провести измерения ϵ зерна различных культур в зависимости от влажности. Ранее экспериментально [4] нами было получено аналитическое выражение, связывающее $\text{tg}\delta$ вещества с добротностью нагруженного резонатора, которое позволяло рассчитать $\text{tg}\delta$ зерна различных культур. Результаты расчета ϵ и $\text{tg}\delta$ пшеницы Безенчукской 98 в зависимости от ее влажности приведены в табл. 1.

Как видно из таблицы, ошибка при измерениях диэлектрической проницаемости системы ϵ при различных способах засыпки достигает 2,5%; если же мы, пользуясь формулой (1), сделаем пересчет на диэлектрическую проницаемость чистого зерна ϵ_1 , то ошибка измерений получается не более 0,7%. Это еще раз подчеркивает важность учета плотности укладки зерна при различных засыпках. Аналогичные измерения были также проведены с зерном и других культур: пшеница Лютеценс 230, ячмень, просо, горох, чечевица, чина

Таблица 1

Влияние диэлектрической проницаемости и тангенса угла потерь пшеницы
Безенчукская 98 от влажности

Влажность, %	Номер опыта	Глубина погруже- ния, см	Диэлектри- ческая про- ницаемость системы	Кэффи- циент за- полнения	Диэлектри- ческая про- ницаемость зерна	Тангенс угла по- терь системы	Тангенс угла по- терь зерна
10,40	1	5,17	2,85	0,602	4,07	0,042	0,070
	2	4,95	2,95	0,629	4,09	0,055	0,087
	3	5,02	2,90	0,611	4,11	0,047	0,077
среднее значение		5,05±0,08	2,90±0,05	0,614	4,09±0,02	0,048±0,005	0,078±0,006
12,15	1	4,71	3,10	0,600	4,50	0,042	0,070
	2	4,54	3,20	0,630	4,50	0,053	0,084
	3	4,45	3,25	0,628	4,57	0,049	0,078
среднее значение		4,57±0,11	3,18±0,06	0,619	4,52±0,03	0,048±0,004	0,078±0,005
14,67	1	4,22	3,45	0,592	5,14	0,048	0,081
	2	4,01	3,61	0,631	5,14	0,056	0,090
	3	4,09	3,56	0,629	5,07	0,058	0,092
среднее значение		4,11±0,08	3,57±0,06	0,617	5,12±0,03	0,054±0,004	0,091±0,004
17,11	1	3,75	3,85	0,590	5,83	0,059	0,100
	2	3,50	4,10	0,628	5,93	0,068	0,108
	3	3,70	3,90	0,591	5,91	0,066	0,112
среднее значение		3,65±0,1	3,95±0,1	0,603	5,89±0,04	0,064±0,004	0,107±0,004
19,18	1	3,39	4,25	0,585	6,55	0,076	0,131
	2	3,28	4,35	0,601	6,58	0,088	0,147
	3	3,24	4,40	0,608	6,57	0,079	0,130
среднее значение		3,30±0,06	4,33±0,06	0,598	6,57±0,01	0,081±0,005	0,136±0,007

Полученные значения с учетом частотной зависимости хорошо согласуются с данными Книппер [5]. Результаты были математически обработаны графическим методом [6], сущность которого можно объяснить на примере обработки данных табл. 1.

Если считать, что зависимость диэлектрической проницаемости зерна от влажности носит характер экспоненты для влажностей 10–20%, на что указывают некоторые авторы [7], то математический законмерность задана в виде $\epsilon_1 = e^{a+bB}$. С использова-

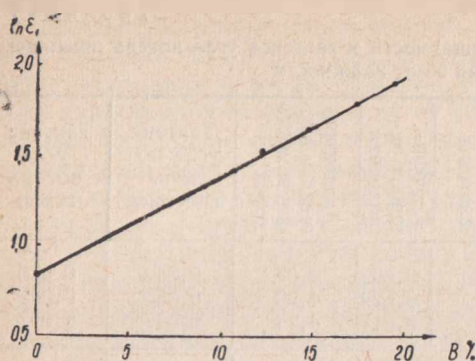


Рис. 1. Зависимость диэлектрической проницаемости зерна от влажности.

нием данных табл. 1 была построена зависимость $\ln \epsilon_1$ от влажности B , которая изображена прямой линией на рис. 1. По этой прямой не составляет труда найти коэффициенты a и b . Результаты математической обработки данных приведены в табл. 2.

Из табл. 2 следует, что данный метод можно рекомендовать для измерения влажности зерна как метод, обладающий большой чувст-

Таблица 2
Зависимость диэлектрической проницаемости зерна различных культур от влажности

Сорт зерна	Зависимость ϵ_1 от влажности
Пшеница Безенчукская 98	$\epsilon_1 = e^{0,82+0,055 \cdot B}$
Пшеница Лютеценс 230	$\epsilon_1 = e^{0,76+0,055 \cdot B}$
Ячмень Нутанс 187	$\epsilon_1 = e^{0,70+0,048 \cdot B}$
Просо Скороспелое 66	$\epsilon_1 = e^{0,78+0,040 \cdot B}$
Горох Капитал	$\epsilon_1 = e^{0,61+0,063 \cdot B}$
Чечевица Петровская 4/105	$\epsilon_1 = e^{0,72+0,050 \cdot B}$
Чина Степная 21	$\epsilon_1 = e^{0,70+0,058 \cdot B}$
Акация желтая	$\epsilon_1 = e^{0,62+0,051 \cdot B}$

вительностью. Измерение ϵ производится с точностью до сотых долей, что обеспечивает чувствительность при определении влажности зерна порядка 0,5%. Но, кроме того, данный метод, как и все электрические методы измерения влажности, прост. Чтобы определить влажность зерна, необходимо отсчитать глубину погружения стержня в резонатор и определить объем зерна в нем. Это быстрее, чем высушивание зерна до постоянного веса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлинер М. А. Электрические приборы для измерения влажности зерна. М., Заготиздат, 1949, стр. 1—25.
2. Веселов С. А. О физико-электрических свойствах некоторых зерновых

1. Грохнова Е. Е. Труды Московск. технологич. ин-та пищевой пром. Т. 1. М., Пищепромиздат, 1952, стр. 185—193.
2. Грохнова Е. Е. Определение диэлектрической проницаемости различных материалов резонансным методом. — Труды Саратовск. сельскохозяйств. ин-та, 21, 1968, стр. 149—155.
3. Грохнова Е. Е. Расчет собственной частоты цилиндрического резонатора с диэлектрическим цилиндром произвольных размеров. Тезисы докл. Всесоюз. конф. по электронике СВЧ. Саратов, 1966, стр. 109.
4. Вилингер Н. В. К вопросу применения токов высокой частоты для сушки зерна. Научн. труды по электрификации сельск. хоз-ва. Т. 2. М., 1956, стр. 185—194.
5. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М., Наука, 1967, стр. 57—64.
6. Суворов С. С. Диэлектрические свойства некоторых типов пшеницы. М., Всесоюз. ин-т зерна, 1953 стр. 61—69.

К ВОПРОСУ ИЗМЕРЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ $\epsilon'' = \epsilon' - j\epsilon''$

БОЛДЫРЕВ В. М., аспирант

(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Волноводные методы определения диэлектрических параметров веществ оказываются наиболее эффективными при измерении диэлектриков, обладающих средними и высокими потерями. Если толщина образца сравнима по величине с длиной волны в диэлектрике, положение ближайшего от поверхности образца минимума электрического поля, отсчитываемого в сторону генератора, начинает существенно зависеть от постоянной затухания в диэлектрике α_x , а точнее от величины $\alpha_x d$, где d — толщина образца. Строгий учет потерь при расчете диэлектрических параметров приводит к решению системы двух сложных трансцендентных уравнений с двумя неизвестными.

Правда, хорошо известен метод «двух положений»: короткого замыкания и холостого хода, позволяющий получить расчетные формулы для определения искомых диэлектрических параметров в алгебраическом виде. В этом случае измеряемыми являются четыре величины: два положения минимума электрического поля и два значения КСВН, соответствующие двум указанным режимам. Не останавливаясь на недостатках амплитудных измерений, связанных с определением КСВН, покажем, что, пользуясь теорией длинных линий, можно получить строгие аналитические выражения для ϵ' и ϵ'' при условии, что определяются только положения минимумов электрического поля.

Теория метода и расчета

Вывод расчетных формул, использующий теорию длинных линий, можно проиллюстрировать на примере любой волноводной системы, схематически изображенной на рис. 1. Полученные формулы справедливы для коаксиальной линии, круглого или прямоугольного волноводов при условии, что в них распространяется

полюсной тип колебаний или колебаний, имеющий вектор напряженности электрического поля, лежащий в плоскости, параллельной как торцевым поверхностям образца, так и поверхности короткого замыкания.

Используя хорошо известные соотношения, запишем входное сопротивление в сечении S_1 :



Рис. 1.

$$Z_1 = Z_x \cdot \frac{z_0 \cdot \operatorname{th} \gamma_0 l_1 + \dot{z}_x \cdot \operatorname{th} \gamma_x d}{\dot{z}_x + z_0 \cdot \operatorname{th} \gamma_0 l_1 \cdot \operatorname{th} \gamma_x d} \quad (1)$$

где z_0 — волновое сопротивление «пустого» волновода ($z_0 = \frac{\omega \mu_0}{\gamma_0}$ для волны типа H),

$\gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ — волновое число,

λ_0 — длина волны в волноводе,

z_x — характеристическое сопротивление волновода, заполненного диэлектрической средой ($z_x = j \frac{\omega \mu_0}{\gamma_x}$ для волны типа H),

$\gamma_0 = j \beta_0$ — постоянная распространения в «пустом» волноводе,

$\gamma_x = j \beta_x = j \sqrt{\epsilon^* - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}$ — постоянная распространения в волноводе, заполненном диэлектриком,

$\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon''$ — комплексная диэлектрическая проницаемость вещества,

λ — длина волны в свободном пространстве,

$\lambda_{кр}$ — «критическая» длина волны в волноводе для данного типа колебаний.

Введем нормированное «характеристическое» сопротивление:

$$\dot{z}_n = \frac{\dot{z}_x}{z_0} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}{\sqrt{\epsilon^* - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

и используя обозначения:

$$\frac{\dot{z}_x}{z_0} \cdot \operatorname{th} \gamma_x d = R + jI \quad \text{и} \quad \frac{\epsilon_0}{z_0} \cdot \operatorname{th} \gamma_x d = R_1 + jI_2.$$

можно переписать уравнение (1) в виде:

$$\frac{\dot{z}_1}{z_0} = \frac{R + j(\operatorname{tg} \beta_0 l_1 + I)}{(1 - I_2 \operatorname{tg} \beta_0 l_1) + jR_2 \operatorname{tg} \beta_0 l_1} = r + jx \quad (2)$$

Аналогично этому входное сопротивление системы в сечении S_0 будет иметь вид:

$$\frac{z_2}{z_0} = \frac{r + j(\operatorname{tg} \beta_0 l_2 + x)}{(1 - x \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2) + jr \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2} \quad (3)$$

Модуль входного сопротивления системы $\left| \frac{z_2}{z_0} \right|$ является функцией параметров диэлектрика и соответствующих длин l_1 и l_2 . Поэтому в случае если положение минимума электрического поля находится перемещением зонда, то есть определяется соответствующее расстояние l_2 , необходимо найти экстремум выражения $\left| \frac{z_2}{z_0} \right|$ при вариации длины l_2 . Однако математически проще искать экстремум квадрата модуля данного выражения, то есть

$$\left| \frac{z_2}{z_0} \right|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_0 l_2 + 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2 + (r^2 + x^2)}{(r^2 + x^2) \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_2 - 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2 + 1}$$

Из сказанного следует, что необходимо найти $\frac{\partial \left| \frac{z_2}{z_0} \right|^2}{\partial l_2}$ и приравнять к нулю. Полученное выражение запишем в следующем виде:

$$(\operatorname{tg} \beta_0 l_2 + x) \cdot [(r^2 + x^2) \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_2 - 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2 + 1] - \\ - [(r^2 + x^2) \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2 - x] \cdot [\operatorname{tg}^2 \beta_0 l_2 + 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_2 + (r^2 + x^2)] = 0.$$

После некоторых преобразований получим это условие:

$$\frac{1 - (r^2 + x^2)}{x} = -2 \operatorname{ctg} 2 \beta_0 l_2.$$

В развернутой форме данное выражение имеет вид:

$$\frac{[(R_2^2 + l_2^2) - 1] \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_1 - 2(l_1 + l_2) \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_1 + 1 - (R_2^2 + l_2^2)}{-l_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_0 l_1 + [1 - (RR_2 + l_2)] \cdot \operatorname{tg} \beta_0 l_1 + 1} = -2 \operatorname{ctg} 2 \beta_0 l_2 \quad (4)$$

В случае же когда зонд является неподвижным, а минимум электрического поля находится изменением расстояния l_1 до короткозамыкающей стенки (поршня), условие минимума квадрата мо-

дуля входного сопротивления $\frac{\partial \left| \frac{z_2}{z_0} \right|^2}{\partial l_1} = 0$ имеет следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg}^2 \beta_0 I_1 \cdot \{[1 - (RR_2 + I_2)] \cdot [1 + (R_2^2 + I_2^2)] + 2 I_2 (I - I_2)\} + \\ & + 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_0 I_1 \cdot \{I(1 + R_2^2 + I_2^2) + I_2(1 + R^2 + I^2)\} + \\ & + 2 I (I - I_2) - [1 - (RR_2 + I_2)] \cdot [1 + R^2 + I^2] \\ & - \operatorname{tg}^2 \beta_0 I_1 \cdot [I(R_2^2 + I_2^2) + I_2] + [1 - (R_2^2 + I_2^2)(R^2 + I^2)] \operatorname{tg} \beta_0 I_1 + I + I_2(R^2 + I^2) \\ & = 2 \operatorname{ctg} 2 \beta_0 I_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждое из полученных соотношений (4) или (5) может быть использовано для определения параметров диэлектрика. Для этого практически необходимо произвести четыре измерения и найти четыре пары взаимосопоставляющихся I_1 и I_2 , что позволит получить в каждом случае систему четырех линейно независимых уравнений, на основе которых можно определить значения ϵ' и ϵ'' .

Однако указанный путь приводит к сложным алгебраическим выкладкам. Возможно значительное упрощение подобных расчетов. Рассмотрим следующие частные случаи уравнения (4):

1) $I_1 = k \frac{\lambda_B}{2}$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$), тогда из (4) имеем:

$$\frac{1 - (R^2 + I^2)}{I} = -2 \operatorname{ctg} 2 \beta_0 I_{20} = \alpha_1, \quad (6)$$

где I_{20} — значение I_2 , соответствующее $I_1 = k \frac{\lambda_B}{2}$.

2) $I_1 = /2k + 1/ \cdot \frac{\lambda_B}{4}$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$), тогда из (4) имеем:

$$\frac{1 - (R^2 + I^2)}{I} = -2 \operatorname{ctg} 2 \beta_0 I_{2x} = \beta_1, \quad (7)$$

где I_{2x} — значение I_2 , соответствующее $I_1 = /2k + 1/ \cdot \frac{\lambda_B}{4}$.

Если аналогично в уравнении (5) положить $I_2 = k \cdot \frac{\lambda_B}{2}$ ($k=1, 2,$

или $I_2 = /2k + 1/ \cdot \frac{\lambda_B}{4}$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$), то можно записать:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg}^2 \beta_0 I_1 \cdot [I(R_2^2 + I_2^2) + I_2] + [(R_2^2 + I_2^2)(R^2 + I^2) - 1] \cdot \operatorname{tg} \beta_0 I_1 - \\ & - [I + I_2(R^2 + I^2)] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В данном случае измеренные соответствующие значения I_{10} и I_{1x} позволят найти следующие два равенства:

$$R^2 + I^2 = \alpha I - \beta, \quad (9)$$

$$R_2^2 + I_2^2 = -\frac{\alpha I_2 + 1}{\beta}, \quad (10)$$

где $\alpha = (\operatorname{tg} \beta_0 I_{10} + \operatorname{tg} \beta_0 I_{1x})$ и $\beta = \operatorname{tg} \beta_0 I_{10} \cdot \operatorname{tg} \beta_0 I_{1x}$.

Уравнения (6), (7), (9) и (10) позволяют очень просто определить величины R , I , R_2 и I_2 и на основании ранее введенных обозначений (2) получить искомые значения ϵ' и ϵ'' по формулам:

$$\begin{aligned}\epsilon' &= \left(\frac{RR_2 + I_2}{R^2 + I^2} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right] + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2, \\ \epsilon'' &= \frac{R_2 I - I_2 R}{R^2 + I^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (11)$$

Экспериментальная часть

С целью выяснения возможностей предлагаемого метода провели измерения ϵ' и ϵ'' текстолита. Измерения ϵ^* проводились в десятисантиметровом диапазоне длин волн с помощью стандартной аппаратуры [1]. Толщина диэлектрика d была выбрана равной 2,236 см, что при ориентировочно известном ϵ' текстолита составляет примерно $\frac{3}{2} \lambda_g$ (λ_g — длина волны в диэлектрике) и обеспечивает минимальную погрешность измерения ϵ' и ϵ'' . Точность изготовления образца по толщине равна $\pm 0,002$ см. Измерения, соответствующие четырем указанным режимам, дают такие значения длин: $l_{20} = 0,706$ см, $l_{2xx} = 7,286$ см, $l_{10} = 0,7395$ см, $l_{1xx} = 7,2440$ см. Длина волны, на которой производились измерения, $\frac{\lambda_B}{2} = 8,3625$ см. Эти данные на основе выражений (6), (7), (9) и

(10) приводят к следующим значениям α_1 , β_1 , α и β : $\alpha_1 = 3,40$, $\beta_1 = 1,913$, $\alpha = 0,161$, $\beta = -0,1272$, которые определяют искомую систему величин R , I , R_2 , I_2 : $I = 0,2694$, $R = 0,105$, $I_2 = -2,16$, $R_2 = -0,690$.

