

Е. Н. БЕРЕЗКИН

ЛЕКЦИИ
ПО
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

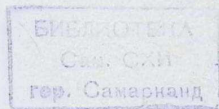
Е. Н. БЕРЕЗКИН

531
5484

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть II

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ,
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА,
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1968

179040

Вторая часть «Лекций по теоретической механике» содержит материал, читаемый на четвертом курсе вечернего отделения и на втором и третьем курсах дневного отделения механико-математического факультета Московского университета. Она включает динамику системы материальных точек, аналитическую динамику и элементы специального принципа относительности Эйнштейна.

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава I. Динамика системы материальных точек	7
§ 1. Учение о связях	8
§ 2. Принцип Даламбера — Лагранжа	10
§ 3. Основные теоремы динамики системы	13
1. Теорема об изменении количества движения системы и о движении центра масс	13
2. Теорема об изменении момента количества движения	23
3. Теорема живых сил	32
§ 4. Теоремы о движении системы относительно осей неизменного направления, проходящих через центр масс системы (осей Кенига)	39
1. Теоремы Кенига	39
2. Теорема об изменении момента количества движения системы относительно осей Кенига	41
3. Теорема живых сил в движении системы относительно осей Кенига	44
§ 5. Уравнения Лагранжа второго рода	45
1. Вывод уравнений Лагранжа	45
2. Случай существования силовой функции	50
3. Замечание о лагранжевых координатах	51
§ 6. Элементарные случаи интегрируемости уравнений Лагранжа	53
1. Циклические координаты	53
2. Метод Рауса игнорирования циклических координат	53
3. Обобщение теоремы и интеграла живых сил	58
§ 7. Определение реакций	63
Глава II. Динамика твердого тела	69
§ 1. Теория моментов инерции	70
1. Определения	70
2. Момент инерции системы относительно произвольной оси, проходящей через заданную точку	73
3. Эллипсоид инерции	74
4. Определение главных осей инерции для произвольной точки	76
§ 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	82
§ 3. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку	90
1. Основные динамические характеристики	90

2. Уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой	93
§ 4. Движение тяжелого твердого тела около неподвижной точки	99
1. Постановка задачи	100
2. Первые интегралы уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку	102
3. Случай Эйлера — Пуансо	106
4. Случай Лагранжа	119
5. Случай Ковалевской	133
6. Гироскоп в кардановом подвесе	136
§ 5. Определение реакций в случае движения твердого тела с одной неподвижной точкой	141
§ 6. Уравнения движения свободного твердого тела	142
§ 7. Гиростаты	143
 Глава III. Аналитическая динамика	 146
§ 1. Принцип Гамильтона — Остроградского	147
§ 2. Канонические уравнения Гамильтона	153
1. Свойства функции Гамильтона	158
2. Принцип Гамильтона в форме Пуанкаре	162
3. Элементарный вывод канонических уравнений Гамильтона	164
§ 3. Интегрирование канонических уравнений	167
1. Действие по Гамильтону и его свойства	167
2. Канонические преобразования	170
3. Бесконечно малые канонические преобразования	174
4. Теорема Лиувилля	176
5. Теорема Якоби	177
6. Интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби	179
7. Скобки Пуассона	190
§ 4. Вариационные принципы механики	192
1. Исторические замечания	192
2. Принцип Лагранжа	195
3. Принцип наименьшего действия в форме Якоби	198
4. Оптико-механическая аналогия	205
5. Принцип наименьшего принуждения Гаусса	210
6. Уравнения Рауса	221
§ 5. Малые колебания	224
1. Малые колебания системы с одной степенью свободы	224
2. Общий случай малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия	232
§ 6. Устойчивость движения	244
1. Основные теоремы	244
2. Влияние диссипативных сил на устойчивость равновесия	254
3. Влияние гироскопических сил на устойчивость равновесия	257
§ 7. Элементы теории возмущений	263
1. Уравнения в вариациях Пуанкаре	263
2. Метод изменения произвольных постоянных	269
 Глава IV. Теория удара	 272
§ 1. Основные положения	272
§ 2. Теоремы Карно	276
§ 3. Задача о центре удара	280
§ 4. Задача о баллистическом маятнике	282
§ 5. Уравнения Лагранжа для удара	284
§ 6. Задача об ударе по твердому телу с одной неподвижной точкой	284

Глава V. Элементы специальной теории относительности	287
§ 1. Постановка задачи	287
§ 2. Специальный принцип относительности Эйнштейна	293
§ 3. Группа преобразований Лоренца	295
§ 4. Инвариантные величины в теории относительности. Четырех- мерный вектор. Мир Минковского	301
§ 5. Релятивистская динамика	305
Литература	309
Указатель	310

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет вторую часть лекционного курса теоретической механики, который автором читается на механико-математическом факультете Московского университета. Как и первая часть, она является руководством для студентов вечерних и заочных отделений механико-математических факультетов университетов и может использоваться в качестве учебного пособия студентами дневных отделений. Материал, вошедший в книгу, иногда выходит за рамки обязательной программы курса.

Как и при изложении материала первой части, автор старался следовать методике члена-корреспондента АН СССР Николая Гурьевича Четаева.

Вторая часть курса включает в себя динамику системы материальных точек, динамику твердого тела, аналитическую динамику, элементы теории удара и элементы специального принципа относительности Эйнштейна. При изложении основных теорем автор следовал методам Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и Н. Г. Четаева, продолжавших идеи Лагранжа. Это направление проходит через весь курс и особенно подчеркивается при рассмотрении задач. В раздел «Аналитическая динамика» включены вариационные принципы механики, методы интегрирования уравнений механики, теория малых колебаний и элементы теории устойчивости. Глава, посвященная специальному принципу относительности, включает только основные понятия.

ГЛАВА I

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Наиболее важным разделом теоретической механики является динамика системы материальных точек. Именно этот раздел дает наиболее полное представление о механическом движении. В динамике системы в основном рассматриваются задачи о движении систем материальных точек с конечным числом степеней свободы (максимальным числом независимых параметров, определяющих положение системы). Главной задачей динамики системы является изучение основных методов составления и исследования уравнений движения механических систем и общих свойств движения.

Наиболее примитивный подход к исследованию движения системы n материальных точек, очевидно, будет сводиться к рассмотрению движений каждой отдельной точки системы. При таком подходе должны быть определены все силы, действующие на каждую точку системы, в том числе и все силы взаимодействия между точками. Определяя ускорения каждой точки в соответствии с законом Ньютона, получим для каждой точки три скалярных дифференциальных уравнения движения второго порядка или $3n$ дифференциальных уравнений движения для всей системы. Дальнейшее исследование сведется в первую очередь к исключению лишних неизвестных и затем к интегрированию этих уравнений. Зачастую оказывается, что движение определяется меньшим числом параметров, чем имеется уравнений. Поэтому возникает проблема отыскания таких методов решения задач, которые бы приводили к уравнениям, не содержащим лишних параметров и сразу дающим представление о движении механической системы. Первая такая попытка дать общие методы принадлежит Якову Бернулли (1654—1705), который, изучая движение маятника, пытался сводить задачу о движении к задаче о равновесии. Дальнейшее развитие этого принципа принадлежит Даламберу. Одновременно с этим Я. Герман и Л. Эйлер разрабатывают «Петербургский

принцип динамики». Но только Лагранж дал общие методы решения задачи о движении механических систем.

Мы начнем изучать динамику с анализа связей, накладываемых на систему материальных точек.

§ 1. УЧЕНИЕ О СВЯЗЯХ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами m_v , координаты x_v, y_v, z_v которых связаны между собой некоторыми соотношениями, называемыми *связями*. Связи можно выразить аналитически в виде уравнений:

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_n, y'_n, z'_n) = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, m).$$

Они накладывают ограничения на координаты и скорости точек системы.

Из всех связей выделим наиболее простой тип — *линейные связи*, которые задаются уравнениями

$$\sum_{v=1}^n (a_{jv} dx_v + b_{jv} dy_v + c_{jv} dz_v) + l_j dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

линейными относительно dx_v, dy_v, dz_v , с коэффициентами $a_{jv}, b_{jv}, c_{jv}, l_j$, зависящими от времени и координат.

Возможные перемещения $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ системы определим как перемещения, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{v=1}^n (a_{jv} \delta x_v + b_{jv} \delta y_v + c_{jv} \delta z_v) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

В общем случае будем иметь некоторое множество возможных перемещений. Действительным перемещением назовем такое перемещение, которое совершают во времени точки системы при заданных связях, под действием активных сил. Действительное перемещение удовлетворяет уравнениям связи. Вообще действительные и возможные перемещения удовлетворяют различным условиям, и действительное перемещение не принадлежит к классу возможных перемещений системы. Если же все $l_j \equiv 0$, то уравнения для возможных перемещений будут совпадать с уравнениями для действительных перемещений, т. е. действительное перемещение будет одним из возможных.

Условия для возможных перемещений получим, положив в уравнениях для действительных перемещений $dt \equiv 0$ (рассматривая t как постоянный параметр и считая, что *связи не меняются со временем*). Таким образом, для определения возможных перемещений системы достаточно рассмотреть все перемещения, которые допускаются связями при «застывшем» времени («застывшие»

связи). Так, например, если на материальную точку наложена связь

$$adz + dt = 0,$$

то возможные перемещения будут удовлетворять условию

$$\delta z = 0,$$

и, следовательно, действительные перемещения ($dz \neq 0$) не находятся среди возможных.

Пример 1. Ползунок движется по прямолинейному рельсу по заданному закону $s=s(t)$. Точка m соединена стержнем с шарниром на ползунке, так что стержень может свободно вращаться вокруг шарнира в плоскости чертежа (рис. 1). Определить возможные и действительные перемещения точки m .

Решение. При застывших связях точка O неподвижна, ибо ее движение заранее определено во времени, а время не меняется при возможных перемещениях. Возможными перемещениями точки m будут перемещения по окружности с центром в точке O .

Аналитически связи здесь можно представить уравнением

$$(x-s)^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

или в дифференциальной форме]

$$(x-s)(dx-s'dt) + ydy = 0.$$

Для возможных перемещений получим

$$(x-s)\delta x + y\delta y = 0.$$

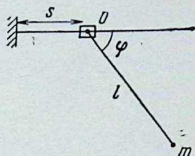


Рис. 1

Если ввести параметр φ и выразить через него координаты x и y , то, как легко заметить, связи не будут накладывать ограничений на φ . Такой параметр φ называют свободным параметром, определяющим положение системы.

Определение возможного перемещения как перемещения из одного состояния системы в другое, сколь угодно близкое к первому, которое давалось в аналитической статике, не всегда справедливо в динамике. В динамике будут рассматриваться и такие связи, при которых возможными перемещениями нельзя перевести систему в бесконечно близкое положение, удовлетворяющее условиям связи.

Дифференциальные уравнения связей представляют собой уравнения типа Пфаффа. Если такую систему уравнений связей можно путем различных преобразований привести к виду

$$df_j(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

то уравнения связей называют интегрируемыми, а связи — голономными. Если систему уравнений связей нельзя привести к указанному виду, то уравнения связей называют неинтегрируемыми, а связи — не голономными.

Пример 2. Исследовать связь вида

$$dy - \psi(z) dx = 0,$$

наложенную на материальную точку.

Решение. Когда $\psi(z) = \text{const}$, уравнение связи интегрируемо, а связь — голономна. Если же $\psi(z) \neq \text{const}$, то уравнение нельзя вообще привести к виду $df=0$ до тех пор, пока не будет найдена зависимость z от x и y . В этом случае связь будет неголономной.

Если связи интегрируемы, то уравнения связи приводятся к виду

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

и тогда говорят, что *связи заданы в конечном виде*. Действительные перемещения при этом удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} dx_v + \frac{\partial f_j}{\partial y_v} dy_v + \frac{\partial f_j}{\partial z_v} dz_v \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

а возможные перемещения соотношениям

$$\sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} \delta x_v + \frac{\partial f_j}{\partial y_v} \delta y_v + \frac{\partial f_j}{\partial z_v} \delta z_v \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Если связи, наложенные на систему материальных точек, голономны, то уравнения связей в каждый фиксированный момент времени определяют некоторые гиперповерхности. Возможные перемещения в этом случае можно трактовать как переход из одного положения на этих гиперповерхностях в бесконечно близкое. Для неголономных связей вообще такого толкования дать уже нельзя, о чем будет подробнее сказано позднее.

§ 2. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА

Рассмотрим систему материальных точек m_v (x_v, y_v, z_v) ($v = 1, 2, \dots, n$), на которые действуют активные силы (X_v, Y_v, Z_v). Предположим, что возможные перемещения точек $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ стеснены голономными связями.

В динамике системы, как и в статике, примем аксиому, что *связи, наложенные на систему точек, можно заменить силами, которые называются силами реакции: R_{vx}, R_{vy}, R_{vz}* . После добавления реакций связей точки системы должны рассматриваться как свободные.

Ограничимся рассмотрением только идеальных связей, которые ранее были определены (см. раздел «Аналитическая статика») как связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{v=1}^n (R_{vx} \delta x_v + R_{vy} \delta y_v + R_{vz} \delta z_v) = 0.$$

Рассматривая каждую из точек системы как свободную от связей, для каждой такой точки напишем уравнения движения:

$$m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = X_v + R_{vx}, \quad m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} = Y_v + R_{vy}, \quad m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} = Z_v + R_{vz}$$

$$(v = 1, 2, \dots, n).$$

Разрешая эти уравнения относительно реакций связей и подставляя полученные значения в уравнение, определяющее идеальные связи, получим

$$\sum_{v=1}^n \left[\left(m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v \right) \delta x_v + \left(m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - Y_v \right) \delta y_v + \right. \\ \left. + \left(m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} - Z_v \right) \delta z_v \right] = 0. \quad (a)$$

Равенство (a) имеет место для всех возможных перемещений системы. Оно, как видно из самого вывода, является необходимым условием для действительного движения механической системы.

Покажем его достаточность, т. е. что соотношение (a) выполняется только для действительных движений (определяет действительное движение системы). Для этого к активным силам, действующим на систему, добавим силы реакций связей, после чего систему можно рассматривать как свободную от связей, а тогда будут допустимыми любые перемещения.

Обозначая через $\delta^* x_v$, $\delta^* y_v$, $\delta^* z_v$ возможные перемещения такой «освобожденной» системы, будем иметь

$$\sum_{v=1}^n \left[\left(m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v - R_{vx} \right) \delta^* x_v + \left(m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - Y_v - R_{vy} \right) \delta^* y_v + \right. \\ \left. + \left(m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} - Z_v - R_{vz} \right) \delta^* z_v \right] = 0.$$

В силу того, что теперь величины $\delta^* x_v$, $\delta^* y_v$, $\delta^* z_v$ независимы, получим:

$$m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v - R_{vx} = 0, \quad m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - Y_v - R_{vy} = 0, \\ m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} - Z_v - R_{vz} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Последние равенства, как известно, определяют действительное движение системы материальных точек, чем и доказывается достаточность уравнения (a).

Уравнение (а) представляет собой общее уравнение динамики и было установлено Лагранжем. Впоследствии это уравнение стали называть принципом Даламбера — Лагранжа или принципом Даламбера. Оно охватывает все движения различных механических систем. Заметим, что **условие голономности связей при выводе этого уравнения не использовалось**.

Исходя из общего уравнения динамики, можно решать все задачи о движении механических систем. Оно не содержит реакций связей, а следовательно, дает возможность решать динамические задачи, не определяя этих реакций. Здесь величины δx_v , δy_v , δz_v суть возможные перемещения точек системы, т. е. те перемещения, которые допускаются связями в данный момент времени. Для каждого конкретного возможного перемещения общее уравнение динамики дает одно дифференциальное уравнение движения системы. Перебирая различные возможные перемещения, получим полную систему дифференциальных уравнений движения.

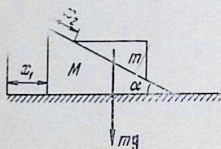


Рис. 2

Пример 3. Исследовать движение системы, состоящей из двух призм, одна из которых, с массой M , может свободно скользить по гладкой горизонтальной плоскости, а вторая, с массой m , под действием силы тяжести скользит без трения по первой (рис. 2).

Решение. Положение системы полностью определяется двумя параметрами x_1 и x_2 , которые можно изменять независимо друг от друга. Рассмотрим сначала возможное перемещение, соответствующее изменению только параметра x_1 , а

параметр x_2 оставим неизменным. Обозначая через $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ вторые производные по времени от величин x_1 и x_2 , запишем уравнение для рассматриваемого перемещения

$$M\ddot{x}_1\delta x_1 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \cos \alpha)\delta x_1 = 0.$$

Отсюда, сокращая на δx_1 , получим дифференциальное уравнение движения

$$(M + m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 \cos \alpha = 0.$$

Рассматривая далее возможное перемещение, при котором изменяется параметр x_2 и не меняется x_1 , будем иметь

$$m(\ddot{x}_1 \cos \alpha + \ddot{x}_2)\delta x_2 - mg \sin \alpha \delta x_2 = 0.$$

Отсюда после сокращения на δx_2 получим второе дифференциальное уравнение движения

$$m(\ddot{x}_1 \cos \alpha + \ddot{x}_2) - mg \sin \alpha = 0.$$

Замечание. Все члены уравнения (а) имеют размерность работы, поэтому можно сказать, что общее уравнение динамики устанавливает равенство нулю работы активных сил и сил инерции Даламбера $\left(-m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2}, -m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2}, -m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2}\right)$ на всех возможных перемещениях системы.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

1. Теорема об изменении количества движения системы и о движении центра масс

Рассмотрим систему, у которой среди возможных перемещений имеется поступательное перемещение всей системы как одного твердого тела параллельно какому-либо неподвижному направлению. Не нарушая общности, всегда можно считать это перемещение направленным вдоль неподвижной оси x . Такое возможное перемещение получим, положив

$$\delta x_v = a, \quad \delta y_v = 0, \quad \delta z_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

после чего общее уравнение динамики запишется следующим образом:

$$a \sum_{v=1}^n \left(m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v \right) = 0.$$

Оно представляет собой дифференциальное уравнение движения и легко преобразуется к виду

$$\sum_{v=1}^n m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = \sum_{v=1}^n X_v.$$

Представляя левую часть этого уравнения в виде

$$\sum_{v=1}^n m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{v=1}^n m_v \frac{dx_v}{dt} \right),$$

вектор Q с компонентами

$$Q_x = \sum_{v=1}^n m_v \frac{dx_v}{dt}, \quad Q_y = \sum_{v=1}^n m_v \frac{dy_v}{dt}, \quad Q_z = \sum_{v=1}^n m_v \frac{dz_v}{dt}$$

назовем вектором количества движения системы. Тогда полученное уравнение переписывается в виде

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{v=1}^n X_v,$$

и мы приходим к теореме об изменении количества движения системы.

Теорема. Если связи допускают поступательное перемещение всей системы как единого целого вдоль оси x , то скорость изменения

проекция количества движения системы на ось x равна сумме проекций на ту же ось одних активных сил, действующих на систему.

Преобразуем выражение для количества движения

$$Q_x = \sum_{v=1}^n m_v \frac{dx_v}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^n m_v x_v = \frac{d}{dt} (M x_C) = M \frac{dx_C}{dt},$$

где

$$M = \sum_{v=1}^n m_v.$$

Будем называть величину M массой системы, а произведение массы системы на скорость v_C центра масс — количеством движения центра масс. Тогда количество движения системы равно количеству движения центра масс системы, а сама теорема об изменении количества движения системы может рассматриваться как теорема о движении центра масс системы.

Теорема. Если связи допускают поступательное перемещение всей системы как одного целого вдоль оси x , то центр масс системы движется в направлении оси x как материальная точка, масса которой равна массе системы M , на которую действуют все активные силы, действующие на систему.

Таким образом,

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{v=1}^n X_v.$$

Если сумма проекций всех активных сил на ось x равна нулю

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0,$$

то теорема дает первый интеграл. Вводя обозначение $\xi = x_C$, будем иметь

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\xi}{dt} = C_1 = \text{const.}$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\xi = C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий.

Следствие. Если сумма проекций активных сил на ось x равна нулю, то центр масс системы движется в направлении оси x по линейному закону, как и материальная точка, на которую не действуют никакие силы.

В этом заключается закон сохранения количества движения, который можно представить в виде

$$\Sigma m_v \dot{x}'_v = M \dot{\xi}' = \text{const.}$$

Пример 4. Тяжелая палочка AB длины $2a$ опирается одним концом о гладкую горизонтальную плоскость и находится в покое, поддерживаемая за другой конец B . Когда конец B палочки отпускают, она начинает падать. Определить траекторию точки B палочки (рис. 3).

Решение. Среди возможных перемещений имеется поступательное перемещение палочки вдоль горизонтальной оси, которую примем за ось x . Проекция активных сил (веса) на эту ось равна нулю, поэтому центр тяжести движется вдоль оси x по закону

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \text{const.}$$

В начальный момент палочка находилась в покое, так что

$$\left. \frac{d\xi}{dt} \right|_0 = 0,$$

откуда

$$\xi = \text{const.}$$

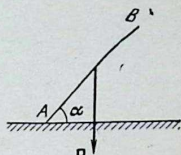


Рис. 3

т. е. центр тяжести палочки не перемещается по горизонтали. Выбирая новую систему координат $O_1 x_1 y_1$ так, чтобы вертикальная ось y_1 проходила через центр тяжести палочки, и обозначая через x_1, y_1 координаты точки B , будем иметь

$$x_1^2 + \left(\frac{y_1}{2} \right)^2 = a^2,$$

т. е. траектория точки B — эллипс.

Замечания. 1. Установленная теорема имеет место лишь при условиях, что связи допускают поступательное перемещение всей системы как одного твердого тела вдоль неподвижной оси x . Уравнение движения центра масс в этом случае получается из принципа Даламбера—Лагранжа, который не содержит реакций связей. Следовательно, реакции связи не войдут и в уравнение движения центра масс вдоль оси x .

2. Если связи, наложенные на систему материальных точек, допускают поступательное перемещение системы как вдоль оси x , так и вдоль осей y и z , то теорема о движении центра масс справедлива для всех трех направлений, поэтому центр масс системы будет двигаться в пространстве как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действуют все активные силы, приложенные к точкам системы, что можно записать в виде уравнения

$$\frac{dQ}{dt} = \Sigma F_v.$$

3. Разделим все силы, действующие на точки системы, на силы «внутренние» и силы «внешние».

Под внутренними силами $(X_v^{(i)}, Y_v^{(i)}, Z_v^{(i)})$ будем понимать силы взаимодействия между точками системы, а под внешними $(X_v^{(e)}, Y_v^{(e)}, Z_v^{(e)})$ — силы, вызванные действием на точки системы других тел, не входящих в систему. Тогда будем иметь:

$$X_v = X_v^{(i)} + X_v^{(e)}, \quad Y_v = Y_v^{(i)} + Y_v^{(e)}, \quad Z_v = Z_v^{(i)} + Z_v^{(e)}.$$

Если предполагать, что внутренние силы подчиняются третьему закону Ньютона, то для суммы проекций внутренних активных сил на оси x, y, z получим:

$$\sum_{v=1}^n X_v^{(i)} = 0, \quad \sum_{v=1}^n Y_v^{(i)} = 0, \quad \sum_{v=1}^n Z_v^{(i)} = 0,$$

а теорема о движении центра масс запишется следующим образом:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum_{v=1}^n X_v^{(e)}.$$

Теорема. Если связи таковы, что среди возможных перемещений имеется поступательное перемещение всей системы как одного целого вдоль неподвижной оси x , то центр масс системы движется вдоль этой оси как материальная точка, масса которой равна сумме масс всех точек системы и на которую действуют все внешние активные силы, приложенные к точкам системы.

4. Внешние силы могут оказаться внутренними при рассмотрении более широкой системы. Так, например, при рассмотрении движения падающих на Землю тел сила тяжести является внешней. Если рассматривать систему «Земля—Луна», то сила, действующая со стороны Земли на Луну, и сила, действующая со стороны Луны на Землю, будут силами внутренними; внешними в этом случае будут силы действия Солнца на Луну и Землю.

Силы реакции также можно разделить на внутренние и внешние. Так, связи, наложенные на частицы абсолютно твердого тела, являются внутренними, и силы реакции, вызванные этими связями, суть внутренние силы реакции. Внешними называют такие связи, которые связывают рассматриваемую систему материальных точек с другими телами. Силы реакции, вызываемые такими связями, называются внешними силами реакции.

5. Теорема о движении центра масс раскрывает реальный смысл теории движения одной материальной точки, которая рассматривалась выше. Такой точкой является центр масс системы.

Пример 5. Маленькое колесико, принимаемое за материальную точку с массой m , может свободно скользить по прямолинейному горизонтальному рельсу. С колесиком при помощи невесомого стержня длины l соединена вторая

материальная точка с массой m_2 , так что стержень может вращаться вокруг точки m_1 в вертикальной плоскости (рис. 4). Определить внутренние и внешние силы.

Решение. Активными силами, действующими на систему, здесь будут силы тяжести m_1g и m_2g , являющиеся внешними силами. Силы реакции N , N_1 и N_2 можно разделить на внутренние силы взаимодействия N_1 и N_2 и внешнюю силу N , действующую со стороны рельса на систему.

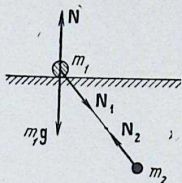


Рис. 4

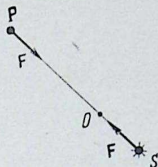


Рис. 5

Пример 6. Задача двух тел. Рассмотрим в качестве примера движение системы Солнце — планета, считая их материальными точками, взаимно притягивающимися по закону Ньютона

$$F = f \frac{mM}{(SP)^2},$$

где m — масса планеты, а M — масса Солнца (рис. 5). На систему не наложено никаких связей. Среди всех возможных перемещений системы имеются поступательные перемещения в любом направлении. Пренебрегая действием других небесных тел на рассматриваемую систему, из теоремы о движении центра масс получим, что центр масс системы движется равномерно и прямолинейно относительно любой инерциальной системы. (Не нарушая общности, можно предположить, что центр масс находится в покое.) Обозначая через r расстояние от центра масс O до планеты P , а через e расстояние от центра масс до Солнца, будем иметь

$$Me = mr,$$

или

$$e = \frac{mr}{M} = \frac{mR}{M + m}.$$

Выражая силу, действующую на планету, через расстояние от планеты до центра масс системы, получим

$$F = f \frac{mM}{(e + r)^2} = f \frac{mM}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 r^2} = f \frac{M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{\mu m}{r^2},$$

где

$$\mu = \frac{fM^3}{(M + m)^2}.$$

Теперь движение планеты можно рассматривать как движение материальной точки под действием силы притяжения к центру масс системы Солнце — планета. Такие движения подробно рассматривались в динамике материальной точки. Заметим, что для планеты Земля $e \approx 450$ км. Так как радиус Солнца составляет около 696 тыс. км, то центр масс системы Солнце — Земля находится внутри

Солнца. Движение планеты происходит по коническому сечению

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cos(\vartheta - \vartheta_0),$$

где ϑ — полярный угол; h — постоянная живых сил; C — постоянная площадей, в одном из фокусов которого находится общий центр масс.

Представляя это уравнение в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}{p},$$

где

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

a и b — соответственно большая и малая полуоси эллиптической орбиты, найдем выражение секторной скорости через эти параметры

$$\frac{C}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

Площадь, заметаемая фокальным радиусом-вектором планеты за время полного оборота, равна

$$\frac{CT}{2} = \pi ab,$$

откуда, подставив значение C , получим

$$\frac{\mu b^2}{4a} T^2 = \pi^2 a^2 b^2,$$

или

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{fM^3}{4\pi^2 (M+m)^2} = k^2,$$

т. е. отношение куба большой полуоси орбиты к квадрату периода обращения зависит от массы планеты и не является постоянной величиной, как это утверждает третий закон Кеплера.

Иногда удобнее изучать движение планеты в подвижной системе с началом в центре Солнца и ориентированной по звездам (гелиоцентрическая система). В такой системе на планету кроме силы притяжения к Солнцу будет действовать сила Кориолиса от переносного ускорения $\frac{fm}{R^2}$, направленная тоже к Солнцу.

Результирующая сила, действующая на планету,

$$F = \frac{fM}{R^2} + \frac{fm^2}{R^2} = \frac{fm(M+m)}{R^2},$$

также центральная и может быть представлена в виде

$$F = \frac{vm}{R^2},$$

где

$$v = f(M+m).$$

В этой системе движение происходит по эллиптической орбите, причем

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{v}{4\pi^2} = \frac{f(M+m)}{4\pi^2} = n^2.$$

Величины k^2 и n^2 различны для различных планет. Например, для Земли $k^2 = \frac{fM^3}{4\pi^2 \cdot 10^{66} \cdot 3,960}$. Для Юпитера $k_1^2 = \frac{fM^3}{4\pi^2 \cdot 10^{66} \cdot 3,968}$, $k_1^2 : k^2 = 1,002$.

Вычислив n^2 и n_1^2 соответственно для Земли и Юпитера, найдем

$$n_1^2 : n^2 = 1,001.$$

Задача о движении тела переменной массы

В качестве примера на применение теоремы об изменении количества движения рассмотрим задачу о движении системы материальных точек с переменной массой относительно неподвижной системы осей $Oxyz$. Пусть общая масса системы $M = \text{const}$, и вся система ограничена некоторой контрольной поверхностью Σ . При движении системы некоторые из ее точек выходят за пределы этой контрольной поверхности (рис. 6). Обозначим через $m(t)$ массу частиц, находящихся внутри контрольной поверхности в момент t , а через dm — приращение массы внутри контрольной поверхности за промежуток времени dt . Массу частиц, выделившихся за пределы контрольной поверхности за интервал времени dt , обозначим через $-dm$. Контрольная поверхность Σ может перемещаться по отношению к системе координат $Oxyz$ и изменять свою форму. Через Σ' обозначим контрольную поверхность Σ в момент $t+dt$.

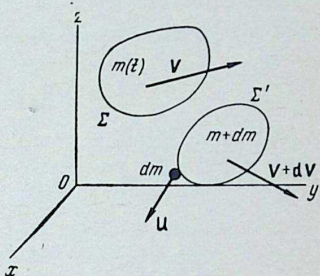


Рис. 6

Пусть v — скорость центра масс частиц, находящихся внутри контрольной поверхности Σ в момент t ; $v+dv$ — скорость центра масс частиц, находящихся внутри контрольной поверхности Σ' в момент $t+dt$; u — абсолютная скорость центра масс частиц, выделившихся за пределы контрольной поверхности Σ' в момент $t+dt$. Пусть, наконец, связи, наложенные на систему, в каждый момент времени допускают поступательное перемещение системы вдоль координатных осей x , y , z , а на каждую точку системы действуют активные силы $F_v^{(e)}$. При этих условиях ко всей системе с массой M можно применить теорему об изменении количества движения

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_v F_v^{(e)},$$

где $\mathbf{Q}$ — вектор количества движения системы. Умножая это уравнение на dt , с точностью до малых второго порядка получим

$$\mathbf{Q}(t + dt) - \mathbf{Q}(t) = \sum_v \mathbf{F}_v^{(e)} dt,$$

где

$$\mathbf{Q}(t) = m\mathbf{v},$$

$$\mathbf{Q}(t + dt) = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (-dm)\mathbf{u},$$

после чего

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (-dm)\mathbf{u} - m\mathbf{v} = \sum_v \mathbf{F}_v^{(e)} dt,$$

или

$$md\mathbf{v} + \mathbf{v}dm + dmd\mathbf{v} - \mathbf{u}dm = \sum_v \mathbf{F}_v^{(e)} dt.$$

Разделив на dt и пренебрегая бесконечно малыми величинами, получим

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_v \mathbf{F}_v^{(e)} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt}.$$

Это уравнение определяет движение центра масс частиц, находящихся внутри контрольной поверхности. Впервые оно было получено в 1897 г. И. В. Мещерским (1859—1935) в его магистерской диссертации, а поэтому и называется уравнением Мещерского.

Если с центром масс системы частиц, находящихся внутри контрольной поверхности, связать подвижную систему координат $Gx_1y_1z_1$, движущуюся поступательно, то разность $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ будет представлять относительную скорость отбрасываемых частиц по отношению к системе $Gx_1y_1z_1$. При этом предполагается, что отделение частиц происходит за счет внутренних сил или за счет наложения (или снятия) новых связей, допускающих поступательное перемещение системы. Последний член в уравнении Мещерского $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt}$

имеет размерность силы и действует на систему частиц, остающихся внутри контрольной поверхности как сила. Он называется реактивной силой. Если для реактивной силы ввести обозначение Φ

$$\Phi = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt},$$

то уравнение Мещерского переписывается в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_v \mathbf{F}_v^{(e)} + \Phi.$$

Если обозначить через $\mathbf{Q}^*$ вектор количества движения системы частиц, находящихся внутри контрольной поверхности Σ , то будем иметь:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^*(t) &= m\mathbf{v}, \quad \mathbf{Q}^*(t+dt) = (m+dm)(\mathbf{v}+d\mathbf{v}) = \\ &= m\mathbf{v} + m d\mathbf{v} + \mathbf{v} dm + dm d\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{Q}^*}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt},$$

а уравнение Мещерского получит вид

$$\frac{d\mathbf{Q}^*}{dt} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}^{(e)} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt}.$$

Последнее уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы частиц, масса которой изменяется (система ограничена контрольной поверхностью).

В случае, когда абсолютная скорость отбрасываемых частиц равна нулю ($\mathbf{u}=0$), уравнение Мещерского дает

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}^{(e)}.$$

В этом виде уравнение применяется в задачах небесной механики. Оно было получено в 1928 г. итальянским механиком Т. Леви-Чивита (1873—1941).

Теорема об изменении количества движения системы с переменной массой в последнем случае запишется, как и для системы с постоянной массой,

$$\frac{d\mathbf{Q}^*}{dt} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}^{(e)}.$$

Если относительная скорость отбрасываемых частиц равна нулю, то уравнение Мещерского перепишется в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}^{(e)},$$

а теорема об изменении количества движения в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}^*}{dt} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{F}_{\mathbf{v}}^{(e)} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt}.$$

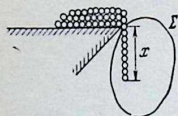
Исторически первая задача динамики тел переменной массы, решение которой приводится ниже, была рассмотрена в 1857 г. английским математиком Кэйли (1821—1895).

Пример 7. Определить движение тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола (рис. 7).