Поскольку мы располагаем аналитическими выражениями для ϵ' и ϵ'' , то это позволяет произвести оценку точности наших измерений, пользуясь исходными данными при определении соответствующих длин:

$$\begin{aligned}l_{20} &= 0,706 \pm 0,005 \text{ см}, & l_{1xx} &= 7,2440 \pm 0,0025 \text{ см}, \\ l_{10} &= 0,7395 \pm 0,0025 \text{ см}, & l_{2xx} &= 7,286 \pm 0,005 \text{ см}, \\ \frac{\lambda_B}{2} &= 8,3625 \pm 0,0025 \text{ см},\end{aligned}$$

Аналитические выражения для относительной погрешности измеряемых величин имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \epsilon'}{\epsilon'} &= \frac{1}{RR_2 + I_2} \cdot \left[RR_2 \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) + I_2 \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta I_2}{I_2} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{2}{R^2 + I^2} \left(R^2 \frac{\Delta R}{R} + I^2 \frac{\Delta I}{I} \right),\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \epsilon''}{\epsilon''} = \frac{1}{R_2 I - I_2 R} \cdot \left[R_2 I \cdot \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) - I_2 R \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I_2}{I_2} \right) \right] - \frac{2}{R^2 + I^2} \left(R^2 \frac{\Delta R}{R} + I^2 \frac{\Delta I}{I} \right).$$

На основе уравнений (6), (7), (9) и (10) можно легко найти относительные погрешности для входящих сюда величин I, R, I_2 и R_2 :

$$\frac{\Delta I}{I} = \pm 0,006, \quad \frac{\Delta R}{R} = \pm 0,052, \quad \frac{\Delta I_2}{I_2} = \pm 0,0045, \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \pm 0,038.$$

Вычисляя

$$\frac{\Delta \epsilon''}{\epsilon''} = \pm 0,114 \text{ и } \frac{\Delta \epsilon'}{\epsilon'} = \pm 0,003,$$

окончательно имеем:

$$\epsilon' = 3,90 \pm 0,012, \quad \epsilon'' = 0,21 \pm 0,024.$$

Следовательно, ошибка определения ϵ' составляет $\pm 0,3\%$ и $\epsilon'' \pm 11,5\%$. Полученные результаты хорошо согласуются с данными других авторов [2], [3].

Выводы

1. Получены два условия, определяющие положение минимума электрического поля стоячей волны, вызванной диэлектрической неоднородностью в виде плоской пластины. Показано, что каждое из условий соответствует конкретному способу измерения положения указанного минимума.

2. На основе полученных соотношений предложен новый способ определения параметров диэлектрика, использующий только фазовые измерения.

3. Показано, что сочетание двух возможных способов измерения позволяет получить простые расчетные формулы и значительно упростить эксперимент, так как в данном случае образец диэлектрика является неподвижным.

4. Дается аналитический расчет погрешностей измерений.

5. В принципе полученные формулы справедливы для образцов диэлектрика любой толщины, обладающих любыми значениями ϵ' и ϵ'' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Техника измерений на сантиметровых волнах. Т. 1. Под ред. Г. А. Ремеза, М.: «Советское радио», 1949.
2. Альтшуллер Ю. Г. и Турабова Л. И. Измерение диэлектрической проницаемости и угла потерь твердых диэлектриков на сантиметровых волнах. — Радиотехника. Саратовск. гос. ун-та, т. 44. 1956, стр. 59—63.
3. Гамиров Ю. А. Волноводный метод измерения диэлектрической проницаемости. В кн. Исследования по физике ферритов и электронике. Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, вып. 67. 1969, стр. 243—252.

О БРОМИРОВАНИИ БИФЕНИЛА

МЕДОКС Г. В., кандидат химических наук,

РАССКАЗОВА В. Я., ассистент

(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Бромирование бифенила свободным бромом, приведшее к получению 4,4'-дибромбифенила, впервые было осуществлено более 100 лет назад [1]. Позднее это соединение аналогичным способом получали и другие исследователи.

Используя в качестве растворителя сероуглерод, удалось получить 4-бромбифенил с т. плав. 89° [2], но возникли затруднения при попытке выделения вещества в чистом состоянии. По мнению известного исследователя В. Шленка [3], освободить 4-бромбифенил полностью от примеси 4,4'-дибромбифенила перегонкой и последующими перекристаллизациями едва ли возможно. Имеется и более категорическое утверждение [4]. В связи с этим для получения чистого 4-бромбифенила были предложены другие реакции, и в том числе реакция взаимодействия п-бромдiazобензола с бензолом [5], позволяющая получать продукт с т. плав. $89,5-90^{\circ}$ с выходом 35% теоретического.

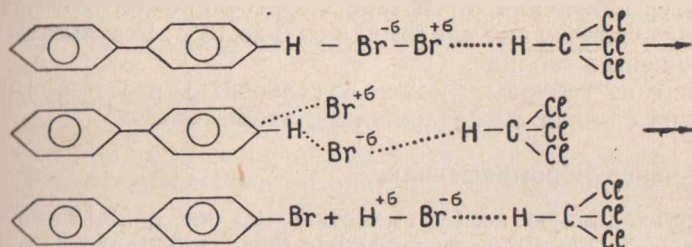
В последнее время много внимания уделялось бромированию бифенила свободным бромом в уксуснокислом растворе, однако в этих исследованиях не разрабатывался метод получения чистого 4-бромбифенила прямым бромированием бифенила.

Нам удалось разработать сравнительно простой способ выделения весьма чистого 4-бромбифенила с т. плав. 91° .

В качестве среды для бромирования бифенила свободным электроположительным бромом был использован хлороформ. В нем хорошо растворяются бифенил, бром, бромистый водород, 4-бромбифенил и 4,4'-дибромбифенил. Как известно, атом водорода в молекуле хлороформа способен принимать участие в образовании водородных связей и дает с бромом и бромистым водородом комплексные соединения, что должно облегчать течение реакции электрофильного замещения водорода бромом.

Этот вывод подтвердился на опыте, и реакция бромирования начиналась сразу после смешивания веществ.

Реакция бифенила с бромом в присутствии хлороформа происходит согласно схеме:



Аналогично происходит и образование 4,4'-дибромбифенила.

Температуры кипения при атмосферном давлении дифенила (254°), 4-бромбифенила (310°) и 4,4'-дибромбифенила (355—360°) существенно отличаются друг от друга. Поэтому для их разделения, хотя и не полного, оказалась эффективной трехкратная фракционированная перегонка в вакууме. Однако оставшиеся 5% примесей 4-бромбида не удалось удалить ни повторными перегонками в вакууме, ни дробными перекристаллизациями из 96°-ного этилового спирта. Это объяснялось сравнительно малой растворимостью дибромбида на холоде в винном спирте, заметно повышающейся в присутствии 4-бромбифенила.

Для удержания дибромбида бифенила в маточном растворе пришлось прибегнуть к растворению очищаемого 4-бромбифенила в значительном количестве бензола (при комнатной температуре) и после осаднения избыточным количеством 96°-ного этилового спирта с завершением кристаллизации при охлаждении в холодильнике.

Зависимость температуры плавления от состава системы, состоящей из монобромбифенила и дибромбифенила

4,4'-дибром- бифенил, %	t плав., °C	4,4'-дибром- бифенил, %	t плав., °C
0	91	9,55	85,4
2,28	89	11,20	85,1
3,08	88,7	12,07	84,4
3,43	88,5	13,55	83,6
4,20	87,9	14,41	83,2
5,80	87,2	16,12	82,6
5,96	87,3	18,30	82,1
6,35	86,6		

При повторении такой перекристаллизации был выделен чистый 4-бромбифенил с т. плав. 91° , отличающийся ослепительной белизной.

Для облегчения контроля за ходом разделения смесей 4-бромбифенила с 4,4'-дибромбифенилом нами изучалась зависимость температур плавления от состава этих соединений, изменяющегося в пределах содержания дибромида от 0 до 18%. Результаты измерений отражены в таблице.

Исходя из таблицы, можно установить, что 4-бромбифенил Г. Шульца с т. плав. 89° содержал 3% дибромида.

Получение 4-бромбифенила.

В круглодонную колбу емкостью 100 мл с 23,12 г бифенила (т. плав. -70°) и 30 мл хлороформа было добавлено 23,9 г брома. Колба с обратным холодильником соединялась с изогнутой трубкой. Конец трубки находился над поверхностью воды (100 мл), налитой в плоскодонную колбу с отверстием, закрытым ватой. Во избежание излишнего испарения брома темпы начавшейся реакции регулировались в течение четырех часов охлаждением льда с водой. Через четыре дня для удаления из продуктов реакции оставшегося брома и растворенного в хлороформе бромистого водорода красная бурная жидкость нагревалась до кипения в течение получаса. Количество поглощенного водой брома (0,55 г) и бромистого водорода (12,1 г) определялось титрованием. Продукт реакции промывался сначала 10 мл 10%-ного раствора сульфита натрия, а затем водой и сушился хлористым кальцием. Слабо окрашенное вещество (44,6 г), оставшееся после отгонки хлороформа на водяной бане, при охлаждении закристаллизовывалось и подвергалось трехкратной фракционированной перегонке в вакууме. В итоге второй фракционированной перегонки было получено 22 г вещества (т. кип. $145-147^{\circ}$ при $p = 6$ мм). Маслянистая жидкость (1 г), находящаяся в остатке, удалялась отжиманием между листами фильтровальной бумаги под прессом.

При третьей фракционированной перегонке до 147° при $p = 6$ мм было собрано 20,4 г 4-бромбифенила с т. плав. $88-88,5^{\circ}$. Неперегнанный остаток состоял из смеси 4-бромбифенила со значительным количеством 4,4'-дибромбифенила.

Главный продукт реакции (20,4 г), содержащий около 5% примеси 4,4'-дибромбифенила, перекристаллизовывался из смеси 3 мл бензола с 10 мл 96%-ного этилового спирта. Выпавшие при охлаждении кристаллы (18,33 г) отфильтровывались под уменьшенным давлением, промывались 4 мл этилового спирта и сушились в эксикаторе над серной кислотой. Выход монобромида с т. плав. $89-90^{\circ}$ 52,4% теоретического. Из маточного раствора были выделены смеси: с т. плав. 86° (0,68 г) и с т. плав. $80-80,5^{\circ}$ (0,25 г).

Для дальнейшего освобождения от дибромидов вещество (18,33 г) сначала растворялось при комнатной температуре в 14 мл бензола, потом осаждалось 70 мл 96%-ного этилового спирта, а затем для завершения кристаллизации охлаждалось в холодильнике. Кристаллы (16,8 г) отфильтровывались под уменьшенным давлением, промывались 5 мл предварительно охлажденного спирта и сушились в эксикаторе над серной кислотой, их t плав. 91° , выход — 48% теоретического.

Найдено элементов, %: С 61,83; Н 3,95; Вг 34,21.

Вычислено, %: С 61,83; Н 3,89; Вг 34,28.

Кроме 4-бромбифенила и продуктов реакции было выделено 7,4 г 4,4'-дибромбифенила с t плав. 165° и 8,42 г непрореагировавшего бифенила.

Система 4-бромбифенил — 4,4'-дибромбифенил.

Определялись температуры плавления смесей 4-бромбифенила с 4,4'-дибромбифенилом. Для этого вещества смешивались в соответствующих количествах и перемешивались при помощи легкого встряхивания. По застывании смесь растиралась в ступке и определялась температура плавления.

В таблице приведены средние температуры плавления каждой трех проб.

Выводы

1. Предложен вариант получения чистого 4-бромбифенила с выходом 48% теоретического посредством бромирования бифенила свободным бромом в хлорформенном растворе.
2. Опровергнуты высказывания Шленка и других авторов о невозможности выделения чистого 4-бромбифенила из продуктов бромирования бифенила.
3. Установлена зависимость между температурами плавления и составом системы: 4-бромбифенил — 4,4'-дибромбифенил (в пределах от 0% до 18,3% примеси дибромидов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fittig R. Liebigs Annalen der Chemie, 1864, 132, 204.
2. Schultz G. Liebigs Annalen der Chemie, 1874, 174, 201.
3. Schlenk W. Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft, 1912, 45, 317.
4. Rupp, Tselin. Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft, 1916, 49, 45.
5. Синтезы органических препаратов. Сб. I. М., ГИИН, 1949, стр. 106.

ВЛИЯНИЕ ФОНА НА ПОЛЯРОГРАФИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОРГАНИЧЕСКИХ РЕАКТИВОВ

РЯЗАНОВА Г. Е., ЛЕНСКАЯ В. Н. — кандидаты химических наук
(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Изучение полярографических свойств органических соединений проводится, как правило, в среде буферных растворов, обеспечивающих постоянство концентрации водородных ионов в процессе восстановления вещества.

Волны восстановления органических веществ [1] определяются скоростью электрохимического процесса и диффузией, которые зависят не только от природы восстанавливаемого вещества, но и от фона, на котором проходит восстановление. Об этом свидетельствуют результаты, полученные исследователями, зафиксировавшими влияние состава буферных растворов на полярографическое поведение органических веществ [2], [3], [4], [5].

При изучении органических реактивов мы также наблюдали изменение потенциалов полуволны и величины предельного диффузионного тока на фоне различных буферных растворов [6]. Изменение высоты волны деполаризатора связано с длиной углеродной цепи органической кислоты и числом карбоксильных групп, входящих в состав ее молекулы. Высказано предположение, что затруднение восстановления красителей связано с процессом комплексообразования, а облегчение восстановления — с образованием межмолекулярных водородных связей.

В настоящей работе была поставлена задача выяснения вопроса избирательности взаимодействия органических реактивов с компонентами буферных растворов и влияния природы буферных растворов на полярографическое поведение органического реактива в зависимости от pH, при котором проходит восстановление реактива.

В результате изучения ализарина S, пирокатехинового фиолетового, кислотного хром фиолетового К (КХФ-К), кислотного хромогена черного З (КОХЧ-З), кислотного хром темно-зеленого Т (КХТЗ-С), кислотного хром темно-зеленого Ж (КХТЗ-Ж) были по-

Получены данные, представленные в таблице и на соответствующих рисунках.

Потенциалы полуовали ализарина S(I) и пирокатехинового фиолетового (II) на фоне различных электролитов

Ф о н	Потенциалы полуовали					
	pH=4,3		pH=7,2		pH=9,3	
	I	II	I	II	I	II
KNO_3 , КОН	0,57 0,85	0,93 1,33	0,86	0,95 1,33	0,86	0,97 1,37
Ацетатный буфер	0,57	0,69		0,95 1,33		
Шавелевокислый буфер	0,56	0,69	0,82	0,98	0,83	1,00
Янтарнокислый буфер	0,51	0,69	0,82	0,98	0,82	0,93
Тимоннокислый буфер				0,87	0,83	1,30
Винный буфер	0,57	0,70	0,76 0,75	0,79	0,87	0,90 0,92
Олеатный буфер				0,67		1,46 0,94 1,32

Полученные данные свидетельствуют прежде всего о важности постоянной концентрации водородных ионов в полярографируемом растворе. Не только в кислой и нейтральной, но и в щелочной среде восстановление в забуференном растворе идет при более положительных потенциалах, чем в незабуференном растворе. Однако на примере ализарина S видно, что иногда полярографирование на фоне незабуференного раствора дает возможность изучать более детально кинетику процесса восстановления и за счет затруднения восстановления уловить промежуточные стадии сложного процесса восстановления. Так, на фоне KNO_3 можно зафиксировать волну, соответствующую процессу восстановления хиноидной группировки ализарина S до семихинона, чего мы не наблюдали на фоне одного из применявшихся буферных растворов (рис. 1).

На полярографическое поведение ализарина S большое влияние оказывает боратный буферный раствор, борная кислота которого, как свидетельствуют данные спектрофотометрического изучения [7], способна к взаимодействию с оксиантрохинонами. Борная кислота взаимодействует и с пирокатехиновым фиолетовым, о чем говорят полярографические характеристики пирокатехинового фиолетового,

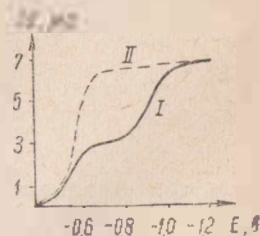


Рис. 1. Полярограммы ализарина S при pH=4,6: I — на фоне KNO_3 , II — на фоне ацетатного буферного раствора.

а также полученные нами спектрофотометрические кривые поглощения его на фоне боратного буфера. В этих условиях наблюдается изменение положения максимума светопоглощения, а также форма спектрофотометрической кривой.

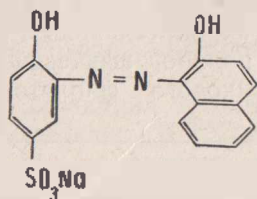
Из других применявшихся нами буферных растворов наибольшее влияние на полярографическое поведение органических реактивов оказывает лимоннокислый буферный раствор. Это позволяет предположить специфическое взаимодействие некоторых реактивов с лимонной кислотой. Так, для ализарина *S* на фоне лимоннокислого буферного раствора характерно уменьшение величины предельного диффузного тока, следовательно, изменяется его коэффициент диффузии. При $pH=7,2$ потенциал полуволны значительно отличается от $E_{1/2}$, полученного на фоне других буферных растворов. При

$pH=9,3$ резко изменяется наклон волны, вдвое уменьшается ее высота, восстановление останавливается на стадии образования семипродукта.