Решение. Пусть x — длина свешивающейся части цепи. Для присоединяющейся при движении массы имеем

$$dm = \frac{\gamma}{g} dx,$$

где γ — удельный вес цепи. Абсолютная скорость присоединяющейся массы равна $\frac{dx}{dt}$. До присоединения скорость равна нулю ($u = 0$). Уравнение Мещерского будет иметь вид



$$\frac{\gamma}{g} x \frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma x - \frac{\gamma}{g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

или

$$xx'' = gx - x'^2.$$

Рис. 7

Обозначая $x'^2 = u$ и учитывая, что $\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dx}$,

будем иметь

$$x \frac{du}{dx} = 2gx - 2u.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$u = \frac{2}{3} gx + \frac{c_1}{x^2}.$$

Постоянная c_1 определяется из начальных условий. Подставляя значение u , перепишем последнее уравнение в виде

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} gx + \frac{c_1}{x^2}.$$

В общем случае это уравнение с разделяющимися переменными не интегрируется в элементарных функциях. В частном случае, при $c_1 = 0$, имеем

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{3} gx},$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{g}{6}} (t - t_0).$$

Пример 8. (Задача К. Э. Циолковского). Исследовать движение тела переменной массы в безвоздушном пространстве без воздействия внешних сил. Относительная скорость выбрасывания частиц за контрольную поверхность (скорость истечения) постоянна по величине и направлена коллинеарно вектору $\mathbf{v}$ в сторону, противоположную движению центра масс основной системы.

Р е ш е н и е. Уравнение Мещерского для этого случая получит вид

$$m \frac{dv}{dt} = -u_0 \frac{dm}{dt},$$

где $u_0 = u - v = \text{const}$ — относительная скорость истечения частиц. Разделяя переменные, получим

$$dv = -u_0 \frac{dm}{m},$$

откуда

$$v = -u_0 \ln m + c_1.$$

Пусть при $t=t_0$, $v=v_0$, $m=m_0$. Тогда приходим к формуле Циолковского

$$v = u_0 \ln \frac{m_0}{m} + v_0,$$

которая была получена впервые в 1903 г. К. Э. Циолковским (1857—1935). Из формулы видно, что *скорость системы не зависит от режима изменения массы, а зависит лишь от ее расхода.*

2. Теорема об изменении момента количества движения

В общем случае для системы n материальных точек, на которую наложены идеальные связи, справедливо общее уравнение динамики

$$\sum_{v=1}^n \left[\left(m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v \right) \delta x_v + \left(m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - Y_v \right) \delta y_v + \right. \\ \left. + \left(m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} - Z_v \right) \delta z_v \right] = 0.$$

Пусть связи, наложенные на систему, допускают поворот системы как одного тела вокруг неподвижной оси (например, оси z), т. е. среди возможных перемещений системы будут находиться такие, проекции которых определяются матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \delta\varphi \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Отсюда для δx_v , δy_v , δz_v находим:

$$\delta x_v = -y_v \delta\varphi, \quad \delta y_v = x_v \delta\varphi, \quad \delta z_v = 0.$$

После подстановки этих перемещений в общее уравнение динамики получим

$$\delta\varphi \sum_v \left[- \left(m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v \right) y_v + \left(m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - Y_v \right) x_v \right] = 0.$$

В силу произвольности $\delta\varphi$ из этого уравнения следует

$$\sum_v m_v \left(x_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - y_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} \right) = \sum_v (x_v Y_v - y_v X_v).$$

В левой части здесь стоит полная производная по времени от выражения

$$K_z = \sum_v m_v \left(x_v \frac{dy_v}{dt} - y_v \frac{dx_v}{dt} \right),$$

равного сумме моментов количества движения точек системы относительно оси z . В дальнейшем это выражение будем называть моментом количества движения системы относительно оси z . Правая часть уравнения представляет сумму моментов всех активных сил, действующих на точки системы, относительно оси z . Обозначая последнюю сумму через M_z , перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z.$$

Оно представляет математическое выражение теоремы об изменении момента количества движения.

Теорема. Если среди возможных перемещений имеется поворот всей системы вокруг неподвижной оси z , то производная по времени от момента количества движения системы относительно оси z будет равна сумме моментов всех активных сил, действующих на точки системы, относительно той же оси.

Следствия. 1. Пусть выполняется условие

$$M_z = 0,$$

т. е. сумма моментов активных сил относительно оси z равна нулю. Тогда теорема дает

$$\frac{dK_z}{dt} = 0,$$

откуда следует постоянство момента количества движения относительно оси z

$$K_z = \text{const.}$$

Полученное соотношение является первым интегралом уравнений движения системы и сохраняет постоянное значение во все время движения системы. Постоянная определяется из начальных условий. В этом и заключается закон площадей в динамике системы материальных точек, или закон сохранения момента количества движения.

Переходя от декартовых координат к полярным, интеграл площадей, как и в динамике точки, можно представить в виде

$$\sum_v m_v r_v^2 \frac{d\varphi_v}{dt} = 2 \sum_v m_v \frac{d\sigma_{zv}}{dt} = \text{const},$$

где $\frac{d\sigma_{zv}}{dt}$ — секторная скорость проекции v -й точки на основную координатную плоскость, или

$$\sum_v m_v \frac{d\sigma_{zv}}{dt} = c.$$

Таким образом, приходим к теореме:

Теорема. Если для системы возможен поворот около неподвижной оси, причем сумма моментов активных сил относительно этой оси равна нулю, то сумма произведений масс точек системы на секторные скорости их проекций на плоскость, перпендикулярную к оси возможного вращения, есть величина постоянная.

2. Предположим, что система материальных точек может только вращаться вокруг неподвижной оси z (твердое тело). Обозначим через ω угловую скорость вращения системы. Проекции скоростей точек системы определяются теперь из формулы Эйлера

$$v_v = [\omega \overline{OM_v}].$$

Так что

$$\frac{dx_v}{dt} = -\omega y_v, \quad \frac{dy_v}{dt} = \omega x_v, \quad \frac{dz_v}{dt} = 0.$$

Подставляя полученные значения составляющих скоростей в выражение для K_z , будем иметь

$$K_z = \omega \sum_v m_v r_v^2,$$

где

$$r_v^2 = x_v^2 + y_v^2.$$

Выражение

$$J_z = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) = \sum m_v r_v^2$$

назовем моментом инерции системы материальных точек относительно оси z . Теорема об изменении момента количества движения в рассматриваемом случае дает

$$\frac{d}{dt} (J_z \omega) = M_z.$$

Если, кроме того, сумма моментов активных сил относительно оси z равна нулю, $M_z = 0$, то получим первый интеграл

$$J_z \omega = \text{const},$$

т. е. произведение момента инерции системы относительно оси z на угловую скорость вращения вокруг той же оси есть величина постоянная.

3. Если все активные силы, действующие на систему материальных точек, можно разделить на внутренние и внешние, причем внутренние силы — силы взаимодействия — определяются в соответствии с третьим законом Ньютона, тогда для моментов активных сил будем иметь

$$M_z = M_z^{(i)} + M_z^{(e)},$$

где $M_z^{(i)}$ — сумма моментов внутренних активных сил относительно оси z ; $M_z^{(e)}$ — сумма моментов внешних активных сил относительно оси z . Так как моменты двух сил взаимодействия, согласно третьему закону Ньютона, равны по величине и противоположно направлены, то для суммы моментов внутренних сил получим

$$M_z^{(i)} = 0,$$

после чего теорему можно сформулировать следующим образом:

Теорема. Если среди возможных перемещений системы имеется поворот всей системы вокруг неподвижной оси z , то производная по времени от момента количества движения системы относительно этой оси равна сумме моментов внешних активных сил относительно той же оси.

Пример 9. Горизонтальная трубка OA весом Mg и длины $2a$ вместе с шариком, находящимся в ней на расстоянии a от конца O и привязанным нитью к этому концу, сначала вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O , с постоянной угловой скоростью ω_0 . Затем нить перерезают. Определить угловую скорость вращения трубки в тот момент, когда шарик вылетает из нее, если вес этого шарика равен mg (рис. 8).

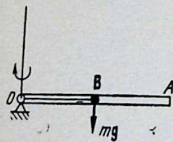


Рис. 8

Решение. Связи допускают поворот всей системы вокруг неподвижной вертикальной оси. Поэтому можно применить теорему об изменении момента количества движения, которая дает первый интеграл

$$J_z \omega + m \omega x^2 = \text{const},$$

поскольку момент внешних сил относительно вертикальной оси (момент сил тяжести) равен нулю. Здесь J_z — момент инерции трубки относительно вертикальной оси вращения; m — масса шарика; x — расстояние шарика от оси вращения; ω — угловая скорость вращения системы вокруг вертикальной оси. Константа определяется из начальных условий

$$J_z \omega_0 + m a^2 \omega_0 = \text{const}.$$

По определению $J_z = \sum m_i r_i^2$. Выделим элемент массы $dm = \rho dr$, где ρ — плотность трубки. Тогда, интегрируя, получим (рис. 9)

$$J_z = \int_0^{2a} r^2 \rho dr = \frac{8a^3 \rho}{3}.$$

Но масса трубки $M = 2a\rho$, поэтому

$$J_z = \frac{4}{3} Ma^2.$$

Подставляя это значение в интеграл, получим

$$\left(\frac{4}{3} Ma^2 + mx^2 \right) \omega = \left(\frac{4}{3} Ma^2 + ma^2 \right) \omega_0.$$

Откуда при $x = 2a$ будем иметь

$$\omega = \frac{4M + 3m}{4M + 12m} \omega_0.$$

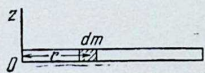


Рис. 9

Пример 10. (Задача Н. Е. Жуковского). По доске длины $2l$ и веса P , опирающейся своими концами на гладкий горизонтальный пол и гладкую вертикальную стену, бежит животное веса p . Спрашивается, как оно должно бежать, чтобы доска не скользила (рис. 10)?

Решение. По условиям задачи животное должно бежать так, чтобы доска оставалась в покое. В рассматриваемом положении доски определим ее мгновенный центр вращения C . Так как доска во время движения системы остается в покое, то точка C будет неподвижной по отношению к неподвижной системе координат Oxy . Связи, наложенные на систему, допускают в каждый момент времени поворот всей системы вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку C , и перпендикулярной к плоскости чертежа. Это дает возможность применить теорему об изменении момента количества движения системы относительно выбранной оси.

Вычислим сначала момент количества движения системы:

$$K_C = K_1 + K_2,$$

где K_1 — момент количества движения доски относительно точки C ; K_2 — момент количества движения животного. Во все время движения имеем

$$K_1 \equiv 0 \text{ и } K_2 = \frac{p}{g} 2l \dot{x} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Подсчитав сумму моментов сил относительно горизонтальности оси, проходящей через точку C ,

$$M_C = p(2l - x) \cos \varphi + Pl \cos \varphi,$$

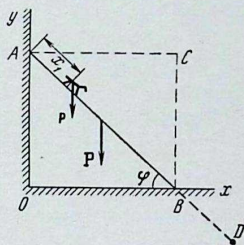


Рис. 10

запишем теорему об изменении момента количества движения

$$\frac{dK_2}{dt} = p(2l - x) \cos \varphi + Pl \cos \varphi.$$

После подстановки найденного значения K_2 получаем

$$\frac{p}{g} x'' 2l \sin \varphi \cos \varphi = p(2l - x) \cos \varphi + Pl \cos \varphi,$$

откуда

$$x'' = - \frac{g}{2l \sin \varphi} \left[x - \left(\frac{P}{p} + 2 \right) l \right].$$

Замена

$$x - \left(\frac{P}{p} + 2 \right) l = s$$

приводит к однородному линейному уравнению

$$s'' = - \frac{gs}{2l \sin \varphi}.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$s = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t,$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{2l \sin \varphi}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$x = \left(\frac{P}{p} + 2 \right) l + C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t,$$

т. е. животное должно совершать колебательные движения около точки $x = \left(\frac{P}{p} + 2 \right) l$, причем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

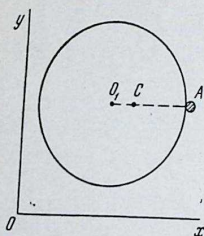


Рис. 11

Такое движение совершает материальная точка, притягиваемая к неподвижному центру силой, пропорциональной расстоянию от этой точки до центра.

Пример 11. (Задача С. А. Чаплыгина). На гладкой неподвижной горизонтальной плоскости лежит круглый диск. По ободу этого диска начинает двигаться из состояния покоя жук с постоянной относительной скоростью u . Определить абсолютное движение диска и жука (рис. 11).

Решение. Связи, наложенные на систему, допускают в каждый момент времени поступательное перемещение всей системы в любом направлении горизонтальной плоскости. Следовательно, для любого горизонтального направления имеет место теорема о движении центра масс. Силы же тяжести, действующие на систему (единственные внеш-

ние активные силы), не дают проекций на горизонтальную плоскость. Поэтому будет иметь место закон сохранения количества движения для любых постоянных горизонтальных направлений, а центр масс в плоскости Ox_1y_1 будет двигаться равномерно и прямолинейно:

$$\xi' = C_1, \quad \eta' = C_2.$$

Если предположить, что в начальный момент система находится в покое, то C_1 и C_2 будут равны нулю, т. е. центр масс системы остается в покое во все время движения. Центр масс C лежит на прямой, соединяющей центр диска и жука. При этом имеет место соотношение

$$M \cdot O_1C = mCA.$$

Обозначая через R радиус диска, будем иметь

$$Mx = m(R - x), \text{ или } x = \frac{mR}{M + m},$$

где

$$x = O_1C = a.$$

Поскольку величина x постоянна, центр масс диска должен находиться на окружности радиуса x . Жук также может находиться только на окружности радиуса

$$x_1 = R - x = \frac{RM}{M + m}.$$

Выберем неподвижную систему осей $Cxyz$ с началом в точке C . Выберем ось x так, чтобы в рассматриваемый момент времени жук находился на оси x , ось y направим перпендикулярно к оси x , а ось z — по вертикали. Пусть v — скорость центра диска, u — относительная скорость жука, ω — абсолютная угловая скорость диска. Количество движения системы складывается из количества движения диска

$$Q_1 = Mv$$

и количества движения жука, равного произведению массы жука на его абсолютную скорость

$$Q_2 = m(v + \omega \times R + u).$$

Тогда проекции количества движения системы на оси координат (на основании закона сохранения количества движения) при заданных начальных условиях будут равны нулю:

$$Q_y = Mv + m(v + \omega R + u) = 0, \quad (a)$$

$$Q_x \equiv 0. \quad (b)$$

Первое из этих соотношений содержит две неизвестные величины v и ω . Для полного решения задачи необходимо иметь еще одно уравнение. Заметим, что связи, наложенные на систему, допускают вращение всей системы вокруг любой неподвижной вертикальной оси. Среди возможных вращений находится и вращение вокруг вертикальной неподвижной оси, проходящей через центр масс системы. Поэтому мы имеем право применить теорему об изменении момента количества движения системы относительно вертикальной оси z . Внешние силы — силы тяжести не дают момента относительно этой оси. Следовательно,

$$K_z = \text{const}.$$

Принимая во внимание, что в начальный момент система находится в покое, будем иметь

$$K_z = 0. \quad (c)$$

Вычислим сначала момент количества движения диска относительно оси z :

$$K_{z1} = \sum_v m(x_v y'_v - y_v x'_v).$$

Определяя скорости по формуле Эйлера

$$\mathbf{v}_v = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_v],$$

где

$$\mathbf{r}_v(x_v + a, y_v, 0),$$

для векторного произведения будем иметь матрицу

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ x_v + a & y_v & 0 \end{vmatrix}.$$

Откуда получим

$$x'_v = -\omega y_v, \quad y'_v = v + \omega(x_v + a).$$

Подстановка этих значений в выражение для момента количества движения дает

$$K_{z1} = \Sigma m_v \{x_v[v + \omega(x_v + a)] + \omega y_v^2\} = -Mav + J_z \omega - Ma^2 \omega.$$

Зная количество движения жука, легко найти его момент количества движения:

$$K_{z2} = m(R - a)(v + \omega R + u),$$

после чего интеграл площадей $K_z = 0$ запишем в виде

$$K_z = K_{z1} + K_{z2} = -Mav + J_z \omega + m(R - a)(v + \omega R + u) - M\omega a^2 = 0. \quad (d)$$

Уравнения (a) и (d) полностью определяют закон движения системы. Учитывая, что

$$a = \frac{mR}{M + m}, \quad R - a = \frac{MR}{M + m},$$

и определяя из найденных первых интегралов неизвестные v и ω , будем иметь:

$$\omega = -\frac{m(R - a)u}{J_z + mR(R - a) - Ma^2},$$

$$v = -\frac{(J_z - Ma^2)mu}{(M + m)[J_z + mR(R - a) - ma^2]}.$$

Из этих формул видно, что первоначально выбранное направление угловой скорости не совпадает с действительным, так же как и направление скорости центра масс диска.

Полученные значения скоростей v и ω постоянны и зависят лишь от расположения масс. Следовательно, после начала движения жука центр масс диска движется с постоянной по величине скоростью, и его угловая скорость также постоянна.

З а м е ч а н и е. Если связи, наложенные на систему материальных точек, допускают поворот системы как твердого тела вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, то будем иметь три уравнения, каждое из которых отвечает возможному вращению около одной из осей. Таким образом, выбирая за указанные оси x , y , z , будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \sum_v m_v (x_v y'_v - y_v x'_v) = \sum_v (x_v Y_v - y_v X_v),$$

$$\frac{d}{dt} \sum_v m_v (y_v z'_v - z_v y'_v) = \sum_v (y_v Z_v - z_v Y_v),$$

$$\frac{d}{dt} \sum_v m_v (z_v x'_v - x_v z'_v) = \sum_v (z_v X_v - x_v Z_v).$$

Для упрощения выражения введем вектор $\mathbf{K}$ момента количества движения системы относительно начала координат с проекциями:

$$\mathbf{K} = \left\{ \sum_v m_v (y_v z'_v - z_v y'_v), \sum_v m_v (z_v x'_v - x_v z'_v), \sum_v m_v (x_v y'_v - y_v x'_v) \right\}.$$

Тогда три скалярных уравнения сводятся к одному векторному

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Теорема. Производная от вектора момента количества движения равна сумме моментов всех внешних активных сил относительно начала координат.

Полученному результату можно дать и другую формулировку, принадлежащую А. Резаю (1828—1896).

Теорема. Скорость изменения вектора момента количества движения системы относительно начала координат равна сумме моментов всех внешних активных сил относительно того же начала *.

Теорема об изменении момента количества движения для системы частиц с переменной массой. Рассмотрим движение системы материальных частиц, ограниченных контрольной поверхностью Σ , и предположим, что частицы могут выходить за пределы контрольной поверхности, а сама поверхность перемещается относительно инерциальной системы координат $Oxyz$. Обозначим через $\mathbf{K}$ вектор момента количества движения всей системы частиц относительно начала координат. Пусть $\mathbf{K}_1$ — момент количества движения системы частиц, расположенных внутри контрольной поверхности Σ , а $\mathbf{K}_2$ — момент количества движения частиц, находящихся вне контрольной поверхности. Будем, кроме того, предполагать, что в момент t

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1,$$

а в момент $t + \Delta t$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2.$$

Применяя теорему об изменении момента количества движения ко всей системе, будем иметь

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M},$$

* Вектор момента количества движения системы иногда называют «кинетическим моментом системы».

где

$$\frac{dK}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t}.$$

Обозначая

$$\frac{dK_1}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K_1(t + \Delta t) - K_1(t)}{\Delta t},$$

$$m_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K_2}{\Delta t},$$

перепишем теорему об изменении момента количества движения, принимая, что

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_1}{dt} + m_2.$$

Тогда

$$\frac{dK_1}{dt} = m - m_2,$$

где m_2 определяет «расход» момента количества движения через контрольную поверхность Σ в единицу времени. Полученная формула определяет изменение момента количества движения системы, ограниченной контрольной поверхностью, относительно инерциальной системы координат.

3. Теорема живых сил

Рассмотрим механическую систему из материальных точек с массой m_v , координаты которых обозначим через x_v, y_v, z_v . Предположим, что к точкам приложены активные силы X_v, Y_v, Z_v , и что система стеснена идеальными связями.

В общем случае действительное перемещение может не находиться среди возможных перемещений системы. В самом деле, условия, накладываемые на действительные перемещения системы

$$\sum_{v=1}^n (a_{iv} dx_v + b_{iv} dy_v + c_{iv} dz_v) + l_i dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

не будут вообще совпадать с условиями, накладываемыми на возможные перемещения системы

$$\sum_v (a_{iv} \delta x_v + b_{iv} \delta y_v + c_{iv} \delta z_v) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

если $l_i \neq 0$. Как показано выше, могут встретиться случаи, когда действительное перемещение системы находится среди возможных. Это имеет место всякий раз, когда уравнения связей не зависят явным образом от времени. Если действительное перемещение си-

системы находится среди возможных перемещений, то после подстановки в общее уравнение динамики

$$\sum_v [(m_v \ddot{x}_v - X_v) \delta x_v + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) \delta y_v + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) \delta z_v] = 0$$

соответствующих возможных перемещений

$$\delta x_v = dx_v, \quad \delta y_v = dy_v, \quad \delta z_v = dz_v$$

будем иметь

$$\sum_v [(m_v \ddot{x}_v - X_v) dx_v + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) dy_v + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) dz_v] = 0,$$

откуда получим

$$\sum_{v=1}^n m_v (\dot{x}_v dx_v + \dot{y}_v dy_v + \dot{z}_v dz_v) = \sum_{v=1}^n (X_v dx_v + Y_v dy_v + Z_v dz_v).$$

Разделив и умножив левую часть на dt , перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} dt \sum_v m_v \left(\dot{x}_v \frac{dx'_v}{dt} + \dot{y}_v \frac{dy'_v}{dt} + \dot{z}_v \frac{dz'_v}{dt} \right) = \\ = \sum_v \frac{m_v}{2} d(x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) = d \sum_v \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2). \end{aligned}$$

Выражение

$$T = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) = \sum \frac{m_v v_v^2}{2}$$

назовем живой силой или кинетической энергией системы. Тогда предыдущее уравнение приобретает вид

$$dT = \sum_{v=1}^n (X_v dx_v + Y_v dy_v + Z_v dz_v).$$

Полученную теорему живых сил можно сформулировать так:

Теорема. Если связи, наложенные на систему материальных точек, таковы, что действительное перемещение находится среди возможных, то дифференциал живой силы системы равен сумме элементарных работ всех активных сил, действующих на точки системы, на действительном перемещении системы.

Здесь важным является то обстоятельство, что в правую часть не входят силы реакции связи и рассматривается работа только одних активных сил на действительном перемещении точек системы. Таким образом, в правой части стоят не произвольные

дифференциалы координат, а действительные перемещения точек системы.

Если активные силы таковы, что можно подобрать функцию

$$U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

удовлетворяющую условиям:

$$X_v = \frac{\partial U}{\partial x_v}, \quad Y_v = \frac{\partial U}{\partial y_v}, \quad Z_v = \frac{\partial U}{\partial z_v},$$

то говорят, что силы допускают силовую функцию U , или что силы консервативны. Тогда теорема живых сил получит вид

$$dT = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_v} dx_v + \frac{\partial U}{\partial y_v} dy_v + \frac{\partial U}{\partial z_v} dz_v \right) = dU,$$

где dU — дифференциал силовой функции в действительном движении. Отсюда, интегрируя, получим

$$T = U + h.$$

Это уравнение является первым интегралом уравнений движения, который носит название интеграла живых сил. Величина $h = T - U$ представляет полную механическую энергию системы.

Интеграл живых сил существует, если действительные перемещения системы находятся среди возможных и если активные силы допускают не зависящую от времени силовую функцию.

При использовании теоремы живых сил нужно уметь вычислять живую силу системы. Рассмотрим несколько примеров на определение живой силы и применение теоремы живых сил.

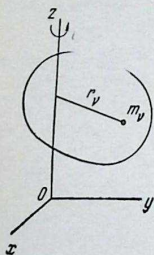


Рис. 12

Пример 12. Вычислить живую силу твердого тела, вращающегося около неподвижной оси z с угловой скоростью ω .

Решение. Обозначим через m_v массу элементарной частицы твердого тела, а через r_v — ее расстояние от оси вращения (рис. 12). Будем иметь

$$v_v = r_v \omega,$$

и тогда живая сила системы

$$T = \sum_v \frac{m_v v_v^2}{2} = \sum_v \frac{m_v r_v^2}{2} \omega^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Пример 13. Однородная палочка массы m и длины a может свободно вращаться в пространстве вокруг своего неподвижного конца. В начальный момент ее приводят в горизонтальное положение и сообщают вращение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω_0 . Найти, какой наименьший угол φ с вертикалью будет составлять палочка во время движения (рис. 13).

Решение. Связи, наложенные на систему, допускают поворот палочки вокруг вертикальной оси. Следовательно, применима теорема об изменении момента количества движения относительно этой оси. Внешние силы, действующие на палочку, — силы тяжести. Момент этих сил относительно вертикальной оси равен нулю. А тогда указанная теорема приводит к интегралу площадей

$$K_z = \sum_{v=1}^n m_v (x_v y'_v - y_v x'_v) = \text{const.}$$

Положение палочки можно определить двумя параметрами: углом φ отклонения палочки от вертикальной оси и углом ϑ , определяющим отклонение вертикальной плоскости π , в которой находится палочка, от неподвижной вертикальной плос-

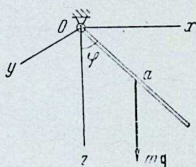


Рис. 13

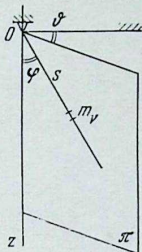


Рис. 14

кости, проходящей через ось вращения палочки (рис. 14). Количество движения элементарной частицы m_v , отстоящей от начала координат на расстоянии s , можно представить в виде двух составляющих: $m_v s \varphi'$, лежащей в вертикальной плоскости π , момент которой относительно вертикальной оси z равен нулю, и составляющей $m_v s \vartheta' \sin \varphi$, которая лежит в горизонтальной плоскости и момент которой относительно вертикальной оси z равен $m_v s^2 \vartheta' \sin^2 \varphi$. Момент количества движения всей палочки относительно оси z получим, суммируя элементарные моменты количества движения:

$$K_z = \int_0^a s^2 \vartheta' \sin^2 \varphi \, dm = \frac{m}{a} \vartheta' \sin^2 \varphi \int_0^a s^2 \, ds = \frac{ma^2}{3} \vartheta' \sin^2 \varphi.$$

Запишем интеграл площадей в виде

$$\frac{1}{3} ma^2 \vartheta' \sin^2 \varphi = \text{const},$$

или, принимая во внимание начальные условия,

$$\frac{1}{3} ma^2 \vartheta' \sin^2 \varphi = \frac{1}{3} ma^2 \omega_0.$$

Сокращая на $\frac{ma^2}{3}$, получим

$$\vartheta' \sin^2 \varphi = \omega_0. \quad (a)$$

Связи, наложенные на систему, не зависят явно от времени, а приложенные силы консервативны, поэтому существует интеграл живых сил

$$T = U + h.$$

Нам необходимо определить угол φ в тот момент, когда он примет наименьшее значение, т. е. при выполнении условия

$$\varphi' = 0.$$

В начальный момент палочка совершает мгновенное вращение вокруг вертикальной оси. Живая сила зависит лишь от распределения скоростей в данный момент времени. Поэтому для h получим

$$h = \frac{J_0 \omega_0^2}{2} - U_0,$$

где

$$U = \frac{1}{2} m g a \cos \varphi, \quad U_0 = \frac{1}{2} m g a \cos \varphi_0 = 0,$$

т. е.

$$h = \frac{J_0 \omega_0^2}{2} = \frac{m a^2 \omega_0^2}{6}.$$

В момент, когда φ' становится равным нулю, палочка снова совершает мгновенное вращение вокруг вертикальной оси z , так что

$$T = \frac{J \vartheta'^2}{2} = \frac{m a^2}{2} \sin^2 \varphi \cdot \vartheta'^2,$$

и интеграл живых сил дает

$$\frac{m a^2}{6} \vartheta'^2 \sin^2 \varphi = \frac{m g a}{2} \cos \varphi + \frac{m a^2 \omega_0^2}{6}. \quad (b)$$

Исключая из уравнений (a) и (b) величину ϑ' и сокращая уравнение (b) на $\frac{m a^2}{6}$, будем иметь

$$a \frac{\omega_0^2}{\sin^2 \varphi} = 3g \cos \varphi + a \omega_0^2,$$

что можно переписать в виде

$$\cos \varphi [3g - 3g \cos^2 \varphi - a \omega_0^2 \cos \varphi] = 0.$$

Отсюда получим два решения:

$$\cos \varphi_1 = 0, \quad \cos \varphi_2 = \frac{-a \omega_0^2 + \sqrt{a^2 \omega_0^4 + 36g^2}}{6g}.$$

При этом φ_1 соответствует начальному положению палочки, а φ_2 — искомый наименьший угол.

Пример 14. Призма массы M может скользить без трения по горизонтальному гладкому полу. На призме находится материальная точка массы m , скатывающаяся вниз под действием силы тяжести. Определить движение, предполагая, что в начальный момент вся система находилась в покое (рис. 15).

Решение. Призма может перемещаться только поступательно. Ее положение можно определить расстоянием x до некоторой вертикальной неподвижной стенки. Положение точки на призме можно определить расстоянием s этой точки от верхнего ребра призмы.

Среди возможных перемещений имеется поступательное перемещение всей системы в горизонтальном направлении, т. е. для горизонтального направления имеет место теорема об изменении количества движения системы. Проекция на ось x количества движения всей системы Q_x складывается из проекций на эту ось количества движения призмы и количества движения шарика:

$$Q_x = Mx' + m(x' + s' \cos \alpha).$$

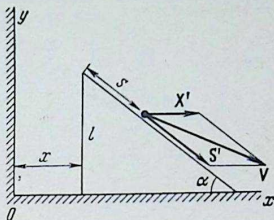


Рис. 15

Внешние силы — силы тяжести — на ось x проекции не дают. Следовательно, имеем первый интеграл — закон сохранения количества движения вдоль оси x :

$$Mx' + m(x' + s' \cos \alpha) = C_1 = \text{const.}$$

В начальный момент система находилась в покое, поэтому $C_1 = 0$, т. е.

$$(M + m)x' + ms' \cos \alpha = 0. \quad (a)$$

Связи, наложенные на систему, не меняются со временем. Параметры, задающие положение системы, не являются заранее заданными функциями времени. В этом случае можно применить теорему живых сил. Живая сила T системы складывается из живой силы призмы T_{Π} и живой силы точки T_{Γ} . Так как призма движется поступательно, то скорости всех ее точек равны между собой. Поэтому

$$T_{\Pi} = \frac{Mx'^2}{2}.$$

Живая сила точки равна $\frac{mv^2}{2}$, где v — абсолютная скорость точки, равная геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей

$$v^2 = x'^2 + s'^2 + 2x's' \cos \alpha.$$

Тогда

$$T = \frac{Mx'^2}{2} + \frac{m}{2}(x'^2 + s'^2 + 2x's' \cos \alpha).$$

Активными силами, действующими на систему, являются только силы тяжести. Они допускают силовую функцию

$$U = -Mgy_1 - mgy_2 + C_2,$$

где y_1 — постоянная ордината центра масс призмы; y_2 — ордината шарика

$$y_2 = l - s \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$U = -Mgy_1 - mgl + mgs \sin \alpha + C_3,$$

Произвольную константу C_2 подберем так, чтобы выполнялось условие

$$C_2 = Mgy_1 - mgl = 0.$$

Тогда

$$U = mgs \sin \alpha.$$

Поскольку связи не зависят явно от времени, а силы допускают силовую функцию, будем иметь интеграл живых сил

$$T = U + h,$$

или

$$\frac{Mx'^2}{2} + \frac{m}{2} (x'^2 + s'^2 + 2x's' \cos \alpha) = mgs \sin \alpha + h.$$

Так как в начальный момент система находилась в покое, то при $s=0$ имеем $h=0$, так что

$$(M+m)x'^2 + m(s'^2 + 2x's' \cos \alpha) = 2mgs \sin \alpha. \quad (b)$$

Уравнения (a) и (b) полностью определяют движение системы, зависящее от двух параметров x и s . В самом деле, комбинируя уравнения (a) и (b), получим

$$m(s'^2 + x's' \cos \alpha) = 2mgs \sin \alpha.$$

Исключая отсюда x' , будем иметь

$$s'^2 \left(\frac{M+m \sin^2 \alpha}{M+m} \right) = 2gs \sin \alpha,$$

откуда, интегрируя, найдем

$$s = \frac{(M+m)gt^2 \sin \alpha}{2(M+m \sin^2 \alpha)}.$$

Подставляя это значение в уравнение (a) и интегрируя, находим

$$x = - \frac{mg \sin 2\alpha}{4(M+m \sin^2 \alpha)} t^2,$$

где знак «минус» указывает на то, что координата x во время движения убывает.

Замечания. 1. Если к заданным силам добавить силы реакции, то на систему можно смотреть как на свободную от связей. В последнем случае для точек системы возможны любые перемещения и применима любая из рассмотренных теорем. В правые части аналитических формул, выражающих теоремы, будут входить теперь реакции связей, которые при составлении уравнений рассматриваются как известные силы.

2. При изучении динамики системы очень большое значение имеет умение пользоваться теоремами при решении конкретных задач, на основе анализа связей выбирать ту или иную теорему, решающую задачу о движении без введения сил реакции связи, которые не определяют самого движения, а лишь накладывают ограничения на перемещения.

§ 4. ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ НЕИЗМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ (ОСЕЙ КЕНИГА)

С. Кёнигом (1712—1757) были предложены теоремы, упрощающие задачу вычисления живой силы и момента количества движения системы материальных точек.

1. Теоремы Кенига

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_v , на которые действуют силы F_v с проекциями на неподвижные оси координат X_v, Y_v, Z_v . Положение точек относительно неподвижной системы осей $Oxyz$ будем определять координатами x_v, y_v, z_v (рис. 16). Координаты центра масс G такой системы определим из равенств:

$$\xi = \frac{\sum m_v x_v}{\sum m_v}, \quad \eta = \frac{\sum m_v y_v}{\sum m_v}, \quad \zeta = \frac{\sum m_v z_v}{\sum m_v}.$$

В центре масс построим систему осей $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, параллельных неподвижным осям $Oxyz$. Эти оси, перемещающиеся поступательно относительно системы $Oxyz$, называются осями Кенига. Координаты точек в новых и старых осях связаны между собой соотношениями:

$$x_v = \xi + \bar{x}_v, \quad y_v = \eta + \bar{y}_v, \quad z_v = \zeta + \bar{z}_v.$$

Зависимость живой силы и момента количества движения, вычисленных в новых и старых переменных, устанавливается теоремами Кенига.

Теорема 1. Момент количества движения системы относительно неподвижной оси z равен сумме момента относительного количества движения системы относительно оси Кенига $\bar{z}$ и момента количества движения материальной точки, масса которой равна массе всей системы и которая в каждый момент совпадает с центром масс, относительно неподвижной оси z .

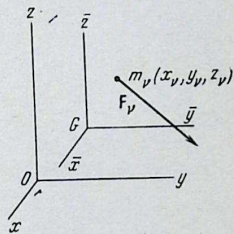


Рис. 16

Доказательство. Момент количества движения системы относительно оси z имеет вид

$$K_z = \sum_{v=1}^n m_v (x_v y'_v - y_v x'_v).$$

Преобразуем K_z к новым переменным]

$$K_z = \sum_v m_v [(\xi + \bar{x}_v)(\eta'_v + \bar{y}'_v) - (\eta + \bar{y}_v)(\xi' + \bar{x}'_v)] =$$

$$= \sum_v m_v (\xi \eta' - \eta \xi') + \sum_v m_v (\bar{x}_v \bar{y}'_v - \bar{y}_v \bar{x}'_v) + \\ + \sum_v m_v (\xi \bar{y}'_v - \eta \bar{x}'_v) + \sum_v m_v (\bar{x}_v \eta'_v - \bar{y}_v \xi'_v).$$

Принимая во внимание соотношения:

$$\sum_v m_v = M, \quad \sum_v m_v \bar{\xi} \bar{y}'_v = \bar{\xi} \sum_v m_v \bar{y}'_v = \bar{\xi} \frac{d}{dt} \left(\sum_v m_v \bar{y}_v \right) = 0,$$

получим

$$K_z = M (\xi \eta' - \eta \xi') + \sum_v m_v (\bar{x}_v \bar{y}'_v - \bar{y}_v \bar{x}'_v).$$

Выражение $\sum_v m_v (\bar{x}_v \bar{y}'_v - \bar{y}_v \bar{x}'_v)$ представляет собой момент количества движения системы относительно оси $\bar{z}$ в ее движении по отношению к осям Кенига. Обозначая эту сумму через K_z^* , получим

$$K_z = K_z^* + M (\xi \eta' - \eta \xi'),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2. Живая сила системы материальных точек в ее абсолютном движении равна сумме живой силы системы в ее движении по отношению к осям Кенига и живой силы материальной точки, масса которой равна массе всей системы и которая в каждый момент времени совпадает с центром масс системы.

Доказательство. По определению живая сила системы равна

$$T = \sum \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2).$$

После замены переменных это выражение примет вид

$$T = \sum \frac{m_v}{2} [(\xi' + \bar{x}'_v)^2 + (\eta' + \bar{y}'_v)^2 + (\zeta' + \bar{z}'_v)^2] = \\ = \sum \frac{m_v}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \sum m_v (\xi' \bar{x}'_v + \eta' \bar{y}'_v + \zeta' \bar{z}'_v) + \\ + \sum \frac{m_v}{2} (\bar{x}_v'^2 + \bar{y}_v'^2 + \bar{z}_v'^2).$$

Заметим, что $\sum m_v \xi' \bar{x}'_v$ обращается в нуль

$$\sum m_v \xi' \bar{x}'_v = \xi' \frac{d}{dt} \left(\sum m_v \bar{x}_v \right) = 0,$$

и тогда для живой силы в абсолютном движении будем иметь

$$T = \frac{Mv_G^2}{2} + \sum_v \frac{m_v}{2} (\bar{x}_v'^2 + \bar{y}_v'^2 + \bar{z}_v'^2).$$

Первый член правой части представляет живую силу точки, масса которой равна массе системы и которая движется со скоростью центра масс, второй же член представляет живую силу системы в ее движении относительно осей Кенига. Этим доказывается вторая теорема Кенига.

2. Теорема об изменении момента количества движения системы относительно осей Кенига

Теорема. Если связи, наложенные на систему материальных точек, допускают поворот всей системы как одного твердого тела вокруг неподвижной оси z и, кроме того, допускают поступательное движение системы вдоль неподвижных осей x и y , то производная от момента относительного количества движения по отношению к оси $\bar{z}$ равна сумме моментов сил относительно этой оси.

Доказательство. При принятых условиях, как известно, можно применять теорему об изменении момента количества движения системы относительно оси z и теорему о движении центра масс системы для осей x и y , откуда и получим три уравнения движения:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_v (x_v Y_v - y_v X_v), \quad (a)$$

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum_v X_v, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum_v Y_v. \quad (b)$$

По формуле Кенига имеем

$$K_z = K_z^* + M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right).$$

Подставляя это значение в уравнение (а), представим его в виде

$$\frac{dK_z^*}{dt} + M \left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = \sum_v (\bar{x}_v Y_v - \bar{y}_v X_v) + \sum_v (\xi Y_v - \eta X_v), \quad (c)$$

или, производя сокращения, в силу уравнений (а) и (b) получим

$$\frac{dK_z^*}{dt} = \sum_v (\bar{x}_v Y_v - \bar{y}_v X_v) = m_z^*,$$

что и доказывает теорему.

Следствие. Если связи, наложенные на систему, допускают поворот всей системы вокруг трех взаимно перпендикулярных неподвижных осей x , y , z и, кроме того, допускают поступательные

перемещения всей системы вдоль осей x , y , z , то теорема о моменте относительного количества движения будет иметь место для всех трех осей, т. е.

$$\frac{dK_x^*}{dt} = m_x^*, \quad \frac{dK_y^*}{dt} = m_y^*, \quad \frac{dK_z^*}{dt} = m_z^*.$$

Вводя в рассмотрение вектор момента относительного количества движения $K^*(K_x^*, K_y^*, K_z^*)$, этот результат можно записать в векторной форме

$$\frac{dK^*}{dt} = m_G,$$

т. е. скорость конца вектора момента относительного количества движения равна сумме моментов сил относительно центра масс системы.

Пример 15. Найти изменение момента количества движения Земли относительно осей Кенига, пренебрегая воздействием внешних сил.

Решение. Рассмотрим систему координат с началом в центре масс Земли, ориентированную по звездам. Эта система осей является системой Кенига. Применяя к Земле теорему об изменении момента количества движения, будем иметь

$$\frac{dK}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad K = \text{const},$$

т. е. момент количества движения Земли относительно осей Кенига остается неизменным.

Пример 16. Стоя на абсолютно гладкой площадке, человек может сообщать себе вращение вокруг вертикальной оси, размахивая рукой так, чтобы последняя совершала конусообразные вращения вокруг вертикали. В этом случае в системе осей Кенига момент количества движения остается величиной постоянной.

Пример 17. Рассмотреть движение тяжелого волчка, находящегося на абсолютно гладкой горизонтальной опоре.

Решение. Связи допускают поступательное перемещение волчка в любом горизонтальном направлении. Проекция внешних активных сил на любое горизонтальное направление равна нулю. При этих условиях из теоремы о движении центра масс системы следует, что центр масс в горизонтальном направлении будет двигаться равномерно и прямолинейно. Не нарушая общности, можно всегда предполагать, что горизонтальная скорость центра масс равна нулю. Освободим систему от связи, введя реакцию N (рис. 17). Тогда теорема об изменении момента количества движения системы относительно осей Кенига дает

$$\frac{dK_G}{dt} = \text{mom}_G N,$$

т. е. волчок совершает движение, при котором вектор момента количества движения изменяется в направлении вектора момента силы N относительно точки G и будет вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести. Такое движение называется **прецессионным**.

Пример 18. Рассмотреть движение волчка на шероховатой поверхности (при наличии трения), предполагая, что ось волчка заканчивается маленьким полушаром, а угловая скорость ω вращения волчка вокруг своей оси достаточно велика.

Решение. Вектор момента количества движения направлен по оси вращения волчка.

В самом деле, момент количества движения в любой момент времени определяется распределением скоростей и масс точек системы. В случае же вращения твердого тела вокруг оси момент количества движения относительно этой оси имеет вид

$$K = K_z = J_z \omega.$$

Если при этом $\omega=0$, то и $K=0$.

В общем случае вектор ω можно разложить на три ортогональных направления. Пусть в некоторый момент времени вектор мгновенной угловой скорости ω совпадает с направлением оси z , т. е. $\omega_x = \omega_y = 0$. Тогда моменты количества движения относительно осей x и y равны нулю, т. е.

$$K = K_z.$$

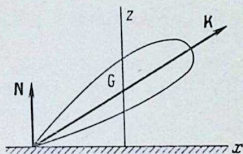


Рис. 17

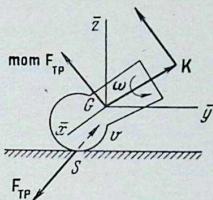


Рис. 18

Точка S на ножке волчка проскальзывает по поверхности. Этому проскальзыванию препятствует сила трения, направленная в сторону, противоположную скорости точки S (рис. 18). Момент силы трения $F_{тр}$ относительно центра тяжести, на основании теоремы об изменении момента количества движения, поднимает ось волчка. Этот факт всем хорошо известен из наблюдений. Как бы ни был запущен волчок, при достаточно большой скорости вращения его ось стремится принять вертикальное положение.

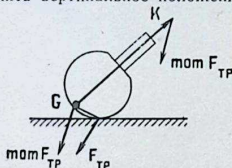


Рис. 19

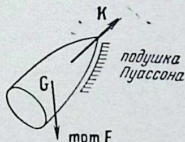


Рис. 20

Иначе обстоит дело с так называемым «китайским волчком», центр тяжести которого находится близко от точки прикосновения (рис. 19). Здесь вектор момента силы трения относительно центра тяжести направлен вниз, а ось волчка опускается. Наблюдения показывают, что ось волчка опускается до тех пор, пока сам волчок не станет на ножку.

Пример 19. Рассмотреть движение вращающегося артиллерийского снаряда, если впереди него создается уплотненная масса воздуха (*подушка Пуассона*), о которую трется вращающийся снаряд.

Решение. Сила трения направлена в сторону, противоположную вращению, при этом момент силы трения направлен вниз, и ось снаряда стремится опуститься (рис. 20).

3. Теорема живых сил в движении системы относительно осей Кенига

Рассмотрим в неподвижной системе координат $Oxyz$ систему материальных точек $m_v(x_v, y_v, z_v)$, на которые действуют активные силы X_v, Y_v, Z_v . Пусть точка $G(\xi, \eta, \zeta)$ является центром масс системы.

Теорема. Если связи, наложенные на систему, таковы, что:

1) действительные перемещения системы находятся среди возможных, т. е. имеется возможное перемещение, удовлетворяющее условиям:

$$\delta x_v = dx_v, \delta y_v = dy_v, \delta z_v = dz_v;$$

2) среди возможных перемещений имеются поступательные перемещения всей системы вдоль осей x, y, z ,

то изменение живой силы в относительном движении системы равно работе заданных сил на действительном относительном перемещении системы.

Первое из этих условий дает возможность применять теорему живых сил, в соответствии с которой

$$dT = \sum_v (X_v dx_v + Y_v dy_v + Z_v dz_v).$$

Второе условие дает возможность применить теорему о движении центра масс:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum_v X_v, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum_v Y_v, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum_v Z_v.$$

По теореме Кенига для живой силы имеем

$$T = T_G + \frac{M v_G^2}{2} = T_G + \frac{M}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2),$$

где T_G — живая сила системы относительно осей Кенига $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Новые координаты связаны со старыми соотношениями:

$$x_v = \xi + \bar{x}_v, \quad y_v = \eta + \bar{y}_v, \quad z_v = \zeta + \bar{z}_v.$$

После замены координат теорема примет вид

$$\begin{aligned} dT_G + \frac{M}{2} \cdot 2 \left[\frac{d\xi}{dt} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right] dt = \\ = \sum_v (X_v d\xi + Y_v d\eta + Z_v d\zeta) + \sum_v (X_v d\bar{x}_v + Y_v d\bar{y}_v + Z_v d\bar{z}_v). \end{aligned}$$

Принимая во внимание теорему о движении центра масс, получим

$$dT_G = \sum_v (X_v d\bar{x}_v + Y_v d\bar{y}_v + Z_v d\bar{z}_v).$$

Этим теорема доказана. Теорема живых сил, как и рассматриваемые ранее теоремы, не содержит реакций связи.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

1. Вывод уравнений Лагранжа

1. При изучении общих теорем динамики системы мы исходим из общего принципа Даламбера—Лагранжа. Получаемые из него уравнения движения не включали реакций связей, но при этом необходимо накладывались определенные ограничения на связи. Принцип Даламбера—Лагранжа дает возможность получить полную систему уравнений движения и в самом общем случае, когда на систему наложены идеальные голономные связи. Такие общие уравнения были установлены Лагранжем в 1788 г.

Рассмотрим движение системы из n материальных точек с массами m_v относительно неподвижной системы координат $Oxyz$. Координаты точек обозначим через x_v, y_v, z_v . Пусть на точки системы действуют активные силы F_v с проекциями на неподвижные оси X_v, Y_v, Z_v . Предположим, кроме того, что координаты точек стеснены идеальными голономными связями. В общем случае положение такой системы можно определить независимыми параметрами $q_1, q_2, \dots, q_k$, число которых называется числом степеней свободы системы. Декартовы координаты точек системы можно представить как явные функции этих независимых параметров и времени:

$$\begin{aligned} x_v &= x_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), & y_v &= y_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \\ z_v &= z_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k) & (v &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Параметры q_i называются лагранжевыми координатами системы. Они однозначно определяют положение механической системы и поэтому их иногда называют определяющими координатами (С. А. Чаплыгин), или обобщенными координатами. Производные по времени от обобщенных координат называются обобщенными скоростями.

Уравнения, определяющие декартовы координаты точек через лагранжевы координаты и время, будем называть уравнениями связи, так как они «связывают» декартовы координаты с независимыми лагранжевыми координатами.

Будем говорить, что связи, наложенные на систему, зависят явно от времени, когда декартовы координаты точек явно выражаются не только через лагранжевы координаты, но и через

время, хотя такая зависимость от времени может носить относительный характер.

Так, например, положение *свободной* материальной точки в плоскости можно определить декартовыми координатами x, y некоторой неподвижной системы. Пусть имеется другая система осей Ox_1y_1 , вращающаяся в плоскости Oxy вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω . Положение материальной точки по отношению к системе Ox_1y_1 зададим полярными координатами r и φ (рис. 21), которые можно рассматривать как лагранжевы координаты точки. Декартовы координаты x и y явно представляются через параметры r, φ и время t :

$$x = r \cos(\varphi + \omega t), \quad y = r \sin(\varphi + \omega t).$$

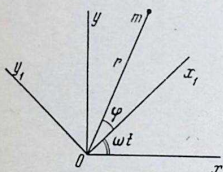


Рис. 21

Будем говорить, что на точку в данном случае наложены связи, зависящие от времени, хотя эта зависимость относится к подвижной системе Ox_1y_1 (координаты r и φ определяют относительное положение точки).

В общем случае уравнения связи устанавливают зависимость между декартовыми координатами точек системы и независимыми параметрами, определяющими положение системы. Возможные перемещения системы определим как такие бесконечно малые перемещения точек системы, которые определяются лишь изменением лагранжевых координат, но не изменением времени в уравнениях связи.

Для возможных перемещений точек системы будем иметь:

$$\delta x_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta z_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \delta q_s, \\ (v = 1, 2, \dots, k).$$

Подставляя эти значения возможных перемещений в общее уравнение динамики

$$\sum_{v=1}^n [(m_v \ddot{x}_v - X_v) \delta x_v + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) \delta y_v + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) \delta z_v] = 0,$$

получим

$$\sum_{v=1}^n \left[(m_v \ddot{x}_v - X_v) \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \delta q_s + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \delta q_s + \right. \\ \left. + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \delta q_s \right] = 0,$$

или, после изменения порядка суммирования,

$$\sum_{s=1}^k \delta q_s \left[\sum_{v=1}^n m_v \left(\ddot{x}_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + \ddot{y}_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + \ddot{z}_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{v=1}^n \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) \right] = 0.$$

Обозначим через Q_s сумму

$$Q_s = \sum_{v=1}^n \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right).$$

Величину Q_s будем называть обобщенной силой, отнесенной к координате q_s . Смысл обобщенных сил можно выявить, рассматривая работу δA всех активных сил, действующих на систему, на произвольном возможном перемещении системы. Тогда будем иметь:

$$\delta A = \sum_{v=1}^n (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = \\ = \sum_{s=1}^k \left[\sum_{v=1}^n \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) \right] \delta q_s, \\ \delta A = \sum_{s=1}^k Q_s \delta q_s,$$

т. е. Q_s — коэффициенты при δq_s в выражении работы системы сил на произвольном возможном перемещении. Если рассмотреть такое возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_s и не изменяются остальные координаты, то

$$Q_s \delta q_s = \delta A_s,$$

откуда получим

$$Q_s = \frac{\delta A_s}{\delta q_s}.$$

Член $\ddot{x}_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s}$ можно представить в виде

$$\ddot{x}_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \right) - \dot{x}_v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_v}{\partial q_s} \right).$$

Так как

$$\dot{x}_v = \frac{\partial x_v}{\partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \dot{q}_s,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'_v}{\partial q'_s} &= \frac{\partial x_v}{\partial q_s}, \\ \frac{\partial x'_v}{\partial q_s} &= \frac{\partial^2 x_v}{\partial t \partial q_s} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_s \partial q_i} q'_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_v}{\partial q_s} \right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial x_v}{\partial q_s} \right) q'_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_v}{\partial q_s} \right).\end{aligned}$$

Тогда для $x_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s}$ получим

$$x_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \left(x'_v \frac{\partial x'_v}{\partial q'_s} \right) - x'_v \frac{\partial x'_v}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial x_v'^2}{\partial q_s'} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial x_v'^2}{\partial q_s}.$$

Аналогичные преобразования можно записать для y_v и z_v , после чего общее уравнение динамики переписывается в виде

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^k \delta q_s \left[\frac{d}{dt} \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} \left(\frac{\partial x_v'^2}{\partial q_s'} + \frac{\partial y_v'^2}{\partial q_s'} + \frac{\partial z_v'^2}{\partial q_s'} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} \left(\frac{\partial x_v'^2}{\partial q_s} + \frac{\partial y_v'^2}{\partial q_s} + \frac{\partial z_v'^2}{\partial q_s} \right) - Q_s \right] = 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^k \delta q_s \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_s'} \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - Q_s \right] = 0.\end{aligned}$$

Но выражение

$$\sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) = \sum_{v=1}^n \frac{m_v v_v^2}{2} = T$$

представляет собой живую силу системы в ее абсолютном движении, поэтому общее уравнение динамики приобретает форму

$$\sum_{s=1}^k \delta q_s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) = 0.$$

Это уравнение справедливо при всех возможных перемещениях системы. Так как переменные Лагранжа таковы, что все величины δq_s в каждый момент времени могут изменяться независимо одна от другой и могут принимать значения любого знака, то равенство будет справедливо только в том случае, когда все коэффициенты при δq_s одновременно равны нулю. Таким образом, приравнявая коэффициенты при δq_s нулю, получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k),$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Уравнения эти впервые были выведены Лагранжем и называются уравнениями Лагранжа второго рода.

Кроме того, что уравнения Лагранжа имеют вычислительные преимущества, они являются более общими уравнениями, чем те, которые получаются из основных теорем динамики, поскольку существуют при каких угодно голономных идеальных связях, без ограничений на возможные перемещения. Кроме того, в уравнения не входят реакции связей. Таким образом, для определения движения нет необходимости знать реакции связей. Движение определяется только активными силами. Для составления уравнений движения достаточно определить живую силу системы и обобщенные силы.

Замечания. 1. Перепишем общее уравнение динамики в виде

$$\sum_{i=1}^{k^*} f_i \delta q_i = 0, \quad \text{где} \quad f_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i.$$

Предполагая, что все $\delta q_i \neq 0$, можно положить $\delta q_i = \varepsilon f_i$, после чего уравнение получает вид

$$\varepsilon \sum f_i^2 = 0.$$

Последнее возможно лишь в случае, когда все f_i равны одновременно нулю. Если же не все δq_i равны нулю, то при $\delta q_s = 0$ ($s = 2, 3, \dots, k$)

$$f_1 \delta q_1 = 0,$$

что может быть и при $\delta q_1 = 0$.

2. При изучении общих теорем динамики рассматривались лишь частные случаи систем, обладающих определенным классом возможных перемещений (поступательное, вращательное и т. д.). Для ряда механических систем эти условия общих теорем не выполняются, и последние не могут быть применены без введения реак-

ций связи. Метод Лагранжа позволяет изучить движение в самом общем случае. Естественно, что если за обобщенные координаты будут взяты параметры, соответствующие перемещениям, допускающим применение общих теорем, то уравнения Лагранжа будут совпадать с уравнениями, полученными из общих теорем.

2. Случай существования силовой функции

В прикладных задачах часто приходится иметь дело с силами, обладающими силовой функцией. Рассмотрим этот случай в применении к уравнениям Лагранжа.

Пусть существует силовая функция

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

Тогда силы, действующие на точки системы, имеют вид:

$$X_v = \frac{\partial U}{\partial x_v}, \quad Y_v = \frac{\partial U}{\partial y_v}, \quad Z_v = \frac{\partial U}{\partial z_v}.$$

Для обобщенной силы получим

$$\begin{aligned} Q_s &= \sum_{v=1}^n \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) = \\ &= \sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_v} \cdot \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_v} \cdot \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_v} \cdot \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_s}, \end{aligned}$$

т. е.

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Уравнения Лагранжа в этом случае запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Если ввести функцию Лагранжа

$$L = T + U,$$

то уравнения получат вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Замечание. Функция U не совпадает с потенциальной энергией системы. Если обозначить через V потенциальную функцию, то

$$U = -V + \text{const.}$$

Таким образом, полная механическая энергия системы $\varepsilon = T - U$ не совпадает с функцией Лагранжа.

3. Замечание о лагранжевых координатах

При выводе уравнений Лагранжа мы ввели понятие обобщенных координат. Эти координаты определяют положение системы в каждый момент времени. Кроме того, при выводе использовалась явная зависимость декартовых координат от обобщенных. Это обстоятельство нельзя забывать при составлении уравнений движения, поскольку несоблюдение этого условия может привести к ошибочным выводам. Рассмотрим в качестве примера ошибочные рассуждения К. Неймана, допущенные при решении одной задачи.

Пример 20. Материальная точка массы m движется в плоскости Oxy . Составить уравнения движения.

Решение. Положение точки можно определить полярными координатами r и ϑ . Обозначим через σ площадь, заштрихованную радиус-вектором точки (рис. 22), и, следуя К. Нейману, за координаты примем величины r и σ . Для составления уравнений Лагранжа определим живую силу точки, которая в полярных координатах имеет вид

$$T = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \vartheta'^2).$$

Подставляя сюда выражение ϑ' через секторную скорость

$$\sigma' = \frac{1}{2} r^2 \vartheta',$$

получим

$$T = \frac{m}{2} \left(r'^2 + \frac{4\sigma'^2}{r^2} \right).$$

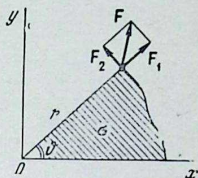


Рис. 22

Оказывается, что при таком выборе координат (r, σ) нельзя составить уравнения Лагранжа. В самом деле, для составления уравнений Лагранжа нам необходимо вычислить величины

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{4m\sigma'}{r^3}, \quad \frac{\partial T}{\partial \sigma'} = \frac{4m\sigma'}{r^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0$$

и подсчитать обобщенные силы. При подсчете последних силу F , действующую на точку, разложим на две ортогональные составляющие, одна из которых направлена по радиус-вектору точки, а вторая ортогональна к первой. Вычисляя работу силы F на произвольном возможном перемещении, получим

$$(F, \delta s) = F_1 \delta r + F_2 r \delta \vartheta = F_1 \delta r + \frac{2F_2}{r} \delta \sigma = Q_1 \delta r + Q_2 \delta \sigma.$$

Отсюда для обобщенных сил получаем выражения:

$$Q_1 = F_1, \quad Q_2 = \frac{2F_2}{r},$$

и уравнения Лагранжа получили бы вид:

$$mr'' + \frac{4m\sigma'^2}{r^3} = F_1, \quad \frac{2m\sigma''}{r^2} - \frac{4m\sigma' r'}{r^3} = \frac{F_2}{r}.$$

Преобразуя эти уравнения к полярным координатам r, ϑ , будем иметь:

$$mr'' + mr\vartheta'^2 = F_1, \quad mr\vartheta'' = F_2. \quad (a)$$

Если же за обобщенные координаты сразу выбрать r и ϑ , то уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$mr'' - mr\vartheta'^2 = F_1, \quad mr^2\vartheta'' - 2mr\vartheta'r' = rF_2. \quad (b)$$

Уравнения (b) не совпадают с уравнениями (a), полученными К. Нейманом. Это несовпадение объясняется тем, что координаты r и σ не являются лагранжевыми координатами. Они не определяют положения точки до тех пор, пока не решена задача о движении и не найдена траектория точки. Декартовы координаты x и y нельзя представить как явные функции параметров r и σ . Такие координаты являются не голономными.

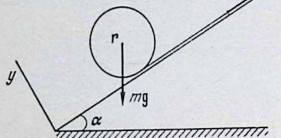


Рис. 23

Пример 21. Тяжелый цилиндр радиуса r и массы m может скользить по плоскости, наклоненной к горизонту под углом α . Вокруг цилиндра обмотана нить, конец которой тянут вдоль наклонной плоскости с постоянным ускорением a (рис. 23). Определить ускорение центра масс цилиндра, если момент инерции цилиндра относительно оси симметрии равен Mk^2 .

Решение. Общие теоремы, не вводя реакций связи, здесь применять нельзя, поскольку среди возможных перемещений нет поступательных перемещений, нет поворотов вокруг неподвижной оси и действительные перемещения не находятся среди возможных. Применяя уравнения Лагранжа, за лагранжеву координату возьмем координату x центра масс системы. Обозначив через φ угол поворота цилиндра относительно осей Кенига, будем иметь зависимость координат φ и x

$$x' + r\varphi' = at + c_1, \quad \text{или} \quad x + r\varphi = \frac{1}{2}at^2 + c_1t + c_2.$$

Живую силу вычислим по теореме Кенига

$$T = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mk^2\varphi'^2}{2} = \frac{m}{2} \left[x'^2 + \frac{k^2}{r^2} (at + c_1 - x')^2 \right].$$

Силовая функция имеет вид

$$U = -mgx \sin \alpha.$$

Тогда уравнение Лагранжа, соответствующее координате x , примет вид

$$m \left[x'' - \frac{k^2}{r^2} (a - x'') \right] = -mg \sin \alpha,$$

или

$$x'' = \frac{r^2}{k^2 + r^2} \left(\frac{k^2 a}{r^2} - g \sin \alpha \right).$$

Для однородного сплошного цилиндра

$$k^2 = \frac{r^2}{2}.$$

Тогда ускорение центра масс

$$x'' = \frac{2}{3} \left(\frac{a}{2} - g \sin \alpha \right).$$

Естественно, что при $a > 2g \sin \alpha$ цилиндр будет двигаться с ускорением, направленным вверх, а при $a = 2g \sin \alpha$ центр цилиндра будет двигаться равномерно.

§ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

1. Циклические координаты

Предположим, что переменные q можно разбить на две группы

$$\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_s}_{\text{группа 1}}, \quad \underbrace{q_{s+1}, \dots, q_k}_{\text{группа 2}}$$

так, что переменные второй группы не входят явно в функцию Лагранжа. Будем обозначать переменные первой группы через q_j , а второй — через q_α . Тогда будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = s+1, s+2, \dots, k).$$

Переменные q_α , удовлетворяющие этим условиям, называются циклическими, а переменные q_j — позиционными координатами. Уравнения Лагранжа, соответствующие циклическим координатам, запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (\alpha = s+1, s+2, \dots, k),$$

откуда сразу же получаем первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \beta_\alpha \quad (\alpha = s+1, s+2, \dots, k),$$

где β_α — произвольные постоянные. Эти уравнения выполняются во все время движения системы и называются циклическими интегралами. Циклические интегралы линейны относительно циклических скоростей $\dot{q}'_{s+1}, \dot{q}'_{s+2}, \dots, \dot{q}'_k$ и не зависят явно от переменных $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_k$. Из $k-s$ первых интегралов можно определить циклические скорости

$$\dot{q}'_\alpha = f_\alpha(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}'_1, \dot{q}'_2, \dots, \dot{q}'_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \dots, \beta_k),$$

и задача сводится к определению нециклических координат $q_1, q_2, \dots, q_s$ в функции времени.

2. Метод Рауса игнорирования циклических координат

Э. Раус (1831—1907) предложил составлять уравнения движения, не содержащие циклических переменных. Для этого он ввел в рассмотрение функцию

$$R = L - \sum_{\alpha=s+1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha},$$

которую в дальнейшем будем называть функцией Рауса. Эта функция зависит только от позиционных координат и скоростей (циклические координаты исключаются с помощью циклических интегралов), так что

$$R = R(t, q_j, \dot{q}_j, \beta_{\alpha}).$$

С помощью этой функции можно получить уравнения движения, не содержащие циклических переменных. Рассмотрим изменение функции Рауса R при переходе системы в другое бесконечно близкое состояние. Сообщим величинам $q_j, \dot{q}_j, \beta_{\alpha}$ произвольные бесконечно малые приращения в некоторый момент времени t , что будет соответствовать возможному перемещению системы. При этом изменятся функции R и L .

Перемещение системы в соседнее бесконечно близкое и кинематически возможное в тот же момент времени состояние называют вариацией состояния системы. Вариация состояния вызывает соответствующие изменения исследуемых функций (в данном случае функций Рауса и Лагранжа). Линейная часть приращения функции при вариации состояния системы называется вариацией функции.

В рассматриваемом случае вариация функции Рауса имеет вид

$$\delta R = \sum_{j=1}^s \frac{\partial R}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{\alpha=s+1}^k \frac{\partial R}{\partial \beta_{\alpha}} \delta \beta_{\alpha}.$$

С другой стороны, принимая во внимание выражение функции Рауса через L и ее производные, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta R = & \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \\ & + \sum_{\alpha=s+1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} - \sum_{\alpha=s+1}^k \beta_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} - \sum_{\alpha=s+1}^k \dot{q}_{\alpha} \delta \beta_{\alpha}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти два выражения для вариации одной и той же функции, заметим, что в силу их тождественности должны быть равны коэффициенты при соответствующих вариациях координат, скоростей и постоянных β_{α} . Принимая во внимание первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \beta_{\alpha} \quad (\alpha = s+1, s+2, \dots, k),$$

получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial q'_j} = \frac{\partial L}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} = -q'_\alpha$$

$$(j = 1, 2, \dots, s, \alpha = s+1, s+2, \dots, k),$$

после чего уравнения движения для позиционных координат примут вид

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial R}{\partial q'_j} \right] - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

где функция R зависит уже только от позиционных координат и скоростей. Эти уравнения называются уравнениями Рауса. Теперь задача сводится к исследованию новой системы с s степенями свободы. Роль функции Лагранжа для новой системы играет функция Рауса.

После интегрирования уравнений Рауса задача определения циклических координат в функции времени сводится к квадратурам. В самом деле, из уравнений

$$q'_\alpha = - \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}$$

найдем

$$q_\alpha = - \int \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} dt.$$

В этом и заключается метод игнорирования циклических координат Рауса.

Замечания. 1. Если координата q_α является циклической, то имеет место условие

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Последние равенства, в частности, имеют место и тогда, когда по отдельности выполняются условия

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Эти условия являются достаточными для того, чтобы координата q_α была циклической. Нахождение циклических переменных значительно облегчает решение задачи о движении системы.

Если

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0,$$

то соответствующая координате q_α обобщенная сила

$$Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Следовательно, циклические координаты можно искать на тех перемещениях, где активные силы, приложенные к системе точек, не совершают работы. Это условие не является достаточным, и задача разыскания циклических координат остается в общем случае неразрешенной.

Пример 22. Материальная точка движется в центральном поле сил с силовой функцией $U = U(r)$. Найти циклические координаты.

Решение. Перемещения, на которых сила не выполняет работы, соответствуют изменению углов φ и ϑ при фиксированном r (рис. 24)

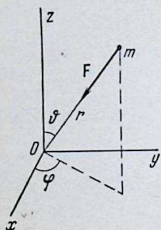


Рис. 24

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0.$$

Живая сила точки имеет вид

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} [\varphi'^2 r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \vartheta'^2 + r'^2].$$

Как видно из выражений для частных производных

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = mr^2 \varphi'^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \neq 0,$$

циклической координатой является только φ . Интеграл, соответствующий этой циклической координате, равен

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = m \varphi' r^2 \sin^2 \vartheta = \beta, \quad \text{или} \quad \varphi' = \frac{\beta}{mr^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Игнорируя циклическую координату φ , найдем функцию Рауса

$$\begin{aligned} R = T + U - \varphi' \beta &= \frac{m}{2} (\varphi'^2 r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \vartheta'^2 + r'^2) + U(r) - mr^2 \varphi'^2 \sin^2 \vartheta = \\ &= \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \vartheta'^2) + U(r) - \frac{\beta^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta}. \end{aligned}$$

Выпишем уравнения Рауса

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0.$$

Если ввести в рассмотрение выражение

$$T^* = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \vartheta'^2),$$

представляющее собой живую силу точки в полярной системе координат, вращающейся вокруг оси z , и вместо силовой функции рассмотреть функцию вида

$$U^* = U - \frac{\beta^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta},$$

то задача сведется к определению плоского движения точки, движущейся под действием сил с силовой функцией U^* и с функцией Рауса

$$R = T^* + U^*.$$

2. Циклические координаты позволяют сводить задачи к исследованию новых систем с меньшим числом степеней свободы. Этот метод развивался в работах Герца, Рауса и Томсона, которые высказывали предположение о том, что силы, имеющие силовую функцию, являются следствием существования скрытых циклических координат. Однако задача осталась неразрешенной до настоящего времени.