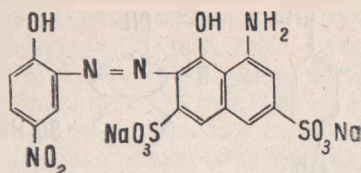
Результаты полярографирования пирокатехинового фиолетового на фоне лимоннокислого буфера показали влияние среды на облегчение восстановления реактива при $pH=7,2$ и $9,3$. В щелочной среде основной процесс восстановления останавливается на стадии образования семипродукта.

Таким образом, полярографические характеристики, полученные для ализарина *S* и пирокатехинового фиолетового на фоне лимоннокислого буферного раствора, являются результатом не только проявления восстановительных свойств этих реактивов, но и влияния на процесс восстановления взаимодействия реактивов с компонентами буферного раствора.

Изучение азокрасителей показало, что степень взаимодействия их с лимонной кислотой зависит от наличия в молекуле определенных заместителей. На рис. 2 представлены полярограммы восстановления КХФ-К на фоне фосфорнокислого и лимоннокислого буферных растворов. Из рисунка видно, что восстановление КХФ-К на фоне различных электролитов идет при одинаковых потенциалах, что свидетельствует об отсутствии влияния лимонной кислоты на восстановление азокрасителя, имеющего формулу



На рис. 3 видно, что для красителя КОХЧ-3



на фоне буферных растворов наблюдается резкое изменение характера восстановления по сравнению с незабуференной средой. На фоне лимоннокислого буфера волны, характеризующие отдельные ста-

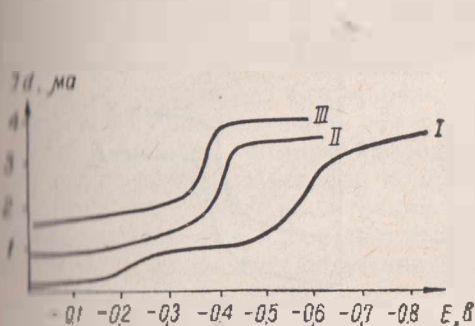


Рис. 2. Полиграммы кислотного хром фиолетового К (КХФ-К) на фоне:

I — KNO_3 ; II — фосфорнокислого буферного раствора; III — лимоннокислого буферного раствора.

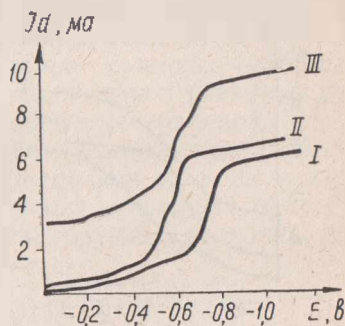
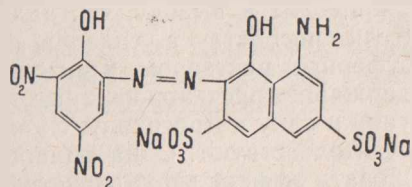


Рис. 3. Полярограммы кислотного однохром черного 3 (КОХЧ-3) на фоне:

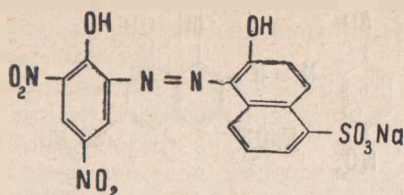
I — KNO_3 ; II — фосфорнокислого буферного раствора; III — лимоннокислого буферного раствора.

дии восстановления, более необратимы и у них отрицательные потенциалы полуволн по сравнению с волнами, полученными на фоне фосфорнокислого буфера. Полярограммы, характерные для КХТЗ-С



представлены на рис. 4. Буферные растворы фиксируют каждую волну полиграммы, увеличивая ее обратимость. Однако на фоне лимоннокислого буфера восстановление КХТЗ-С затруднено.

Краситель КХТЗ-Ж.



на фоне фосфорнокислого и лимоннокислого буферных растворов дает одноступенчатые полярограммы (рис. 5) с близкими потенциа-

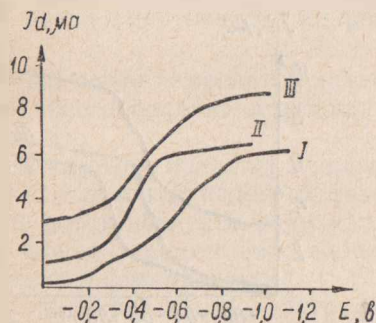


Рис. 4. Полярограммы кислотного хром темно-зеленого С (КХТЗ-С) на фоне:

I — KNO_3 ; II — фосфорнокислого буферного раствора; III — лимоннокислого буферного раствора.

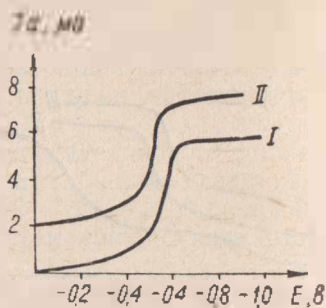


Рис. 5. Полярограммы кислотного хром темно-зеленого Ж (КХТЗ-Ж) на фоне:

I — фосфорнокислого буферного раствора; II — лимоннокислого буферного раствора.

ламн полуволн, что указывает на отсутствие процесса взаимодействия компонентов полярографического фона с молекулами красителя.

Сопоставление данных, касающихся полярографического поведения азокрасителей, приводит к выводу, что наличие нитрогрупп в молекуле азокрасителя способствует усилению его взаимодействия с лимоннокислым буферным раствором. Красители, не содержащие нитрогрупп или содержащие противоположные по характеру заместители — аминогруппу и одну нитрогруппу, с компонентами буферного раствора не взаимодействуют. Одна аминогруппа не способна полностью ликвидировать эффект взаимодействия с лимонной кислотой азокрасителя, содержащего две нитрогруппы.

Изучение полярографического поведения органических реактивов на фоне определенного буферного раствора при различных рН показало (см. таблицу), что степень взаимодействия органических

реактива с компонентами буферного раствора зависит от рН полярографического фона. На восстановление органического реактива влияют одновременно такие факторы, как природа буферного раствора и рН полярографируемого раствора. Существуют условия, которые являются более благоприятными для проявления одного из этих факторов по сравнению с другим. Так, в кислой среде, где концентрация ионов водорода достаточна для легкого восстановления красителя, влияние природы буферного раствора на восстановление красителя оказывается наименьшим. В щелочной среде, где недостаток подородных ионов сильно затрудняет процесс восстановления реактива, влияние природы буферного раствора проявляется более значительно. Видимо, при подобных «крайних» условиях полярографическое поведение органического реактива определяется в основном его природой и концентрацией водородных ионов в полярографируемой среде. Наибольшее влияние природы буферных растворов на процесс восстановления органического реактива наблюдается в промежуточной области, близкой к нейтральной.

Таким образом, помимо природы самого органического реактива и зависимости от условий полярографирования один из факторов — или величина концентрации водородных ионов, или природа буферного раствора — начинает иметь превалирующее значение, что влияет на процесс восстановления реактива.

Выводы

1. Лимоннокислый буферный раствор оказывает значительное влияние на полярографическое поведение ализарина *S*, пирокатехинового фиолетового и некоторых азокрасителей, содержащих в качестве заместителей пнтрогруппы.

2. Природа буферных растворов оказывает наибольшее влияние на восстановление ализарина *S* и пирокатехинового фиолетового при рН, близких к 7.

При применении для полярографического изучения органических веществ определенного полярографического фона следует иметь в виду возможность взаимодействия деполаризатора с компонентами фона. Область рН наибольшего влияния компонентов фона на восстановление реактива зависит от природы реактива и может быть уточнена соответствующими экспериментами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габровский Я., Кута Я. Основы полярографии. М., «Мир», 1965.
2. Eismann N. H., Stone K. G. Journal of the American chemical Society, 1959, 81, 3075.
3. Беляева З. Б., Коршунов И. А. Влияние состава фона на восста-

новление органических веществ. — Уч. зап. Горьковск. ун-та, вып. 17а, 1961, стр. 155.

4. Майрановский У. Б., Новиков С. С. К механизму восстановления нитросоединения на ртутно-капельном электроде. — «Известия АН СССР», 1962, № 3.

5. Нейман И. Н., Майрановский С. Г., Коварская Б. М., Розницев Э. Г., Гиндберг Э. Г. Полярографическое изучение некоторых н-окисных свободных радикалов. — «Известия АН СССР», 1964, № 8.

6. Комарова Г. Е., Ленская В. Н. О полярографическом поведении некоторых органических реактивов. — Мат-лы научн.-технич. совещ. по применению физ.-хим. методов анализа в хим. пром. Харьков, 1966, стр. 57.

7. Назарчук Т. Н. О соединениях борной кислоты с оксиантрохинонами. «Украинский химический журнал», т. 28, вып. 2, 1962.

ПОЛЯРОГРАФИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛИЗАРИНАТОВ И ПОВЕРХНОСТНО АКТИВНЫХ СВОЙСТВ АЛИЗАРИНА S

РЯЗАНОВА Г. Е., ЛЕНСКАЯ В. Н. — кандидаты химических наук
(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Вопросу изучения продуктов взаимодействия ализарина S с катионами металлов посвящен ряд работ. Данные об устойчивости ализаринатов приводятся Дорта-Шаеппи с сотрудниками [1], а также Черновой [2], применявших для изучения методы спектрофотометрии и амперометрии. При полярографическом изучении ализаринатов нами были получены данные, относящиеся к составу и устойчивости ализаринатов цинка и кадмия на фоне ацетатного буферного раствора, а также данные, характеризующие состав ализаринатов бериллия, кальция и бария [3].

По поводу характера образующихся продуктов взаимодействия ализарина S с катионами металлов авторы высказывают различные мнения. Наряду с указанием на образование внутрикомплексных соединений существуют данные об образовании продуктов присоединения [4], простых солей [5], адсорбционных соединений.

С этой точки зрения было интересно проанализировать результаты полярографического изучения ализаринатов.

В таблице представлены данные, полученные при полярографировании $2,6 \cdot 10^{-3}$ М солей кадмия, цинка, кобальта и никеля в присутствии различных концентраций ализарина S на фоне ацетатного буферного раствора.

Имеющее место сдвиги E_1 катионов в присутствии ализарина свидетельствует об образовании устойчивых продуктов взаимодействия. Возрастание величины сдвига E_1 катионов металлов при увеличении концентрации ализарина S наряду со стабильностью величины сдвига E_1 в определенных, узких областях концентра-

Сдвиг E_1 кадмия (II), цинка (II), кобальта (II) и никеля (II)

в присутствии ализарина S на фоне ацетатного буфера (рН=4,6)

Концентрация ализарина S, м/л	Величина ΔE_1			
	кадмий (II)	цинк (II)	кобальт (II)	никель (II)
$2,0 \cdot 10^{-3}$	0,045		0,010	
$2,5 \cdot 10^{-3}$		0,67		
$3,0 \cdot 10^{-3}$	0,050		0,080	
$3,4 \cdot 10^{-3}$		0,69		
$3,5 \cdot 10^{-3}$	0,050		0,083	0,070
$4,0 \cdot 10^{-3}$	0,057		0,090	
$4,6 \cdot 10^{-3}$	0,057	0,071		
$5,0 \cdot 10^{-3}$			0,100	0,080
$5,3 \cdot 10^{-3}$		0,118		
$5,5 \cdot 10^{-3}$			0,110	
$6,0 \cdot 10^{-3}$	0,060	0,112	0,120	0,090

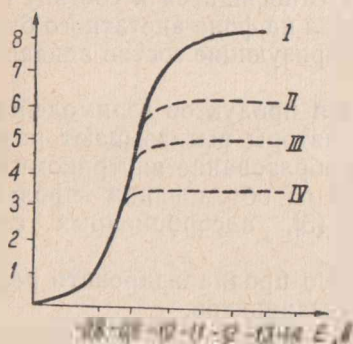
 $Jd, \text{мВ}$ 

Рис. 1. Понижение высоты волны ализарина S (I) в присутствии солей металлов Be^{+2} (II), Ca^{+2} (III), Ba^{+3} (IV) одинаковой концентрации.

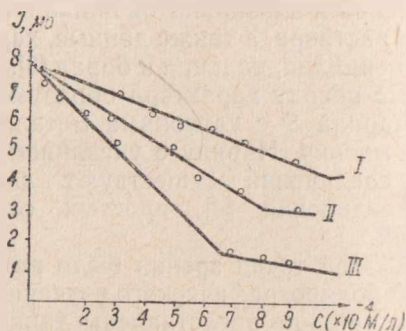


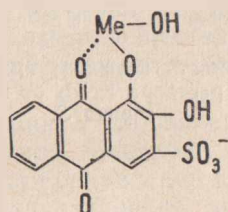
Рис. 2. Зависимость высоты волны ализарина S от концентрации солей Be (I), Ca (II), Ba (III).

ции ализарина S свидетельствует о ступенчатом комплексообразовании.

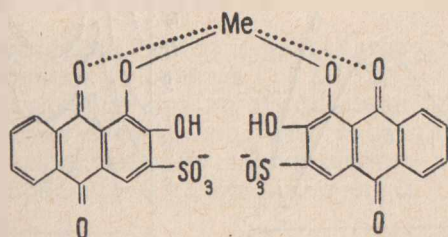
На рис. 1 представлены полярограммы ализарина S в присутствии солей бериллия, кальция и бария. Понижение высоты волны

ализарина *S* в этих условиях является результатом уменьшения в полярографируемом растворе активной концентрации ализарина *S*. Поднимаемая волна соответствует восстановлению полярографически активной хинондной группировки ализарина *S*. Уменьшение величины предельного диффузионного тока ализарина *S* является прямым доказательством того, что хинондная группировка ализарина образовала прочную связь с ионом металла и за счет этого стала полярографически неактивной. При достаточной концентрации ионов металла ализарин *S* связывается в прочное соединение и процесс восстановления хинондной группировки ализарина *S* не идет (рис. 2).

На основании полученных данных о достаточно высокой устойчивости ализаринатов и участии хинондной группировки в образовании продуктов взаимодействия ализарина *S* с катионами указанных металлов мы приписываем образующимся соединениям следующие формулы:



для соединений с молярным соотношением реагирующих компонентов 1 : 1 и



для соединений с молярным соотношением реагирующих компонентов 1 : 2.

В процессе изучения ализаринатов мы обратили внимание на то, что на фоне азотнокислого калия в присутствии ализарина *S* не наблюдается полярографических максимумов в растворах азотно-кислоты кобальта, никеля, кадмия и цинка. Предположив, что это связано с проявлением ализарином *S* поверхностно активных

свойств, провели дополнительные исследования. Были получены следующие результаты. На рис. 3 представлена кривая подавления кислородного максимума в растворе 0,1 М азотнокислого калия, наблюдаемого при добавлении в полярографируемый раствор возрастающей концентрации ализарина S .

При введении в раствор ализарина S в количестве $3,3 \cdot 10^{-5}$ г максимум подавляется полностью. Для электрокапиллярной кривой

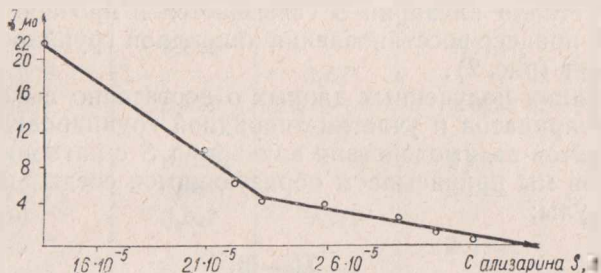


Рис. 3. Зависимость величины кислородного максимума в 0,1 N раствора KNO_3 от концентрации ализарина S .

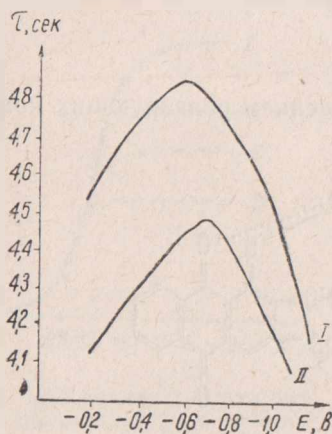


Рис. 4. Электрокапиллярные кривые в 0,1 N KNO_3 (I) в присутствии ализарина S (II).

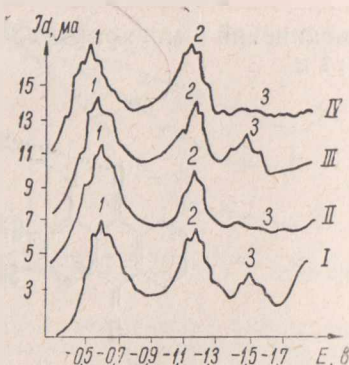


Рис. 5. Дифференциальные кривые ализарината кобальта на фоне 0,1 N KNO_3 :

1, 2 — волны ализарината; 3 — адсорбционная волна ализарина S . I — в отсутствии поверхностноактивного вещества; II — в присутствии агар-агара; III — в присутствии метил-роута; IV — кристаллического фиолетового

туту в присутствии ализарина S характерен, как видно на рис. 4, пик максимума в сторону отрицательных потенциалов. Эти данные свидетельствуют о проявлении ализарином S адсорбционных свойств на фоне азотнокислого калия, что позволяет использовать его для подавления полярографических максимумов в этих условиях.

Адсорбционная волна ализарина S , появляющаяся при $E=1,4$ в имеет незначительную высоту. В присутствии катионов металлов она увеличивается. Поэтому ряд опытов по изучению этой волны мы провели в растворе ализарината кобальта. Оказалось, что высота волны ализарина S при $E=1,4$ в не изменяется при увеличении температуры от 23° до 50°C , высота ее пропорциональна высоте ртутного столба. Интересно, что волна эта подавляется в присутствии некоторых поверхностно активных веществ, адсорбирующихся на ртути в более широкой области потенциалов, чем ализарин S .

Как видно из рис. 5, желатина, агар-агар и кристаллический флуоретовый подавляют ее почти полностью. Однако на нее не влияют такие поверхностно активные вещества, которые адсорбируются на ртутной капле в узкой области потенциалов, как, например, фуксин кислый и метил-рот.