3. Циклические интегралы являются значительным обобщением основных теорем динамики системы (теоремы о сохранении движения центра масс и теоремы площадей). В самом деле, рассмотрим теорему о движении центра масс. Она имеет место, когда связи допускают поступательное перемещение всей системы. Пусть среди возможных перемещений имеется поступательное перемещение вдоль оси x . Соответствующую этому перемещению лагранжеву координату обозначим через q_1 . Определяя возможные перемещения через независимые параметры Лагранжа, будем иметь:

$$\delta x_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta z_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \delta q_s.$$

При поступательном перемещении:

$$\delta x_v = a, \quad \delta y_v = 0, \quad \delta z_v = 0.$$

Положив

$$\delta q_1 = a \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_k = 0,$$

будем иметь:

$$\frac{\partial x_v}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial y_v}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial z_v}{\partial q_1} = 0,$$

a обобщенная сила, соответствующая координате q_1 ,

$$Q_1 = \sum_v \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_1} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_1} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_1} \right) = \sum_v X_v.$$

Для составления уравнения Лагранжа необходимо еще найти частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q'_1} &= \sum_v m_v \left(\dot{x}'_v \frac{\partial x'_v}{\partial q'_1} + \dot{y}'_v \frac{\partial y'_v}{\partial q'_1} + \dot{z}'_v \frac{\partial z'_v}{\partial q'_1} \right) = \\ &= \sum_v m_v \left(\dot{x}'_v \frac{\partial x_v}{\partial q_1} + \dot{y}'_v \frac{\partial y_v}{\partial q_1} + \dot{z}'_v \frac{\partial z_v}{\partial q_1} \right) = \sum_v m_v \dot{x}'_v = M \dot{\xi}'_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_1} &= \sum_v m_v \left(\dot{x}_v \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_1} + \dot{y}_v \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial q_1} + \dot{z}_v \frac{\partial \dot{z}_v}{\partial q_1} \right) = \\ &= \sum_v m_v \left[\dot{x}_v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_v}{\partial q_1} \right) + \dot{y}_v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_v}{\partial q_1} \right) + \dot{z}_v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z_v}{\partial q_1} \right) \right] \equiv 0.\end{aligned}$$

Из этих рассуждений следует, что уравнение Лагранжа, соответствующее координате q_1 , имеет вид

$$M\ddot{\xi}'' = \sum_v X_v.$$

Циклическому интегралу здесь соответствует закон сохранения количества движения центра масс.

Аналогичный вывод можно сделать и для теоремы об изменении момента количества движения.

3. Обобщение теоремы и интеграла живых сил

Выражая декартовы координаты точек системы через лагранжевы координаты, для проекций скорости получим:

$$\begin{aligned}\dot{x}_v &= \frac{\partial x_v}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \dot{q}_s, \quad \dot{y}_v = \frac{\partial y_v}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \dot{q}_s, \\ \dot{z}_v &= \frac{\partial z_v}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \dot{q}_s.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение для живой силы, будем иметь

$$\begin{aligned}T &= \sum_v \frac{m_v v_v^2}{2} = \sum_v \frac{m_v}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x_v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_v}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\partial x_v}{\partial t} \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial y_v}{\partial t} \sum_s \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial z_v}{\partial t} \sum_s \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) + \\ &\left. + \left[\left(\sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 + \left(\sum_s \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 + \left(\sum_s \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 \right] \right\}.\end{aligned}$$

Здесь первое выражение в квадратных скобках зависит только от обобщенных координат и времени, вторая скобка, кроме того, линейно зависит от обобщенных скоростей, третья является квадратичной однородной функцией обобщенных скоростей. Вводя обозначения:

$$T_2 = \sum_v \frac{m_v}{2} \left[\left(\sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 + \left(\sum_s \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 + \left(\sum_s \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 \right],$$

$$T_1 = \sum_v m_v \left[\frac{\partial x_v}{\partial t} \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial y_v}{\partial t} \sum_s \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \right. \\ \left. + \frac{\partial z_v}{\partial t} \sum_s \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \dot{q}_s \right],$$

$$T_0 = \sum_v \frac{m_v}{2} \left[\left(\frac{\partial x_v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_v}{\partial t} \right)^2 \right],$$

живую силу системы представим в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где T_2 — однородная квадратичная форма обобщенных скоростей; T_1 — линейная однородная форма обобщенных скоростей; T_0 не зависит от обобщенных скоростей.

Пусть связи зависят явным образом от времени, но живая сила и силовая функция явно от времени не зависят, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Умножая каждое из уравнений Лагранжа на $\dot{q}_s$ и складывая, получим обобщение теоремы живых сил

$$\sum_{s=1}^k \dot{q}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_{s=1}^k \frac{\partial T}{\partial q_s} \dot{q}_s = \sum_{s=1}^k \frac{\partial U}{\partial q_s} \dot{q}_s,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_s \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_s \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial q_s} - \sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s} \dot{q}_s = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \dot{q}_s.$$

В силу теоремы Эйлера об однородных функциях

$$\sum_s \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_s \dot{q}_s \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} + \sum_s \dot{q}_s \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s} = 2T_2 + T_1,$$

и тогда уравнения Лагранжа дают

$$\frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) - \frac{d}{dt} (T_2 + T_1 + T_0) = \frac{dU}{dt},$$

или, после приведения подобных членов,

$$d(T_2 - T_0) = dU, \quad (a)$$

откуда

$$T_2 - T_0 = U + h, \quad (b)$$

Полученный первый интеграл соответствует интегралу живых сил, но выведен в более общих предположениях. Он был впервые получен К. Якоби (1804—1851) и называется интегралом Якоби*. В случае неконсервативных сил уравнение (а) примет вид

$$d(T_2 - T_0) = \sum_s Q_s dq_s \quad (с)$$

и будет представлять обобщение теоремы живых сил на случай связей, зависящих явно от времени.

Если связи явным образом не зависят от времени, декартовы координаты будут выражаться только через независимые координаты, и тогда

$$\frac{\partial x_v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial y_v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z_v}{\partial t} = 0,$$

поэтому

$$T_0 \equiv 0, \quad T_1 \equiv 0,$$

а живая сила будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей $T \equiv T_2$ и не будет зависеть явным образом от времени.

Тогда из уравнения (с) получаем теорему живых сил

$$dT = \sum_s Q_s dq_s,$$

а интеграл Якоби совпадает с интегралом живых сил

$$T = U + h.$$

Пример. 23. Материальная точка движется в системе координат $O\xi\eta\zeta$, вращающейся вокруг неподвижной оси ζ с постоянной угловой скоростью ω (по отношению к неподвижной системе отсчета $Oxyz$) (рис. 25). Приложенные к точке силы обладают силовой функцией $U(\xi, \eta, \zeta)$. Найти интеграл Якоби.

Решение. Неподвижные и подвижные координаты точки связаны соотношениями:

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t, \quad z = \zeta,$$

так что ξ, η, ζ являются определяющими координатами. Живая сила точки

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Для определения абсолютной скорости v запишем проекции ее относительной и переносной скоростей на оси ξ, η, ζ :

$$v_r(\xi', \eta', \zeta'), \quad v_e(-\eta\omega, \xi\omega, 0).$$

Тогда проекции абсолютной скорости будут иметь вид

$$v(\xi' - \eta\omega, \eta' + \xi\omega, \zeta'),$$

* Иногда интеграл Якоби называют «интегралом Пэнлеве».

и живая сила выражается в виде

$$T = \frac{m}{2} [(\xi' - \eta\omega)^2 + (\eta' + \xi\omega)^2 + \zeta'^2] = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2), \quad T_1 = m\omega (\xi\eta' - \eta\xi'),$$

$$T_0 = \frac{m}{2} \omega^2 (\xi^2 + \eta^2).$$

Здесь выполняются условия

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

и, следовательно, существует интеграл Якоби

$$T_2 - T_0 = U + h,$$

который имеет вид

$$\frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{m}{2} \omega^2 (\eta^2 + \xi^2) = U(\xi, \eta, \zeta) + h.$$

Пример 24. Система состоит из невесомого стержня OA длины l_0 , вращающегося в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O , и соединенного с ним шарнирно в точке A невесомого стержня AM длины l , свободно вращающегося в горизонтальной плоскости. На конце стержня AM закреплена точечная масса m , на которую действует сила $F = k\overline{OM}$ (k — постоянное число) (рис. 26). Найти интеграл Якоби.

Решение. Относительные координаты точки M :

$$\xi = l_0 + l \cos \psi, \quad \eta = l \sin \psi, \quad \zeta = 0,$$

$$\xi' = -\psi' l \sin \psi, \quad \eta' = \psi' l \cos \psi, \quad \zeta' = 0.$$

Проекции переносной скорости равны:

$$v_{e\xi} = -l\omega \sin \psi, \quad v_{e\eta} = (l_0 + l \cos \psi) \omega, \quad v_{e\zeta} = 0.$$

Проекции абсолютной скорости на подвижные оси:

$$v_{\xi} = -(\omega + \psi') l \sin \psi, \quad v_{\eta} = l_0 \omega + l(\omega + \psi') \cos \psi, \quad v_{\zeta} = 0.$$

Тогда живая сила

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} [l^2(\omega + \psi')^2 + 2l_0 l \omega (\omega + \psi') \cos \psi + l_0^2 \omega^2] = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{m}{2} l^2 \psi'^2, \quad T_1 = ml\omega \psi' (l + l_0 \cos \psi),$$

$$T_0 = \frac{m}{2} (l^2 \omega^2 + 2l_0 l \omega^2 + l_0^2 \omega^2) = \frac{m\omega^2}{2} (l + l_0)^2.$$

Силовая функция

$$U = \frac{k}{2} OM^2,$$

или, поскольку

$$OM^2 = l_0^2 + l^2 + 2ll_0 \cos \vartheta,$$

$$U = \frac{k}{2} (l_0^2 + l^2 + 2ll_0 \cos \vartheta).$$

Теперь можно записать интеграл Якоби

$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\psi}^2 - \frac{m\omega^2}{2} (l + l_0)^2 = \frac{k}{2} (l_0^2 + l^2 + 2ll_0 \cos \vartheta) + h.$$

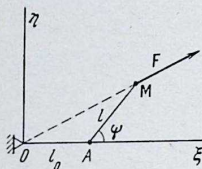


Рис. 26

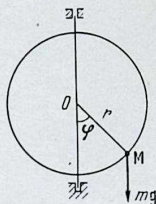


Рис. 27

Пример 25. С помощью метода Рауса исследовать движение шарика в трубке, имеющей форму окружности и способной вращаться без трения вокруг вертикального диаметра. В начальный момент шарик относительно трубки находится в покое, и радиус OM составляет с вертикальным диаметром угол $\varphi_0 = \alpha$; трубке в начальный момент сообщена угловая скорость ω_0 вращения вокруг вертикального диаметра (рис. 27).

Решение. Пусть момент инерции трубки относительно вертикального диаметра равен J_0 , а ϑ — угол поворота трубки вокруг вертикального диаметра. Запишем выражения для живой силы и силовой функции системы:

$$T = \frac{J_0 \dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{m}{2} (r^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

$$U = mgr \cos \varphi.$$

Нетрудно видеть, что координата ϑ является циклической. Ей соответствует циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = (J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi) \dot{\vartheta} = \beta,$$

из которого находим

$$\dot{\vartheta} = \frac{\beta}{J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi}.$$

Движение шарика в трубке определяется координатой φ . Для определения закона движения рассмотрим функцию Рауса

$$\begin{aligned} R = L - \sum \beta \dot{q}' &= \frac{J_0 \dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{m}{2} (r^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi - \frac{\beta^2}{J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{mr^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgr \cos \varphi - \frac{\beta^2}{2(J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)} = T_1 + U_1. \end{aligned}$$

Движение системы, при котором не изменяются позиционные координаты, называют стационарным. Стационарному движению отвечает равновесие в позиционных координатах,

Роль силовой функции играет здесь

$$U_1 = mgr \cos \varphi - \frac{\beta^2}{2(J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)}.$$

В положении равновесия шарика $\frac{\partial U_1}{\partial \varphi} = 0$, т. е.

$$-mgr \sin \varphi + \beta^2 (J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)^{-2} mr^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

откуда получим два условия:

$$1) \sin \varphi = 0, \text{ т. е. } \varphi = 0 \text{ или } \varphi = \pi;$$

$$2) -mgr + \frac{\beta^2 mr^2 \cos \varphi}{(J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)^2} = 0,$$

причем последнее равносильно уравнению

$$-g(J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)^2 + \beta^2 r \cos \varphi = 0,$$

из которого находится угол φ . Задача, таким образом, сводится к исследованию корней уравнения четвертой степени.

Закон движения определяется из уравнения

$$mr^2 \varphi'' - \frac{\beta^2 mr^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)^2} + mgr \sin \varphi = 0.$$

Последнее можно заменить интегралом живых сил, в котором с помощью циклического интеграла исключена переменная ϑ' , т. е.

$$\frac{mr^2}{2} \varphi'^2 + \frac{\beta^2}{2(J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi)} = mgr \cos \varphi + h.$$

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ

В задачах механики иногда требуется определить не только движение системы, но и силы реакций, возникающие при таком движении. В некоторых случаях достаточно знать лишь часть сил реакций. Для определения сил реакций можно воспользоваться уже известными общими теоремами динамики системы. В самом деле, заменяя наложенные на систему связи силами, эквивалентными по своему действию связям, можно рассматривать эту систему как освобожденную от связей. Действительное движение освобожденной системы соответствует наложенным ранее связям, но появляются новые возможные перемещения, которым раньше препятствовали связи. Эти новые возможные перемещения позволяют так применять общие теоремы, чтобы в соответствующие уравнения движения уже вошли силы реакций связи (для этого достаточно применять теоремы на тех перемещениях, где работа сил реакции отлична от нуля).

В общем случае при освобождении системы от связи появляется новое возможное перемещение, которому соответствует изменение некоторой лагранжевой координаты q , сохраняющей постоянное значение в действительном движении.

Пусть положение неосвобожденной системы определяется k независимыми лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$. Осво-

божденная система будет определяться $k+1$ координатами $q, q_1, q_2, \dots, q_k$. Для такой системы можно вычислить живую силу

$$T^*(t, q, q_1, q_2, \dots, q_k, q', q'_1, q'_2, \dots, q'_k)$$

и, определив работу всех сил на перемещении, соответствующем изменению координаты q , найти соответствующую обобщенную силу Q . В эту обобщенную силу войдет и искомая реакция связи. Записывая теперь уравнение Лагранжа для координаты q

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial q'} - \frac{\partial T^*}{\partial q} = Q$$

и принимая во внимание, что в действительном движении

$$q' \equiv 0, \quad q'' \equiv 0,$$

получим уравнение для определения интересующей нас реакции.

Пример 26. Тяжелая однородная палочка длины $2l$, опирающаяся одним своим концом на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 28), начинает движение из состояния покоя, когда угол $\varphi = \varphi_0$. Найти силу давления палочки на плоскость.

Решение. Сначала определим движение палочки. Связи, наложенные на систему, допускают поступательное перемещение палочки вдоль неподвижной оси x . Тогда, применяя теорему о движении центра тяжести вдоль этой оси, получим

$$M \xi'' = 0, \quad \text{откуда} \quad \xi = C_1 t + C_2$$

(где через ξ обозначена координата центра тяжести по оси x).

В начальный момент палочка находится в покое, поэтому

$$C_1 = 0, \quad \xi = \text{const},$$

т. е. центр масс все время находится на одной и той же вертикальной прямой. Выберем неподвижную систему осей так, чтобы ось y проходила через эту вертикальную прямую. Тогда центр масс во все время движения будет оставаться на оси y .

Для определения движения остается найти зависимость угла φ от времени.

Связи, наложенные на систему, не зависят явным образом от времени, и действительные перемещения находятся среди возможных. Следовательно, можно применить теорему живых сил, которая дает интеграл живых сил

$$T = U + h,$$

или

$$\frac{m y_C'^2}{2} + \frac{J \varphi'^2}{2} = -mgl \sin \varphi + h, \quad (1)$$

где y_C — ордината центра масс, а $J = \frac{ml^2}{3}$ — момент инерции палочки относительно оси, перпендикулярной плоскости xu и проходящей через центр масс. Определяя величины

$$y_C = l \sin \varphi, \quad y_C' = l \varphi' \cos \varphi, \quad y_C'' = -l \varphi'^2 \sin \varphi + l \varphi'' \cos \varphi$$

и подставляя их значения в интеграл живых сил, получим

$$\frac{ml^2 (3 \cos^2 \varphi + 1)}{6} \varphi'^2 = -mgl \sin \varphi + h.$$

В начальный момент $\varphi = \varphi_0$, $\varphi' = 0$, тогда для h имеем

$$h = mgl \sin \varphi_0.$$

Для определения реакции освободим систему от связи и введем силу реакции N . Среди возможных перемещений теперь имеется поступательное перемещение вдоль оси y . Это дает возможность применить теорему о движении центра масс вдоль оси y

$$m\ddot{y}_C = -mg + N,$$

откуда

$$N = m(g + \ddot{y}_C).$$

Подставляя значение $\ddot{y}_C$, имеем

$$N = m(g - l\dot{\varphi}'^2 \sin \varphi + l\ddot{\varphi} \cos \varphi),$$

где $\dot{\varphi}'$ и $\ddot{\varphi}$ определяются для действительного движения, стесненного связями. Эти значения можно выразить через φ с помощью интеграла живых сил. Дифференцируя последний по времени, для определения $\ddot{\varphi}$ получим уравнение

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}' \ddot{\varphi}}{3} (3\cos^2 \varphi + 1) - ml^2 \dot{\varphi}'^2 \sin \varphi \cos \varphi = -mgl \dot{\varphi}' \cos \varphi.$$

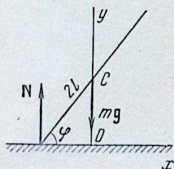


Рис. 28

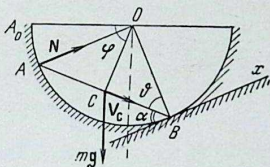


Рис. 29

После сокращения на $\dot{\varphi}'$ в начальный момент будем иметь

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} (3\cos^2 \varphi_0 + 1) = -mgl \cos \varphi_0,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = - \frac{3g \cos \varphi_0}{l(3 \cos^2 \varphi_0 + 1)}.$$

Реакция N_0 в начальный момент равна

$$N_0 = mg \left(1 - \frac{3 \cos^2 \varphi_0}{3 \cos^2 \varphi_0 + 1} \right) = \frac{mg}{3 \cos^2 \varphi_0 + 1}.$$

При $\varphi_0 \neq 90^\circ$ значение N_0 меньше веса палочки mg . Например, при $\varphi_0 = 60^\circ$ в начальный момент будем иметь

$$N_0 = \frac{4}{7} mg.$$

Пример 27. Однородная палочка AB длины $2a$ и веса mg положена в гладкий неподвижный полуцилиндр с горизонтальной осью, проходящей через точку O , причем $\angle AOB = 90^\circ$. Палочка движется под действием своего веса. Определить реакцию в точке A в зависимости от угла $\varphi = \angle A_0OC$, где C — центр тяжести палочки. В начальный момент $\varphi = \varphi_0 = 45^\circ$, причем палочка находится в покое (рис. 29).

Решение. Связи, наложенные на систему, идеальны и не зависят явно от времени, а активные силы (силы тяжести) обладают силовой функцией. При этих условиях существует интеграл живых сил

$$T = U + h,$$

или

$$\frac{2}{3} ma^2 \varphi'^2 = mga \sin \varphi + h,$$

который полностью определяет движение палочки. Постоянная h находится из начальных условий

$$h = -mga \sin \varphi_0 = -mga \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для определения реакции освободим палочку от связи в точке A , заменив ее действие силой N . Будем рассматривать только движение палочки в плоскости чертежа. Возможное перемещение точки B палочки по направлению совпадает с касательной к окружности в точке B . Направим *неподвижную* ось Bx вдоль касательной к окружности в точке B . Освобожденная в точке A палочка может перемещаться поступательно, так что найдется возможное перемещение палочки, при котором перемещения всех точек будут совпадать по величине и направлению с перемещением точки B . Тогда можно применить теорему о движении центра масс для оси x :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_C) = N - mg \sin(\varphi - \vartheta),$$

где $\dot{x}_C$ — проекция на ось x скорости v_C центра тяжести палочки в ее действительном движении. Но

$$[v_C = OC \cdot \varphi' = a\varphi',$$

поэтому

$$\dot{x}_C = a\varphi' \cos \alpha,$$

где угол α наклона палочки к оси x меняется во время движения. Отсюда

$$\ddot{x}_C = a\varphi'' \cos \alpha - a\varphi' \alpha' \sin \alpha.$$

Но $\alpha' = -\varphi'$, и в рассматриваемый момент $\alpha = \vartheta$, тогда

$$\ddot{x}_C = a\varphi'' \cos \vartheta + a\varphi'^2 \sin \vartheta.$$

Подставляя это значение в формулу для определения реакции, будем иметь

$$N = mg \sin(\varphi - \vartheta) + ma\varphi'' \cos \alpha + ma\varphi'^2 \sin \alpha.$$

Определяя φ'' и φ'^2 с помощью интеграла живых сил и подставляя в предыдущую формулу, получим

$$N = mg \left[\sin(\varphi - \vartheta) + \frac{3}{4} \cos \varphi \cos \vartheta + \frac{3}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sin \vartheta \right].$$

Отсюда при $\vartheta = 45^\circ$ найдем

$$N = \frac{mg}{8} [\sqrt{2} (10 \sin \varphi - \cos \varphi) - 6].$$

Эту же задачу можно решить и с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Для определения движения палочки вычислим живую силу и силовую функцию:

$$T = \frac{2}{3} m a^2 \varphi'^2, \quad U = m g a \sin \varphi,$$

после чего можно записать уравнение движения в форме Лагранжа, либо первый интеграл этого уравнения, каким будет интеграл живых сил.

Для определения реакции N заменим связь в точке A силой. Среди возможных перемещений освобожденной системы будет такое, при котором изменяется угол ϑ . Параметры φ и ϑ можно рассматривать как лагранжевы координаты освобожденной системы. В новых параметрах живая сила имеет вид

$$T^* = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{m a^2}{6} (\vartheta' + \varphi')^2 = \\ = \frac{m a^2}{2} [2\varphi'^2 + (\vartheta' + \varphi')^2 - 2\sqrt{2} \varphi' (\varphi' + \vartheta') \cos \vartheta] + \frac{m a^2}{6} (\vartheta' + \varphi')^2.$$

Вычисляя работу всех сил, действующих на систему, на перемещении, соответствующем изменению угла ϑ , имеем

$$m g a \cos(90^\circ - \varphi) \delta\vartheta + 2 N a \cos(90^\circ + 45^\circ) \delta\vartheta = Q_\vartheta \delta\vartheta,$$

откуда

$$Q_\vartheta = m g a \sin \varphi - N a \sqrt{2}.$$

Дифференцируя живую силу T^* по ϑ и ϑ' ,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \vartheta'} = m a^2 \left[\frac{4}{3} (\vartheta' + \varphi') - \sqrt{2} \varphi' \cos \vartheta \right], \\ \frac{\partial T^*}{\partial \vartheta} = m a^2 \sqrt{2} \varphi' (\vartheta' + \varphi') \sin \vartheta$$

и принимая во внимание, что в действительном движении $\vartheta' \equiv 0$, $\vartheta'' \equiv 0$, получим соответствующее координате ϑ уравнение Лагранжа для действительного движения

$$m a^2 (\varphi'' - \sqrt{2} \varphi'' \cos \vartheta) + \frac{m a^2}{3} \varphi'' - m a^2 \varphi'^2 = m g a \sin \varphi - N a \sqrt{2}.$$

Отсюда определяем N

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(m g \sin \varphi - \frac{m a}{3} \varphi'' + m a \varphi'^2 \right).$$

После подстановки из уравнений движения значений φ'^2 и φ'' и соответствующих преобразований получим

$$N = \frac{m g}{8} [\sqrt{2} (10 \sin \varphi - \cos \varphi) - 6].$$

Пример 28. Концы однородного прямого стержня AB длины $2l$ и массы m скользят без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной стороны (рис. 30). Определить вертикальное давление стержня на рамку в точке A .

Решение. Принимая за лагранжеву координату угол наклона φ стержня к горизонтальной стороне рамки, будем иметь

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \omega^2 \cos^2 \varphi + l^2 \varphi'^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{ml^2}{3} \varphi'^2 + \frac{ml^2}{3} \omega^2 \cos^2 \varphi \right),$$

$$U = -mgl \sin \varphi.$$

Движение стержня определяется из уравнения Лагранжа

$$4l\varphi'' + 4l\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = -3g \cos \varphi,$$

которому отвечает первый интеграл (интеграл Якоби)

$$\frac{2}{3} ml^2 (\varphi'^2 - \omega^2 \cos^2 \varphi) = -mgl \sin \varphi + h.$$

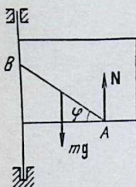


Рис. 30

Для определения вертикального давления стержня на рамку освободим стержень в точке A и введем силу N , давая возможность точке A стержня перемещаться в вертикальном направлении. Обозначим вертикальную координату точки A через x . В действительном движении $x \equiv 0$. Примем за лагранжевы переменные (при определении реакции) координаты φ и x . Тогда живая сила системы получит вид

$$T^* = \frac{m}{2} (l^2 \omega^2 \cos^2 \varphi + l^2 \varphi'^2 + 2l\varphi' x' \cos \varphi + x'^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{ml^2}{3} \varphi'^2 + \frac{ml^2}{3} \omega^2 \cos^2 \varphi \right).$$

Обобщенная сила Q_x , соответствующая координате x

$$Q_x = -mg + N,$$

а соответствующее уравнение Лагранжа (при $x \equiv 0$)

$$ml\varphi'' \cos \varphi - ml\varphi'^2 \sin \varphi = -mg + N.$$

Определяя φ'' и φ'^2 из уравнений движения, будем иметь

$$N = mg - ml \left(\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{3g}{4l} \cos \varphi \right) \cos \varphi - ml \left(\omega^2 \cos^2 \varphi - \frac{3g}{2l} \sin \varphi + \frac{3h}{2m} \right) \sin \varphi.$$

ГЛАВА II

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердым (или абсолютно твердым) телом в теоретической механике называют систему частиц, связанных в одно целое внутренними силами, действующими вдоль прямых, соединяющих частицы так, что никакие внешние причины не в состоянии изменить расстояние между этими частицами. Абсолютно твердое тело не может подвергаться никаким деформациям и представляет идеальный образ, который тем ближе подходит к реальному телу, чем меньше последнее способно деформироваться под действием внешних сил. Абсолютно твердое тело благодаря неизменяемости расстояний между его частицами представляет собой механическую систему, отличающуюся от других систем особыми свойствами, вследствие чего динамика твердого тела и выделяется в особый раздел. Раздел динамики, изучающий движение твердого тела, имеет очень большое значение в технических приложениях, особенно при построении гироскопических и навигационных приборов. Исключительное значение получила задача о движении твердого тела около неподвижной точки.

В основе всей динамики твердого тела лежат уравнения Эйлера, предложенные им в 1767 г. Уравнения Эйлера имеют место при произвольном движении твердого тела, так как самое общее движение твердого тела может быть представлено в виде суммы переносного поступательного движения, определяемого движением центра масс тела, и вращательного движения относительно осей Кенига. Центр масс твердого тела движется так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса тела и приложены все действующие на тело силы. Вращение относительно осей Кенига определяется теоремой об изменении момента количества движения относительно этих осей.

Наибольший интерес и наибольшие трудности в решении представляет задача о движении твердого тела около неподвижной

точки. Задача эта, несмотря на замечательные результаты Л. Эйлера (1707—1783), Ж. Лагранжа (1736—1813), С. Пуассона (1781—1840), Л. Пуансо (1777—1859) и в более позднее время С. В. Ковалевской (1850—1891), А. Пуанкаре (1854—1912), С. А. Чаплыгина (1869—1942) и многих крупных современных ученых, еще далека от своего полного завершения.

§ 1. ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

1. Определения

При изучении движения системы материальных точек твердого тела важную роль играет распределение масс системы, характеризующееся, в частности, величиной моментов инерции. Понятие момента инерции ввел Христиан Гюйгенс (1629—1695) при исследовании колебаний физического маятника. Дальнейшее развитие теории моментов инерции принадлежит Эйлеру и Пуансо.

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_v , расположенных некоторым образом относительно осей x, y, z (рис. 31). Обозначим через δ_v^2 расстояние точки m_v до некоторой плоскости π , проходящей через начало координат. Величину

$$\Pi = \sum m_v \delta_v^2$$

будем называть моментом инерции системы относительно плоскости π . Обозначим через Δ_v расстояние точки m_v до прямой l , лежащей в плоскости π и проходящей через начало координат, а через r_v расстояние точки m_v до начала координат. Величины

$$J = \sum m_v \Delta_v^2 \text{ и } \mu = \sum m_v r_v^2$$

будем называть соответственно моментами инерции системы относительно прямой l и относительно начала координат.

Выделяя среди всех прямых и плоскостей, проходящих через начало координат, координатные оси и плоскости, для моментов инерции относительно координатных плоскостей будем иметь:

$$\Pi_{xy} = \sum m z^2, \quad \Pi_{yz} = \sum m x^2, \quad \Pi_{zx} = \sum m y^2,$$

а для моментов инерции относительно координатных осей:

$$J_x = \sum m (y^2 + z^2), \quad J_y = \sum m (x^2 + z^2), \quad J_z = \sum m (y^2 + x^2).$$

Момент инерции относительно начала координат запишется теперь в виде

$$\mu = \sum m (x^2 + y^2 + z^2).$$

Справедливы следующие очевидные соотношения:

$$J_z = \sum m x^2 + \sum m y^2 = \Pi_{yz} + \Pi_{xz},$$

$$J_y = \sum m x^2 + \sum m z^2 = \Pi_{yz} + \Pi_{xy},$$

$$J_x = \sum m y^2 + \sum m z^2 = \Pi_{xz} + \Pi_{xy},$$

$$\mu = \Pi_{xy} + \Pi_{yz} + \Pi_{zx}.$$

Выписанные формулы имеют место для случая дискретного распределения масс. Для сплошных сред формулы получаются в интегральной форме путем предельного перехода. Так, например, при вычислении момента инерции твердого тела, последнее предполагается разбитым на элементарные объемы dv , каждый из которых имеет координаты x, y, z и массу $dm = \rho dv$, где ρ — плотность элементарного объема dv . Тогда суммы вида $\sum mx^2$ или $\sum myz$ переходят в тройные интегралы $\iiint \rho x^2 dv$ или $\iiint \rho yz dv$, распространенные на объем, занятый телом. В конкретных случаях вычисления иногда можно значительно упростить, сведя к линейным интегралам.

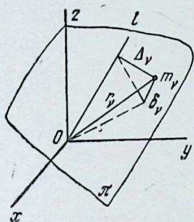


Рис. 31

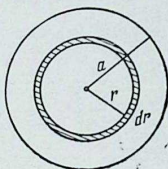


Рис. 32

Пример 29. Вычислить момент инерции тонкого однородного сплошного диска радиуса a и плотности ρ относительно его оси симметрии, перпендикулярной к плоскости диска.

Решение. Для элементарного слоя (рис. 32) имеем

$$dJ = r^2 dm = r^2 \rho 2\pi r dr,$$

откуда

$$J = \int_0^a \rho 2\pi r^3 dr = 2\pi \rho \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2},$$

где $M = \pi a^2 \rho$ — масса диска.

Пример 30. Определить момент инерции однородного сплошного шара радиуса R и плотности ρ относительно его диаметра.

Решение. Для элементарного шарового слоя момент инерции относительно центра шара

$$d\mu = \rho 4\pi r^2 r^2 dr.$$

Момент инерции всего шара относительно его центра

$$\mu = \int_0^R \rho 4\pi r^4 dr = \frac{4}{5} \rho \pi R^5.$$

Масса шара $M = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$, так что

$$\mu = \frac{3}{5} MR^2.$$

Момент инерции относительно любой диаметральной плоскости

$$\Pi = \frac{\mu}{3} = \frac{MR^2}{5}.$$

Момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр,

$$J = 2\Pi = \frac{2}{5} MR^2.$$

Пример 31. Определить момент инерции однородного сплошного эллипсоида относительно его главных осей.

Решение. Уравнение эллипсоида, отнесенное к главным осям, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Формула для момента инерции тела относительно плоскости непосредственно дает

$$\Pi_{xy} = \iiint z^2 \rho \, dx \, dy \, dz,$$

где интеграл распространен на объем, занятый эллипсоидом. Выполним преобразование к новым переменным:

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'.$$

Тогда

$$\Pi_{xy} = \rho c^3 ab \iiint z'^2 dx' dy' dz',$$

а уравнение эллипсоида переходит в уравнение шара

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Интеграл

$$\iiint z'^2 dx' dy' dz' = \Pi'_{x'y'}$$

берется по объему, занятому шаром, и представляет собой момент инерции однородного сплошного шара плотности $\rho' = 1$ относительно плоскости $Ox'y'$

$$\Pi'_{x'y'} = \frac{1}{3} \mu = \frac{4}{15} \pi.$$

Отсюда

$$\Pi_{xy} = \rho c^3 ab \Pi'_{x'y'} = \frac{4}{15} \pi \rho c^3 ab = \left(\frac{4}{3} \pi abc \right) \frac{c^2}{5} = \frac{Mc^2}{5},$$

где M — масса эллипсоида. Аналогично находим

$$\Pi_{yz} = \frac{Ma^2}{5}, \quad \Pi_{zx} = \frac{Mb^2}{5}, \quad \mu = \frac{M}{5} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Теорема Штейнера (1796—1863). Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы системы на квадрат расстояния между ними.

Доказательство. Пусть имеется система материальных точек m_i с центром масс в точке G и пусть положение точек определено по отношению к осям координат $Oxyz$. Обозначим координаты центра масс системы через a, b, c и свяжем с центром масс систему осей $Gx_1y_1z_1$, параллельных соответственно осям x, y, z

(рис. 33). Координаты x, y, z и x_1, y_1, z_1 связаны формулами преобразования:

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1, \quad z = c + z_1.$$

Вычисляя момент инерции относительно оси z , будем иметь

$$\begin{aligned} J_z &= \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) = \sum m_v [(a + x_{1v})^2 + (b + y_{1v})^2] = \\ &= \sum m_v (x_{1v}^2 + y_{1v}^2) + 2a \sum m_v x_{1v} + 2b \sum m_v y_{1v} + a^2 \sum m_v + b^2 \sum m_v. \end{aligned}$$

Так как точка G является центром масс системы, то

$$\sum m_v x_{1v} = 0, \quad \sum m_v y_{1v} = 0.$$

Вводя обозначение

$$M = \sum m_v,$$

получим

$$J_z = \sum m_v (x_{1v}^2 + y_{1v}^2) + M(a^2 + b^2),$$

или

$$J_z = J_{z_1} + Md^2,$$

где J_{z_1} — момент инерции относительно оси z_1 , а d — расстояние между осями z и z_1 .

Следствие. Если имеется система параллельных осей, то ось, для которой момент инерции имеет наименьшее значение, проходит через центр масс.

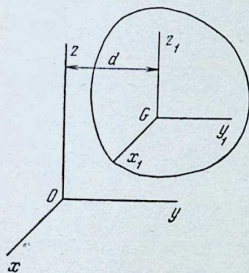


Рис. 33

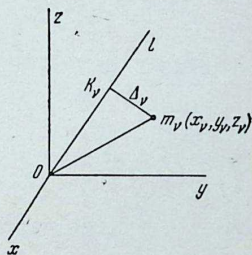


Рис. 34

2. Момент инерции системы относительно произвольной оси, проходящей через заданную точку

Выберем в точке O систему прямоугольных координат $Oxyz$ и проведем через начало координат прямую l , определенную направляющими косинусами (α, β, γ) (рис. 34). Момент инерции системы точек относительно прямой l определяется суммой

$$J_l = \sum m_v \Delta_{v,l}^2,$$

где

$$\Delta_v^2 = Om_v^2 - OK_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - (x_v\alpha + y_v\beta + z_v\gamma)^2 = \\ = (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x_v\alpha + y_v\beta + z_v\gamma)^2.$$

Выражение для момента инерции относительно прямой l можно записать в виде

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta,$$

где

$$A = \Sigma m_v(y_v^2 + z_v^2), \quad B = \Sigma m_v(x_v^2 + z_v^2), \quad C = \Sigma m_v(x_v^2 + y_v^2),$$

$$D = \Sigma m_v y_v z_v, \quad E = \Sigma m_v x_v z_v, \quad F = \Sigma m_v x_v y_v.$$

Нетрудно заметить, что величины A , B и C представляют собой моменты инерции относительно осей x , y и z соответственно. Выражения для D , E и F называются произведениями инерции или центробежными моментами инерции. Все шесть величин зависят от распределения масс относительно системы координат $Oxyz$.

3. Эллипсоид инерции

На прямой l выберем точку P таким образом, чтобы выполнялось условие

$$OP = \frac{1}{\sqrt{J}}.$$

Обозначая координаты точки P через X, Y, Z , будем иметь:

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{J}}, \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{J}}, \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{J}}.$$

Для момента инерции относительно оси l получим

$$J = J(AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY).$$

Сокращая на J , получим уравнение геометрического места точек P

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1,$$

которое определяет поверхность второго порядка. Если все точки системы расположены в конечной области пространства, то J всегда будет иметь конечное значение. Если, кроме того, все точки тела не лежат на одной прямой, то J отлично от нуля, а поверхность представляет собой эллипсоид. Этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции, а его главные оси — главными осями инерции. Вид эллипсоида инерции зависит от вида коэффициентов A, B, C, D, E, F . Очевидно, что различным точкам соответствуют, вообще говоря, различные эллипсоиды инерции.

Среди всех эллипсоидов отметим тот, который построен для центра масс. Такой эллипсоид называется центральным, а его главные оси — главными центральными осями инерции. В главных осях уравнение эллипсоида получит вид

$$\overline{A}X^2 + \overline{B}Y^2 + \overline{C}Z^2 = 1.$$

Необходимым условием того, чтобы ось z была главной, является отсутствие в уравнении эллипсоида инерции линейных относительно z членов, т. е.

$$D = 0 \text{ и } E = 0,$$

или

$$\Sigma m_v x_v z_v = 0, \quad \Sigma m_v y_v z_v = 0.$$

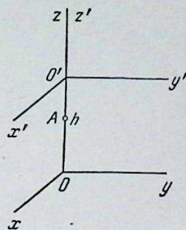


Рис. 35

Теорема. Если прямая OO' является главной осью инерции для эллипсоидов, построенных в точках O и O' , то эта прямая является главной осью инерции для всех своих точек и проходит через центр масс системы (рис. 35).

Доказательство. По условию теоремы:

$$D = 0, \quad E = 0, \quad D' = 0, \quad E' = 0.$$

Но (рис. 35)

$$x = x', \quad y = y', \quad z = h + z'.$$

Тогда

$$D = \Sigma m_v y_v z_v = \Sigma m_v y'_v (h + z'_v) = \Sigma m_v y'_v h + \Sigma m_v y'_v z'_v = 0,$$

т. е. ордината центра масс равна нулю. С другой стороны,

$$E = \Sigma m_v x_v z_v = h \Sigma m_v x'_v + \Sigma m_v x'_v z'_v = h \Sigma m_v x'_v = 0,$$

т. е. абсцисса центра масс равна нулю, так что ось z проходит через центр масс. Рассмотрим на оси z произвольную точку $A(0, 0, a)$. Для этой точки вычислим D_1 и E_1 :

$$z = a + z_1,$$

$$D_1 = \Sigma m_v y_{1v} z_{1v} = \Sigma m_v y (z - a) = \Sigma m_v y z - a \Sigma m_v y = -a \eta = 0,$$

$$E_1 = \Sigma m_v x_{1v} z_{1v} = \Sigma m_v x (z - a) = \Sigma m_v x z - a \Sigma m_v x = -a \xi = 0,$$

после чего справедливость теоремы становится очевидной.

Следствие. Главные центральные оси инерции являются главными осями для всех своих точек.

Пример 32. Определить момент инерции однородного круглого тонкого диска относительно оси l , проходящей через центр диска и составляющей угол φ с плоскостью диска (рис. 36).

Решение. Выберем систему координат $Oxyz$ с началом в центре диска так, чтобы ось z была перпендикулярна к плоскости диска. Такие оси будут главными осями инерции диска. В самом деле, здесь $z \equiv 0$, так что

$$J_{zx} = \Sigma mxz = 0, \quad J_{zy} = \Sigma mzy = 0,$$

$$J_{xy} = \Sigma mxy = 0.$$

Тогда

$$J_I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2,$$

где

$$A = \frac{mR^2}{4}, \quad B = \frac{mR^2}{4}, \quad C = \frac{mR^2}{4},$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \cos \varphi, \quad \gamma = \sin \varphi,$$

$$J_I = \frac{mR^2}{4} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi).$$

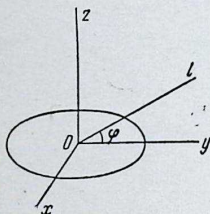


Рис. 36

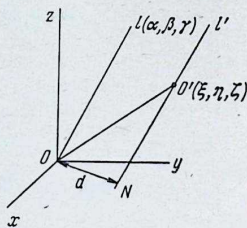


Рис. 37

4. Определение главных осей инерции для произвольной точки

Пусть центр масс системы находится в точке O , а главные центральные оси инерции направлены по осям x, y, z . Рассмотрим прямую l с направляющими косинусами α, β, γ , проходящую через начало координат (рис. 37). Обозначая моменты инерции относительно главных центральных осей через A, B и C , найдем момент инерции относительно оси l

$$J_l = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Для определения направлений главных осей инерции в произвольной точке $O'(\xi, \eta, \zeta)$ проведем через эту точку прямую l' , параллельную прямой l , и, воспользовавшись теоремой Штейнера, вычислим момент инерции относительно прямой l'

$$J' = J_l + Md^2,$$

где

$$d^2 = \overline{OO'}^2 - \overline{O'N}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2.$$

Тогда

$$J' = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2 + M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Геометрическое место точек поверхности эллипсоида инерции для O' удовлетворяет условию

$$O'P = \frac{1}{\sqrt{J'}},$$

откуда

$$J' = \frac{1}{(O'P)^2}.$$

Величина $O'P$ на поверхности эллипсоида инерции принимает стационарное значение для точек, лежащих на главных осях инерции. Следовательно, и величина J' для главных осей будет принимать стационарное значение. Таким образом, задача отыскания главных осей инерции сводится к нахождению стационарных значений величины J' , рассматриваемой как функции параметров α , β , γ при условии, что α , β и γ связаны соотношением

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Метод Лагранжа приводит в этом случае к отысканию стационарного значения функции

$$F = J' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1),$$

где λ — неопределенный множитель. Условия стационарности имеют вид:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} = (A + \lambda)\alpha - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\xi = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \beta} = (B + \lambda)\beta - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\eta = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \gamma} = (C + \lambda)\gamma - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\zeta = 0,$$

и задача сводится к исследованию решений системы линейных однородных алгебраических уравнений, где неизвестным пока является и множитель λ . Исследование можно проводить различными способами.

Умножая первое уравнение на $\frac{\xi}{A + \lambda}$, второе на $\frac{\eta}{B + \lambda}$, третье на $\frac{\zeta}{C + \lambda}$ и складывая, получим

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta - M(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) \left(\frac{\xi^2}{A + \lambda} + \frac{\eta^2}{B + \lambda} + \frac{\zeta^2}{C + \lambda} \right) = 0. \quad (a)$$

Кроме того, разделив уравнения соответственно на ξ , η и ζ , будем иметь

$$M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma) = \frac{\alpha}{\frac{\xi}{A+\lambda}} = \frac{\beta}{\frac{\eta}{B+\lambda}} = \frac{\gamma}{\frac{\zeta}{C+\lambda}} = \kappa. \quad (b)$$

Умножая первое уравнение на α , второе на β , третье на γ и складывая, получим

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \lambda - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2 = 0. \quad (c)$$

Заметим, что величина

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = \delta$$

обращается в нуль только тогда, когда прямая l и отрезок OO' ортогональны. Исключая этот особый случай из рассмотрения, будем считать величину δ отличной от нуля. Тогда первое уравнение приведет к виду

$$f(\lambda) = \frac{M\xi^2}{A+\lambda} + \frac{M\eta^2}{B+\lambda} + \frac{M\zeta^2}{C+\lambda} - 1 = 0$$

и будет представлять полином третьей степени относительно λ . В общем случае полином $f(\lambda)$ имеет три корня, зависящие от координат ξ, η, ζ точки O' . Пусть $A > B > C$; тогда при $\lambda \rightarrow \pm \infty$ имеем $f(\lambda) \rightarrow -1$. При $\lambda < -A$ полином $f(\lambda)$ остается отрицательным, неограниченно возрастаю по модулю при $\lambda \rightarrow -A$. При переходе λ через значение $\lambda = -A$ полином $f(\lambda)$ меняет знак и при λ , удовлетворяющем условию

$$-A < \lambda < -B,$$

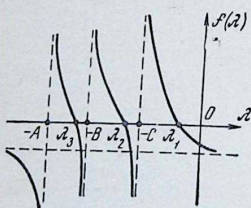


Рис. 38

неограниченно возрастает по модулю, когда λ стремится к $-A$ или к $-B$. В последнем случае $f(\lambda)$ становится отрицательным, т. е. на интервале $(-A, -B)$ полином $f(\lambda)$ имеет по меньшей мере один действительный корень (рис. 38). Проводя аналогичные рассуждения, заметим, что полином $f(\lambda)$ имеет по меньшей мере один вещественный корень на интервале $(-B, -C)$. Если $\lambda > -C$, то при $\lambda \rightarrow -C$ полином принимает неограниченно большое положительное значение, а при $\lambda \rightarrow +\infty$ становится отрицательным, т. е. имеется хотя бы один действительный корень на интервале $(-C, +\infty)$. Подводя итог, можно сказать, что полином $f(\lambda)$ имеет три вещественных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

При $\lambda = \lambda_1$ уравнение $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ представляет поверхность эллипсоида, при $\lambda = \lambda_2$ — поверхность однополостного гиперболоида, при $\lambda = \lambda_3$ — поверхность двуполостного гиперболоида.

Каждому корню λ_i соответствуют три действительных числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, определяющих направление главной оси инерции. Покажем, что эти главные направления ортогональны. В самом деле, пусть значению корня λ_i соответствуют косинусы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, а значению корня λ_k — косинусы $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$. Угол между двумя направлениями определится из соотношения

$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = \kappa_i \kappa_k \left[\frac{\xi^2}{(A + \lambda_i)(A + \lambda_k)} + \frac{\eta^2}{(B + \lambda_i)(B + \lambda_k)} + \frac{\zeta^2}{(C + \lambda_i)(C + \lambda_k)} \right].$$

Но

$$\frac{1}{(A + \lambda_i)(A + \lambda_k)} = \left(\frac{1}{A + \lambda_i} - \frac{1}{A + \lambda_k} \right) \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i},$$

вследствие чего правая часть преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_i \kappa_k}{\lambda_k - \lambda_i} \left[\xi^2 \left(\frac{1}{A + \lambda_i} - \frac{1}{A + \lambda_k} \right) + \eta^2 \left(\frac{1}{B + \lambda_i} - \frac{1}{B + \lambda_k} \right) + \right. \\ \left. + \zeta^2 \left(\frac{1}{C + \lambda_i} - \frac{1}{C + \lambda_k} \right) \right] &= \frac{\kappa_i \kappa_k}{\lambda_k - \lambda_i} \left[\frac{\xi^2}{A + \lambda_i} + \frac{\eta^2}{B + \lambda_i} + \right. \\ &+ \frac{\zeta^2}{C + \lambda_i} - \left(\frac{\xi^2}{A + \lambda_k} + \frac{\eta^2}{B + \lambda_k} + \frac{\zeta^2}{C + \lambda_k} \right) \Big] = \\ &= \frac{\kappa_i \kappa_k}{\lambda_k - \lambda_i} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Это означает, что экстремальные направления для различных значений λ_i взаимноортогональны. Итак, мы получили условия, определяющие направления главных осей инерции в произвольной точке.

Определив направления главных осей инерции в точке O' , можно найти значения моментов инерции относительно главных осей. На основании формулы (с) имеем

$$\begin{aligned} J' &= A\alpha_i^2 + B\beta_i^2 + C\gamma_i^2 - M(\xi\alpha_i + \eta\beta_i + \zeta\gamma_i)^2 + M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \\ &= -\lambda_i + Mr^2, \end{aligned}$$

или

$$J' = Mr^2 - \lambda_i.$$

Если ввести обозначения:

$$A = Ma^2, B = Mb^2, C = Mc^2, \lambda = Mr,$$

то функция f примет вид

$$f = \frac{\xi^2}{a^2 + \rho} + \frac{\eta^2}{b^2 + \rho} + \frac{\zeta^2}{c^2 + \rho} - 1 = 0.$$

Каждому значению $\lambda = \lambda_i$ соответствует уравнение

$$f_i = \frac{\xi^2}{a^2 + \rho_i} + \frac{\eta^2}{b^2 + \rho_i} + \frac{\zeta^2}{c^2 + \rho_i} - 1 = 0,$$

определяющее поверхность второго порядка в пространстве ξ, η, ζ . При фиксированных значениях ξ, η, ζ это уравнение имеет три действительных корня ρ_i , так что точка $O'(\xi, \eta, \zeta)$ лежит на пересечении трех поверхностей второго порядка. Величины ρ_1, ρ_2, ρ_3 можно принять за три криволинейные координаты точки, определяемой декартовыми координатами ξ, η, ζ . Всякой точке будет соответствовать своя система значений этих координат. Наоборот, придавая некоторые значения величинам ρ_1, ρ_2, ρ_3 , можно определить положение точки. Это положение определяется неоднозначно, потому что поверхности пересекаются не в одной, а в восьми точках. Координаты ρ_1, ρ_2, ρ_3 называются эллиптическими.

Пересечение поверхности f_i с плоскостью Oxy представляет кривую второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho_i} + \frac{y^2}{b^2 + \rho_i} = 1,$$

которая при $\rho_i = 0$ обращается в эллипс, расстояние между фокусами которого

$$2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}.$$

При $\rho_i > 0$ также будем иметь эллипсы с теми же фокусами. Если ρ_i удовлетворяет неравенствам

$$-b^2 < \rho_i < 0,$$

то кривые вновь будут представлять эллипсы с теми же фокусами (софокусные эллипсы). При ρ_i , удовлетворяющем неравенствам

$$-a^2 < \rho_i < -b^2,$$

кривые являются гиперболами с фокусами, расположенными на расстоянии

$$2c = \sqrt{(a^2 + \rho_i) + (-\rho_i - b^2)} = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

и совпадающими с фокусами эллипса. Кривые, фокусы которых совпадают, называются софокусными. Рассматривая различные сечения, заметим совпадение их фокусов. Поэтому поверхности f_i являются софокусными с эллипсоидом

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0,$$

называемым гиацинтным эллипсоидом.

З а м е ч а н и я. 1. В формуле

$$J_l = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

момент инерции J_l полностью определяется заданием шести величин A, B, C, D, E, F , которые зависят от положения точки O' и от направления координатных осей в теле. Эти величины могут быть записаны в виде симметричной матрицы

$$(J) = \begin{pmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{pmatrix},$$

которая называется тензором инерции.

Тензор (J) представляет собой символический оператор, который, действуя на некоторый вектор $\mathbf{a}$, дает другой вектор $\mathbf{b}$. Проекции последнего являются линейными функциями проекций вектора $\mathbf{a}$, причем матрицей линейного преобразования является матрица (J) . Вектор $\mathbf{b}$ в этом случае называется линейной вектор-функцией вектора $\mathbf{a}$, а сама операция — скалярным произведением тензора (J) на вектор $\mathbf{a}$ и обозначается

$$\mathbf{b} = ((J), \mathbf{a}).$$

Исходя из определения, это равенство можно записать в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} b_x &= a_x A - a_y D - a_z E, \\ b_y &= -a_x D + a_y B - a_z F, \\ b_z &= -a_x E - a_y F + a_z C. \end{aligned}$$

2. В приложениях момент инерции твердого тела относительно оси иногда обозначают в виде произведения $J = Mk^2$, где M — масса тела. Число k называют радиусом инерции тела.

Пример 33. Определить точки, для которых эллипсоид инерции представляет собой шар (такие точки называются шаровыми).

Решение. Поместим начало координат O в центре масс системы, а за направление осей координат x, y, z выберем главные оси центрального эллипсоида инерции. Координаты искомой точки O' обозначим через ξ, η, ζ . Если точка O' шаровая, то любые прямоугольные оси, проходящие через нее, будут главными осями инерции. Проведем оси x_1, y_1, z_1 , параллельные осям x, y, z соответственно. Будем иметь

$$\sum m y z = 0, \quad \sum m z x = 0, \quad \sum m x y = 0.$$

Новые и старые координаты связаны формулами преобразования:

$$x = \xi + x_1, \quad y = \eta + y_1, \quad z = \zeta + z_1.$$

Переходя к координатам x, y, z , запишем условия:

$$\begin{aligned} \sum m y_1 z_1 &= \sum m (y - \eta) (z - \zeta) = \sum m y z - \zeta \sum m y - \eta \sum m z + \eta \zeta \sum m = 0, \\ \sum m z_1 x_1 &= \sum m (z - \zeta) (x - \xi) = \sum m z x - \xi \sum m z - \zeta \sum m x + \xi \zeta \sum m = 0, \\ \sum m x_1 y_1 &= \sum m (x - \xi) (y - \eta) = \sum m x y - \eta \sum m x - \xi \sum m y + \xi \eta \sum m = 0. \end{aligned}$$

Так как оси x, y, z — главные центральные оси инерции, то эти равенства эквивалентны следующим:

$$\xi\eta = \eta\xi = \xi\xi = 0.$$

Последние удовлетворяются, когда равны нулю какие-либо две из координат ξ, η, ζ . Пусть для определенности

$$\xi = \eta = 0,$$

т. е. точка O' лежит на оси z . Чтобы точка O' была шаровой, необходимо, чтобы

$$A_1 = B_1 = C_1.$$

Но

$$C = C_1, \quad A_1 = A + M\xi^2, \quad B_1 = B + M\xi^2.$$

Таким образом, для определения ζ имеем

$$C = A + M\xi^2 = B + M\xi^2.$$

Отсюда видно, что A должно быть равно B , т. е. центральный эллипсоид инерции должен быть эллипсоидом вращения около оси z . При выполнении этих условий координата ζ точки O_1 определится равенством

$$|\zeta| = \pm \sqrt{\frac{C - A}{M}}.$$

Координата будет иметь действительное значение, если $C \geq A$, т. е. центральный эллипсоид инерции должен быть либо шаром, либо сжатым по оси z эллипсоидом. В последнем случае шаровыми будут две точки оси z , симметрично расположенные относительно центра масс.

§ 2. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной оси рассматривалась еще Гюйгенсом при разработке его замечательной теории движения физического маятника.

Представим себе абсолютно твердое тело, у которого закреплены две точки O и O' (рис. 39). Прямая OO' , являющаяся осью вращения тела, остается неизменной как по отношению к твердому телу, так и по отношению к некоторой неподвижной системе координат $Oxyz$. Для удобства выберем систему координат с началом в точке O , направив ось z вдоль оси вращения тела. Будем рассматривать твердое тело как множество материальных точек с массами $m_v(x_v, y_v, z_v)$, на которые действуют активные силы с проекциями X_v, Y_v, Z_v на оси координат. Твердое тело может совершать только вращательное движение вокруг неподвижной оси. Обозначим через ω угловую скорость вращения твердого тела. Тогда проекции скоростей точек тела на неподвижные оси координат определяются из матрицы

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

которая дает

$$\frac{dx_v}{dt} = -\omega y_v, \quad \frac{dy_v}{dt} = \omega x_v, \quad \frac{dz_v}{dt} = 0.$$

Для определения движения тела достаточно иметь всего одно уравнение, так как твердое тело имеет всего одну степень свободы. Связи, наложенные на тело, допускают его поворот вокруг неподвижной оси z . Следовательно, можно применить теорему об изменении момента количества движения относительно оси z . Эта теорема приводит к уравнению

$$\frac{dK_z}{dt} = N,$$

где N — сумма моментов всех активных сил относительно оси z . Если через J обозначить момент инерции тела относительно оси вращения, то

$$K_z = J\omega,$$

и тогда

$$J \frac{d\omega}{dt} = N.$$

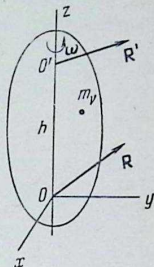


Рис. 39

В технических задачах важно уметь определять величину опорных реакций. Обозначим через $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ силы реакций, приложенные в точках O и O' , а через h — расстояние между точками O и O' . Реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ будут иметь проекции на оси координат (X, Y, Z) и (X', Y', Z') . Для определения сил реакций освободим систему (твердое тело) от связей, заменив связи неизвестными силами реакций $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$, действие которых эквивалентно действию связей. После освобождения от связей появятся новые возможные перемещения. В частности, будут возможны поступательные перемещения системы вдоль осей x , y , z и повороты системы вокруг осей x и y . Это дает возможность применить теорему об изменении количества движения и теорему об изменении момента количества движения, откуда получим следующие уравнения:

$$\sum m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = \sum X_v + X + X',$$

$$\sum m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} = \sum Y_v + Y + Y',$$

$$\sum m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} = \sum Z_v + Z + Z',$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_v \left(z_v \frac{dx_v}{dt} - x_v \frac{dz_v}{dt} \right) = M + hX',$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_v \left(y_v \frac{dz_v}{dt} - z_v \frac{dy_v}{dt} \right) = L - hY',$$

где L, M, N — суммы моментов активных сил относительно осей x, y, z . Для определения шести неизвестных величин X, Y, Z, X', Y', Z' имеем пять уравнений. Задача определения реакций остается неразрешимой. Реакции Z и Z' одновременно препятствуют поступательному перемещению системы вдоль оси z . Именно эти реакции мы не можем определить по отдельности, а можем определить только их сумму. В этом заключается неопределимость задачи. Из кинематических уравнений для проекций скорости получим проекции действительных ускорений точек:

$$\frac{d^2 x_v}{dt^2} = -\omega^2 x_v - \frac{d\omega}{dt} y_v, \quad \frac{d^2 y_v}{dt^2} = -\omega^2 y_v + \frac{d\omega}{dt} x_v, \quad \frac{d^2 z_v}{dt^2} = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнения движения, будем иметь:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \sum m_v x_v - \frac{d\omega}{dt} \sum m_v y_v &= \sum X_v + X + X', \\ -\omega^2 \sum m_v y_v + \frac{d\omega}{dt} \sum m_v x_v &= \sum Y_v + Y + Y', \\ \omega^2 \sum m_v y_v z_v - \frac{d\omega}{dt} \sum m_v x_v z_v &= L - hY', \\ -\omega^2 \sum m_v x_v z_v - \frac{d\omega}{dt} \sum m_v y_v z_v &= M + hX'. \end{aligned}$$

Для определения четырех неизвестных X, Y, X', Y' имеем четыре уравнения. Левые части этих уравнений являются известными функциями времени, поскольку движение системы, а следовательно, и закон изменения параметров системы, определяются из уравнения движения

$$J \frac{d\omega}{dt} = N.$$

Если выполняются условия

$$\sum m_v x_v = \sum m_v y_v = 0, \quad \sum m_v x_v z_v = \sum m_v y_v z_v = 0,$$

т. е. центр масс лежит на оси z , являющейся главной центральной осью инерции, то левые части уравнений тождественно равны нулю, и тогда реакции определяются, как в статике.

Если ось z не является главной центральной осью инерции, то при движении твердого тела в левой части первых двух уравнений будут существовать отличные от нуля коэффициенты при ω^2 . При больших значениях ω эти коэффициенты представляют большие величины, следовательно, и реакции тоже велики. Чтобы избежать больших реакций, ось вращения направляют по главной оси центрального эллипсоида инерции.

В частном случае, когда на твердое тело действуют активные силы, приводящиеся к равнодействующей, проходящей через точку O , уравнения движения дают

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0, \text{ откуда } \omega = \text{const},$$

так что твердое тело вращается вокруг оси OO' с постоянной угловой скоростью.

Рассмотрим в этом случае условия, при которых реакция в точке O' обращается в нуль. Как видно из последних двух уравнений, это имеет место, если

$$\omega^2 \sum m_v z_v y_v = 0 \quad \text{и} \quad -\omega^2 \sum m_v z_v x_v = 0,$$

т. е. ось z должна быть главной осью инерции для точки O . При выполнении указанных условий твердое тело будет вращаться вокруг оси z с постоянной угловой скоростью, не оказывая давления на вторую закрепленную точку. Такие оси называются постоянными, или перманентными осями вращения твердого тела.

Предположим, что на твердое тело не действуют активные силы. Определим условия, при которых обе опорные реакции равны нулю. Условия эти следуют из уравнений движения и имеют вид

$$\sum m_v x_v = \sum m_v y_v = \sum m_v x_v z_v = \sum m_v y_v z_v = 0,$$

т. е. ось z должна быть главной осью инерции и на ней должен находиться центр тяжести твердого тела. Ось z является главной осью центрального эллипсоида инерции. Оси, при вращении вокруг которых твердое тело, на которое не действуют внешние силы, не оказывает давления на закрепленные точки этой оси, называются свободными, или естественными, осями. Нетрудно заметить, что три перманентные оси можно всегда найти для каждой точки твердого тела. Это главные оси инерции для соответствующих точек твердого тела. Свободных осей у твердого тела только три — главные центральные оси инерции.

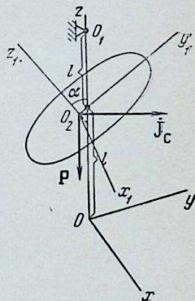


Рис. 40

Пример 34. Однородный тонкий диск радиуса R и веса P вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω . Расстояние центра тяжести диска от оси вращения равно a . Ось симметрии диска образует с осью z угол α . Определить реакции опор, если расстояние между опорами равно $2l$ (рис. 40).

Решение. Пусть в некоторый момент времени вертикальная плоскость симметрии диска совпадает с плоскостью yOz . Освободим точки O и O_1 от связей и введем реакции $R(X, Y, Z)$ и $R'(X', Y', Z')$. К освобожденному твердому телу применим теорему о движении центра масс. Заметим, что центр масс диска совершает вращательное движение по горизонтальной окружности вокруг оси z :

с постоянной угловой скоростью ω . Тогда вектор ускорения центра масс будет расположен в плоскости yOz и направлен к оси вращения. Величина его равна

$$j_C = \omega^2 a \cos \alpha.$$

Из теоремы о движении центра масс имеем:

$$0 = X + X', \quad M\omega^2 a \cos \alpha = Y + Y', \quad 0 = Z + Z' - P.$$

Для получения недостающих уравнений применим теорему об изменении момента количества движения относительно осей x и y . Проекция момента количества движения на соответствующие оси имеют вид:

$$K_x = \Sigma m_v (y_v z'_v - z_v y'_v) = - \Sigma m_v z_v y'_v = - \omega \Sigma m_v z_v x_v,$$

$$K_y = \Sigma m_v (z_v x'_v - x_v z'_v) = \Sigma m_v z_v x'_v = - \omega \Sigma m_v z_v y_v.$$

Дифференцируя, получим:

$$\omega^2 \Sigma m_v z_v y_v = Mga \cos \alpha - 2Y' l,$$

$$- \omega^2 \Sigma m_v x_v z_v = 2X' l.$$

Для полного решения задачи необходимо вычислить соответствующие произведения инерции. Выберем в качестве новых координатных осей x_1, y_1, z_1 — центральные оси инерции диска, направив ось z_1 по оси симметрии диска, а ось y_1 в вертикальной плоскости симметрии диска перпендикулярно к оси z_1 . Координаты x, y, z и x_1, y_1, z_1 связаны простыми формулами преобразования (в рассматриваемый момент времени):

$$x = x_1, \quad y = y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha - a \cos \alpha,$$

$$z = y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha - a \sin \alpha + l.$$

Для тонкого диска $z_1 \equiv 0$, так что

$$x = x_1, \quad y = y_1 \cos \alpha - a \cos \alpha, \quad z = y_1 \sin \alpha - a \sin \alpha + l.$$

Тогда произведения инерции примут вид

$$\begin{aligned} \Sigma m_v z_v y_v &= \Sigma m_v (y_{1v} \sin \alpha - a \sin \alpha + l) (y_{1v} \cos \alpha - a \cos \alpha) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \Sigma m_v y_{1v}^2 + Ma^2 \sin \alpha \cos \alpha - Mla \cos \alpha, \end{aligned}$$

где

$$\Sigma m_v y_{1v}^2 = \frac{MR^2}{4},$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_v z_v x_v &= \Sigma m_v (y_{1v} \sin \alpha - a \sin \alpha + l) x_{1v} = \\ &= \sin \alpha \Sigma m_v x_{1v} y_{1v} - a \sin \alpha \Sigma m_v x_{1v} + l \Sigma m_v x_{1v} \equiv 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулы для определения реакций, будем иметь

$$\omega^2 \left(\frac{MR^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha + Ma^2 \sin \alpha \cos \alpha - Mla \cos \alpha \right) = Mga \cos \alpha - 2Y' l,$$

$$0 = X'.$$

При $\alpha = 0$

$$Y' = Mg \frac{a}{2l} + M \frac{\omega^2 a}{2}.$$

При $\alpha = 0$

$$Y' = -\omega^2 \frac{MR^2}{8l} \sin \alpha \cos \alpha.$$

После того как определены реакции X' и Y' , реакции X и Y определяются сразу из теоремы о движении центра масс:

$$X = -X', \quad Y = M\omega^2 a \cos \alpha - Y'.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Физическим маятником называют тяжелое твердое тело, которое может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Положение такого твердого тела определяется углом ϑ , образованным плоскостью, проходящей через ось вращения и центр тяжести, с вертикалью (рис. 41). Обозначим момент инерции твердого тела относительно оси вращения через J_z , массу тела через M , и пусть

$$J_z = Mk^2,$$

где k — радиус инерции маятника относительно оси вращения. Связи допускают поворот системы вокруг горизонтальной оси. Следовательно, можно применять теорему об изменении момента количества движения относительно оси z

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -Mgl \sin \vartheta,$$

или

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{gl}{k^2} \sin \vartheta.$$

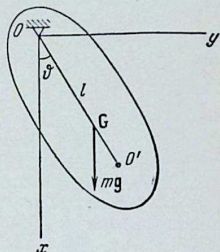


Рис. 41

Полученное уравнение подобно по своей структуре уравнению движения математического маятника

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l'} \sin \vartheta.$$

Физический и математический маятники будут совершать колебания с одним и тем же периодом, если выполняется условие

$$l' = \frac{k^2}{l}.$$

Величина l' называется приведенной длиной физического маятника. Построим на линии OG точку O' таким образом, чтобы имело место условие

$$OO' = l'.$$

Эту точку будем называть точкой качания (центром качания) физического маятника. Обозначим момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси z , через Mr^2 , число ρ назовем центральным радиусом инерции. По теореме Штейнера будем теперь иметь

$$Mk^2 = Mr^2 + Ml^2,$$

откуда

$$k^2 = \rho^2 + l^2.$$

Подставляя это значение в формулу для приведенной длины физического маятника, получим

$$l' = \frac{k^2}{l} = \frac{\rho^2}{l} + l > l.$$

Отсюда видно, что l' всегда больше, чем l , т. е. точка подвеса и центр качания расположены по разные стороны от центра тяжести твердого тела. Последнее условие можно переписать в виде

$$(l' - l)l = \rho^2,$$

или

$$(\overline{O'G} \cdot \overline{OG}) = \rho^2,$$

Полученная формула симметрична относительно точек O и O' , а это значит, что последние можно поменять местами, т. е. при подвешивании маятника за точку O' период не изменится. При этом приведенная длина для точки O' будет иметь вид

$$l^* = \frac{\rho^2}{l' - l} + (l' - l) = l + \frac{\rho^2}{l} = l'.$$

Отсюда непосредственно следует теорема Гюйгенса.

Теорема Гюйгенса. Точка подвеса физического маятника и центр качания суть точки взаимные. Если центр качания принять за точку подвеса, то прежняя точка подвеса будет центром качания. Период колебания маятника при этом не изменится.