Таким образом, ализарин S проявляет способность адсорбироваться на ртутном капельном электроде до потенциала 1,4 в. Это позволяет применить его для подавления полярографических максимумов веществ, восстанавливающихся при более положительных потенциалах на фоне электролитов, обладающих меньшей адсорбционной способностью, чем ализарин S .

Выводы

1. Предложены формулы для ализаринатов с молярным соотношением реагирующих компонентов 1:1 и 1:2.
2. Ализарин адсорбируется на ртутном капельном электроде до $E=1,4$, что позволяет изучать продукты его взаимодействия с металлами без применения обычных поверхностно активных веществ. Обнаружена адсорбционная волна ализарина S .

ЛИТЕРАТУРА

1. Dorta-Schaeppi V., Hüsseler H., Tredwell W. *Helvetica chimica*, 1964, 34, 797.
2. Чернова Р. К. Твердые электроды в амперометрии. Дисс. Саратов, 1963.
3. Комарова Г. Е. Полярографическое изучение взаимодействия ализарина с некоторыми металлами. Мат-лы науч.-технич. совещ. по применению новых методов анализа в хим. пром. Харьков, 1966, стр. 56.
4. Rabeet C. A., Godard A. P. *Analytica chimica acta*, 1950, 4, 517.
5. Atack F. *Journal of the Society of chemical industry*, 1915, 34, 936.

СПОСОБНОСТЬ ИОНОВ ЖЕЛЕЗА, ЦИНКА И КАДМИЯ К КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЮ С АТФ

МЕДОКС Г. В., ЛЕНСКАЯ В. Н., РЯЗАНОВА Г. Е. — кандидаты химических наук
(Саратовский сельскохозяйственный институт)

Как известно, растения способны извлекать ионы некоторых элементов при их концентрации в почвенных растворах, меньших, чем внутри клеток корней. Такое кажущееся противоречие законам осмотического давления связано с затратами энергии, представляемой АТФ и комплексобразованием. Поэтому заслуживает внимания изучение способности АТФ к комплексобразованию с ионами микроэлементов, как, например, Fe^{+2} , Zn^{+2} и др.

Некоторые микроэлементы, находясь в избытке в клетках растений, проявляют ингибиторные свойства, блокируя ферменты. Если АТФ образует с катионами микроэлементов достаточно устойчивые комплексные соединения, то ее присутствие в растении в достаточном количестве должно в какой-то мере препятствовать уменьшению или полной потере активности ферментов от действия некоторых ионов ингибиторов.

В листьях растений, больных хлорозом, значительная часть железа находится в неактивном состоянии благодаря образованию прочных координационных связей с инертными белками, освобождающимися при фотохимическом разрушении хлоропластов. Опыты Г. В. Медокс и А. Г. Кондратьевой показали [1], что заболевание растений хлорозом устраняется от введения АТФ. Возможно, одной из положительных сторон действия АТФ и в данном случае является комплексобразование.

Указанные соображения легли в основу полярографического изучения систем, содержащих АТФ и ионы Fe^{+2} , Cd^{+2} , Zn^{+2} , и рассмотрения их особенностей.

Изучение комплексобразования АТФ с некоторыми ионами проводилось рядом исследователей методами потенциометрического титрования, хрономатографии и электронного парамагнитного резонанса [2], [3], [4]. Сообщений о результатах, относящихся к поляро-

графическому изучению систем, содержащих АТФ и ионы микроэлементов, а также данных об исследовании процесса взаимодействия АТФ с ионами двухвалентного железа и кадмия какими-либо методами мы в литературе не встретили.

В качестве полярографического фона при изучении взаимодействия АТФ с ионами Fe (II), Zn (II), Cd (II) нами использовались водные растворы веществ, позволяющих получить наиболее обратимые полны указанных ионов металлов. Полярографическим фоном для Fe (II) был оксалатный буферный раствор (pH=1,68), для Cd (II)—раствор 1 М азотнокислого калия (pH=4,6), для Zn (II)—ацетатный буферный раствор (pH=4,6).

В присутствии АТФ наблюдался сдвиг потенциала полуволны ($E_{1/2}$) ионов металла в отрицательную область, а также уменьше-

ние величины предельного диффузионного тока (I_d) ионов металла. Это свидетельствует о взаимодействии АТФ с изучаемыми ионами металлов. Исходя из величины изменения полуволны ($E_{1/2}$) для ионов

металлов в присутствии и отсутствии комплексообразователя АТФ делались выводы о молярном соотношении реагирующих компонентов Р. Значения констант нестойкости K_n образующихся комплексных соединений вычислялись по формуле [5]:

$$\lg K_n = \frac{\Delta E_{1/2} \cdot n}{0,059} + p \lg c,$$

где n — число электронов, участвующих в восстановлении ионов металла,

c — молярная концентрация АТФ.

Полученные результаты свидетельствуют о различной устойчивости образующихся комплексных соединений металлов, возрастающей от цинка к железу:



Самое устойчивое соединение образуется при взаимодействии АТФ с ионами двухвалентного железа, физиологическая роль которого в растительных организмах особенно велика.

В области выбранных нами концентраций ($1,0 \cdot 10^{-4}$ — $6,0 \cdot 10^{-3}$ М/л) взаимодействие ионов всех трех металлов ($C_{\text{М (II)}} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ М/л) с АТФ происходит в соотношении 1 : 1.

В таблице представлены данные, полученные для системы Fe (II) — АТФ.

Из данных таблицы следует, что образование устойчивого соединения Cd (II) с АТФ происходит в присутствии избыточного количества ионов АТФ по сравнению с содержанием ионов кадмия. Ком-

Вычисление приближенного значения
комплексного соединения Cd (II) с АТФ

Концентра- ция АТФ, М/л	$\Delta E_{\frac{1}{2}}, (в)$	P	K_n
$2,0 \cdot 10^{-5}$	0,03		
$4,0 \cdot 10^{-5}$	0,03		
$8,0 \cdot 10^{-5}$	0,05		
$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,06	0,44	
$1,6 \cdot 10^{-4}$	0,07	0,63	$8,1 \cdot 10^{-7}$
$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,07	0,70	$1,2 \cdot 10^{-6}$
$4,0 \cdot 10^{-4}$	0,08	0,80	$7,9 \cdot 10^{-7}$
$6,0 \cdot 10^{-4}$	0,08	0,90	$1,1 \cdot 10^{-6}$
			$K_{нср} = 1,1 \cdot 10^{-6}$

плексное соединение с $P=1$ образуется даже при соотношении реагирующих компонентов 1:6. Соединений более сложного состава не возникало. Приближенное значение для кадмиевого комплекса составляет $1,1 \cdot 10^{-6}$.

Аналогичные опыты, измерения и вычисления были произведены для системы Zn (II) — АТФ и Fe (II) — АТФ. Образование устойчивого комплексного соединения Zn (II) с АТФ наблюдается при соотношении молей реагирующих компонентов 1:4. Образующееся соединение является наименее стойким, его константа нестойкости $K_n = 5,6 \cdot 10^{-6}$.

Комплексное соединение Fe (II) с АТФ оказалось наиболее стойким из всех изучавшихся нами аналогичных веществ при условии максимальной концентрации водородных ионов полярографируемого раствора. Образование его наблюдалось даже при самых меньших относительных количествах АТФ — при соотношении реагирующих компонентов 1:0,7. Комплексное соединение с $P=1$ образуется в присутствии АТФ в концентрации $2,10^{-5} - 4,10^{-4}$ М/л. Приближенное значение $K_n = 1,7 \cdot 10^{-7}$. При молярном соотношении реагирующих компонентов 1:6 наблюдался сильный сдвиг потенциала полуволны Fe (II) в область более отрицательных потенциалов, свидетельствующий об образовании комплексного соединения более сложного состава. Однако расчет K_n произвести было невозможно, так как волна становится необратимой.

В литературе высказывались различные предположения о строении комплексных соединений АТФ с ионами металлов.

Так, по мнению Бринтцингера [6], [7], исключено наличие координационной связи ионов металлов с адениновым кольцом и пред-

предлагается фиксирование их на остатке рибозы. Методом потенциометрического титрования [8] зафиксировано, что ионы металлов или сами не взаимодействуют с аденозином или взаимодействуют мало. Однако методом электронного парамагнитного резонанса обнаружено, что ионы некоторых металлов (например, цинка) образуют комплекс с N [7] пуринового кольца [4]. Кроме того, установлено, что в зависимости от свойств ионов металла образуется связь с β - или γ -фосфатными группами АТФ (ионы магния, кальция и цинка), с α - и β - и γ -фосфатными группами АТФ (ионы марганца (II) и кобальта (II) и, по-видимому, близкие к ним по свойствам ионы двухвалентного железа).

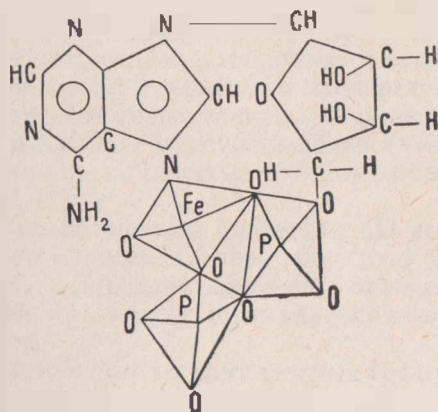
Основываясь на указанных выше данных, а также результатах наших исследований и других соображениях по вопросу о строении комплексных соединений АТФ с катионами Fe (II), Cd (II), Zn (II), убеждаемся в следующем:

1) активными участками молекулы АТФ при комплексообразовании (рН среды выше 7) являются гидроксильные группы остатка и рибозы;

2) при наличии сильноокислотной среды (рН значительно меньше 7) катионы Fe (II), Cd (II), Zn (II) сочетаются как с фосфатными группировками АТФ, так и с ее атомом азота [7] пуринового кольца, обладающего повышенной электронной плотностью;

3) моделирование пространственной структуры молекулы АТФ подтверждает отсутствие достаточных стерических препятствий для такого комплексообразования.

Таким образом, наиболее вероятно следующее строение изучавшихся нами комплексных соединений:



Выводы

1. Показано, что АТФ способна давать внутрикомплексные соединения не только с ионами цинка, но и с ионами железа (II) и кадмия. С помощью полярографического метода вычислены приближенные значения констант нестойкости этих комплексных соединений.

2. Установлено, что наиболее устойчивый комплекс с АТФ дает катон закисного железа.

3. Высказаны предположения о влиянии образования в растениях указанных комплексных соединений на некоторые стороны метаболизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медокс Г. В., Кондратьева А. Г. Междужилковый хлороз как следствие нарушения нормального кислородного режима почвы. Мат-лы Всесоюзной научн.-производств. конф. Киев, 1968, стр. 423.
2. Tagui Knaik M. M., Martell A. E. Journal of Physical chemistry, 1962, 66, 10.
3. Nanninga L. B. Journal of Physical chemistry, 1957, 66, 1144.
4. Cohn M., Hugnes T. Journal of biological chemistry, 1962, 237, 176.
5. Крюкова Е. П., Синякова С. И., Арефьева Т. В. Полярографический анализ. М., Госхимиздат, 1959.
6. Brintzinger H. Helvetica chimica acta, 1961, 44, 1199.
7. Brintzinger H. Helvetica chimica acta, 1962, 45, 1037.
8. Tagui Knaik M. M., Martell A. E. Journal of the American chemical Society, 1962, 84, 3037.

СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ГИДРОКСИЭТИЛИМИНО- ДИУКСУСНОЙ КИСЛОТЫ С НИТРАТАМИ НЕОДИМА, САМАРИИ И ЭРБИЯ

ХРАМОВ В. П., АЛНОВ Г. А. — кандидаты химических наук

КОЛЫЦОВ А. А., аспирант

Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Гидроксиэтилминодиуксусная кислота (HIMDA, H_2A) образует с редкоземельными элементами водородные и нормальные комплексы различного состава [1—5]. Ранее нами было показано, что HIMDA образует в водных растворах с празеодимом комплексы 1:1 и 1:2 [5]. В настоящей статье рассматриваются соединения HIMDA с неодимом, самарием и эрбием. Исходные растворы, аппаратура и методика работы те же [5].

Система Nd — HIMDA

Измерение оптической плотности показало, что при добавлении HIMDA к раствору нитрата неодима при соотношении $C_M : C_A = 1:5$ характерный для иона Nd^{+3} максимум смещается в длинноволновую область с заметным возрастанием оптической плотности. При $pH > 3$ возникает максимум светопоглощения ($\lambda = 580$ нм), соответствующий образованию комплекса, который остается неизменным при $pH = 4-6$ (рис. 1).

Измерения оптической плотности ΔD комплексного и некомплексного ионов определили аналитическую длину волны ($\lambda = 580$ нм). На рис. 2 показано изменение оптической плотности в зависимости от pH. Как видно, оптимальный выход комплекса достигается при $pH > 4$.

Соотношение компонентов в комплексных соединениях определяли методами насыщения и изомолярных серий Остромысленского. Жоба при различных значениях pH.

При $pH = 4,85$ образуются соединения состава $C_M : C_A = 1:1$ и

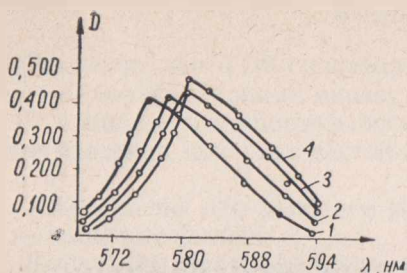


Рис. 1. Спектры поглощения неодима — HIMDA ($C_{Me} = 4,35 \cdot 10^{-3}$ моль/л)
 1 — $Nd(NO_3)_3$; 2 — $Nd(NO_3)_3 + H_2A$ (1 : 5, pH=2,0);
 3 — $Nd(NO_3)_3 + H_2A$ (1 : 5, pH=3,10);
 4 — $Nd(NO_3)_3 + H_2A$ (1 : 5, pH=4,10).

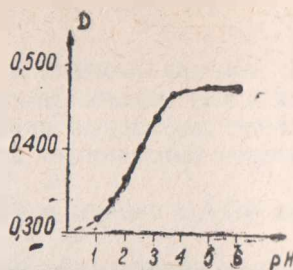


Рис. 2. Зависимость оптической плотности от pH при соотношении:
 $Nd(NO_3)_3 : H_2A = 1 : 10$ ($C_{Me} = 4,35 \cdot 10^{-3}$ моль/л, $\lambda = 586$ нм).

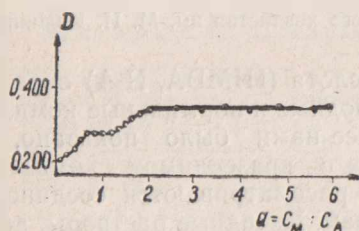


Рис. 3. Серия растворов с постоянной концентрацией центрального иона Nd^{+3} и переменной адденда $C_{Me} = 4,35 \cdot 10^{-3}$;
 pH=4,85; $\lambda = 586$ нм.

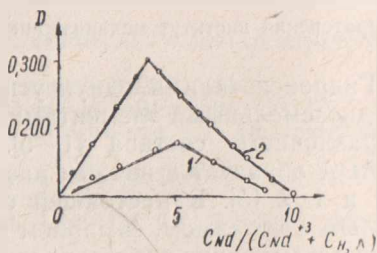


Рис. 4. Изомольярные серии, $\lambda = 586$ нм:
 1 — pH=2,0; 2 — pH=4,8.

1 : 2 (рис. 3). Методом изомольярных серий показано преимущественное существование комплекса 1 : 2 при pH=4,8 и комплекса 1 : 1 при pH=2,0 (рис. 4).

Система Sm — HIMDA

При добавлении избытка HIMDA к раствору нитрата самария максимум спектра поглощения смещается в длинноволновую область с одновременным возрастанием оптической плотности, как и в случае неодима.

Изучение изменения оптической плотности в зависимости от pH при $C_M : C_A = 1 : 5$ показывает равномерное возрастание D, достигающее постоянной величины при pH=4,8 для $\lambda = 404$ нм и $\lambda =$

405 нм (рис. 5). Для $\lambda=403$ нм в узком интервале $pH=2,2-2,4$ возникает пик оптической плотности, который может служить указанием на образование в растворе при этих значениях pH малопрочного комплекса. Соотношение $C_M:C_A$ не влияет на общий характер стабилизации оптической плотности.

Таким образом, в интервале $pH=1-4,8$ самарий образует с HIMDA два комплекса неодинаковой прочности, причем для изучения целесообразно использовать различные длины волн (403—405 нм).

Методом изомольярных серий был установлен состав доминирующих комплексов при максимальных значениях pH их выхода ($pH=2,0$ и $pH=4,8$). Максимум оптической плотности наблюдается при $C_M:C_A=1:2$ ($pH=4,8$) и $C_M:C_A=1:1$ ($pH=2,0$) (рис. 6). Комплекс состава 1:2 подтвержден кривой насыщения при $pH=4,8$ и $\lambda=404$ нм (рис. 7). При $\lambda=403$ нм и $pH=4,8$ наблюдается пик оптической плотности при $C_M:C_A=1:1$, который не фиксируется при $\lambda=404$ нм и $\lambda=405$ нм (рис. 7). Исследование комплексо-

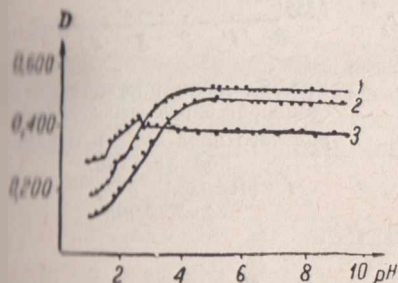


Рис. 5. Зависимость оптической плотности от pH при соотношении $S_{M}:H_2A=1:5$:

1 — $\lambda=404$ нм; 2 — $\lambda=405$ нм; 3 — $\lambda=403$ нм.