В формуле для приведенной длины физического маятника величина l' меняется в зависимости от положения точки подвеса маятника:

$$l' = \frac{\rho^2}{l} + l.$$

Следовательно, точки подвеса маятника, равноудаленные от центра тяжести, имеют одну и ту же приведенную длину, т. е. геометрическое место точек подвеса, обладающих одной и той же приведенной длиной (а следовательно, и одним периодом), суть две коцентрические окружности с центром в центре тяжести

(рис. 42). Между этими окружностями лежит окружность радиуса ρ (это следует из соотношения $(l' - l)l = \rho^2$). На прямой OO' получим таким же образом *четыре взаимные точки* O, B, O', A , относительно которых маятник будет колебаться с одним периодом. Приведенной же длиной, очевидно, будет расстояние OO' или BA , т. е.

$$l' = OO' = BA.$$

Обстоятельство это используется в обратном маятнике Катера *, применявшемся раньше для определения ускорения силы тяжести. Маятник состоит из двух шаров с разными массами. Между шарами на стержне укреплены два ножа, являющиеся точками подвеса маятника. Один из этих ножей неподвижен, другой может перемещаться (рис. 43). Сначала за точку подвеса берут один нож и определяют период колебаний T , затем заставляют маятник качаться на втором ноже и, передвигая его, находят точку с тем же периодом. Измерив длину AB , определяют приведенную длину l' . Тогда из формулы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

определяют ускорение силы тяжести

$$g = \frac{4\pi^2 l'}{T^2}.$$

При определении приведенной длины физического маятника необходимо помнить, что расстояния от точек O и O' до центра тяжести маятника не совпадают, если $OG \neq \rho$.

Рассмотрим теперь свойства физического маятника при подвешивании его за точки, лежащие на большей и меньшей окружностях. Для точек внешней окружности $l > \rho$. Твердое тело в этом случае называют маятником. Для точек внутренней окружности $l < \rho$, и твердое тело в этом случае называют коромыслом.

Рассматривая производную

$$\frac{dl'}{dl} = 1 - \frac{\rho^2}{l^2},$$

получим для маятника] $\frac{dl'}{dl} > 0$, для коромысла $\frac{dl'}{dl} < 0$.

При приближении центра масс к точке подвеса маятника l' уменьшается вместе с l , следовательно, уменьшается период маят-

* Английский капитан Г. Катер (1777—1835) впервые в 1818 г. применил обратный маятник, описанный тюбюгенским профессором Боненбергером (1765—1831) в 1811 г.

ника. Для коромысла приближение центра масс к точке подвеса увеличивает период, т. е. коромысло будет качаться медленнее*.

Теория физического маятника является исторически первой разрешенной задачей динамики системы. Интерес к этой задаче возник в связи с вопросом об усовершенствовании часов и связан в первую очередь с именем Гюйгенса, хотя еще Галилей предлагал использовать маятник в качестве регулятора хода часов.

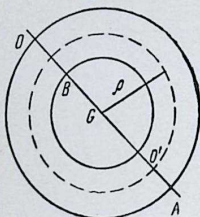


Рис. 42

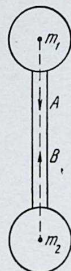


Рис. 43

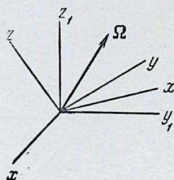


Рис. 44

§ 3. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

1. Основные динамические характеристики

Пусть одна из точек твердого тела закреплена. Выберем неподвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ с началом O_1 в неподвижной точке. Мгновенное движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, определяется вектором мгновенной угловой скорости Ω , линия действия которой проходит через неподвижную точку O_1 . Свяжем с твердым телом систему координат O_1xyz (рис. 44), движущуюся вместе с телом. Проекции вектора Ω на подвижные оси x, y, z обозначим через p, q, r . Скорость произвольной точки твердого тела определяется по формуле Эйлера

$$v_v = [\Omega, \overline{Om_v}]$$

и проекции скорости на подвижные оси — матрицей

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

так что

$$v_{xv} = qz_v - ry_v, \quad v_{yv} = rx_v - pz_v, \quad v_{zv} = py_v - qx_v.$$

* Это обстоятельство было замечено в свое время на часах Лондонского Вестминстерского аббатства, которые отставали. При уменьшении l часы сначала стали ходить быстрее. При дальнейшем уменьшении l часы стали замедлять ход.

Живая сила твердого тела. Исходя из определения живой силы, будем иметь

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} = \sum \frac{m_v}{2} [(qz_v - ry_v)^2 + (rx_v - pz_v)^2 + (py_v - qx_v)^2].$$

Правая часть этой формулы представляет однородную квадратичную форму относительно переменных p, q, r и может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

где коэффициенты A, B, C, D, E, F имеют вид:

$$A = \sum m_v (z_v^2 + y_v^2), \quad B = \sum m_v (x_v^2 + z_v^2), \quad C = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2),$$

$$D = \sum m_v y_v z_v, \quad E = \sum m_v x_v z_v, \quad F = \sum m_v x_v y_v$$

и представляют собой моменты инерции относительно подвижных осей координат и произведения инерции. Все эти величины не меняются при движении твердого тела.

Момент количества движения. По определению момент количества движения системы относительно начала координат есть вектор, являющийся суммой моментов количеств движения точек системы

$$\sigma = \sum m_v [\mathbf{r}_v \mathbf{v}_v].$$

Для проекций вектора σ будем иметь:

$$\sigma_x = \sum m_v (y_v v_{vz} - z_v v_{vy}) = \sum m_v [y_v (py_v - qx_v) - z_v (rx_v - pz_v)],$$

$$\sigma_y = \sum m_v (z_v v_{vx} - x_v v_{vz}) = \sum m_v [z_v (qz_v - ry_v) - x_v (py_v - qx_v)],$$

$$\sigma_z = \sum m_v (x_v v_{vy} - y_v v_{vx}) = \sum m_v [x_v (rx_v - pz_v) - y_v (qz_v - ry_v)],$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p \sum m_v (y_v^2 + z_v^2) - q \sum m_v x_v y_v - \\ &- r \sum m_v x_v z_v = Ap - Fq - Er = \frac{\partial T}{\partial p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -p \sum m_v x_v y_v + q \sum m_v (z_v^2 + x_v^2) - \\ &- r \sum m_v y_v z_v = -Fp + Bq - Dr = \frac{\partial T}{\partial q}, \\ \sigma_z &= -p \sum m_v x_v z_v - q \sum m_v y_v z_v + \\ &+ r \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) = -Ep - Dq + Cr = \frac{\partial T}{\partial r}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \sigma_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \sigma_z = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Последние формулы можно записать в виде

$$\sigma = (I) \Omega,$$

т. е. момент количества движения является линейной вектор-функцией угловой скорости Ω .

Некоторые общие свойства движения. Рассмотрим поверхность эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки твердого тела, уравнение которого имеет вид

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy - 1 = 0.$$

Нетрудно заметить, что вектор мгновенной угловой скорости Ω пересечет поверхность эллипсоида в некоторой точке, которую обозначим через $P(x, y, z)$ (рис. 45). Запишем условие коллинеарности векторов Ω и $\overline{OP}$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \kappa,$$

где p, q, r — проекции вектора Ω на оси x, y, z , неизменно связанные с твердым телом. Компоненты вектора нормали к поверхности эллипсоида инерции, построенного в точке P , пропорциональны частным производным:

$$n_x = a \frac{\partial f}{\partial x}, \quad n_y = a \frac{\partial f}{\partial y}, \quad n_z = a \frac{\partial f}{\partial z},$$

где a — коэффициент пропорциональности. Подставляя сюда значения частных производных, будем иметь:

$$\begin{aligned}n_x &= 2a(Ax - Ez - Fy) = 2a\kappa(Ap - Er - Fq) = 2a\kappa\sigma_x, \\ n_y &= 2a(-Fx + By - Dz) = 2a\kappa(-Fp + Bq - Dr) = 2a\kappa\sigma_y, \\ n_z &= 2a(-Ex - Dy + Cz) = 2a\kappa(-Ep - Dq + Cr) = 2a\kappa\sigma_z.\end{aligned}$$

Из полученных равенств следует параллельность векторов σ и n , так что вектор σ оказывается ортогональным к плоскости, касающейся поверхности эллипсоида инерции в точке P . Если, кроме того, вектор Ω совпадает с направлением главной оси эллипсоида инерции, то вектор σ будет совпадать по направлению с главной осью эллипсоида инерции.

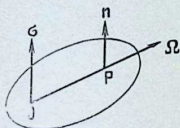


Рис. 45

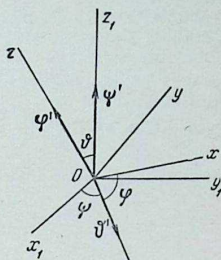


Рис. 46

2. Уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой

Движение твердого тела, у которого закреплена одна точка O , будем определять относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$. С твердым телом жестко свяжем подвижную систему координат $Oxyz$. Движение твердого тела полностью будет определяться движением системы $Oxyz$. Положение твердого тела можно определить углами Эйлера φ , ψ и ϑ (рис. 46), а скорости изменения углов φ , ψ и ϑ представить векторами $\dot{\varphi}'$, $\dot{\psi}'$, $\dot{\vartheta}'$, перпендикулярными плоскостям соответствующих углов Эйлера и направленными в ту сторону, откуда положительное вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Кинематические уравнения Эйлера. Мгновенное движение твердого тела определяется тремя мгновенными вращениями со скоростями $\dot{\varphi}'$, $\dot{\psi}'$ и $\dot{\vartheta}'$. Поэтому вектор мгновенной угловой скорости ω можно представить в виде суммы

$$\omega = \dot{\varphi}' + \dot{\psi}' + \dot{\vartheta}'.$$

Обозначая, как и раньше, через p , q и r проекции вектора ω на оси x , y , z и проектируя векторы $\dot{\varphi}'$, $\dot{\psi}'$ и $\dot{\vartheta}'$ на эти же оси, получим:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi}' \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta}' \cos \varphi, \\ q &= \dot{\varphi}' \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta}' \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi}' + \dot{\psi}' \cos \vartheta, \end{aligned}$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями Эйлера.

Динамические уравнения Эйлера. Пусть на точки твердого тела действуют активные силы с проекциями на подвижные оси координат X_v, Y_v, Z_v и пусть L, M, N — проекции на те же оси результирующего момента системы сил относительно начала координат. Пусть σ ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) — вектор момента количества движения твердого тела относительно начала координат.

Связи, наложенные на твердое тело, допускают в каждый момент времени поворот тела вокруг любой неподвижной оси, проходящей через неподвижную точку O . Следовательно, можно применить теорему об изменении момента количества движения относительно неподвижной точки O , откуда будем иметь, что скорость конца вектора момента количества движения σ равна сумме моментов активных сил относительно неподвижной точки O , т. е.

$$\frac{d\sigma}{dt} = m_0.$$

Абсолютная скорость движения конца вектора σ может быть представлена как сумма относительной (по отношению к подвижной системе осей $Oxyz$) и переносной скоростей. Обозначим через

$$\frac{d\sigma_x}{dt}, \quad \frac{d\sigma_y}{dt}, \quad \frac{d\sigma_z}{dt}$$

проекции на оси x, y, z относительной скорости конца вектора σ и определим переносную скорость $v_{e\sigma}$ как скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент времени совпадает конец вектора σ . Тогда

$$v_{e\sigma} = [\Omega\sigma],$$

а проекции переносной скорости даются матрицей

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Запишем теперь уравнения, определяющие изменение вектора момента количества движения тела относительно неподвижных осей x_1, y_1, z_1 в проекциях на подвижные оси координат:

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + q\sigma_z - r\sigma_y = L,$$

$$\frac{d\sigma_y}{dt} + r\sigma_x - p\sigma_z = M,$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} + p\sigma_y - q\sigma_x = N,$$

где L, M, N — проекции вектора $\mathbf{m}_0$ на подвижные оси x, y, z — представляют собой суммы моментов активных сил относительно подвижных осей x, y, z соответственно.

Полученные уравнения обобщают известные уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой, полученные впервые Л. Эйлером.

Предположим, что оси x, y, z являются главными осями эллипсоида инерции для точки O . Тогда живая сила твердого тела запишется в виде

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

где A, B, C — моменты инерции относительно главных осей эллипсоида инерции, а p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости вращения твердого тела на эти оси. Проекции вектора момента количества движения σ на оси x, y, z получают теперь вид:

$$\sigma_x = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap, \quad \sigma_y = \frac{\partial T}{\partial q} = Bq, \quad \sigma_z = \frac{\partial T}{\partial r} = Cr.$$

Подставляя в полученные выше уравнения движения твердого тела значения проекций вектора момента количества движения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, будем иметь:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N.$$

В таком виде уравнения получены впервые Л. Эйлером в 1758 г. Они называются динамическими уравнениями Эйлера. Уравнениям этим можно придать векторную форму

$$\frac{d\sigma}{dt} + [\Omega\sigma] = \mathbf{m}_0,$$

где производная $\frac{d\sigma}{dt}$ рассматривается по отношению к подвижной системе осей $Oxyz$, неизменно связанных с твердым телом, а Ω — мгновенная угловая скорость вращения подвижных осей.

Применение осей, движущихся в пространстве и в теле. В некоторых случаях удобно рассматривать движение твердого тела, применяя уравнения движения в проекциях на оси координат, движущиеся независимо от движения тела. Такие оси применяли Пюйзе в теории вращения Земли, Резаль в баллистике, А. Н. Крылов и Б. В. Булгаков в теории гироскопов.

Пусть твердое тело с неподвижной точкой O совершает движение относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Введем в рассмотрение подвижную систему координат $Oxyz$, совершающую самостоятельное движение, вообще не связанное с дви-

жением твердого тела, с мгновенной угловой скоростью Ω (меняющейся с течением времени). Мгновенную угловую скорость вращения твердого тела обозначим через ω (рис. 47), а ее проекции на оси x, y, z через p, q, r . Пусть P, Q, R — проекции вектора Ω на те же оси, а L, M, N , как и прежде, обозначают проекции вектора m_0 на оси x, y, z . Для живой силы твердого тела будем иметь

$$2T = \Sigma (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

однако величины A, B, C, D, E и F теперь уже могут быть не постоянными и, вообще говоря, будут меняться при движении твердого тела относительно осей x, y, z . Для проекций вектора момента количества движения σ на оси x, y, z получим выражения:

$$\sigma_x = Ap - qF - rE = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \sigma_y = -Fp + Bq - Dr = \frac{\partial T}{\partial q},$$

$$\sigma_z = -Ep - Dq + Cr = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

При составлении уравнений движения снова воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения. Для проекций относительной скорости конца вектора σ будем иметь значения $\frac{d\sigma_x}{dt}$, $\frac{d\sigma_y}{dt}$, $\frac{d\sigma_z}{dt}$. Проекции же переносной скорости определяются из матрицы

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{vmatrix},$$

после чего нетрудно записать уравнения движения:

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + Q\sigma_z - R\sigma_y = L, \quad \frac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z = M,$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x = N.$$

Полученные уравнения по внешнему виду совпадают с обобщенными уравнениями Эйлера, когда подвижные оси жестко связаны с твердым телом.

Пример 35. Исследовать вращательное движение артиллерийского снаряда под действием сил аэродинамического сопротивления воздуха.

Решение. Обозначим через G центр масс снаряда. С центром масс свяжем оси Кенига x_1, y_1, z_1 , направив ось z_1 вертикально вверх, а ось y_1 в вертикальной плоскости движения центра масс в сторону движения (рис. 48). Среди возможных перемещений снаряда находятся поступательные перемещения в любом направлении и вращения как твердого тела вокруг любой неподвижной оси. Это позволяет применить теорему об изменении момента количества движения снаряда относительно осей Кенига (рассматривая в дальнейшем оси Кенига как «неподвижные»). Выберем новую подвижную систему координат $Gx_1y_1z_1$ следующим образом: ось z направим по оси симметрии снаряда, ось x — в плоскости z_1Gz перпендикулярно к оси z вверх, ось y — ортогонально к осям x и z , т. е.

горизонтально. Пусть ω — вектор мгновенной угловой скорости снаряда с проекциями p, q, r на подвижные оси x, y, z . Движение системы координат $Oxyz$ определяется вращением вокруг осей z_1 и y . Движение снаряда отличается от движения самих осей лишь дополнительным вращением вокруг оси z . Таким образом, проекции P, Q, R вектора Ω угловой скорости вращения системы координат $Oxyz$ на подвижные оси будут равны соответственно $p, q, r - \omega_1$, где ω_1 — скорость вращения снаряда относительно осей x, y, z . Если обозначить через α угол

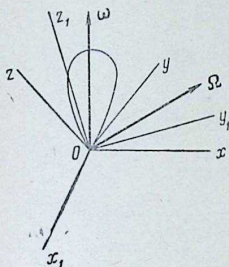


Рис. 47

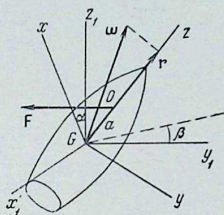


Рис. 48

между осью z и плоскостью Gx_1y_1 , а через β — угол между осью y_1 и плоскостью z_1Gz , так что вектор угловой скорости ω' направлен по оси y , а вектор угловой скорости β' — по оси z_1 , то получим (рис. 48)

$$\text{для } \omega: p = \beta' \cos \alpha, \quad q = \alpha', \quad r = \beta' \sin \alpha + \omega_1,$$

$$\text{для } \Omega: P = p, \quad Q = q, \quad R = r - \omega_1 = p \tan \alpha.$$

Предположим, что снаряд динамически симметричен относительно оси z , т. е. $A=B \neq C$, и применим теорему об изменении момента количества движения

$$\frac{d\sigma}{dt} + [\Omega \sigma] = m.$$

Здесь вектор момента количества движения тела σ имеет следующие проекции на оси x, y, z :

$$\sigma_x = Ap, \quad \sigma_y = Aq, \quad \sigma_z = Cr,$$

а производная $\frac{d\sigma}{dt}$ берется в системе координат $Gxyz$.

Для случая настильных траекторий с достаточной степенью точности можно считать, что центр тяжести снаряда движется равномерно и прямолинейно. Предположим, что равнодействующая сил сопротивления воздуха параллельна оси y_1 и приложена в точке O оси симметрии снаряда на расстоянии a от центра тяжести (подъемной силой и силой Магнуса будем пренебрегать).

Для определения момента равнодействующей относительно точки G необходимо знать косинусы углов между осью y_1 и осями x, y, z :

$$-\cos \beta \sin \alpha, \quad \sin \beta, \quad \cos \beta \cos \alpha,$$

которые непосредственно получаются из формул преобразования

$$y_1 = -x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \beta + z \cos \alpha \cos \beta.$$

Сила $\mathbf{F}$ имеет следующие проекции на оси x, y, z :

$$F \sin \alpha \cos \beta, \quad -F \sin \beta, \quad -F \cos \beta \cos \alpha.$$

Проекции момента силы получим из матрицы

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ F \sin \alpha \cos \beta & -F \sin \beta & -F \cos \beta \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнения движения запишутся в виде:

$$A \frac{dp}{dt} + q(Cr - Ap \operatorname{tg} \alpha) = Fa \sin \beta,$$

$$A \frac{dq}{dt} - p(Cr - Ap \operatorname{tg} \alpha) = Fa \sin \alpha \cos \beta,$$

$$C \frac{dr}{dt} = 0.$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить кинематическими уравнениями:

$$p = \beta' \cos \alpha, \quad q = \alpha', \quad r = \beta' \sin \alpha + \omega_1.$$

Полученные уравнения определяют вращательное движение снаряда относительно осей Кенига.

Применение уравнений Лагранжа второго рода к выводу уравнений Эйлера. При выводе уравнений движения сначала необходимо выбрать обобщенные координаты твердого тела. В качестве таких обобщенных координат, очевидно, можно принять углы Эйлера φ, ψ, ϑ , полностью определяющие положение твердого тела. Живая сила твердого тела имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

где величины p, q и r выражаются через углы Эйлера и их производные с помощью кинематических уравнений Эйлера:

$$p = \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi,$$

$$r = \varphi' + \psi' \cos \vartheta.$$

Выведем уравнение Лагранжа для координаты φ . Изменение координаты φ характеризует вращение тела вокруг оси z . Соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = Cr,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = Apq - Bqp = (A - B)pq.$$

После подстановки этих значений в предыдущее уравнение будем иметь

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq = N. \quad (a)$$

Два других уравнения Эйлера не могут быть непосредственно получены применением уравнений Лагранжа, поскольку параметры ψ и φ не соответствуют вращению твердого тела вокруг подвижных осей x и y . Эти уравнения легко получить из уравнения (a) циклической перестановкой. В самом деле, изменим обозначения осей, переименовав ось x на y , y на z и т. п. При этом должны быть изменены обозначения моментов инерции и проекции мгновенной угловой скорости:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A,$$

$$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow p.$$

Движение твердого тела не зависит от того, как мы обозначим оси, а уравнения получаются другими. Выполняя указанную циклическую перестановку, получим еще два уравнения Эйлера:

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr = L, \quad B \frac{dq}{dt} - (C - A) pr = M.$$

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки издавна привлекает внимание всех крупных механиков и математиков. Эйлер в 1758 г. впервые рассмотрел решение этой задачи для случая, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой. В 1788 г. Лагранжем был исследован другой случай движения тяжелого твердого тела, когда эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения, а центр масс находится на оси симметрии этого эллипсоида. После открытия Лагранжа в течение целого столетия, несмотря на усилия многочисленных ученых, в том числе таких крупных математиков, как Пуассон, Якоби, Пуансо, не было получено новых существенных результатов. В 1886 г. Парижская академия наук объявила конкурс на соискание премии Бордена за лучшее сочинение на тему о движении твердого тела около неподвижной точки. Эту премию получила С. В. Ковалевская, представившая в 1888 г. свой мемуар, посвященный решению этой задачи. В случае, рассмотренном С. В. Ковалевской, эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения, причем моменты инерции относительно главных осей удовлетворяют соотношению

$$A = B = 2C,$$

а центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида.

После работы С. В. Ковалевской появился ряд исследований русских ученых Г. Г. Аппельрота, Д. К. Бобылева, Д. Н. Горячева, Н. Б. Делоне, Н. Е. Жуковского, Г. В. Колосова, А. М. Ляпунова, Б. К. Млодзеевского, П. А. Некрасова, В. А. Стеклова, С. А. Чаплыгина и др. и работы иностранных ученых Гесса, Лиувилля, Леви-Чивита, Хюссона и др. В этих исследованиях либо изучались частные решения задачи о движении твердого тела, либо развивались новые идеи, начало которым было положено С. В. Ковалевской.

1. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело с одной неподвижной точкой, на которое действует только сила тяжести. Движение такого тела будем изучать относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, жестко связанной с Землей, выбрав начало этой системы в неподвижной точке O и направив ось z_1 вертикально вверх. Построенная система координат, вообще говоря, не является инерциальной, и в строгой постановке, при изучении движения тела, мы обязаны были бы кроме силы тяжести учитывать влияние на тело сил инерции от кориолисова ускорения. Для упрощения задачи, в идеализированной ее постановке, предположим, что в системе координат $Ox_1y_1z_1$ на твердое тело действует только одна сила тяжести. Тогда в уравнениях движения твердого тела

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = m_x, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = m_y,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = m_z$$

правые части будут представлять проекции момента силы тяжести относительно неподвижной точки на оси, неизменно связанные с твердым телом и направленные по главным осям эллипсоида инерции, построенного для точки O . В дальнейшем эту систему координат будем обозначать через $Oxyz$.

Обозначим проекции единичного вектора e_3 , направленного вдоль неподвижной оси z_1 , на оси x , y , z через γ_1 , γ_2 , γ_3 . Тогда проекции момента силы тяжести на эти же оси будут определяться из матрицы

$$\begin{vmatrix} x_c & y_c & z_c \\ -P\gamma_1 & -P\gamma_2 & -P\gamma_3 \end{vmatrix},$$

где x_c , y_c , z_c — координаты центра тяжести твердого тела относительно осей $Oxyz$, а P — модуль силы тяжести, так что

$$m_x = -P(y_c \gamma_3 - z_c \gamma_2), \quad m_y = -P(z_c \gamma_1 - x_c \gamma_3), \\ m_z = -P(x_c \gamma_2 - y_c \gamma_1).$$

Динамические уравнения Эйлера запишутся теперь в виде:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= -P(y_c \gamma_3 - z_c \gamma_2), \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= -P(z_c \gamma_1 - x_c \gamma_3), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= -P(x_c \gamma_2 - y_c \gamma_1). \end{aligned} \quad (a)$$

Полученные уравнения определяют движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Они содержат шесть неизвестных величин $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, которые могут быть выражены через три угла Эйлера φ, ψ, θ . Первые три неизвестные величины непосредственно определяются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' + \psi' \cos \theta, \end{aligned}$$

а направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ суть коэффициенты при ψ' в этих уравнениях:

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta.$$

После подстановки этих значений в динамические уравнения Эйлера мы получим систему трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных величин φ, ψ, θ , и задача сведется к интегрированию этих уравнений.

Иногда удобнее рассматривать систему уравнений в переменных $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, в которых уравнения получают симметричную форму. Тогда для полноты системы, необходимо иметь еще три уравнения. Они следуют из самого определения величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и были получены Пуассоном. Действительно, вектор e_3 не меняется в системе $Ox_1y_1z_1$ ни по величине, ни по направлению, так что абсолютная скорость v_a конца вектора e_3 равна нулю

$$v_a = \frac{de_3}{dt} = 0.$$

Принимая за подвижную систему отсчета $Oxyz$ и применяя теорему о сложении скоростей для проекций относительной скорости конца вектора e_3 , получим значения:

$$\frac{d\gamma_1}{dt}, \quad \frac{d\gamma_2}{dt}, \quad \frac{d\gamma_3}{dt}$$

(производные берутся в системе $Oxyz$). Проекции переносной скорости определяются из матрицы

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

как проекции скорости той точки твердого тела, которая совпадает с концом вектора e_3 . Из условия равенства нулю абсолютной скорости конца e_3 будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} + (q\gamma_3 - r\gamma_2) &= 0, & \frac{d\gamma_2}{dt} + (r\gamma_1 - p\gamma_3) &= 0, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} + (p\gamma_2 - q\gamma_1) &= 0. \end{aligned} \quad (b)$$

Эти уравнения называются уравнениями Пуассона. Динамические уравнения Эйлера вместе с уравнениями Пуассона представляют полную систему дифференциальных уравнений движения твердого тела.

2. Первые интегралы уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Система уравнений (a) и (b), определяющих движение тяжелого твердого тела около неподвижной точки, есть система шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами относительно шести неизвестных функций времени $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. После того как величины $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ будут найдены в функции от времени, для определения эйлеровых углов φ, ψ, θ остается подставить найденные величины в кинематические уравнения Эйлера. Задача определения движения твердого тела сводится, таким образом, к отысканию шести независимых первых интегралов системы.

Для отыскания этих первых интегралов воспользуемся сначала общими свойствами движения твердого тела. Связи, наложенные на систему, таковы, что действительное перемещение находится среди возможных. Следовательно, имеет место теорема живых сил. Действующая на твердое тело сила тяжести, для которой существует силовая функция, консервативна. При выполнении этих условий, как известно, существует интеграл живых сил

$$T = U + h$$

или, после подстановки значений T и U ,

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -Pz_{1c} + h, \quad (c)$$

где

$$z_{1c} = x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3.$$

Заметим, что среди возможных перемещений имеется поворот твердого тела вокруг вертикальной оси z_1 , что дает возможность применить теорему об изменении момента количества движения относительно этой оси. Активная сила — сила тяжести, параллельна оси z_1 , а поэтому не дает момента относительно этой оси. При этих условиях теорема дает первый интеграл — закон сохранения момента количества движения относительно оси z_1 или интеграл площадей

$$\sigma_{z_1} = \text{const},$$

или

$$\sigma_x \gamma_1 + \sigma_y \gamma_2 + \sigma_z \gamma_3 = \text{const}.$$

Подставляя сюда значения σ_x , σ_y и σ_z , будем иметь

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}. \quad (d)$$

Величины γ_1 , γ_2 , γ_3 не могут быть выбраны произвольно. Они связаны условием

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (e)$$

Это уравнение называется тривиальным интегралом.

Полученные три первых интеграла можно без труда вывести непосредственно из уравнений движения (a) и (b). В самом деле, умножая уравнения группы (a) соответственно на p , q и r и складывая их, имеем

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = -P[(y_c \gamma_3 - z_c \gamma_2)p + \\ + (z_c \gamma_1 - x_c \gamma_3)q + (x_c \gamma_2 - y_c \gamma_1)r].$$

Используя уравнения Пуассона, преобразуем это уравнение к виду

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = -P \left(x_c \frac{d\gamma_1}{dt} + y_c \frac{d\gamma_2}{dt} + z_c \frac{d\gamma_3}{dt} \right),$$

откуда сразу следует интеграл живых сил.

Умножая каждое из уравнений группы (a) соответственно на γ_1 , γ_2 , γ_3 , а уравнения группы (b) на Ap , Bq , Cr и складывая все шесть уравнений, получим

$$A\gamma_1 \frac{dp}{dt} + B\gamma_2 \frac{dq}{dt} + C\gamma_3 \frac{dr}{dt} + Ap \frac{d\gamma_1}{dt} + Bq \frac{d\gamma_2}{dt} + Cr \frac{d\gamma_3}{dt} = 0,$$

откуда интегрированием находим интеграл площадей.

Тривиальный интеграл получим, умножая каждое из уравнений Пуассона соответственно на γ_1 , γ_2 , γ_3 и складывая. Будем иметь

$$\gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{dt} = 0,$$

откуда, интегрируя, получаем тривиальный интеграл.

Для полного решения задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки достаточно иметь четыре независимых первых интеграла. В самом деле, системе шести дифференциальных уравнений, поскольку в них не входит явно время, можно заменить системой пяти уравнений

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \frac{d\gamma_3}{\Gamma_3} = dt,$$

так как последнее интегрирование сводится к квадратуре

$$dt = \frac{dp}{P}, \quad t = \int \frac{dp}{P} + \text{const.}$$

Задача теперь сводится к отысканию всего пяти первых интегралов, три из которых, как было показано, всегда существуют. Задача будет разрешена, если удастся найти еще два независимых первых интеграла. Заметим, что функция P не зависит от p ; Q не зависит от q и т. д., так что

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \gamma_3} = 0.$$

При этих условиях, как это доказывается в курсах дифференциальных уравнений, если известно четыре первых интеграла, пятый находится интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения в полных дифференциалах. В самом деле, пусть известно четыре первых интеграла:

$$f_1(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = C_1, \quad f_2(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = C_2,$$

$$f_3(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = C_3, \quad f_4(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = C_4.$$

Выберем новые переменные так, чтобы

$$y_1 = p, \quad y_2 = q, \quad y_3 = f_1(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad y_4 = f_2(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

$$y_5 = f_3(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad y_6 = f_4(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

После такой замены

$$dy_3 = dy_4 = dy_5 = dy_6 = 0,$$

и задача сводится к интегрированию одного уравнения

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2}.$$

Интегрирующий множитель этого уравнения

$$\mu = \frac{M}{\frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}},$$

где M — последний множитель, обращающий в нуль выражение

$$\frac{\partial(MP)}{\partial p} + \frac{\partial(MQ)}{\partial q} + \frac{\partial(MR)}{\partial r} + \frac{\partial(M\Gamma_1)}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial(M\Gamma_2)}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial(M\Gamma_3)}{\partial \gamma_3}.$$

Таким множителем в рассматриваемом случае является

$$M = 1,$$

так как

$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \gamma_3} = 0.$$

Если $U(y_1, y_2)$ — интеграл уравнения

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2},$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 \equiv \frac{dy_1}{Y_1} - \frac{dy_2}{Y_2},$$

откуда следует

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = \frac{\mu}{Y_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_2} = -\frac{\mu}{Y_2},$$

и уравнение

$$\frac{\mu dy_1}{Y_1} - \frac{\mu dy_2}{Y_2} = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, которое дает пятый первый интеграл. Задача оказывается полностью разрешенной.

Задача интегрирования сводится, таким образом, к нахождению четвертого первого интеграла. Эта задача разрешена всего в следующих трех случаях:

1. *Случай Эйлера—Пуансо.* Центр тяжести является неподвижной точкой, а сумма моментов сил относительно неподвижной точки тождественно равна нулю.

2. *Случай Лагранжа—Пуассона.* Моменты инерции относительно главных осей удовлетворяют условиям $A=B \neq C$, а центр тяжести находится на оси симметрии эллипсоида инерции.

3. *Случай С. В. Ковалевской.* Моменты инерции относительно главных осей удовлетворяют условиям $A=B=2C$, и центр тяжести расположен в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, так что $z_C=0$.

Других общих случаев интегрирования задачи о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в настоящее время неизвестно. Задачу удастся проинтегрировать в ряде случаев, если наложить ограничения на начальные условия. Эти частные случаи интегрирования уравнений движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой весьма интересны, но в настоящем курсе рассматриваться не будут.

3. Случай Эйлера — Пуансо

Если твердое тело имеет неподвижной точкой центр тяжести, то, предоставленное самому себе без всякой начальной скорости, оно будет находиться в равновесии при любых возможных положениях. Результирующий момент внешних активных сил относительно неподвижной точки будет тогда равен нулю. Если в качестве координатных осей, неизменно связанных с телом, выбрать главные оси инерции x, y, z с началом в неподвижной точке, то уравнения Эйлера

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)qp = 0$$

будут представлять собой замкнутую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных функций p, q, r . Задача сводится к нахождению этих трех величин в функции времени.

Аналитическое решение задачи. Для определенности будем предполагать, что моменты инерции относительно главных осей удовлетворяют условиям

$$A \geq B \geq C, \quad A \neq C.$$

Уравнения движения допускают два первых интеграла: интеграл живых сил

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \quad (a)$$

и интеграл момента количества движения]

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2. \quad (b)$$

Из теоремы об изменении момента количества движения

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

непосредственно следует

$$\sigma = \text{const},$$

т. е. вектор момента количества движения постоянен не только по величине, но и по направлению.