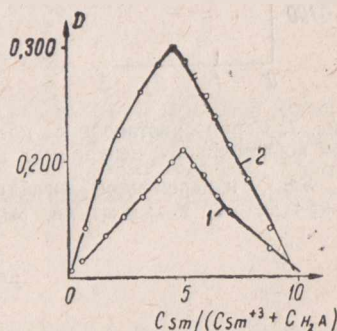


Рис. 6. Изомольярные серии: 1 — $pH=2,0$; $\lambda=404$ нм; 2 — $pH=4,8$ $\lambda=403$ нм.

образования методом насыщения при $pH=2,0$ показало существование в кислой области комплекса состава 1:1 ($\lambda=403$ нм); при $\lambda=404$ нм фиксируются два комплекса 1:1 и 1:2.

Система $Eg-HIMDA$

Измерения в этой системе являются весьма затруднительными, так как эрбий образует максимум светопоглощения на границе ультрафиолетовой области. Опыты показали, что при добавлении комплекса HIMDA к раствору нитрата эрбия происходит небольшое уменьшение максимума оптической плотности в коротковолновую об-

ласть ($\lambda=378,5$ нм), которое не изменяется от увеличения концентрации кислоты и рН раствора.

На основании изучения изменения оптической плотности в зависимости от рН в интервале 1—10 было установлено, что полный выход комплекса происходит в более кислой среде (рН=2,8—3,6), чем для элементов цериевой подгруппы.

Методами насыщения и изомолярных серий определен состав образуемых комплексов. Как видно из рис. 8, при рН=1,95 в системе происходит ступенчатое комплексообразование, указывающее

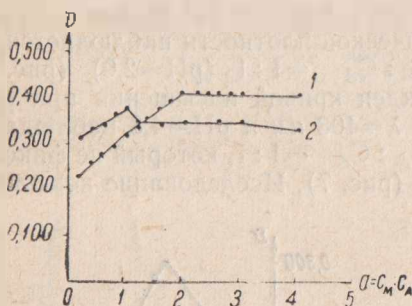


Рис. 7. Серии растворов с постоянной концентрацией центрального иона

Sm^{+3} и переменной лиганда:

1 — $\lambda=404$ нм; 2 — $\lambda=403$ нм, рН=4,8.

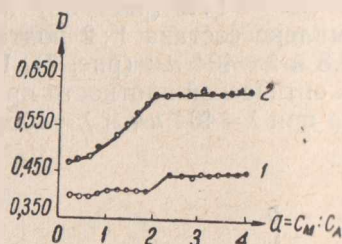


Рис. 8. Серии растворов с постоянной концентрацией центрального иона Er^{+3} и переменной лиганда:

1 — рН=1,95; 2 — рН=4,8;
 $\lambda=378,5$ нм.

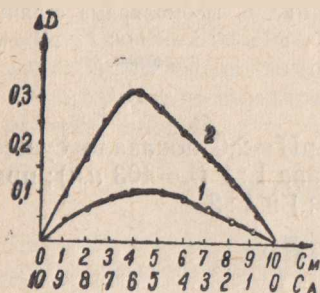


Рис. 9. Изомолярные серии:

1 — рН=1,95; 2 — рН=4,8;

$\lambda=378,5$ нм.

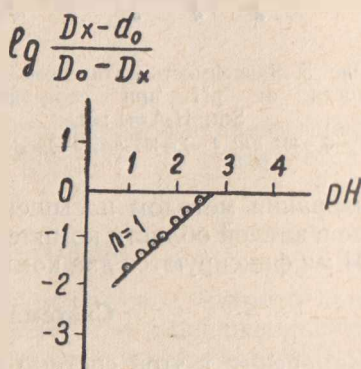
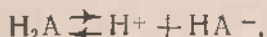


Рис. 10. Изменение $\lg \frac{D_x - d_0}{D_0 - D_x}$ в зависимости от рН.

на существование комплексов состава 1 : 1 и 1 : 2. При $pH=4,8$ равновесие смещается в сторону образования более устойчивого комплекса 1 : 2. На кривых изомольярных серий (рис. 9) также видно образование этих комплексов.

Известно, что в зависимости от условий HIMDA может отщеплять различное число протонов. По методу Астахова [6, 7] было рассчитано число вытесненных ионов водорода (рис. 10) и показано, что при комплексообразовании эрбия ($pH=1,35-2,2$) от кислоты отщепляется один протон, то есть при этих условиях HIMDA реагирует как одноосновная.

Таким образом, в изучаемых условиях существует равновесие кислоты



которая реагирует с РЗЭ с образованием водородных комплексов $(MHA)^{+}$ и $(MHA)_2^{+}$. Соединения состава 1 : 2 будут более прочными.

Выводы

Спектрофотометрическим методом исследован процесс комплексообразования гидроксизилиминоднуксусной кислоты с нитратами неодима, самария, эрбия и показано, что указанные элементы образуют в водных растворах комплексы состава 1 : 1 и 1 : 2 при $pH=2,0$ и 4,8 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chaberek S., Courtney R. C., Martell A. E. Journal of the American Chemical Society, 1962, 84, 2081.
2. Ткачова Н. М. и др. Комплексообразование оксизилиминоуксусной кислоты с РЗЭ. — «Журнал неорганической химии», т. 10, 1965.
3. Вольф. Комплексообразование и комплексообразовательная десорбция РЗЭ. — В кн.: Методы разделения редкоземельных металлов. М., «Иностранная литература», 1961, стр. 155.
4. Вольф, Массон. Исследования в области разделения РЗЭ методом комплексообразовательной десорбции с помощью 2%-ного раствора оксизилиминоднуксусной кислоты. — В кн.: Методы разделения редкоземельных металлов. М., «Иностранная литер.», 1961, стр. 214, 221.
5. Эрмачев В. П., Алиев Г. А. Спектрофотометрическое исследование комплексообразования гидроксизилиминоднуксусной кислоты с нитратом празеодима. — В кн.: Исследования в области химии редкоземельных элементов. Изд. СГУ, 1960, стр. 45.
6. Ткачиконов Ю. П., Астахов К. В. Комплексообразование РЗЭ с оксизилиминоднуксусной кислотой. — «Журнал неорганической химии», т. 8, 1963.
7. Вороникки В. П., Астахов К. В., Макеничев Ф. Г. Комплексообразование РЗЭ с этилендиаминтетрауксусной кислотой. — «Журнал неорганической химии», т. 10, 1965.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИ-*n*-ГЕПТИЛФОСФИНАТОВ САМАРИЯ И ЕВРОПИЯ

ХРАМОВ В. П., СЕВАСТЬЯНОВ В. П., БОЛЬШАКОВ А. Ф., ИВАНОВ Б. А.

кандидаты химических наук

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Исследование термической устойчивости сложных по химическому составу и строению комплексных соединений представляет большой теоретический интерес, определяемый возможностью получения в качестве промежуточных и конечных продуктов термоллиза высокоактивных кристаллических фаз и выявления некоторых закономерностей их образования.

Объектами исследования являлись соединения самария и европия с ди-*n*-гептилфосфиновой кислотой (ДГФК).

Рентгенографические исследования образцов проводились на дифрактометре УРС-50 ИМ в Си (K α) излучении. Интенсивность рефлексов определялась по 100-балльной шкале как линейная величина от уровня фона до максимума интерференции. Межплоскостные расстояния рассчитывались с использованием табличных данных [1]. Погрешность в определении положения рефлекса составляла ± 1 мин. Это приводило к следующей ошибке в межплоскостных расстояниях в интервалах:

$d = 5 \div 3 \text{ \AA}$	$\Delta d = 0,02 \div 0,08 \text{ \AA}$
$d = 3 \div 2 \text{ \AA}$	$\Delta d = 0,008 \div 0,004 \text{ \AA}$
$d = 2 \div 1,5 \text{ \AA}$	$\Delta d = 0,004 \div 0,002 \text{ \AA}$

что находится в полном соответствии с допустимыми ошибками метода [2].

Синтезированные соли дают отражения в области углов интерференционного отблеска 6, 11, 21° (в 2 θ), аналогичные дифракционным гало (рис. 1 А, Б, В).

Однако степень их упорядоченности больше, чем у полимерных

образов. Иллюстрацией этому является приведенная на рис. 1Е дифрактограмма толуольного студия ди-*n*-гептилфосфината неодима, качественно отличная от дифрактограмм синтезированных солей неодима, самария и европия.

Дифрактограммы соединений самария и европия очень сходны между собой, что свидетельствует об их структурной близости (рис. 1 А, В).

Дифференциально-термический (ДТА) и дифференциально-термический (ДТГ) анализы осуществлялись на венгерском дифрактографе системы Паулик — Паулик — Эрдей [3] в интервале температур 20—1000°C. Скорость нагрева равнялась 10°/мин, температура измерялась платинородиевой термоларой, эталоном служила свежепрокаленная окись алюминия.

Как видно из рис. 2, термоллиз соединений протекает многоступенчато в экзо- и эндотермической областях. Соли стабильны в интервале 20—200°C, о чем говорит отсутствие эффектов на дифференциально-термических кривых ДТА и ДТГ и наличие горизонтальной площадки на кривой убыли массы (ТГ). Начальная температура их разложения близка по значению температуре термоллиза тамои ди-*n*-гептилфосфиновой кислоты.

Термическое разложение солей протекает в одну стадию с поглощением тепла при температурах экстремумов: для соли самария 465°C (ДТГ) или 465°C (ДТА) с убылью массы 37%; для соли европия температура разложения несколько выше — 465°C (ДТГ) или 475°C (ДТА) с убылью массы 43%. Процесс термоллиза заканчивается при температуре 520 $\pm$ 1000°C. Окончательная убыль массы составляет 63% (самарий) и 67% (европий). В интервале температур 420—660°C промежуточные продукты окрашены в черный цвет и представляют собой продукты сгорания углеводородного радикала.

Конечными продуктами разложения являются кристаллические вещества, окрашенные соответственно в цвет катионов редкоземельных элементов (см. таблицу).

На дифрактограммах, снятых с продуктов термоллиза (рис. 1 Г, Д), не наблюдается рефлексов, отвечающих окислам самария и европия (кубической или моноклинной формы [4]). По-видимому, требуется более продолжительное время или более высокая температура термоллиза, чтобы привести к полной диссоциации соединений.

Сходство рентгенограмм конечных продуктов термического разложения позволяет говорить об их изоморфности и, по-видимому, об одинаковой стехиометрии при получении их в одинаковых температурных условиях, что также подтверждается данными термодифрактометрического анализа. Наклон кривой убыли веса при разложении соединений в интервалах температур 500—1000°C примерно одинаков.

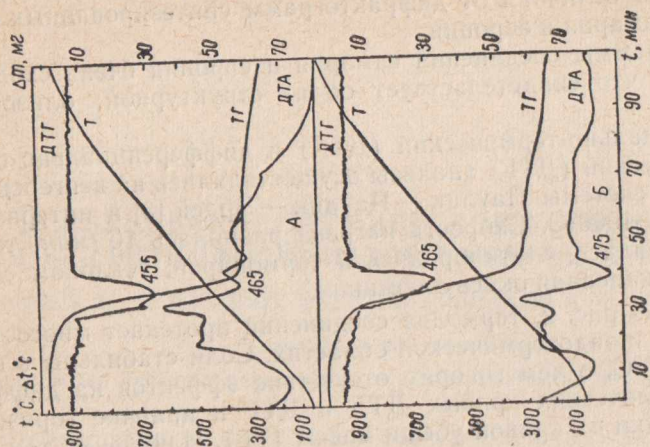


Рис. 2. Дериwатoгpаммы ди-*n*-гептилфосфината самария (А) и европия (Б): ДТА — дифференциально-термическая кривая; ДТГ — кривая дифференциальной термобалансметрии; ТГ — кривая убыли массы; Т — кривые изменения температуры.

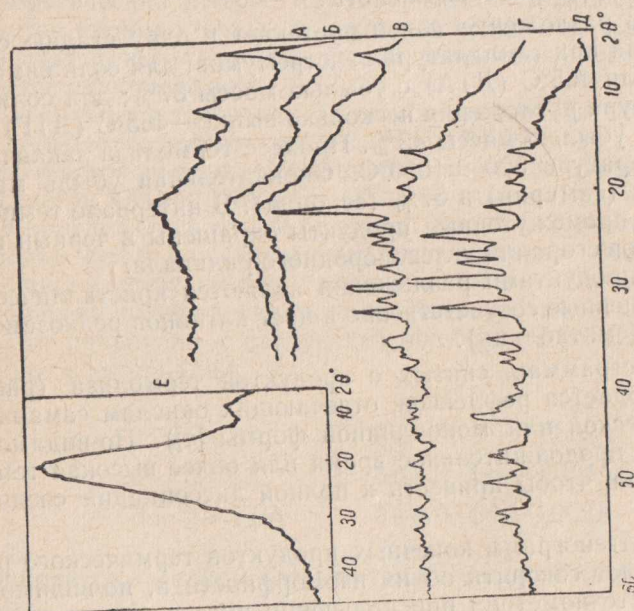


Рис. 1. Диффрактограммы ди-*n*-гептилфосфинатов неодима (А), самария (Б); европия (Д); конечных продуктов их термoлизa (Г) самария; (Е) — европия и толуольного студия ди-*n*-гептилфосфината неодима (Е).

Таблица

Межплоскостные расстояния продуктов термoлизa ди-*n*-гептилфосфинатов самария и европия, полученных в политермическом режиме при $t=1000^{\circ}\text{C}$

Sm		Eu		Sm		Eu	
I/I_0	$d_n, \text{\AA}$	I/I_0	$d_n, \text{\AA}$	I/I_0	$d_n, \text{\AA}$	I/I_0	$d_n, \text{\AA}$
28	5,532	21	5,471	15	2,391	19	2,419
19	4,977	22	4,949	6	2,349	10	2,282
13	4,557	18	4,618	15	2,197	22	2,160
100	4,092	29	4,055	16	2,173	36	2,126
30	3,844			8	2,008	21	1,975
30	3,672	57	3,630	13	1,954	28	1,950
20	3,542	25	3,479	16	1,924	13	1,922
21	3,213	46	3,389	19	1,833	30	1,855
45	3,014	44	3,269	15	1,823	12	1,818
10	3,002	100	3,064	10	1,764	27	1,752
17	2,897	60	2,840	6	1,733	25	1,727
15	2,644			13	1,706	14	1,685
26	2,572	22	2,600	8	1,680		
24	2,553	27	2,578	8	1,658	10	1,657
11	2,468	18	2,480	10	1,602	9	1,579

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиллер Я. П. Таблицы межплоскостных расстояний. М., «Недра», 1966.
2. Зевин Л. С., Хейкер О. М. Рентгеновские методы исследования строительных материалов. М., «Стройиздат», 1965.
3. Paulik F., Paulik I., Evdey L. «Talanta», 1966, 13, 1405.
4. Глушкова В. Б. Полиморфизм окислов редкоземельных элементов. Л., «Ленинград», 1967.

КОМПЛЕКСНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С НИТРОПРОИЗВОДНЫМ АРСЕНАЗО

ХРАМОВ В. П., АКМАЕВА Н. Л., ДЕДКОВ Ю. М.— кандидаты химических наук
(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина,
Институт геохимии и аналитической химии АН СССР им. В. И. Вернадского)

Продолжая исследования процесса комплексообразования производных хромотроповой кислоты с редкоземельными элементами [1—3], мы изучили комплексные соединения с аналогами, содержащими нитрогруппу арсеназо 3НБ (2-арсонобензол-(1-азо-2)-1,8-диоксинафталин-3,6-дисульфокислота-(7-азо-1)-3-нитробензол) и арсеназо 4НБ (2-арсонобензол-(1-азо-2)-1,8-диоксинафталин-3,6-дисульфокислота-7-азо-1)-4-нитробензол). Введение нитрогруппы делает эти соединения менее устойчивыми, что позволяет улавливать тонкие различия в ряду лантанидов.

Арсеназо 3НБ в кислой среде дает спектр поглощения с максимумом 540 нм. Его комплексные соединения с РЗЭ цериевой подгруппы неустойчивы. Реакция протекает во времени. Через 10 мин развивается максимальная окраска, которая сохраняется в течение 20 мин. Максимум спектра поглощения комплекса реагента с лантаном находится при 640 и 700 нм при pH=3,40.

Через 40 мин. выпадает осадок. С иттриевыми элементами реакция протекает иначе. С иттербием при pH=3,40 окраска развивается через 5 мин. и сохраняется без выпадения осадка в течение суток. Максимум спектра поглощения комплекса при 640 нм (при 700 нм поглощение практически равно нулю). Арсеназо 4НБ имеет максимум спектра поглощения при 540 нм. Как видно из рис. 1, оптимальное комплексообразование протекает при pH=3,4. Лантан, празеодим, неодим, самарий дают комплексы с двумя максимумами спектра поглощения при 720—710; 655—660 нм (рис. 2). Реакция протекает во времени, полностью развивается через 20—15 мин при соотношении $M : R = 1 : 1$. Окраска сохраняется в течение 2 час, после чего выпадает осадок. Методом насыщения установлено, что процесс комплексообразования протекает ступенчато, с образова-

Комплексы $R:M=1:1$; $1:2$; $1:3$. Молярные коэффициенты поглощения, рассчитанные методом аналитического исследования кривых насыщения, для комплексов $M:R=1:1$ таковы $\epsilon=40 \cdot 10^3-49 \cdot 10^3$. Для комплексов $M:R=1:2$ чувствительность реакции почти в 10 раз выше ($\epsilon=96 \cdot 10^3-80 \cdot 10^3$). Характер спектров комплексов арсената подобен, но окраска развивается медленнее. Так, у соединений европия максимум оптической плотности при 720 нм появляется лишь через час при четырехкратном избытке металла.

Для остальных элементов внутренней подгруппы наблюдаются максимумы оптической плотности комплексов при 600 и 650 нм (рис. 2). Окраска развивается сразу при любых соотношениях $M:R$. В водных комплексах не выделяются.

Таким образом, своеобразие взаимодействия арсената 4НБ с индивидуальными РЗЭ, достаточная устойчивость комплексов и высокая чувствительность могут быть использованы для определения лантанидов при их совместном присутствии.

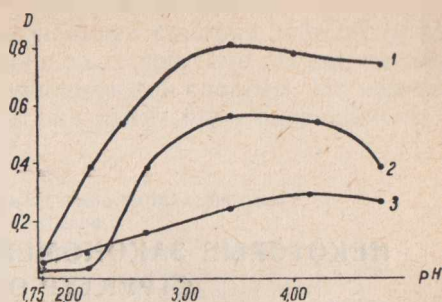


Рис. 1. Влияние pH на светопоглощение комплексов арсеназо 4НБ с La (1), Nd (2), Yb (3):

$\lambda=720$ нм для La и Nd; $\lambda=650$ нм для Yb
 $M:R=1:2$.

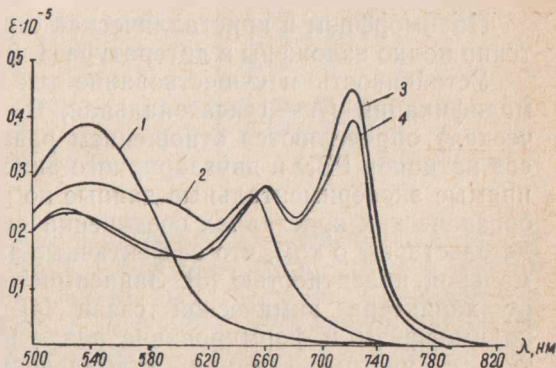


Рис. 2. Светопоглощение арсеназо 4НБ (1) и его комплексов с Yb (2), La (3), Nd (4).
 $pH=3,40$; $M:R=1:1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимеева Н. Л., Дедков Ю. М., Храмов В. П. Спектрофотометрическое исследование комплексных соединений редкоземельных элементов с арсеназо 4НБ. Журнал аналитической химии, 1967, т. 22, № 10.
2. Храмов В. П., Акмаева Н. Л. Спектрофотометрическое исследование комплексных соединений РЗЭ с некоторыми органическими реактивами. Материалы 1-й конференции. Саратов, сельхоз. ин-т, 1968, стр. 159.
3. Храмов В. П., Акмаева Н. Л. Спектрофотометрическое исследование комплексных соединений РЗЭ с некоторыми производными хромотроповой кислоты. 1-й. Исследования в области химии РЗЭ. Саратов. Изд. СГУ, 1969, стр. 38.
4. Савинни С. Б. Арсеназо III. М., Атомиздат, 1966.

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУР ОКИСЛОВ РЗЭ

БОЛЬШАКОВ А. Ф., ЕГОРОВА В. Г., СЕВАСТЬЯНОВ В. П., ХРАМОВ В. П. —
кандидаты химических наук

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Полиморфизм и кристаллическая структура окислов РЗЭ достаточно полно изложены в литературе [1, 2].

Устойчивость и существование тех или иных кристаллических модификаций (А — гексагональная, В — монокликовая и С — кубическая) определяются отношением размеров трехзарядных радиусов катионов РЗЭ и двухзарядного аниона кислорода [1, 2]. Однако прямые экспериментальные данные по распределению заряда в неорганических кристаллах соединений «многовалентных» ионов свидетельствуют о том, что эффективные заряды не совпадают с формальной валентностью [3]. Зависимость размера ионного радиуса от характера химической связи [4] заставляет рассматривать полиморфизм и формирование различных кристаллических структур с учетом влияния стабильности электронных конфигураций.

Как известно, образование кристаллической решетки связано с образованием валентными электронами атомов максимального статистического веса устойчивых электронных конфигураций [5]. Представления об образовании, стабильности и разрушении электронных конфигураций развиты в работах [5—7]. Отметим только, что наиболее высокосимметричные и плотноупакованные структуры образуются на базе высокого статистического веса наиболее стабильных конфигураций локализованных электронов при условии малого разрыхляющего действия коллективизированных. При высокой доле коллективизированных электронов возможно понижение симметрии структуры, основанной на стабильных конфигурациях. Происходящие при повышении температуры возбуждение и нарушение наименее энергетически стабильных конфигураций и увеличение статистического веса наиболее стабильных из них могут быть представлены как увеличение с ростом температуры локализации электронов.

Изучение образования и устойчивости кристаллических решеток типа хлористого натрия у моноокиси самария, европия и иттрия удобно провести, сопоставляя их с окислами элементов второй группы главной подгруппы периодической системы. По изменению размеров элементарных ячеек они могут быть расположены в ряд (см. таблицу).

Кристаллохимические и физические характеристики окислов металлов

Оксид	Конфигурация валентных электронов изолированных атомов металлов	Тип решетки	Параметр эл. ячейки, a , Å	Темп. пл., T°	Ширина запрещенной зоны
				8	
BeO	$2s^2$	вюрцит		2843	8,32
MgO	$3s^2$	хлор. натрий	4,207	3079	11,68
CaO	$3d^0 4s^2$		4,80	2860	8,95
YbO	$4f^{14} 5d^0 6s^2$		4,86		
AmO	$4f^8 5d^0 6s^2$		4,99		
EuO	$4f^7 5d^0 6s^2$		5,144		
BiO	$4d^0 5s^2$		5,145	2700	
PaO	$5d^0 6s^2$		5,52	2195	

Для бериллия характерно образование sp -конфигурации за счет sp переходов, статистический вес которых очень высок в связи с малым главным квантовым числом sp -электронов. Учитывая основную тенденцию кислорода к достройке s^2p^4 конфигурации до s^2p^6 , следует считать, что формирование вюрцитной структуры происходит на базе двух стабильных конфигураций sp и s^2p^6 .

При переходе к магнию вследствие уменьшения стабильности sp конфигурации за счет увеличения главного квантового числа sp электронов повышается вероятность передачи всех s^2 электронов атому кислорода. Образование двух стабильных конфигураций d^2p^4 для магния и s^2p^6 для кислорода влечет за собой изменение координации на октаэдрическую, которая сохраняется в ряду монооксидов вплоть до окиси бария. При переходе к кальцию и далее к цинку появляются полностью вакантные состояния, на которые частично могут переходить s^2 электроны. Возможность их переходов увеличивается с ростом главного квантового числа d электронов [6]. При этом уменьшается вероятность присоединения s^2 электронов к кислороду. Конфигурации становятся все менее обособленными, и это отражается на изменении ряда физико-химических свойств окислов, например на характере перехода в газообразное состояние. Так, если окись магния переходит в газообразное состояние преиму-

щественно за счет диссоциации, то окись бария возгоняется в виде молекул [9].

Таким образом, при переходе от окиси магния к монооксидам РЗЭ и далее к окиси бария происходит постепенное уменьшение переходов s^2 электронов атомов металла к атомам кислорода и уменьшение стабильности электронных конфигураций. Это отражается на температурах плавления окислов (см. таблицу). Наименее устойчивой должна быть решетка окиси бария.

Тенденция к образованию устойчивых конфигураций (f^7 для самария и европия и f^{14} для иттербия), перекрываемая стремлением кислорода к стабилизации своей электронной конфигурации, за счет $f \rightarrow d$ переходов приводит к тому, что решетки SmO и EuO на практике являются менее устойчивыми, чем решетка BaO . Это сопровождается изменением координационного числа и формированием кубической решетки типа окиси марганца в случае полторных окислов самария, европия и иттербия. Наиболее устойчивая моноокись европия окисляется уже при незначительном нагревании с большим выделением тепла [2].

Кубическая решетка типа окиси марганца свойственна всем окислам РЗЭ. При повышении температуры возможен переход в более плотную гексагональную (окись лантана и неодима) или моноклинную (окись самария, европия и гадолиния) структуры. У полторных окислов церия, празеодима и тербия процесс стабилизации электронной конфигурации s^2p^6 кислорода в отличие от моноокисей не тормозится, а усиливается (дополнительно) стремлением церия, празеодима и тербия к получению устойчивых конфигураций f^0 и f^7 . Это приводит к формированию кубической решетки типа фтористого кальция для двуокиси РЗЭ. Особенно четко процесс выражен у церия, чем и объясняется возможность получения кубической структуры типа окиси марганца только в сильно восстановленной атмосфере [2].

Переход кубических решеток типа окиси марганца в более плотноупакованные, но менее симметричные гексагональные и моноклинные структуры может быть объяснен следующим образом. При умеренном термическом возбуждении образуется относительно большой статистический вес электронных конфигураций. Это приводит к появлению более плотной упаковки. Одновременно усиливается разрыхляющее действие коллективизированных электронов, в результате чего симметрия понижается. Характерно, что теплота полиморфного превращения увеличивается от окиси неодима (2300 ккал/моль) к окислу гадолиния (6000 ккал/моль), что связано с уменьшением вероятности $f \rightarrow d$ переходов [10] и затруднением образования большого статистического веса электронных конфигураций.

Исходя из представлений об образовании и разрушении стабиль-

электронных конфигураций, можно объяснить стабилизацию ионных решеток окислов РЗЭ при введении различного рода примесей, не прибегая к использованию ионных радиусов, как это сделано в работе [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldschmidt W. W. Structures Norskis Videnskis-akademi.
2. Голушкова В. Б. Полиморфизм окислов РЗЭ. М., «Наука», 1967.
3. Попов А. А., Сыркин Я. К., Дяткина М. Е. Проблема одноатомных ионных и характер химической связи в неорганических кристаллах. «Успехи химии», 1969, 2, стр. 193.
4. Попаренных Л. С. О некоторых основных вопросах кристаллохимии и минералогии. — Записки Всесоюз. минералог. об-ва, 1955, № 4, стр. 109.
5. Самсонов Г. В. Роль образования стабильных электронных конфигураций в формировании свойств химических элементов и соединений. — «Украинский химический журнал», 1965, 12, стр. 1239.
6. Самсонов Г. В. Электронное строение и свойства лигандов. — «Украинский химический журнал», 1970, 3, стр. 231.
7. Самсонов Г. В., Баженова А. Н., Иванько А. А. О корреляции неорганических физических свойств полупроводников типа $Al^{III} - B^{VI}$. — «Неорганические материалы», 1966, № 7, стр. 1194.
8. Физико-химические свойства окислов. Справочник. Под ред. Г. В. Самсонова. М., Металлургиздат, 1969.
9. Куликов И. С. Термическая диссоциация соединений. М., «Металлургия», 1969.
10. Гордиенко С. П. О теплотах сублимации и природе химических связей в окислах металлов. — «Журнал физической химии», 1969, 9, стр. 2359.
11. Fock M. Bulletin de la société française minéralogie et de cristallographie, 1955, т. 3, 54.

На термограмме карбоната стронция наблюдается один эндотермический эффект, свидетельствующий о переходе ромбической модификации в гексагональную аналогично карбонату бария. У карбоната стронция возможно также наличие кубической модификации, однако температура ее образования лежит выше температу-

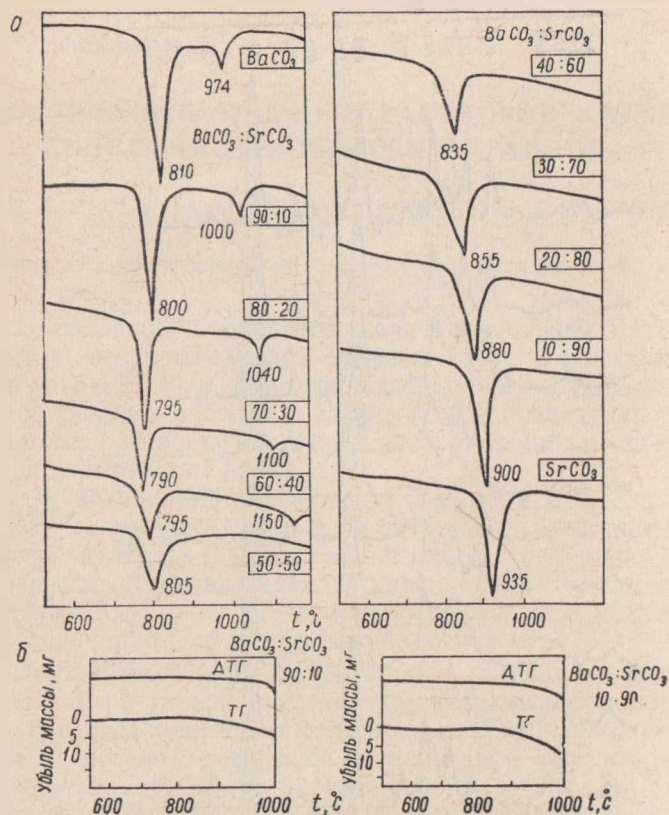


Рис. 2. Дифференциально-термические кривые (ДТА) (а), кривые термогравиметрии (ТГ) и дифференциально-термогравиметрии (ДТГ) (б) твердых растворов карбонатов.

ры разложения. Автором работы [7] кубическая модификация карбоната стронция была получена при температуре $1418^\circ C$ при давлении CO_2 , равном 20 ат. На термограммах твердых растворов в зависимости от содержания карбоната стронция наблюдаются по два или по одному эндотермическому эффекту. Как показали рентгенографические исследования, проведенные на специально сконструиро-

скими исследованиями. На термогравиметрической (ТГ) и дифференциальной термогравиметрической (ДТГ) кривых (рис. 2 б) при температурах фазовых превращений не происходит заметной утраты массы. Некоторое отклонение ТГ и ДТГ при температурах, превышающих 900°C, связано, по-видимому, с началом термической диссоциации твердых растворов. С увеличением содержания карбоната стронция в твердом растворе отклонение ТГ и ДТГ от горизонтального положения становится заметнее (рис. 2 а). Это и неудивительно, так как температура разложения карбоната стронция значительно ниже температуры разложения карбоната бария [5].

Наличие экзотермического эффекта на кривой охлаждения (рис. 3 б) и неизменность кристаллической структуры твердого раствора до и после нагревания, о чем можно судить по односторонности рентгенограмм твердого раствора до и после термографических исследований (рис. 3 а, в), свидетельствуют о том, что полиморфные превращения твердых растворов карбонатов имеют энантиотропный характер.

С увеличением содержания карбоната стронция в твердом растворе первоначально происходит снижение температуры при переходе ромбической модификации в гексагональную. Затем наблюдается монотонное ее увеличение и приближение к температуре аналогичного превращения для карбоната стронция. Температура перехода гексагональной модификации твердых растворов в кубическую плавно возрастает с увеличением содержания карбоната стронция. На термограммах твердых растворов карбонатов при содержании карбоната стронция 50 мол.% и выше эндотермический эффект, связанный с переходом гексагональной модификации в кубическую, отсутствует, поскольку он находится за пределом регистрации температур, применяемых нами при термографических исследованиях. Графическая экстраполяция температур перехода гексагональной модификации — кубическая по пяти составам дает для карбоната стронция температуру аналогичного перехода 1380°C в отличие от экспериментально определенной 1420°C [8]. Учитывая, что экстраполяция была линейной, подобное расхождение можно считать вполне удовлетворительным.

Выводы

1. Показано, что твердые растворы карбонатов бария и стронция при прогреве в интервале температур 20—1100°C испытывают полиморфные превращения энантиотропного характера, связанные с переходом ромбической модификации в гексагональную и затем в кубическую.

2. Температуры полиморфного превращения ромбической модификации твердых растворов в гексагональную значительно ниже аддитивно рассчитанных. Зависимость температуры полиморфного

превращения гексагональной модификации в кубическую от состава твердых растворов близка к линейной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехмейстер Е. И., Вассерман Р. И., Манзель Л. С. Технохимические работы в электровакуумном производстве. М., «Высшая школа», 1967.
2. Герман Г., Вагнер С. Оксидный катод. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Остапченко Е. П. Применение рентгеноструктурного анализа в исследовании оксидного катода. — «Известия АН СССР», Серия физики, XX, 1956, № 7.
4. Остапченко Е. П. Рентгеноструктурные исследования систем двойных тройных карбонатов и оксидов щелочноземельных металлов. — «Известия АН СССР», Серия физики, XX, 1956, № 10.
5. Цветкова А. И. Термоаналитические характеристики безводных карбонатов. — Труды ин-та геол. наук АН СССР, Серия петрографии, 1949, 30.
6. Строганов В. Ф., Захаров Э. К. Термографическое исследование реального образования вольфраматов кальция и бария. — Труды Москов. хим.-тех. ин-та, XXXI. М., 1960.
7. Schultze D. Differentialthermoanalyse. Berlin, 1969.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО СОСТАВА ПРОДУКТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЦИТРАТОВ ГАДОЛИНИЯ, ТЕРБИЯ, ДИСПРОЗИЯ, ГОЛЬМИЯ

ЕГОРОВА В. Г., ХРАМОВ В. П., БОЛЬШАКОВ А. Ф. — кандидаты химических наук

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

В настоящем сообщении приводятся данные рентгенофазового анализа изотермически прокаленных продуктов термоллиза цитратов иттриевой группы — гадолиния, тербия, диспрозия и гольмия.

Цитрат гадолиния $K_3[Gd(C_6H_5O_7)_2] \cdot 3H_2O$.

Отсутствие рефлексов на дифрактограмме исходного цитрата гадолиния свидетельствует о его рентгеноаморфности. Прогрев цитрата при температуре его дегидратации $140^\circ C$ не приводит к упорядочению структуры (рис. 1).