Введем новую произвольную постоянную D так, чтобы она удовлетворяла условию

$$l^2 = hD,$$

и из уравнений (а) и (b) выразим p^2 и r^2 через q :

$$p^2 = \frac{h(D-C) - B(B-C)q^2}{A(A-C)}, \quad (c)$$

$$r^2 = \frac{h(A-D) - B(A-B)q^2}{C(A-C)}. \quad (d)$$

По своему механическому смыслу величины p и r должны быть действительными, что возможно только при выполнении неравенств

$$A > D > C.$$

Предполагая выполненным условие $A > B > C$, введем обозначения:

$$f^2 = \frac{h(D-C)}{B(B-C)} > 0, \quad g^2 = \frac{h(A-D)}{B(A-B)} > 0,$$

$$f^2 - g^2 = \frac{h(D-C)}{B(B-C)} - \frac{h(A-D)}{B(A-B)} = \frac{h(D-B)(A-C)}{B(B-C)(A-B)}.$$

Пусть для определенности $D > B$, тогда будем иметь

$$f^2 - g^2 > 0.$$

Представим теперь выражения для p^2 и r^2 в виде

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} (f^2 - q^2), \quad r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)} (g^2 - q^2). \quad (e)$$

В действительном движении правые части этих равенств должны быть неотрицательными, следовательно

$$f^2 - q^2 \geq 0, \quad g^2 - q^2 \geq 0.$$

Сравнивая с выведенным выше неравенством, имеем

$$q^2 \leq g^2 < f^2,$$

т. е.

$$-g \leq q \leq +g.$$

При этих условиях величина p никогда не обращается в нуль и в силу непрерывности не меняет знака. Не нарушая общности, в дальнейшем будем считать $p > 0$. Величина r обращается в нуль всякий раз, когда q достигает значения $\pm g$. Как видно из уравнения Эйлера

$$B \frac{dq}{dt} = -(A-C)pr,$$

производная $\frac{dq}{dt}$ меняет знак одновременно с r . При $r > 0$ будем иметь $\frac{dq}{dt} < 0$. При $q = -g$ величина r обращается в нуль, и

происходит смена знака. При $r < 0$ имеем $\frac{dq}{dt} > 0$, т. е. q возрастает до тех пор, пока не станет по величине равной g . Подставляя значения p и r во второе уравнение Эйлера, получаем

$$B \frac{dq}{dt} = -(A-C) \sqrt{\frac{B^2(B-C)(A-B)}{AC(A-C)^2} (f^2 - q^2)(g^2 - q^2)},$$

или

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}, \quad (i)$$

где знак «плюс» берется, когда q возрастает, до того момента, пока не достигнет значения $q=g$. Затем q будет уменьшаться от $+g$ до $-g$, а перед радикалом следует брать знак «минус» и т. д. Интегрирование последнего уравнения приводит к эллиптическому интегралу. В самом деле, если ввести обозначения

$$q = gs, \quad k^2 = \frac{g^2}{f^2} < 1,$$

где s — новая переменная, то уравнение примет вид

$$\frac{ds}{dt} = \pm \frac{g}{k} \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} \sqrt{(1 - k^2 s^2)(1 - s^2)},$$

или

$$\frac{ds}{dt} = \pm n^2 \sqrt{(1 - k^2 s^2)(1 - s^2)},$$

где

$$n^2 = \frac{g}{k} \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$n^2(t - t_0) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - k^2 s^2)(1 - s^2)}}.$$

где t_0 — произвольная постоянная, представляющая собой момент времени, в который при своем возрастании q обращается в нуль.

Определив s как функцию времени, будем знать для каждого момента времени q , а следовательно и p и r . При этом величины q и r будут периодически обращаться в нуль, в то время как p никогда в нуль не обращается. Величины p , q , r являются периодическими функциями времени t и имеют период

$$T = \frac{4}{n^2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - k^2 s^2)(1 - s^2)}}.$$

Когда время увеличивается на эту величину, p, q, r принимают прежние значения, а мгновенная ось вращения занимает первоначальное положение в теле (но не по отношению к неподвижной системе отсчета).

Для завершения решения задачи остается определить углы Эйлера φ, ψ, ϑ как функции времени. Для упрощения вычислений неподвижную ось z направим вдоль вектора момента количества движения σ и рассмотрим проекции вектора σ на оси x, y, z , неизменно связанные с телом:

$$\sigma_x = Ap = \sigma \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \sigma_y = Bq = \sigma \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$\sigma_z = Cr = \sigma \cos \vartheta.$$

Подставляя сюда значение $\sigma = l$, получим:

$$Ap = l \sin \vartheta \sin \varphi, \quad Bq = l \sin \vartheta \cos \varphi, \quad Cr = l \cos \vartheta.$$

Из последнего уравнения теперь имеем

$$\vartheta = \arccos \frac{Cr}{l},$$

а из первого

$$\varphi = \arcsin \frac{Ap}{l \sin \vartheta}.$$

Таким образом, φ и ϑ определяются как функции времени.

Рассматривая кинематические уравнения Эйлера

$$p = \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi,$$

исключим из них ϑ' , после чего будем иметь

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \psi' \sin \vartheta.$$

Отсюда производная ψ' определяется через известные функции времени

$$\psi' = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \vartheta}.$$

Задача о движении теперь сведена к квадратурам. Выражение $p \sin \varphi + q \cos \varphi$ можно представить в более симметричной форме. В самом деле, из уравнений

$$l \sin \vartheta \sin \varphi = Ap \quad \text{и} \quad l \sin \vartheta \cos \varphi = Bq$$

находим

$$l \sin \vartheta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) = Ap^2 + Bq^2,$$

и тогда

$$\psi' = \frac{Ap^2 + Bq^2}{l \sin^2 \vartheta} > 0,$$

так что во все время движения угол ψ только возрастает.

Мы рассмотрели движение твердого тела, закрепленного в центре масс, при условиях

$$A > D > B > C.$$

Рассмотрим особенные случаи, когда выполняется одно из равенств:

$$D = A, \quad D = B.$$

Если $D = A$, то

$$f^2 = \frac{h(A-C)}{B(B-C)} > 0, \quad g^2 = 0.$$

Из формул (e) следует

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} (f^2 - q^2), \quad r^2 = -\frac{B(A-B)}{C(A-C)} q^2.$$

Последнее из этих равенств возможно только при

$$r = q = 0.$$

Таким образом, твердое тело в данном случае совершает вращение вокруг оси x с постоянной угловой скоростью

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} f^2 = \frac{h}{A}.$$

Если $D = B$, то

$$f^2 = \frac{h}{B}, \quad g^2 = \frac{h}{B},$$

откуда

$$f^2 = g^2, \quad g^2 - q^2 \geq 0.$$

Из формулы (f) теперь получим

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} (f^2 - q^2),$$

или

$$\frac{dq}{dt} = \pm m^2 (f^2 - q^2).$$

Интегрируя это уравнение и беря знак «плюс», получим

$$m^2 (t - t_0) = \int_{q_0}^q \frac{dq}{f^2 - q^2},$$

откуда

$$q = f \operatorname{th} [f m^2 (t - t_0)].$$

Зная q , можно найти теперь p и r .

Регулярная прецессия твердого тела в случае Эйлера. Мы рассмотрели общий случай движения твердого тела, когда моменты инерции относительно трех главных осей не равны по величине. Частный случай, когда эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является шаром ($A=B=C$), не представляет интереса. Движение в этом случае сводится к чистому вращению вокруг оси, неизменно связанной с телом, что непосредственно вытекает из уравнений Эйлера. Эта ось остается неподвижной и в пространстве и совпадает с направлением вектора момента количества движения.

Если эллипсоид инерции относительно неподвижной точки есть эллипсоид вращения (независимо от того, будет этот эллипсоид сплюснутым или вытянутым), то интегрирование уравнений движения в случае Эйлера—Пуансо доводится до конца в элементарных функциях.

Предположим, что ось z является осью симметрии эллипсоида инерции, так что

$$A = B \neq C.$$

Тогда из последнего уравнения Эйлера

$$C \frac{dr}{dt} = 0$$

следует первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const.} \quad (a)$$

Неподвижную ось z_1 направим вдоль вектора момента количества движения σ . Тогда для проекции вектора момента количества движения на ось z будем иметь

$$\sigma \cos \vartheta = Cr_0.$$

Так как вектор момента количества движения постоянен, то отсюда получим

$$\cos \vartheta = \frac{Cr_0}{\sigma} = \text{const}, \quad (b)$$

т. е. угол ϑ не меняется во время движения твердого тела. Кинематические уравнения Эйлера имеют теперь вид:

$$p = \psi' \sin \vartheta \sin \varphi, \quad q = \psi' \sin \vartheta \cos \varphi, \quad r = \varphi' + \psi' \cos \vartheta = r_0,$$

а проекции вектора момента количества движения:

$$\sigma_x = \sigma \sin \vartheta \sin \varphi = A\psi' \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \sigma_y = \sigma \sin \vartheta \cos \varphi = A\psi' \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\psi' = \frac{\sigma}{A} = \text{const}, \quad (c)$$

и угол прецессии меняется по линейному закону

$$\psi = \frac{\sigma}{A} t + \psi_0.$$

Из последнего кинематического уравнения Эйлера

$$\psi' \cos \vartheta + \varphi' = r_0$$

находим

$$\varphi' = r_0 - \frac{\sigma}{A} \cos \vartheta = \text{const}, \quad (d)$$

т. е. угол φ также изменяется по линейному закону

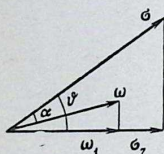
$$\varphi = \left(r_0 - \frac{\sigma}{A} \cos \vartheta \right) t + \varphi_0.$$

Движение твердого тела, при котором выполняются условия

$$\varphi' = \text{const}, \quad \psi' = \text{const}, \quad \vartheta = \text{const},$$

называется регулярной прецессией.

Рассмотрим некоторые свойства регулярной прецессии. Пусть вектор σ представляет момент количества движения твердого тела относительно начала координат (рис. 49). В случае Эйлера этот вектор сохраняет постоянную величину и постоянное направление в неподвижном пространстве. При регулярной прецессии



$$\sigma_z = Cr = \text{const},$$

откуда сразу следует

Рис. 49

$$r = r_0 = \text{const}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}.$$

Рассмотрим, кроме того, проекцию момента количества движения на экваториальную плоскость эллипсоида инерции. Обозначая эту проекцию через σ_1 , находим

$$\sigma_1 = A\omega_1 = \text{const}.$$

Отсюда видно, что проекция угловой скорости вращения ω_1 тела на экваториальную плоскость эллипсоида инерции постоянна. Обозначим через α угол между векторами σ и ω . Тогда

$$\text{tg } \vartheta = \frac{A\omega_1}{Cr_0}, \quad \text{tg}(\vartheta - \alpha) = \frac{\omega_1}{r_0},$$

откуда

$$\text{tg } \vartheta = \frac{A}{C} \text{tg}(\vartheta - \alpha),$$

или

$$C \operatorname{tg} \vartheta + C \operatorname{tg}^2 \vartheta \operatorname{tg} \alpha = A \operatorname{tg} \vartheta - A \operatorname{tg} \alpha.$$

Окончательно имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(A - C) \operatorname{tg} \vartheta}{C \operatorname{tg}^2 \vartheta + A}.$$

Покажем, что угол α не превосходит некоторого предельного значения, которое совпадает с экстремумом функции $\alpha(\vartheta)$. Приравняв нулю производную от $\operatorname{tg} \alpha$

$$\frac{d}{d\vartheta} (\operatorname{tg} \alpha) = \frac{(A - C)(A - C \operatorname{tg}^2 \vartheta)}{\cos^2 \vartheta [C \operatorname{tg}^2 \vartheta + A]^2} = 0,$$

имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \pm \sqrt{\frac{A}{C}},$$

а экстремальное значение α определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{A}{C}} - \sqrt{\frac{C}{A}} \right).$$

Пусть $C \geq A$. Тогда для симметричного тела будем иметь

$$2A = \Sigma m(x^2 + y^2) + 2\Sigma mz^2 \geq C,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \leq \frac{A}{C} \leq 1.$$

Для крайних значений, которые может принимать отношение $\frac{A}{C}$, получим:

$$\text{при } \frac{A}{C} = 1; \operatorname{tg} \alpha = 0, \alpha = 0,$$

$$\text{при } \frac{A}{C} = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, \alpha \approx \pm 19^\circ 28'.$$

Геометрическая интерпретация Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера. В 1851 г. Пуансо дал качественную геометрическую картину движения тела в случае Эйлера, основанную на кинематических свойствах этого движения.

Выберем за подвижные координатные оси x, y, z главные оси эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки O . Тогда уравнение эллипсоида инерции запишется в виде

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

Вектор мгновенной угловой скорости ω пересечет поверхность эллипсоида инерции в некоторой точке P , называемой полюсом,

координаты которой в дальнейшем будем обозначать через x, y, z (рис. 50). Из условия коллинеарности вектора $\overline{OP}$ и вектора угловой скорости ω будем иметь

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{\Delta},$$

где $\Delta = OP$.

Нетрудно установить следующие свойства движения такого твердого тела:

1) *Отношение ω/Δ остается постоянным во все время движения.* В самом деле, из интеграла живых сил имеем

$$h = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2 (Ax^2 + By^2 + Cz^2) = \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2;$$

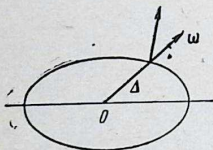


Рис. 50

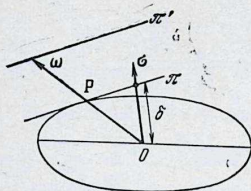


Рис. 51

2) *Вектор момента количества движения σ параллелен вектору нормали к поверхности эллипсоида инерции, построенному в точке P.* Действительно, проекции вектора нормали к поверхности пропорциональны частным производным:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Ax, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = By, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Cz.$$

Подставляя в правые части значения x, y и z , получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A \frac{\Delta}{\omega} p = \frac{\Delta}{\omega} \sigma_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B \frac{\Delta}{\omega} q = \frac{\Delta}{\omega} \sigma_y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = C \frac{\Delta}{\omega} r = \frac{\Delta}{\omega} \sigma_z.$$

Отсюда следует, что вектор σ ортогонален к плоскости π , касающейся эллипсоида инерции в точке P (в дальнейшем эту плоскость будем обозначать буквой π);

3) *Расстояние плоскости π до центра эллипсоида инерции остается неизменным во все время движения.* Нетрудно найти (рис. 51), что

$$\delta = \frac{(\overline{OP}, \sigma)}{|\sigma|} = \frac{Ap^x + Bq^y + Cr^z}{\sigma} = \frac{\Delta}{\omega} \cdot \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{\sigma} =$$

$$= \frac{\Delta}{\omega} \cdot \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{h}}{l} = \text{const.}$$

Отсюда следует, что плоскость π остается неподвижной в пространстве во все время движения;

4) *Конец вектора ω все время находится в неподвижной плоскости π' , параллельной плоскости π .* Рассмотрим проекцию вектора ω на направление вектора момента количества движения

$$\omega_{\sigma} = \frac{(\omega, \sigma)}{\sigma} = \frac{pAp + qBq + rCr}{l} = \frac{h}{l} = \text{const.},$$

откуда и следует утверждение.

Скорость точки P эллипсоида инерции равна нулю в рассматриваемый момент времени, так как через эту точку проходит вектор мгновенной угловой скорости ω твердого тела. Таким образом, приходим к следующему выводу:

Эллипсоид инерции постоянно касается неподвижной плоскости π . Точка касания P является полюсом, а прямая OP — мгновенной осью вращения твердого тела. Кривую, описываемую полюсом на поверхности эллипсоида инерции, Пуансо называет *полодией*, а кривую, описываемую полюсом на плоскости π , — *герполодией*. Подвижный аксоид имеет вершину в точке O , а *полодия* служит ее направляющей. Неподвижный аксоид имеет вершину в той же точке O , а в качестве направляющей — *герполодию*. Непрерывное движение твердого тела соответствует качению без скольжения подвижного аксоида по неподвижному. Такое движение осуществляется, если эллипсоид инерции заставить катиться и вертеться без скольжения по неподвижной плоскости π , положение которой зависит от начальных условий.

В частном случае, когда ось вращения проходит через вершину эллипсоида инерции, твердое тело совершает постоянное вращение около главной оси инерции твердого тела, сохраняющей неизменное положение в пространстве. Такая ось называется *постоянной*, или *перманентной*, осью вращения.

Если эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, то аксоидом является прямой круговой конус. Ось этого конуса совпадает с наибольшей осью эллипсоида инерции. Полодии и герполодии в этом случае будут окружностями.

Напишем уравнение *полодии* в общем случае при $A \geq B \geq C$, $A \neq C$ (наименьшая полуось эллипсоида инерции совпадает с осью x). Полодии расположены на поверхности эллипсоида инерции

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \quad (\text{a})$$

Кроме того, координаты x, y, z полюса P удовлетворяют уравнению, которое следует из закона сохранения момента количества движения

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = l^2$$

после подстановки вместо p, q, r значений

$$p = \frac{\omega}{\Delta} x, \quad q = \frac{\omega}{\Delta} y, \quad r = \frac{\omega}{\Delta} z.$$

Будем иметь

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = \frac{l^2}{h} = D. \quad (b)$$

Полодия представляет геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнениям (a) и (b). Умножая уравнение (a) на D и вычитая его из (b), получим уравнение конической поверхности

$$A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0, \quad (c)$$

являющейся подвижным аксоидом.

При $D > A$ или $D < C$ уравнению (c) удовлетворяет только одна точка $x=y=z=0$, не лежащая на поверхности эллипсоида инерции. Поэтому в действительном движении D удовлетворяет неравенствам

$$A \geq D \geq C.$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1) $A=D$. Уравнение подвижного аксоида получает вид

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = 0.$$

При $B < A$ этому уравнению удовлетворяет только одна точка с координатами

$$y = z = 0,$$

что соответствует вращению вокруг наименьшей оси эллипсоида инерции. Сам неподвижный аксоид вырождается в прямую линию, являющуюся постоянной осью вращения;

2) $D=C$. Уравнение подвижного аксоида имеет вид

$$A(A-C)x^2 + B(B-C)y^2 = 0.$$

При $B > C$ аксоид вырождается в прямую Oz . Этому соответствует постоянное вращение твердого тела вокруг наибольшей оси эллипсоида инерции;

3) $D=B$. Уравнение аксоида записывается в виде

$$A(A-B)x^2 + C(C-B)z^2 = 0.$$

При $A > B > C$ уравнение аксоида можно преобразовать к виду $(\sqrt{A(A-B)}x + \sqrt{C(C-B)}z)(\sqrt{A(A-B)}x - \sqrt{C(C-B)}z) = 0$.

Это уравнение определяет две пересекающиеся по оси y плоскости:

$$\sqrt{A(A-B)}x + \sqrt{C(C-B)}z = 0,$$

$$\sqrt{A(A-B)}x - \sqrt{C(C-B)}z = 0.$$

Пусть теперь величина D имеет небольшие отклонения от рассмотренных значений. Если D близко к A и удовлетворяет неравенствам

$$A > D > B,$$

то уравнение аксоида сводится к виду

$$a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 = 0,$$

и аксоид будет представлять собой действительный конус, ось которого совпадает с осью x (рис. 52). В пересечении с поверхностью эллипсоида инерции конус образует пологую, являющуюся замкнутой кривой, охватывающей ось z . Картина совершенно аналогична той, когда D близко по своему значению к C и удовлетворяет условиям

$$B > D > C.$$

Если D мало отличается от B , то пологии расположены вблизи кривых, образованных пересечением плоскостей ($B=D$) с поверхностью эллипсоида инерции.

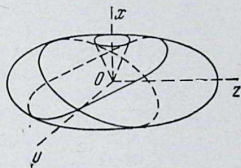


Рис. 52

В результате получаем следующую картину: *геометрические места полюсов (полодии) при изменении D имеют на эллипсоиде инерции особые точки, совпадающие с точками пересечения главных осей инерции с эллипсоидом инерции. Две из этих точек являются центрами и одна — седлом. Твердое тело совершает постоянные вращения вокруг осей, проходящих через особые точки. Если же телу сообщить начальное движение так, чтобы мгновенная ось вращения пересекла одну из пологий не в особой точке, то при дальнейшем движении твердого тела мгновенная ось вращения будет изменять свое положение в теле, но полюс будет оставаться все время на одной и той же пологии.*

Устойчивость постоянных вращений. Если твердому телу сообщить вращение вокруг одной из главных осей эллипсоида инерции, то оно будет продолжать вращаться вокруг такой оси неограниченно долго. Оси эти называются постоянными осями вращения. Мгновенная ось вращения остается неподвижной в теле только при вращении вокруг главных осей инерции.

В самом деле, если мгновенная ось вращения Δ остается неподвижной в теле и если обозначить через α , β , γ направляющие косинусы этой оси относительно координатных осей x , y , z , то для проекций мгновенной угловой скорости на оси будем иметь:

$$p = \omega\alpha, \quad q = \omega\beta, \quad r = \omega\gamma.$$

Тогда живая сила твердого тела запишется в виде

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{\omega^2}{2} (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = \frac{1}{2} \omega^2 J_{\Delta}.$$

Из интеграла живых сил $\omega^2 J_{\Delta} = h$ получаем, что ω есть величина постоянная. Уравнения Эйлера теперь принимают вид:

$$(C - B)\omega^2\beta\gamma = 0, \quad (A - C)\omega^2\gamma\alpha = 0, \quad (B - A)\omega^2\alpha\beta = 0.$$

Если эллипсоид инерции не является эллипсоидом вращения, то по меньшей мере два из направляющих косинусов должны равняться нулю, т. е. мгновенная ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции. Если же эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения и $A=B$, то либо $\gamma=0$, и тело вращается вокруг оси, лежащей в плоскости экватора, либо $\alpha=\beta=0$, и тело вращается вокруг оси z .

Движение называют устойчивым, если произвольным бесконечно малым изменениям начальных условий соответствуют бесконечно малые изменения самого движения. Движение называют неустойчивым, если некоторое бесконечно малое изменение начальных условий влечет за собой конечное изменение движения*.

Теорема. Если эллипсоид инерции трехосный, то постоянные вращения вокруг большей и меньшей осей инерции являются устойчивыми, а постоянные вращения вокруг средней оси инерции — неустойчивыми.

Доказательство. Пусть тело вращается вокруг меньшей (или большей) главной оси эллипсоида инерции. Если бесконечно мало изменить начальные условия, сообщив телу начальное вращение вокруг бесконечно близкой оси, то эта ось будет в дальнейшем перемещаться по поверхности аксоида, которому соответствует полодия на эллипсоиде инерции, представляющая малую замкнутую кривую, бесконечно близкую к вершине малой оси эллипсоида инерции. Мгновенная ось будет описывать малый конус вокруг постоянной оси вращения. Нетрудно заметить, что герполодия также будет представлять кривую, сколь угодно близко расположенную к точке P_0 , соответствующей постоянному вращению. Отсюда заключаем, что рассматриваемое постоянное вращение вокруг меньшей или большей оси эллипсоида инерции устойчиво.

* Такое определение устойчивости является частным случаем определения устойчивости по А. М. Ляпунову, которое будет дано позднее.

Если за постоянную ось взять среднюю ось эллипсоида инерции, то бесконечно малые изменения начальных условий приведут полюс на полодию, окружающую либо бóльшую, либо меньшую ось эллипсоида инерции. В дальнейшем движении мгновенная ось отклонится от своего первоначального положения на конечную величину, перемещаясь по поверхности аксоида. Это значит, что постоянное вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции неустойчиво. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Методом А. М. Ляпунова можно показать устойчивость постоянных вращений чисто аналитическим путем.

4. Случай Лагранжа

В IX разделе своей «Аналитической механики» Лагранж показал, что уравнения движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой могут быть проинтегрированы, если центральный эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, а неподвижная точка находится на его оси симметрии. Геометрическое исследование движения в этом случае было дано Пуассоном. Симметричное тяжелое твердое тело, имеющее неподвижную точку на оси симметрии, широко применяется в технике. Результаты исследований движения такого тела легли в основу теории гироскопических приборов.

Пусть эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки твердого тела, есть эллипсоид вращения, так что

$$A = B \neq C,$$

и центр тяжести не совпадает с неподвижной точкой, а расположен на оси симметрии эллипсоида инерции (рис. 53). За подвижные оси координат x, y, z возьмем главные оси эллипсоида инерции. Неподвижные оси x_1, y_1, z_1 выберем так, чтобы ось z_1 была направлена вертикально вверх. Пусть координаты центра тяжести относительно подвижных осей будут равны

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta > 0.$$

Динамические уравнения Эйлера в сделанных предположениях примут вид:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = m_x, \quad A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = m_y, \quad C \frac{dr}{dt} = 0.$$

Они допускают следующие три первых интеграла:

интеграл живых сил

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) = -Mg\zeta \cos \vartheta + \frac{h}{2},$$

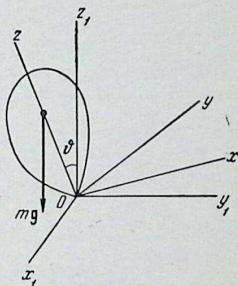


Рис. 53

интеграл сохранения момента количества движения относительно вертикальной оси

$$\sigma_x \gamma_1 + \sigma_y \gamma_2 + \sigma_z \gamma_3 = k,$$

интеграл, получаемый из третьего уравнения Эйлера,

$$r = r_0.$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — проекции момента количества движения твердого тела на оси x, y, z , а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — косинусы углов между осью z_1 и осями x, y, z . С помощью кинематических уравнений Эйлера

$$p = \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi,$$

$$r = \psi' \cos \vartheta + \varphi'$$

и соотношений

$$\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta,$$

первые интегралы можно преобразовать к виду:

$$\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \vartheta = \alpha - \alpha \cos \vartheta, \quad \psi' \sin^2 \vartheta = \beta - br_0 \cos \vartheta,$$

$$\psi' \cos \vartheta + \varphi' = r_0,$$

где

$$\alpha = \frac{h - Cr_0}{A}, \quad a = \frac{2Mg\xi}{A} > 0,$$

$$\beta = \frac{k}{A} > 0, \quad b = \frac{C}{A} > 0.$$

Эти первые интегралы представляют систему дифференциальных уравнений, из которой можно найти углы Эйлера в функции времени. В самом деле, исключив из первых двух уравнений ψ' , будем иметь

$$(\beta - br_0 \cos \vartheta)^2 + \vartheta'^2 \sin^2 \vartheta = (\alpha - \alpha \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta,$$

или

$$\left(\frac{d}{dt} \cos \vartheta \right)^2 = (\alpha - \alpha \cos \vartheta) (1 - \cos^2 \vartheta) - (\beta - br_0 \cos \vartheta)^2.$$

Полагая $u = \cos \vartheta$, получим

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (\alpha - au) (1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2. \quad (a)$$

В результате интегрирования этого уравнения найдем ϑ как функцию времени. Величины φ и ψ можно теперь легко определить из уравнений:

$$\psi' = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}, \quad \varphi' = r_0 - \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2} u,$$

получающихся из первых интегралов.

Рассмотрим правую часть уравнения (а)

$$f(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2.$$

Она представляет собой полином третьей степени, сохраняющий в действительном движении неотрицательное значение, так как он равен квадрату действительной величины $\frac{du}{dt}$. Для исследования решения уравнения

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u) = au^3 - (\alpha + b^2 r_0^2)u^2 + (2\beta br_0 - \alpha)u + \alpha - \beta^2$$

рассмотрим корни полинома $f(u)$. Исключим пока из рассмотрения случаи, когда u постоянно, а полином $f(u)$ равен нулю во все время движения, и случаи, когда $\beta = \pm 1$.

Аргументом функции $f(u)$ является косинус угла нутации, который в действительном движении заключен в промежутке $(-1, +1)$, так что для действительного движения функция $f(u)$ должна принимать неотрицательные значения в этом промежутке. Пусть начальному значению угла нутации ϑ_0 соответствует значение функции $f(u_0) > 0$, где $-1 < u_0 < +1$, а $\beta \neq br_0$. Тогда

$$f(\pm 1) = -(\beta - br_0)^2 < 0.$$

Заметим, что $f(+\infty) > 0$. Таким образом, полином $f(u)$ имеет три вещественных корня u_1, u_2, u_3 , заключенных соответственно в промежутках (рис. 54)

$$(-1, u_0), (u_0, +1), (+1, +\infty).$$

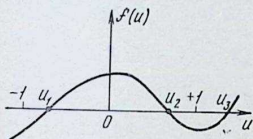


Рис. 54

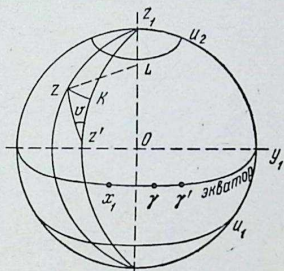


Рис. 55

Действительное движение твердого тела может происходить только в интервале (u_1, u_2) , лежащем внутри интервала $(-1, +1)$, а угол ϑ изменяется между двумя предельными значениями ϑ_1 и ϑ_2 ($\vartheta_1 > \vartheta_2$). Если описать вокруг оси z_1 два круговых конуса с вершинами в неподвижной точке O и с углами при вершинах $2\vartheta_1$ и $2\vartheta_2$, то ось z будет во все время движения заключена между этими конусами. Опишем из неподвижной точки O , как из центра, сферу единичного радиуса (рис. 55), которая пересечет оба конуса по параллелям u_1 и u_2 с общим полюсом z_1 (буквой z_1 обозначим

точку пересечения сферы с осью z_1). Точка z , в которой ось z пересекает поверхность сферы, характеризуется величиной u и расположена между параллелями u_1 и u_2 . При движении твердого тела точка z будет описывать на поверхности сферы некоторую кривую. Плоскость, ортогональная к оси z_1 и проходящая через точку O , пересечет сферу по параллели, которую будем называть экватором. Через x_1 обозначим след оси x_1 на сфере, а через γ — след линии узлов. За время dt точки z и γ перейдут в новые положения z' и γ' . Через полюс z_1 и точки z и z' проведем меридианы. Параллель, проходящая через точку z , пересечет меридиан точки z' в точке k . При этом будем иметь очевидные соотношения

$$\widehat{\gamma\gamma'} = d\psi, \quad \widehat{z'K} = d\vartheta.$$

Обозначим через Lz расстояние от точки z до оси z_1

$$zL = \sin \vartheta.$$

Тогда для определения угла ϑ между кривой zz' и меридианом точки z' будем иметь

$$\operatorname{tg} v = \frac{\widehat{zK}}{\widehat{Kz'}} = \frac{\sin \vartheta d\psi}{d\vartheta} = - \frac{(1-u^2) d\psi}{du}.$$

Подставляя сюда значения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1-u^2} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dt} = \pm \sqrt{f(u)},$$

получим

$$\operatorname{tg} v = - \frac{\beta - br_0 u}{\pm \sqrt{f(u)}}.$$

Рассмотрим характер траекторий точки z на сфере единичного радиуса. Пусть u является корнем уравнения

$$\beta - br_0 u = 0,$$

и предположим сначала, что $\bar{u} > u_2$. Тогда для всех значений u , удовлетворяющих условиям

$$u_1 \leq u \leq u_2,$$

скорость прецессии не обращается в нуль и не меняет направления, $\operatorname{tg} v$ не обращается в нуль и, следовательно, касательная к траектории точки не может быть параллельна меридиану. При прохождении траектории через параллели u_1 и u_2 происходит смена знака полинома $f(u)$, а поэтому и $\operatorname{tg} v$ меняет знак. На самих параллелях $\operatorname{tg} v$ обращается в бесконечность. Траектория точки z будет иметь вид непрерывной кривой без особых точек, попеременно касающейся то одной, то другой параллели (рис. 56).

Если теперь $u = u_2$, то рассуждения останутся в силе для всех значений u , удовлетворяющих условию

$$u_1 \leq u < u_2.$$

При $u = u_2$ для $\operatorname{tg} v$ получаем неопределенность, раскрывая которую по правилу Лопиталя, найдем

$$\lim_{u \rightarrow u_2} \operatorname{tg} v = - \lim_{u \rightarrow u_2} \frac{\beta - br_0 u}{\sqrt{f(u)}} = \lim_{u \rightarrow u_2} \frac{2br_0 \sqrt{f(u)}}{f'(u)} = 0,$$

т. е. касательная к траектории точки z становится параллельной меридиану, а $\operatorname{tg} v$ на параллели $u = u_2$ меняет знак (рис. 57). Таким образом, траектория на параллели $u = u_2$ имеет особую точку — точку возврата.

Рассмотрим еще случай, когда корень $\bar{u}$ лежит внутри интервала (u_1, u_2) , т. е.

$$u_1 < \bar{u} < u_2.$$

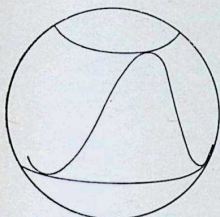


Рис. 56

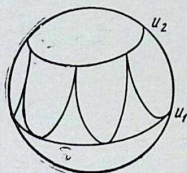


Рис. 57

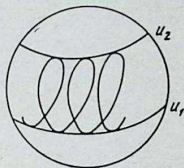


Рис. 58

Тогда при $u = \bar{u}$ производная ψ' будет менять знак, а $\operatorname{tg} v$ будет обращаться в нуль. Траектория точки z в этом случае будет иметь вид петли, обращенной вверх (рис. 58). Последнее обстоятельство становится очевидным, если проследить эволюцию траектории при непрерывном изменении начальных условий.

Заметим, что при любых начальных условиях всегда будет выполняться неравенство $\bar{u} > u_1$. В самом деле, пусть $\bar{u} = u_j$, где u_j — один из корней полинома $f(u)$, лежащий внутри интервала $(-1, +1)$. Тогда

$$u_j = \frac{\beta}{br_0} \text{ и } f(u_j) = (\alpha - au_j)(1 - u_j^2) = 0.$$

Последнее равенство выполняется только при $u_j = \frac{\alpha}{a}$, и, следовательно, полином $f(u)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{a}{br_0} (\beta - br_0 u)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2 = \\ &= (\beta - br_0 u) \left[\frac{a}{br_0} (1 - u^2) - (\beta - br_0 u) \right]. \end{aligned}$$

При $u = u_j$ первая скобка обращается в нуль. Если на интервале $(-1, +1)$ имеется второй корень u_i полинома $f(u)$, то он будет обращать в нуль квадратную скобку, т. е.

$$\frac{a}{br_0}(1 - u_i^2) - (\beta - br_0 u_i) = 0.$$

Но это возможно только при

$$\beta - br_0 u_i > 0,$$

или

$$u_i < \frac{\beta}{br_0} = u_j = \bar{u}.$$

Таким образом, второй корень u_i всегда меньше $u_j = \bar{u}$.

Спящий волчок. Если динамически симметричное твердое тело быстро закрутить около его оси симметрии, мало отклоненной от вертикали, то вскоре наступит установившееся движение около оси, близкой к вертикальной. Твердое тело, обладающее таким движением, называется спящим волчком.