Появление кристаллической структуры наблюдается у продукта изотермически прогретого до $280^\circ C$, именно в этот момент, по данным термографического и термогравиметрического анализов [1], фиксируется начальная стадия разложения безводной соли. В продукте при этой температуре содержатся две кристаллические фазы: карбонат калия и карбонат гадолиния.

При $380^\circ C$ появляются рефлексы полуторного окисла гадолиния кубической модификации типа С с параметром $a = 10,792 \text{ \AA}$, интенсивность которых увеличивается при дальнейшем нагревании. Продукты термоллиза цитратного комплекса при $465^\circ C$ характеризуются наличием ряда интенсивных рефлексов, отнесенных к нескольким кристаллическим фазам. В указанных продуктах помимо карбоната калия, карбоната гадолиния и окиси гадолиния наблюдается новая фаза, которая не может быть отнесена к вышеперечисленным кристаллическим веществам, она отнесена нами к промежуточному продукту диссоциации гадолиния, что не вступает в противоречие с данными термографического и термогравиметрического анализов [1]. Продукт прогрева при $630^\circ C$ содержит две кристаллические

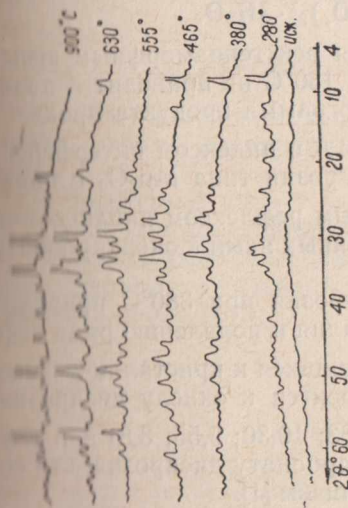


Рис. 1. Дифрактограммы продуктов термолитиза цитрата гадолиния.

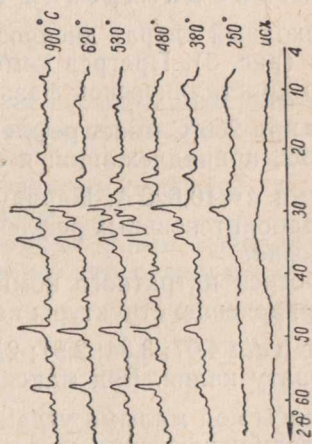


Рис. 3. Дифрактограммы продуктов термолитиза цитрата дисперзии.

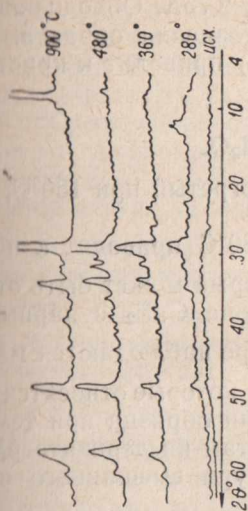


Рис. 2. Дифрактограммы продуктов термолитиза цитратов тербия.

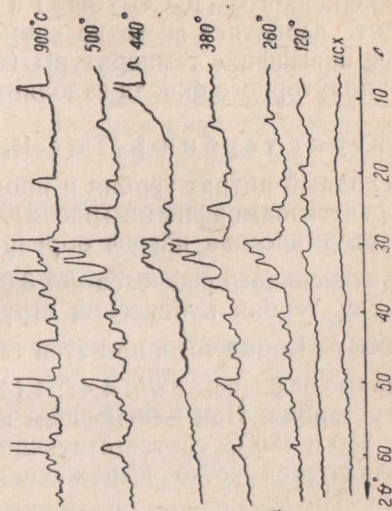


Рис. 4. Дифрактограммы продуктов термолитиза цитрата гольмия.

фазы: карбоната калия и окиси гадолиния. Карбонат калия присутствует в двух формах: в виде безводного — с d/n 2,90; 2,82 Å и в виде обводненного — $K_2CO_3 \cdot 3H_2O$ с d/n 2,78; 2,75 Å. Обводнение происходит вероятнее всего во время приготовления образца. Дальнейшее повышение температуры (до 900°C) приводит к кристаллизации полуторного окисла гадолиния.

Цитрат тербия $K_3[Tb(C_6H_5O_7)_2] \cdot 4H_2O$.

Исходный цитрат тербия и продукт, прогретый при 150°C, являются рентгеноаморфными (рис. 2).

Изотермический нагрев образца при 280°C приводит к появлению интенсивного рефлекса d/n 3,06 Å, который может быть отнесен к окислу тербия кубической структуры типа CaF_2 с параметром $a = 5,303$ Å. Кроме того, при этой температуре наблюдаются малоинтенсивные рефлексы с d/n 4,47; 4,14; 3,97 Å, которые относятся к карбонату тербия. При дальнейшем нагревании образца при температурах 360 и 480°C, соответствующих эффектам на дериватограммах [2], образуется четко выраженная структура смешанного окисла тербия Tb_4O_7 .

Нагревание продукта до 900°C приводит к совершенствованию структуры указанного окисла.

Цитрат диспрозия $K_3[Dy(C_6H_5O_7)_2] \cdot 3H_2O$.

Исходный цитрат диспрозия является рентгеноаморфным веществом (рис. 3). Прогрев комплекса при 130°C не приводит к появлению кристаллической фазы. Дифрактограмма продукта прокалкивания при 250°C имеет рефлекс с d/n 3,06 Å и индексом интерференции 222, принадлежащий к окислу диспрозия типа Mn_2O_3 с параметрами $a = 10,629$ Å. Наряду с указанным рефлексом наблюдается ряд слабоинтенсивных рефлексов, отнесенных нами к оксикарбонату диспрозия.

Прогрев цитратного комплекса диспрозия при 380°C приводит к упорядочению структуры карбоната калия и появлению ряда рефлексов с d/n 4,07; 3,34; 2,97; 2,83 Å, относящихся к кристаллическому карбонату калия. Ряд максимумов относится к окислу диспрозия. Рефлексы под малыми углами с d/n 10,83; 10,30; 9,55; 8,81 Å и т.д. по методу исключения отнесены к оксикарбонату диспрозия, что согласуется с термогравиметрическим анализом [1].

По мере повышения температуры прогрева происходит кристаллизация окисла диспрозия, о чем свидетельствует увеличение относительной интенсивности рефлексов вплоть до 900°C.

Цитрат гольмия $K_3[H_0(C_6H_5O_7)_2] \cdot 3H_2O$.

Дифрактограмма исходного цитратного комплекса аналогична предыдущим (рис. 4), но в отличие от ранее рассмотренных цитратов РЗЭ продукт, прогретый при $120^\circ C$, обладает кристаллической структурой, о чем свидетельствует наличие ряда рефлексов на дифрактограмме. По данным термографического и термогравиметрического анализов [1], безводная соль гольмия начинает разлагаться при $260^\circ C$, что сопровождается появлением ряда интенсивных рефлексов на дифрактограмме продукта, прогретого при указанной температуре.

Набор межплоскостных расстояний характерен для кристаллических фаз карбоната калия с d/n 2,97; 2,85 Å и т. д. и полуторного оксида гольмия кубической структуры типа Mn_2O_3 с параметром $a = 10,605$ Å. Рефлекс с d/n 6,75 Å вероятнее всего относится к продукту диссоциации карбоната гольмия — оксикарбонату нестехиометрического состава. О присутствии последнего свидетельствует наличие рефлексов с d/n 4,58; 4,39 Å в продукте нагрева при $380^\circ C$ и с d/n 19,63; 10,35; 8,89; 6,67 Å в продукте, прогретом при $440^\circ C$. Эти рефлексы исчезают при температуре $500^\circ C$. Основным для продукта, прогретого до $550^\circ C$, является набор межплоскостных расстояний, характерный для кристаллических фаз окиси гольмия и карбоната калия. Окисел гольмия с повышением температуры прогрева до $900^\circ C$ совершенствует свою структуру.

Выводы

1 Рентгенографическое исследование исходных цитратов гадолиния, тербия, диспрозия и гольмия показало их рентгеноаморфность.

2 Безводный цитрат гольмия в отличие от остальных цитратов РЗЭ обладает кристаллической структурой.

3 Рентгенофазовый анализ подтвердил ранее предложенную схему термолитиза указанных цитратов через карбонатную и оксикарбонатную фазы РЗЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1 Горова В. Г., Дворникова Л. М., Амброжий М. Н. Исследования в области химии редкоземельных элементов. Изд. СГУ, 1969, стр. 31.

2 Горова В. Г., Дворникова Л. М., Амброжий М. Н. Некоторые физические химические свойства твердых цитратов (1 : 2) тербия и гольмия. — Сб. трудов VI Всесоюз. совещ. по физико-химии и применению РЗЭ, их соединений и соединений М. «Наука».

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО СОСТАВА ПРОДУКТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЦИТРАТОВ ЛАНТАНА, НЕОДИМА И САМАРИЯ

ХРАМОВ В. П., ЕГОРОВА В. Г., БОЛЬШАКОВ А. Ф. — кандидаты химических наук

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Настоящая работа посвящена рентгенофазовому анализу продуктов, полученных непосредственно в процессе термоллиза цитратов цериевой группы — лантана, неодима и самария. Образцы для съемки рентгенограммы готовились путем изотермического прогрева при температурах, соответствующих эффектам на дериватограммах по ранее описанной методике.

Цитрат лантана $K_3[La(C_6H_5O_7)_2] \cdot 3H_2O$

Как видно из рис. 1 и таблицы, характер дифракционной карти-

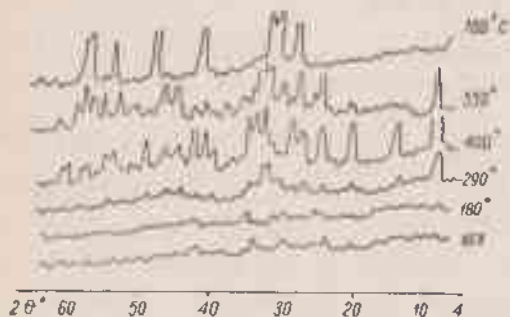


Рис. 1. Дифрактограммы продуктов термоллиза цитрата лантана.

ны исходного цитрата лантана и продуктов прогрева при 120°C и 180°C не меняется. Исходный цитрат и продукт его обезвоживания являются изоморфными кристаллическими веществами. В интервале температур 180—260°C устойчива безводная соль лантана. Дифрактограмма продукта, прогретого при 290°C, имеет набор слабых, размытых рефлексов, что является сви-

детельством недостаточной кристаллизации промежуточных фаз в начале разложения безводной соли; при этом обнаруживается кристаллическая фаза карбоната калия с d/n 12,52 Å.

Излучения $1/I_0$ и d/n на дифрактограммах комплексного цитрата лантана

Цитрат лантана исходный			Цитрат лантана при $t=120^\circ\text{C}$			Цитрат лантана при $t=180^\circ\text{C}$		
номер линий	$1/I_0$	$d/n, \text{\AA}$	номер линий	$1/I_0$	$d/n, \text{\AA}$	номер линий	$1/I_0$	$d/n, \text{\AA}$
1	100	3,7509	1	100	3,7416	1	100	3,7416
2	60	3,0198	2	33	3,4530	2	60	3,0298
3	25	2,7598	3	58	3,0178	3	20	2,7516
4	25	2,7015	4	75	2,6367	4	90	2,6427
5	65	2,6397	5	33	2,3151	5	20	2,5314
6	30	2,1849	6	42	2,1839	6	50	2,1880
7	25	2,1541	7	42	2,1453	7	35	2,1531
8	15	2,0776	8	2	2,0596			
9	25	2,04638						
10	35	1,93950						

Обращает на себя внимание наличие рефлексов с d/n 6,75; 4,63; 3,36; 3,22; 2,88; 2,84; 2,68 $\text{\AA}$ и т. д., которые при дальнейшем нагревании продукта (до 400°C) увеличивают свою интенсивность и могут быть отнесены к оксикарбонатным фазам.

Продукт прогрева при 400°C обнаруживает кристаллическую фазу карбоната калия с d/n 12,34; 2,75 $\text{\AA}$ и т. д.

В присутствии кристаллической фазы полуторного окисла La_2O_3 наблюдается рефлекс с d/n 2,98 $\text{\AA}$, с интенсивностью, равной 5. Кристаллические рефлексы отнесены нами к оксикарбонату лантана. Продукт прогрева при температуре 530°C состоит из следующих кристаллических фаз: карбоната калия и полуторной окиси лантана гексагональной структуры типа А с параметром $a=3,94\text{\AA}$; $c=6,14\text{\AA}$. Помимо указанных фаз в продукте прогрева при 530°C наблюдается ряд рефлексов, отнесенных нами к оксикарбонату лантана.

Необходимо отметить различия в дифракционной картине оксикарбоната лантана, образующихся при температуре 580°C , и оксикарбонатов — при 200 и 400°C .

Дифрактограмма про-

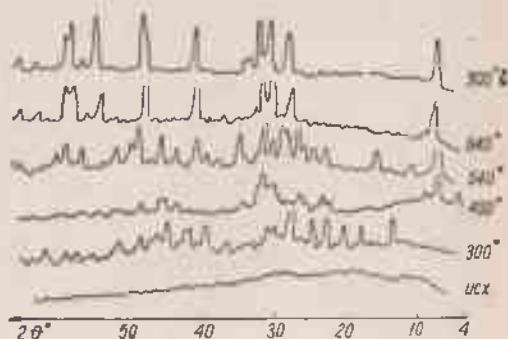


Рис. 2. Дифрактограммы продуктов термализации цитрата неодима.

дукта, прогретого до 700°C, имеет большое число интенсивных рефлексов, отнесенных к полуторному окислу лантана. Наряду с ним ряд рефлексов отнесен к кристаллической фазе карбоната калия. При дальнейшем нагревании продукта до 900°C происходит упорядочение структуры окисла лантана.

Цитрат неодима $K_3[Nd(C_6H_5O_7)_2] \cdot 3H_2O$.

Дифрактограмма исходного цитратного комплекса неодима не содержит рефлексов (рис. 2), что свидетельствует о его рентгеноаморфности. Изотермическое нагревание продукта при 135°C также не приводит к появлению кристаллической фазы.

На дифрактограммах продукта прогрева при 300°C наблюдается рефлекс с d/n 2,87Å, который может быть отнесен к полуторному окислу неодима. Очень слабый рефлекс с d/n 2,75Å характеризует наличие карбоната калия. Остальные рефлексы на основании термogrавиметрического анализа можно отнести к оксикарбонату неодима, образующемуся на ранней стадии разложения и содержащему значительное количество двуокиси углерода.

Дифрактограмма продукта прогрева при 400°C имеет самый интенсивный рефлекс с d/n 2,88Å, отнесенный нами ранее к окислу неодима; наряду с указанным фиксируются рефлексы, характерные для кристаллической фазы карбоната калия с d/n 12,45; 2,86Å, остальные относятся к оксикарбонату неодима.

На дифрактограмме продукта прогрева при 540°C увеличивается число рефлексов, приписываемых окислу неодима. Рефлексы с d/n 12,18; 2,76Å относятся к кристаллической фазе карбоната калия, что согласуется с эталонными данными. Часть их — результат наложения двух фаз: окиси неодима и оксикарбоната неодима с d/n 2,61Å и т. д. Нагревание продукта до 640°C приводит к появлению на дифрактограмме интенсивных рефлексов, относящихся к двухфазной смеси, состоящей из окиси неодима и карбоната калия. Большинство рефлексов, принадлежащих полуторному окислу неодима, совпадает с эталонными значениями межплоскостных расстояний и индицируются в гексагональной системе с параметрами $a=3,85Å$ и $c=6,02Å$.

На присутствие карбоната калия указывает наличие рефлексов с d/n 12,28; 2,76; 2,73Å.

При дальнейшем нагревании до 900°C происходит упорядочение структуры окисла неодима.

Цитрат самария.

Исходный цитратный комплекс самария является рентгеноаморфным, что подтверждается отсутствием рефлексов на дифрактограмме (рис. 3).

Прогрев цитрата при 100°C также не приводит к появлению кристаллической структуры.

Только изотермическое прогревание цитрата самария при 300°C сопровождается появлением кристаллической фазы карбоната калия, который возникает как аморфная фаза, по-видимому, при более низких температурах. Об этом свидетельствует наличие интенсив-

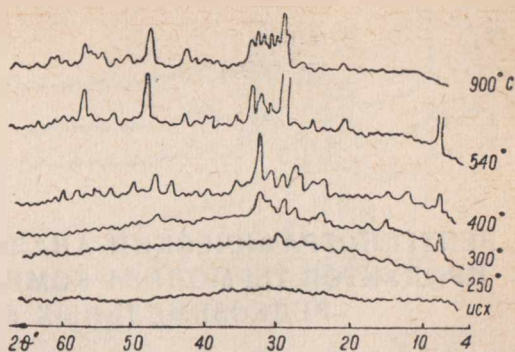


Рис. 3. Дифрактограммы продуктов термоллиза цитрата самария.

ного сильно размытого рефлекса с d/n 2,84Å. Рефлекс с d/n 3,15Å может быть отнесен к полуторному окислу самария кубической структуры типа Mn_2O_3 , $a = 10,85Å$. Остальные рефлексы относятся к карбонату самария. Прогрев продукта до 400°C приводит к интенсивной кристаллизации карбоната калия. Рефлекс с d/n 2,84Å становится четким и интенсивным. Одновременно появляются рефлексы с d/n 3,41; 3,33Å; характерные для карбоната калия, прогретого при данной температуре.

Прогрев при 540, 650°C приводит к упорядочению структуры окисла самария кубической формы. При этом относительная интенсивность рефлексов, принадлежащих карбонату калия, резко падает. Дифрактограмма продукта, прогретого при 900°C, напоминает картину, характерную для окисла самария моноклинной структуры.

Выводы

1. Рентгенографически показано наличие кристаллической структуры у исходного цитрата лантана. Цитраты неодима и самария рентгеноаморфны.

2. Путем рентгенофазового анализа в продуктах термоллиза цитратов лантана, неодима, самария обнаружено присутствие карбоната, оксикарбонатных фаз РЗЭ и карбоната калия.

3. Конечными продуктами термоллиза являются кристаллические фазы окисла РЗЭ и карбоната калия.

РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОДУКТОВ ТЕРМОЛИЗА КОМПЛЕКСНЫХ ЦИТРАТОВ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ХРАМОВ В. П., ЕГОРОВА В. Г., БОЛЫШАКОВ А. Ф. — кандидаты химических наук

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Ранее было показано, что при термоллизе комплексных цитратов РЗЭ состава $K_3[Ln(C_6H_5O_7)_2] \cdot nH_2O$ возможно образование карбоната калия, карбонатов и оксикарбонатов РЗЭ в качестве промежуточных продуктов [1]. Для идентификации этих фаз нами сняты эталонные дифрактограммы специально синтезированных карбонатов и оксикарбонатов РЗЭ, продуктов термоллиза цитратов, а также лимонной кислоты и цитрата калия.

Съемка дифрактограмм осуществлялась на дифрактометре УРС-50ИМ в CuK_2 — излучении со скоростью вращения гониометра $1-2^\circ/мин$ в зависимости от характера исследования.

Образцы готовились следующим образом. Исследуемое вещество растиралось в агатовой ступке до величины зерна (порядка нескольких микрон), тщательно перемешивалось и наносилось на стеклянную подложку. Интенсивность линий оценивалась по 100-балльной шкале, определение межплоскостных расстояний проводилось по справочным таблицам [2]. Ошибка в определении не превышала таковую для данного метода.

Как видно из рис. 1 (кривые 1, 2), лимонная кислота и лимоннокислый калий являются кристаллическими веществами с характерным набором межплоскостных расстояний, отличающихся от соответствующих им солей РЗЭ [3].

Ввиду того что дифрактограммы индивидуальных цитрата и карбоната калия могут быть не тождественны дифрактограммам этих соединений, полученных в процессе термоллиза цитратов РЗЭ, нами сняты эталонные дифрактограммы продуктов изотермического прогрева при 200, 500, 900°C * цитрата и карбоната калия (рис. 1, кривые 3—6; рис. 2).

* Здесь и далее температуры фазовых переходов в цитратах РЗЭ.

Дифрактограмма про-
жата, прогретого при
200°C (рис. 1, кривая 3),
похожа на дифрактограмму
исходного цитрата калия
(рис. 1, кривая 2) с не-
значительным изменением по-
ложения рефлексов и их
относительной интенсив-
ности. Прогрев цитрата
калия при 500 и 900°C
приводит к образованию
карбоната калия, что под-
тверждается данными
рентгенофазового анализа
(рис. 1, кривая 4, 5 и рис.
2, кривая 3, 4).

Как видно из рис. 2,
термостабильность карбо-
ната калия практически
не влияет на общий ха-
рактер дифрактограмм.
Образцы исходной и про-
каленной при 200, 500 и
900°C и выдержанной в
течение трех суток соли
отличаются лишь незна-
чительными изменения в
положении рефлексов.

Дифрактограммы кар-
бонатов РЗЭ представле-
ны на рис. 3, 4. Как видно
из рис. 3, карбонаты РЗЭ,
содержащие воду, обла-
дают в большинстве сво-
ем ярко выраженной кри-
сталлической структурой. Удаление воды из них приводит к раз-
рушению структуры (рис. 4), а в некоторых случаях — к
растворенности соединений.

Общая схема разложения карбонатов РЗЭ (кроме карбоната це-
трия) аналогична, поэтому нами приводятся данные только для кар-
боната самария. Исходный карбонат самария — кристаллическое
вещество; обезвоженный при 100°C, он сохраняет тот же набор
рефлексов (рис. 5).

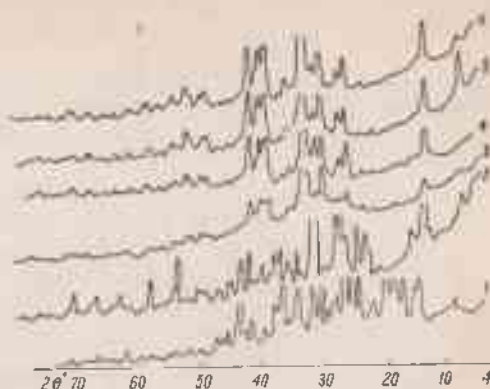


Рис. 1. Дифрактограммы:

1 — лимонной кислоты; 2 — цитрата калия;
3 — цитрата калия, 200°C; 4 — цитрата калия,
500°C; 5 — цитрата калия, 900°C; 6 — цитрата ка-
лия, 900°C, 3-дневной выдержки.

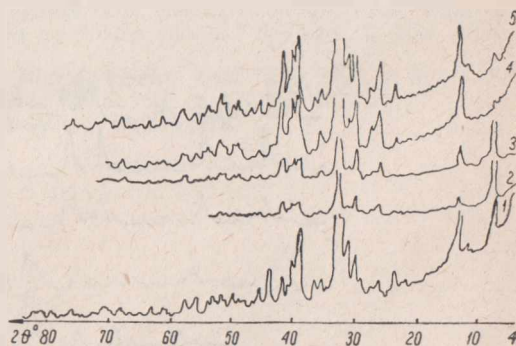
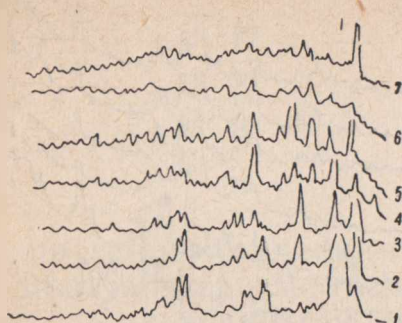


Рис. 2. Дифрактограммы:

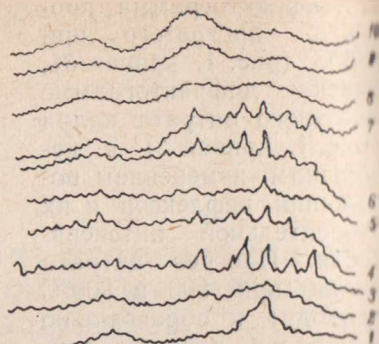
1 — карбоната калия; 2 — карбоната калия,
200°C; 3 — карбоната калия, 500°C; 4 — карбоната
калия, 900°C; 5 — карбоната калия, 900°C, 3-днев-
ной выдержки.



2θ° 70 60 50 40 30 20 10 4

Рис. 3. Дифрактограммы карбонатов РЗЭ (кристаллогидратов):

1 — лантана, 2 — церия, 3 — празеодима, неодиима, 5 — самария, 6 — гадолиния, 7 — гольмия.



2θ° 60 50 40 30 20 10 4

Рис. 4. Дифрактограммы карбонатов РЗЭ (обезвоженные):

1 — лантана, 2 — празеодима, 3 — самария, 4 — гадолиния, 5 — тербия, 6 — диспрозия, 7 — гольмия, 8 — тулия, 9 — иттербия, 10 — лютеция.

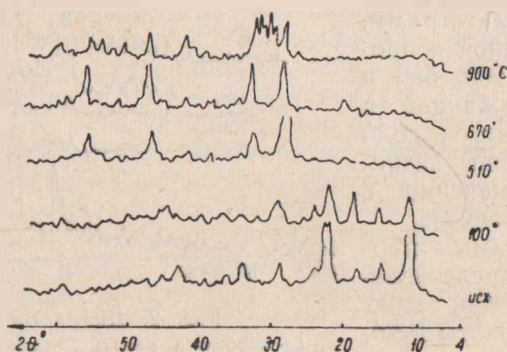


Рис. 5. Дифрактограммы карбоната самария и продуктов его термической диссоциации.

Продукт нагрева карбоната самария при 510°C идентифицируется как оксикарбонат самария состава Sm_2CO_5 .

При температуре 670°C, достаточной для кристаллизации окиси самария, наблюдается новый набор рефлексов, характерный для кубической типа С структуры окиси самария с параметром $a = 10,85\text{\AA}$. Продукт прокаливания при 900°C соответствует окиси самария моноклинной структуры типа В, что не вступает в противоречие с известными литературными данными [4—6].

Выводы

1. Показано, что лимонная кислота и лимоннокислый калий являются кристаллическими веществами с характерным набором межплоскостных расстояний, отличающихся от соответствующих им солей РЗЭ.
2. Дифрактограммы кристаллогидратов карбонатов РЗЭ отличаются от дифрактограмм безводных карбонатов РЗЭ.
3. Рентгенографическая характеристика продуктов термоллиза карбоната самария позволила подтвердить наличие оксикарбонатной фазы в последних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егорова В. Г., Дворникова Л. М., Амброжий М. Н. О термическом разложении цитратов (1:2) редкоземельных элементов цериевой группы.— *Учен. зап. кавказского университета. Серия: химия и биология*, 1969, т. 14, № 10.
2. Гиллер Я. Я. Таблицы межплоскостных расстояний. М., «Недра», 1966.
3. Егорова В. Г., Большаков А. Ф., Амброжий М. Н. Рентгенографическое исследование продуктов термического разложения цитратов церия и самария 1:2.— *Сб.: Исследования в области химии РЗЭ. Вып. 3. Изд. СГУ*, 1971, стр. 42.
4. Goldschmidt W. W. *Skr. Norsk. Vidensk. Acad. Oslo*, 1925, т. 5, стр. 7.
5. Zachariasen W. H. *Z. physik. Chem.*, 1926, т. 123, стр. 134.
6. Pauling J. Z. *Kristallochem*, 1928, т. 69, стр. 415.

ЭЛЕКТРОЛИЗ РАСТВОРОВ ДВОЙНЫХ ХЛОРИДОВ РЗЭ ЦЕРИЕВОЙ ПОДГРУППЫ В ХЛОРОФОРМЕ

ХРАМОВ В. П., кандидат химических наук,
ПАНЧЕНКО И. Г., старший преподаватель

(Саратовский институт механизации сельского хозяйства им. М. И. Калинина)

Редкоземельные элементы (РЗЭ) способны образовывать соединения с органическими лигандами, обладающими как кислотными, так и основными свойствами. Изучение последних представляет определенный интерес для суждения о прочности их связи, а также дает некоторый материал для представления об изменении конфигурации иона РЗЭ под действием внешнего поля [1].

Ранее были синтезированы двойные хлориды РЗЭ цериевой подгруппы и диэтиламина [2]. Эти соли хорошо растворимы в воде, этиловом спирте, разбавленных и концентрированных серной, азотной и уксусной кислотах; труднорастворимы в хлороформе; при добавлении к раствору ацетона растворимость соли увеличивается..

В табл. 1 приведен анализ полученных солей, из которого видно, что их состав отвечает формуле:

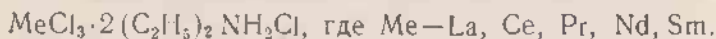


Таблица 1

Результаты анализа двойных хлоридов РЗЭ цериевой подгруппы
с диэтиламином (вес %)

СОЛЬ	Me		Cl		N	
	вычис- лено	найдено	вычис- лено	найдено	вычис- лено	найдено
$\text{LaCl}_3 \cdot 2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl}$	29,90	30,21	38,20	37,70	6,03	6,25
$\text{CeCl}_3 \cdot 2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl}$	30,07	30,00	38,11	38,06	6,01	6,00
$\text{PrCl}_3 \cdot 2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl}$	30,18	30,04	38,04	37,98	6,00	5,96
$\text{NdCl}_3 \cdot 2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl}$	30,71	30,67	37,76	37,46	5,96	6,25
$\text{SmCl}_3 \cdot 2(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl}$	31,59	31,72	37,28	37,12	5,88	5,54

Однако строение соединений ранее установлено не было. Для этого если мы решили воспользоваться электролизом солей в мало-вязких растворителях. Данный метод был использован Ворназо-вым [4] для исследования строения двойного бромида сурьмы и пи-ридина. П. П. Попов и Я. И. Ивашенцев аналогичным образом ис-следовали двойной бромид мышьяка и пиридина [4].

Учитывая хорошую растворимость наших соединений в воде, а также способность разлагаться на составные ионы в водном раство-ре, мы использовали для электролиза их растворы в хлороформе с небольшой добавкой небольшого количества ацетона (100:1) для увеличения электропроводности.

На рис. 1 показана схема использованного для опытов стеклян-ного электролизера.

Концентрация растворов использованных солей, г/л:

$\text{LaCl}_3 \cdot 2 (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl} - 0,9430$

$\text{CeCl}_3 \cdot 2 (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl} - 0,9570$

$\text{PrCl}_3 \cdot 2 (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl} - 1,0920$

$\text{NdCl}_3 \cdot 2 (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl} - 1,0810$

$\text{SmCl}_3 \cdot 2 (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2\text{Cl} - 1,0560$

Электролиз проводился 72 часа, после чего из катодного и анод-ного пространств бралось по 50 см³ раствора для анализа на содер-

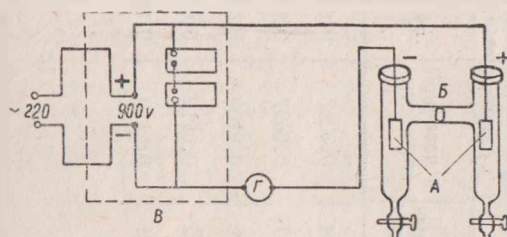


Рис. 1. Схема электролизера:

А — платиновые электроды; Б — пористая стеклянная перегородка; В — пульсирующий ламповый выпрямитель, дающий на выходе усилителя 900 в и силу тока 0,7—0,9 А; Г — миллиамперметр.

Железа по Кьельдалю и металла весовым оксалатным методом (железо празеодима, который определялся перманганатометри-чески).

Отдельно определялось содержание металла и азота в 100 мл исходного раствора.

В табл. 2 приведены данные анализа. Как видно из таблицы, во всех случаях сумма содержания металла и азота хорошо совпадает

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

Иванов В. Н. Абстрактная задача Коши со случайным оператором	4
Иванов В. Н. Случайные почти-периодические операторы и дифференциальные уравнения	24
Иванов В. Н. Случайные возмущения полугрупп и марковские процессы	46
Осипова И. К. К вопросу о возмущении полугрупп сжимающих операторов	66
Солдатов Г. П. Неадиабатическое движение газа под действием кратковременного удара	80
Бураков В. А. Методика приближенного расчета среднего срока службы прибора массового выпуска	85
Рунич А. А. К теореме Н. Н. Меймана о сдвигах	89
Рунич А. А. Некоторые теоремы распределения нулей	94

ФИЗИКА

Патрушев В. Л. Расчет собственной частоты электромагнитных колебаний четвертьволновой коаксиальной линии	98
Билютин Б. С. Влияние электромагнитного поля СВЧ на некоторые физико-химические свойства молока	109
Ерохина Е. Е. Исследование зависимости электрических параметров зерна различных культур от влажности	113
Болдырев В. М. К вопросу измерения комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon'' = \epsilon' - j\epsilon''$	118

ХИМИЯ

Медокс Г. В., Рассказова В. Я. О бромировании бифенила	121
Рязанова Г. Е., Ленская В. Н. Влияние фона на полярографическое поведение органических реактивов	128
Рязанова Г. Е., Ленская В. Н. Полярографическое изучение некоторых ализаринатов и поверхностно активных свойств ализарина	136
Медокс Г. В., Ленская В. Н., Рязанова Г. Е. Способность ионов железа, цинка и кадмия к комплексообразованию с АТФ	140

Храмов В. П., Алиев Г. А., Кольцов А. А. Спектрофотометрическое исследование комплексных соединений гидрокснэтилиминодихлоруксусной кислоты с нитратами неодима, самария и эрбия	145
Храмов В. П., Иванов Б. А., Севастьянов В. П., Большаков А. Ф. Исследование термической устойчивости ди-л-гептилфосфинатов самария и европия	150
Храмов В. П., Акмаева Н. Л., Дедков Ю. М. Комплексные соединения редкоземельных элементов с нитропроизводными арсеназо	154
Севастьянов В. П., Егорова В. Г., Севастьянов В. П., Храмов В. П. Некоторые закономерности формирования структур окислов РЗЭ	156
Мельник В. В., Большаков А. Ф., Егорова В. Г. О полиморфизме твердых растворов карбонатов щелочноземельных металлов	160
Храмов В. П., Храмов В. П., Большаков А. Ф. Исследование фазового состава продуктов разложения комплексных цитратов гадолиния, тербия, диспрозия, гольмия	166
Храмов В. П., Егорова В. Г., Большаков А. Ф. Исследование фазового состава продуктов разложения комплексных цитратов лантана, неодима и самария	170
Храмов В. П., Егорова В. Г., Большаков А. Ф. Рентгенографический анализ промежуточных продуктов термоллиза комплексных цитратов редкоземельных элементов	174
Храмов В. П., Панченко И. Г. Электролиз растворов двойных хлоридов РЗЭ цериевой подгруппы в хлороформе	178

Саратовский сельскохозяйственный институт
Саратовский институт механизации сельского хозяйства
имени М. И. Калинина
Саратовский зооветеринарный институт

**ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ, ФИЗИКЕ,
ХИМИИ**

Редакторы Л. В. Фофанова и Л. Т. Чигрина
Художественный редактор В. К. Бутенко
Технический редактор Л. В. Андропова
Корректоры С. Е. Бухман, Л. Н. Фролова

Сдано в набор 13/IV 1972 г. Подписано к печати 26/VII 1973 г.
НГ60221. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага типографская № 3.
Усл.-печ. л. 10,7. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 1000. Заказ 901.
Цена 74 коп.

Приволжское книжное издательство,
Саратов, пл. Революции, 15.
Производственное объединение «Полиграфист»,
Саратов, пр. Кирова, 27.