Пусть в начальный момент выполняются условия

$$\vartheta_0 = 0, \quad \dot{\vartheta}_0 = 0.$$

Тогда по меньшей мере один из корней полинома $f(u)$ равен единице, т. е.

$$f(1) = -(\beta - br_0)^2 = 0,$$

откуда $\beta = br_0$. Рассмотрим, в этих предположениях, полином $f(u)$:

$$\begin{aligned} f(u) &= (a - au)(1 - u^2) - b^2 r_0^2 (1 - u)^2 = \\ &= (1 - u)[(a - au)(1 + u) - b^2 r_0^2 (1 - u)]. \end{aligned}$$

Два оставшихся корня полинома $f(u)$ должны обращать в нуль квадратную скобку. Из интеграла живых сил

$$p^2 + q^2 = a - a \cos \vartheta$$

при выбранных начальных условиях

$$p_0 = q_0 = 0$$

имеем

$$a - a \cos \vartheta_0 = 0,$$

откуда

$$a = a.$$

Тогда полином $f(u)$ примет вид

$$f(u) = (1 - u)^2 [a(1 + u) - b^2 r_0^2],$$

т. е. $f(u)$ имеет двойной корень $u = 1$. Третий корень определяется из уравнения

$$a(1+u) - b^2 r_0^2 = 0.$$

Если $b^2 r_0^2 > 2a$, то

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 > 1.$$

В этом случае вертикальное положение оси устойчиво.

Если же корень уравнения меньше единицы, то будем иметь (рис. 59):

$$[u_1 = \frac{b^2 r_0^2}{a} - 1 < 1, \quad u_2 = u_3 = 1.$$

Ось симметрии твердого тела будет совершать движение между параллелями $u = u_1$ и $u = u_2 = 1$, а условие устойчивости вертикального положения оси симметрии будет зависеть от величины корня u_1 .

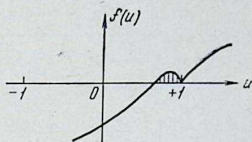


Рис. 59

При $u_2 = 1$ обращается в нуль выражение $\beta - b r_0 u$, и, следовательно, точка $u_2 = 1$ является точкой возврата.

При нарушении начальных условий ось симметрии начнет отклоняться от вертикали. При этом u будет убывать по закону

$$\frac{du}{dt} = -(1-u) \sqrt{a(u-u_1)}.$$

Отсюда можно определить время движения до параллели $u = u_1$

$$t = - \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{(1-u) \sqrt{a(u-u_1)}}, \quad u_0 \neq 1,$$

которое оказывается конечным. После достижения нижнего положения точка z начнет двигаться вверх. Время движения будет определяться интегралом

$$t = \int_{u_1}^1 \frac{du}{(1-u) \sqrt{a(u-u_1)}},$$

который является расходящимся, т. е. ось симметрии не достигает вертикального положения за конечное время.

Гироскоп. Приближенная теория гироскопа. В самом общем случае гироскоп можно определить как динамически симметричное твердое тело, способное вращаться с большой угловой скоростью около мгновенной оси вращения, проходящей через неподвижную

точку. Последняя может быть центром тяжести или лежать на центральной оси инерции (оси симметрии). В технике под гироскопом понимается механическое устройство, неотъемлемой частью которого является вращающаяся часть — ротор с тяжелым ободом, смонтированным так, чтобы его ось вращения имела возможность поворачиваться в любом направлении около неподвижной точки, лежащей на оси. Обычно это достигается с помощью так называемого карданова подвеса. В приближенном исследовании движения гироскопа массой карданова подвеса будем пренебрегать.

Рассмотрим твердое тело в случае Лагранжа, для которого в начальный момент выполняются условия:

$$\vartheta = \vartheta_0 \neq 0, \quad r_0 \gg 0, \quad \rho_0 = q_0 = 0,$$

т. е. твердому телу сообщается быстрое начальное вращение вокруг оси симметрии и не сообщаются нутационные и прецессионные движения.

Обратимся сначала к кинематическим уравнениям Эйлера:

$$\rho = \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi.$$

При $\rho_0 = q_0 = 0$ определитель системы при определении ψ'_0 и ϑ'_0 будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \\ \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \end{vmatrix} = -\sin \vartheta_0 \neq 0,$$

поэтому

$$\psi'_0 = 0, \quad \vartheta'_0 = 0.$$

Тогда из первых интегралов уравнений движения будем иметь:

$$0 = \alpha - a u_0, \quad 0 = \beta - b r_0 u_0,$$

а для функции $f(u)$ получим

$$\begin{aligned} f(u) &= (\alpha - a u)(1 - u^2) - (\beta - b r_0 u)^2 = \\ &= (u_0 - u)[a(1 - u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)]. \end{aligned}$$

Один из корней полинома $f(u)$ равен u_0 . В то же время $u_0 = \bar{u}$. Следовательно, корень $u_0 = u_2$. На параллели $u = u_0$ имеем точки возврата. Корень u_1 находится из уравнения

$$a(1 - u_1^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u_1) = 0,$$

которое дает

$$u_0 - u_1 = \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2}.$$

При очень больших значениях r_0 правая часть последнего соотношения неограниченно уменьшается и разность $u_0 - u_1$ стремится к нулю. Движение оси симметрии осуществляется в этом случае

в виде мелких нутационных «дрожащих» и прецессионного движения, происходящего все время в одну сторону (рис. 60). Такое движение называется псевдoreгулярной прецессией, в отличие от регулярной прецессии, когда

$$u_1 = u_2.$$

Характер движения быстро вращающегося гироскопа позволяет дать приближенный качественный анализ. В самом деле, в рассматриваемом случае имеем:

$$r = r_0 = \text{const}, \quad \sigma_z = Cr_0 = \text{const}.$$

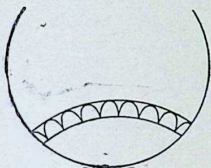


Рис. 60

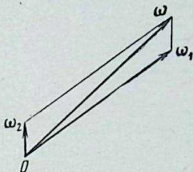


Рис. 61

Если в начальный момент ось симметрии твердого тела неподвижна, а телу сообщается начальная угловая скорость ω_1 вращения вокруг этой оси симметрии, то вектор угловой скорости ω_1 будет совпадать по направлению с вектором момента количества движения, и

$$\sigma = C\omega_1.$$

Движение гироскопа определяется из теоремы об изменении момента количества движения

$$\frac{d\sigma}{dt} = m_0,$$

где m_0 — сумма моментов активных внешних сил, действующих на гироскоп, относительно неподвижной точки. Мы пренебрегаем трением, поэтому можем считать связи идеальными.

Пренебрегая нутационным движением гироскопа, когда скорость собственного вращения достаточно велика, получим, что отклонение вектора мгновенной угловой скорости ω от оси симметрии гироскопа во время движения будет мало (рис. 61). В самом деле, скорость конца вектора момента количества движения приближенно равна

$$\frac{d\sigma}{dt} \cong [\omega_2, \sigma],$$

так что

$$[\omega_2, \sigma] = m_0,$$

откуда

$$\omega_2 \sigma \sin \vartheta = a mg \sin \vartheta,$$

или

$$\omega_2 = \frac{amg}{\sigma} = \frac{amg}{C\omega_1}.$$

Чем больше скорость собственного вращения, тем меньше скорость прецессии ω_2 , и можно пренебречь отклонением вектора мгновенной угловой скорости от направления вектора σ , а движение оси симметрии гироскопа определить формулой

$$[\omega_2, \sigma] = m_0,$$

или

$$C[\omega_2, \omega_1] = m_0.$$

Эта формула определяет величину и направление момента внешних сил, которые нужно приложить к телу, чтобы сообщить ему определенное прецессионное движение. На приспособления, приводящие тело в движение, будет действовать момент сил той же величины, но противоположного направления

$$L_0 = -m_0 = C[\omega_1, \omega_2].$$

Вектор L_0 называют гироскопическим моментом, а из формулы вытекает правило Жуковского: *Если гироскоп, вращающийся с угловой скоростью ω_1 , будем поворачивать вокруг некоторой оси, образующей угол α с осью симметрии тела, с угловой скоростью ω_2 , то появится пара с моментом, равным по величине произведению $C\omega_1\omega_2\sin\alpha$, стремящаяся повернуть ось тела к оси сообщаемого вращения так, чтобы при совпадении осей вращения ω_1 и ω_2 были направлены в одну сторону.*

Несмотря на то что приближенные методы исследования движения твердого тела дают лишь грубое представление о движении, они нашли большое приложение в технике, особенно в теории разнообразных гироскопических систем. Эти методы удобны тем, что позволяют дать достаточно правильное представление о движении системы. При применении приближенных методов необходимо давать оценку их точности. На практике для такой оценки сравнивают теоретические результаты с экспериментальными. Неспоримым преимуществом приближенного метода является то, что уравнения малых движений быстро вращающихся гироскопов получаются линейными относительно производных от координат по времени.

Некоторые применения гироскопов. Гироскопы нашли широкое применение в морской и авиационной практике, где они служат для определения направления (гироскомпас) и горизонта (гироскоп).

горизонт). В этих приборах используются быстровращающиеся симметричные гироскопы с тремя степенями свободы. Три степени свободы обеспечиваются специальным кардановым подвесом (рис. 62). Ротор гироскопа представляет собой тяжелый маховичок, который приводится во вращение от мотора и подвешен в двух кольцах, как показано на чертеже. Наружное кольцо может свободно вращаться в неподвижных подшипниках, а внутреннее — в подшипниках, укрепленных в наружном кольце. Гироскоп, центр тяжести которого совпадает с неподвижной точкой (точка пересечения подвижных и неподвижной осей вращения колец и ротора), называется астатическим. Если ротору астатического гироскопа сообщить быстрое вращение ω_0 вокруг собственной оси, то, вследствие отсутствия момента внешних сил, вектор момента количества движения этого гироскопа будет сохранять постоянными величину и направление. Если приложить к собственной оси гироскопа некоторую силу F , то действие этой силы сведется к действию пары сил с моментом

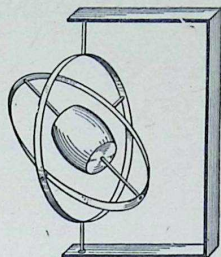


Рис. 62

$$m_0 = hF,$$

где h — расстояние от неподвижной точки O до линии действия силы F , и ось гироскопа начнет вращаться со скоростью

$$\omega_1 = \frac{Fh}{\sigma \sin \vartheta}$$

вокруг прямой, проходящей через точку O и параллельной линии действия силы F . Из формулы видно, что чем быстрее будет вращаться гироскоп вокруг своей оси, тем медленнее будет прецессировать это ось.

Если гироскоп вращается с очень большой скоростью, то небольшие силы, которые всегда имеют место, практически не будут изменять направления оси вращения гироскопа. Направленная в начальный момент на какую-нибудь неподвижную звезду, ось гироскопа будет все время сохранять это направление и, следовательно, будет совершать суточное вращение относительно Земли. На этом принципе основано устройство гироскопического компаса, который, в отличие от магнитного компаса, не подвержен влиянию аномалий магнитного поля, магнитных бурь и т. д.

Если с внутренним кольцом карданова подвеса гироскопического компаса жестко связать тяжелую дугу и сообщить ротору гироскопа вращение вокруг горизонтальной оси, не лежащей в меридиональной плоскости, то она, стремясь сохранить неизменное направление, начнет совершать движение относительно Земли.

Пусть, например, в начальный момент ось отклонена к востоку от меридиана. Стремясь сохранить постоянное направление, при вращении Земли, ось немного поднимется над горизонтом, тяжелая дуга, отклонившись от положения равновесия, создаст момент, действующий на гироскоп. Этот момент будет заставлять ось гироскопа повернуться в направлении к северу. То же произойдет, если в начальный момент ось гироскопа отклонена к западу.

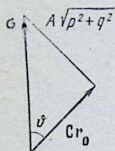


Рис. 63

Аналогичным образом устроен и гиригоризонт — прибор, позволяющий пилоту поддерживать свой самолет в горизонтальном положении, когда естественный горизонт не виден. В гиригоризонте ротор гироскопа вращается вокруг вертикальной оси, сохраняющей свое направление при наклонах самолета.

Мы объяснили здесь только принципиальную схему работы некоторых гироскопических приборов. На самом деле движение гироскопов подчиняется более сложным законам, и необходимо учитывать влияние масс кардановых колец, трения и других причин.

Вынужденная регулярная прецессия. Регулярной прецессией мы называли такое движение твердого тела, при котором остаются неизменными угол нутации ϑ , скорость собственного вращения φ' и скорость прецессии ψ' . Мы видели, что регулярную прецессию совершает симметричное твердое тело, на которое не действуют никакие внешние активные силы. В случае естественной регулярной прецессии существует определенное соотношение между величинами φ' , ψ' и ϑ . Рассматривая уравнения движения в подвижных осях (ось x направлена по линии узлов, y — в вертикальной плоскости, z — по оси динамической симметрии), будем иметь:

$$A \frac{dp}{dt} + (Cr_0 - Aq \operatorname{ctg} \vartheta) q = 0, \quad A \frac{dq}{dt} - (Cr_0 - Aq \operatorname{ctg} \vartheta) p = 0,$$

где

$$p = \vartheta', \quad q = \psi' \sin \vartheta, \quad r = \psi' \cos \vartheta + \varphi'.$$

Уравнения допускают первый интеграл

$$p^2 + q^2 = \text{const.}$$

Так как вектор момента количества движения σ будет сохранять неизменными величину и направление, то для угла нутации получим выражение (рис. 63)

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A \sqrt{p^2 + q^2}}{Cr_0} = \text{const.}$$

Но тогда $p = 0$, и из второго уравнения движения будем иметь

$$q = \psi' \sin \vartheta = \text{const.}$$

Из первого же уравнения теперь получаем

$$Cr_0 - Aq \operatorname{ctg} \vartheta = 0,$$

или, после подстановки выражений q и r_0 через углы Эйлера

$$-(A - C)\psi' \cos \vartheta + C\varphi' = 0,$$

откуда

$$\cos \vartheta = - \frac{C\varphi'}{(C - A)\psi'}. \quad (a)$$

Полученное уравнение определяет регулярную прецессию симметричного твердого тела в предположении, что момент активных сил относительно неподвижной точки равен нулю. Если момент сил отличен от нуля, ось гироскопа будет описывать некоторую поверхность, и угол нутации будет меняться (мы видели это на примере тяжелого гироскопа).

Выясним теперь, при каких условиях симметричный гироскоп, закрепленный в своем центре тяжести, может выполнять такую регулярную прецессию, которая не принадлежит к числу естественных движений, т. е. при которой не выполняется условие (a). Вынужденной регулярной прецессией является такое движение, при котором твердое тело, подверженное действию внешних моментов сил, равномерно вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω_1 , а ось симметрии, в свою очередь, равномерно вращается вокруг неподвижной в пространстве оси прецессии с постоянной угловой скоростью ω_2 . Угол же между осью прецессии и осью симметрии (угол нутации) остается неизменным. *Для создания такого движения при произвольном значении ϑ нужно приложить некоторый момент сил.* Воспользуемся для определения этого момента уравнениями в подвижных осях x, y, z . Тогда

$$p = \vartheta' = 0, \quad q = \psi' \sin \vartheta = \omega_2 \sin \vartheta, \quad r = \omega_2 \cos \vartheta + \omega_1,$$

и при сделанных предположениях p, q и r суть постоянные величины. Уравнения примут вид:

$$(Cr_0 - Aq \operatorname{ctg} \vartheta)q = m_x, \quad 0 = m_y,$$

откуда

$$[C(\omega_2 \cos \vartheta + \omega_1) - A\omega_2 \cos \vartheta] \omega_2 \sin \vartheta = m_x.$$

Мы получили уравнение для определения момента сил, создающих регулярную прецессию. Перепишем его в следующем виде:

$$M_x = \left(1 + \frac{C - A}{C} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \vartheta\right) C \omega_1 \omega_2 \sin \vartheta. \quad (b)$$

В приближенных расчетах часто принимают для определения момента формулу

$$m_x = C\omega_1 \omega_2 \sin \vartheta = |[\omega_2, \sigma]|,$$

однако такое допущение можно сделать лишь когда ω_1 очень велико, и отношение $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ близко к нулю.

Пример 36. Рассмотрим задачу о движении мельничных бегунов, катающихся по горизонтальной плоскости. Бегун представляет собой массивное колесо. Ось маховика образует угол ϑ с вертикалью, закреплена в неподвижной точке O и вращается вокруг вертикали с угловой скоростью ω_2 (рис. 64). Определить реакцию N плоскости.

Решение. Вектор мгновенной угловой скорости Ω проходит через неподвижную точку O и точку A касания колеса с горизонтальной плоскостью. Обозначим через α угол между осью симметрии колеса и направлением вектора мгновенной угловой скорости Ω . Нетрудно установить зависимость величин

$$\frac{\omega_1}{\sin(\vartheta - \alpha)} = \frac{\omega_2}{\sin \alpha},$$

или

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)}, \quad \omega_1 = \omega_2 \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Теперь определим величину момента, создаваемого силами реакции связи, воспользовавшись формулой (b)

$$m_x = \left(1 + \frac{C-A}{C} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \vartheta}{\sin(\vartheta - \alpha)} \right) C \omega_2^2 \frac{\sin(\vartheta - \alpha) \sin \vartheta}{\sin \alpha}.$$

Если $\vartheta = 90^\circ$, то

$$m_x = C \omega_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = C \omega_2^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

В приближенных расчетах пользуются этой формулой. Она дает верный результат лишь при $\vartheta = 90^\circ$. Если же положить, например, $\vartheta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, то

$$m_x = \left(1 + \frac{C-A}{C} \cos 60^\circ \right) C \omega_2^2 \sin 60^\circ,$$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, и поправка оказывается существенной:

$$1 + \frac{C-A}{2C} = \frac{3C-A}{2C}.$$

Предположим, что центр тяжести диска находится в точке B , а вес его равен P (рис. 65). Тогда из законов статики имеем

$$m = Na - Pb,$$

откуда

$$N = P \frac{b}{a} + \frac{m}{a}.$$

К статически определяемой величине силы реакции N мы должны добавить величину $\frac{m}{a}$, положительную для вращающегося диска.

Заметим некоторые соотношения для моментов инерции

1) для идеально тонкой однородной палочки длины l :

$$C = 0, \quad A = \frac{ml^2}{3}, \quad \left[1 + \frac{C-A}{C} \cos 60^\circ \right] \cdot C = -\frac{ml^2}{6} < 0;$$

2) для идеально тонкого однородного диска радиуса a :

$$C = \frac{ma^2}{2}, \quad A = \frac{ma^2}{4} + ml^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{a^2}{2} + 2l^2 \right), \quad A > l, \quad \text{если } l > \frac{a}{2};$$

3) для идеального цилиндрического катка (рис. 66):

$$C = \frac{ma^2}{2}, \quad A = \frac{m}{12} (3a^2 + h^2 + l^2).$$

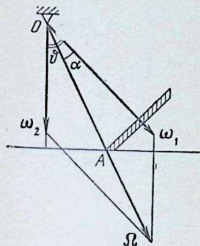


Рис. 64

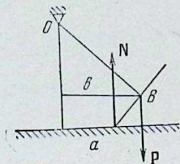


Рис. 65

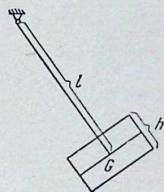


Рис. 66

Если твердое тело не вращается вокруг своей оси симметрии, т. е. $\omega_1 = 0$, то для определения момента получим формулу

$$m_x = (C - A) \omega_2^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Этот же результат можно непосредственно получить и с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

5. Случай Ковалевской

После исследований Эйлера и Лагранжа ученые долго не могли найти других интегрируемых случаев движения твердого тела с одной неподвижной точкой. Лишь в 1888 г. С. В. Ковалевской в мемуаре «О проблеме вращения твердого тела около неподвижной точки» был дан третий интегрируемый случай движения твердого тела около неподвижной точки. В случае Ковалевской эллипсоид инерции тела, построенный для неподвижной точки, удовлетворяет условиям

$$A = B = 2C.$$

Центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида инерции.

Неподвижную ось z_1 направим вертикально вверх, а подвижные оси x, y, z — по главным осям эллипсоида инерции так, чтобы центр масс был расположен на положительной части оси x . Тогда для координат центра масс получим:

$$\xi > 0, \eta = 0, \zeta = 0.$$

Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ косинусы углов между осью z_1 и осями x, y, z соответственно. Тогда проекции момента силы тяжести относительно неподвижной точки O на оси x, y, z будут определяться из матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi & 0 & 0 \\ -mg\gamma_1 & -mg\gamma_2 & -mg\gamma_3 \end{vmatrix},$$

так что

$$m_x = 0, m_y = mg\xi\gamma_3, m_z = -mg\xi\gamma_2,$$

и уравнения Эйлера преобразуют вид:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = 0, A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = mg\xi\gamma_3,$$

$$C \frac{dr}{dt} = -mg\xi\gamma_2.$$

Принимая во внимание соотношения между моментами инерции, представим эти уравнения в форме

$$2 \frac{dp}{dt} = qr, 2 \frac{dq}{dt} = -pr + c\gamma_3, \frac{dr}{dt} = -c\gamma_2,$$

$$c = \frac{mg\xi}{C}. \quad (a)$$

Три уравнения связывают пять неизвестных величин $p, q, r, \gamma_2, \gamma_3$. Для получения полной системы уравнений добавим сюда еще уравнения Пуассона:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} + q\gamma_3 - r\gamma_2 = 0, \frac{d\gamma_2}{dt} + r\gamma_1 - p\gamma_3 = 0,$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} + p\gamma_2 - q\gamma_1 = 0, \quad (b)$$

которые являются линейными однородными уравнениями относительно величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. В уравнения Эйлера эти величины входят с постоянным множителем c . Сделав подстановку

$$c\gamma_1 \rightarrow \gamma'_1, c\gamma_2 \rightarrow \gamma'_2, c\gamma_3 \rightarrow \gamma'_3,$$

которая эквивалентна замене в уравнениях Эйлера величины c единицей, получим:

$$2 \frac{dp}{dt} = qr, \quad 2 \frac{dq}{dt} = -pr + \gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -\gamma_2.$$

В новых переменных уравнения Пуассона останутся без изменения.

Как отмечалось выше, в задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой существует три первых интеграла: интеграл живых сил, интеграл площадей и тривиальный интеграл. Эти три интеграла в случае Ковалевской имеют вид:

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) = -mg\zeta, + h_1,$$

$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const},$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

После деления на C отсюда находим:

$$p^2 + q^2 + \frac{1}{2} r^2 = -\gamma_1 + h, \quad 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = k,$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Для построения общего интеграла задачи достаточно найти еще один первый интеграл. С этой целью рассмотрим функцию

$$U = p^2 - q^2 - \gamma_1$$

и производную от нее по времени в силу уравнений движения

$$\frac{dU}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} - 2q \frac{dq}{dt} - \frac{d\gamma_1}{dt} = r(2pq - \gamma_2).$$

Обозначая выражение, стоящее в скобках, через

$$V = 2pq - \gamma_2,$$

для производной от функции V по времени получим

$$\frac{dV}{dt} = 2p \frac{dq}{dt} + 2q \frac{dp}{dt} - \frac{d\gamma_2}{dt} = -r(p^2 - q^2 - \gamma_1).$$

Переменные U и V будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{dU}{dt} = rV, \quad \frac{dV}{dt} = -rU,$$

являющимся следствием уравнений движения твердого тела в случае Ковалевской. Очевидно, что функция

$$\Phi = U^2 + V^2 = \text{const}$$

является первым интегралом системы полученных уравнений. В самом деле, рассматривая производную по времени от функции Φ , взятую в силу уравнений движения, заметим, что она имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2U \frac{dU}{dt} + 2V \frac{dV}{dt},$$

а потому и будет тождественно обращаться в нуль.

Если исключить из уравнений движения время и принять в качестве независимой переменной одну из величин $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, останется найти еще один первый интеграл, что всегда можно сделать с помощью интегрирующего множителя. Задача может быть доведена до конца в гиперэллиптических функциях.

В отличие от случаев Эйлера и Лагранжа, случай Ковалевской до настоящего времени не нашел практического приложения.

6. Гироскоп в кардановом подвесе

При построении точной теории гироскопа в кардановом подвесе, последний нельзя рассматривать как одно твердое тело, так как сами кардановы кольца обладают массой, и мы будем иметь дело с системой твердых тел, совершающих сложное движение. При изучении такого движения удобно использовать уравнения

Лагранжа второго рода. Их исследование можно провести методом, близким к тому, который применялся в случае Лагранжа—Пуассона.

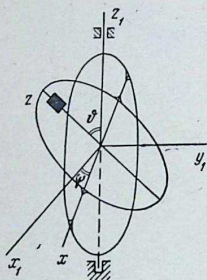


Рис. 67

Будем изучать движение гироскопа в кардановом подвесе по отношению к неподвижной системе координат. Карданов подвес осуществим следующим образом: внешнее кольцо укрепим на оси z_1 так, чтобы оно могло свободно вращаться вокруг этой оси. Подвижную ось x , ортогональную к оси z_1 , выберем в плоскости внешнего кольца. Внутреннее кольцо укрепим так, чтобы оно могло свободно вращаться вокруг оси x (внутри внешнего кольца). Во внутреннем кольце построим ось z , ортогональную к оси x . На оси z укрепим сим-

метричное тело — гироскоп (рис. 67). Этот гироскоп имеет три степени свободы, которые определяются углом поворота ψ оси x вокруг оси z_1 , углом поворота ϕ внутреннего кольца (кожух гироскопа) вокруг оси x и, наконец, поворотом ротора гироскопа вокруг оси z во внутреннем кольце. Угол поворота ротора гироскопа относительно внутреннего кольца обозначим через φ . Углы φ, ψ, ϕ полностью определяют положение и движение гироскопа. Они являются лагранжевыми координатами системы.

Для описания движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. При составлении этих уравнений вычислим сначала живую силу. Она складывается из живой силы внешнего кольца, живой силы кожуха и живой силы самого гироскопа. Обозначим через J_1 момент инерции внешнего кольца относительно оси z_1 . Тогда живая сила T_1 внешнего кольца будет равна

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\psi}^2}{2}.$$

Обозначив через A_1, B_1, C_1 моменты инерции кожуха относительно осей x, y, z , получим живую силу T_2 кожуха в виде

$$T_2 = \frac{1}{2} (A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2),$$

где p_1, q_1, r_1 — проекции мгновенной угловой скорости кожуха на оси x, y, z , являющиеся его главными осями инерции:

$$p_1 = \dot{\vartheta}', \quad q_1 = \dot{\psi}' \sin \vartheta, \quad r_1 = \dot{\psi}' \cos \vartheta.$$

Моменты инерции гироскопа относительно его главных осей обозначим через A, B, C . Для симметричного гироскопа будем иметь

$$A = B,$$

а живая сила гироскопа представится в виде

$$T_3 = \frac{1}{2} (A p^2 + A q^2 + C r^2),$$

где p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости гироскопа на оси x, y, z :

$$p = \dot{\vartheta}', \quad q = \dot{\psi}' \sin \vartheta, \quad r = \dot{\psi}' \cos \vartheta + \dot{\varphi}'.$$

Окончательное выражение для живой силы всей системы можно записать в виде

$$2T = 2(T_1 + T_2 + T_3) = [J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta] \dot{\psi}'^2 + (A_1 + A) \dot{\vartheta}'^2 + C (\dot{\psi}' \cos \vartheta + \dot{\varphi}')^2$$

Обобщенные силы, соответствующие координатам φ и ψ , будут равны нулю:

$$Q_\varphi = 0, \quad Q_\psi = 0.$$

Предполагая, что на гироскоп действует только сила тяжести, для силовой функции получим

$$U = -mg\zeta \cos \vartheta,$$

откуда

$$Q_{\dot{\vartheta}} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg\zeta \sin \vartheta.$$

Нетрудно заметить, что координаты φ и ψ являются циклическими, поэтому будем иметь два циклических интеграла:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\psi' \cos \vartheta + \varphi') = \text{const}, \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \psi'} = [J_1 + (B_1 - A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta] \psi' + \\ + C(\varphi' + \psi' \cos \vartheta) \cos \vartheta = k. \end{aligned} \quad (b)$$

Кроме указанных первых интегралов имеет место следующий интеграл живых сил:

$$\begin{aligned} [J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta] \psi'^2 + (A_1 + A) \vartheta'^2 + \\ + C(\psi' \cos \vartheta + \varphi')^2 = -mg\xi \cos \vartheta + h. \end{aligned} \quad (c)$$

Представим уравнения (a) и (b) в виде

$$r = (\psi' \cos \vartheta + \varphi') = r_0, \quad (a')$$

$$\psi' = \frac{k - Cr_0 \cos \vartheta}{J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta}. \quad (b')$$

Исключая из интеграла живых сил r и ψ' , получим

$$\frac{(k - Cr_0 \cos \vartheta)^2}{[J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta]} + (A_1 + A) \vartheta'^2 + Cr_0^2 = -mg\xi \cos \vartheta + h,$$

или

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{(h - \tilde{C}r_0^2 - mg\xi \cos \vartheta) [J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta] - (k - Cr_0 \cos \vartheta)^2}{(A + A_1) [J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta]}.$$

Вводя обозначения:

$$u = \cos \vartheta, \quad \alpha = \frac{h - Cr_0^2}{A + A_1}, \quad a = \frac{mg\xi}{A + A_1} > 0, \quad E = J_1 + B_1 + A > 0,$$

$$e = C_1 - B_1 - A, \quad \beta = \frac{k}{A + A_1}, \quad b = \frac{C}{A + A_1} > 0,$$

$$(E - eu^2) = J_1 + (B_1 + A) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta > 0,$$

перепишем последнее уравнение в виде

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{(\alpha - au)(E - eu^2) - (\beta - br_0 u)^2}{(E - eu^2)}.$$

Умножая обе части этого уравнения на $\sin^2 \vartheta$, получим

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{[(\alpha - au)(E - eu^2) - (\beta - br_0 u)^2] (1 - u^2) (E - eu^2)}{(E - eu^2)^2} \quad (d)$$

и два уравнения для определения угла прецессии и угла собственного вращения:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{E - eu^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u \frac{\beta - br_0 u}{E - eu^2}. \quad (e)$$

Интегрирование следует начинать с уравнения (d). Тогда остальные сведутся к уравнениям с разделенными переменными.

Левая часть уравнения (d) неотрицательна в действительном движении, следовательно, неотрицательна и правая часть. Кроме того, в действительном движении $-1 \leq u \leq +1$.

Так как знаменатель правой части отличен от нуля, остается проанализировать расположение корней функции, представляющей числитель правой части. Внутри интервала $(-1, +1)$ может обращаться в нуль выражение, стоящее в квадратных скобках

$$f(u) = (\alpha - au)(E - eu^2) - (\beta - br_0 u)^2.$$

Пусть в начальный момент $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 \neq 0$, так что $f(u_0) > 0$. Кроме того, выражение $E - eu^2$ при $e > 0$ имеет два вещественных корня $u = \pm \sqrt{\frac{E}{e}}$. Но $E - eu^2 > 0$ для действительных значений $|u| \leq 1$, поэтому эти корни лежат вне интервала $(-1, +1)$:

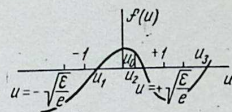
$$f\left(\pm \sqrt{\frac{E}{e}}\right) = -\left(\beta - br_0 \sqrt{\frac{E}{e}}\right)^2 < 0.$$

При $e > 0$, что имеет место в большинстве практически интересных случаев, имеем

$$f(+\infty) > 0.$$

Таким образом, полином $f(u)$ имеет три действительных корня, два из которых лежат внутри интервала $\left(-\sqrt{\frac{E}{e}}, \sqrt{\frac{E}{e}}\right)$ (рис. 68).

Действительное движение может происходить лишь внутри интервала, границы которого определяются системой неравенств:



$$-1 \leq u \leq +1, \quad -\sqrt{\frac{E}{e}} \leq u \leq \sqrt{\frac{E}{e}}.$$

Рис. 68

Особенный интерес представляет случай псевдорегулярной прецессии гироскопа в кардановом подвесе. Предположим, что гироскопу сообщается такое движение, при котором $\dot{\varphi}_0 \neq 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, т. е. ось гироскопа отклонена от вертикали и

ему сообщено вращение вокруг оси динамической симметрии, после чего ось отпускают. Из кинематических уравнений получим:

$$p_0 = \vartheta'_0 = 0, \quad q_0 = \psi'_0 \sin \vartheta_0 = 0, \quad r_0 = \psi'_0 \cos \vartheta_0 + \varphi'_0,$$

откуда

$$\vartheta'_0 = 0, \quad \psi'_0 = 0.$$

Из уравнений (d) и (e) теперь имеем:

$$\beta - br_0 u_0 = 0, \quad \alpha - au_0 = 0,$$

и функция $f(u)$ принимает вид

$$\begin{aligned} f(u) &= (\alpha - au)(E - eu^2) - (\beta - br_0 u)^2 = \\ &= (u_0 - u)[a(E - eu^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)]. \end{aligned}$$

Один из корней функции $f(u)$ очевиден

$$u = u_0.$$

Оставшиеся корни определяются из уравнения

$$a(E - eu^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u) = 0.$$

Предположим, что u^* — корень этого уравнения, лежащий в интервале $-1 \leq u \leq 1$. Тогда

$$u_0 - u^* = \frac{(E - eu^{*2})a}{b^2 r_0^2},$$

причем правая часть положительна, так что

$$u_0 - u^* > 0,$$

Отсюда следует

$$u_0 = u_2, \quad u^* = u_1.$$

Если корень лежит вне интервала

$$-\sqrt{\frac{E}{e}} \leq u \leq \sqrt{\frac{E}{e}},$$

то правая часть становится отрицательной, т. е.

$$u^* > u_0.$$

Если величина r_0 очень велика, разность $u_2 - u_1$ стремится к нулю, и ось гироскопа совершает медленное прецессионное движение с небольшими нутационными колебаниями.

Для гироскопа в кардановом подвесе возможен случай регулярной прецессии. Очевидно, что это имеет место, если корни u_1 и u_2 совпадают, т. е. уравнение $f(u) = 0$ обладает двойным

корнем u_0 . Условие существования двойного корня аналитически сводится к уравнениям:

$$f(u_0) = 0, \quad f'(u_0) = 0,$$

т. е.

$$f(u_0) = (\alpha - au_0)(E - eu_0^2) - (\beta - br_0u_0)^2 = 0, \quad (a)$$

$$f'(u_0) = -a(E - eu_0^2) - 2eu_0(\alpha - au_0) + 2(\beta - br_0u_0)br_0 = 0. \quad (b)$$

Из первого уравнения получим

$$\frac{\alpha - au_0}{E - eu_0^2} = \frac{(\beta - br_0u_0)^2}{(E - eu_0^2)^2} = \psi_0'^2.$$

Второе уравнение теперь можно переписать в виде

$$-a - 2eu_0\psi_0'^2 + 2br_0\psi_0' = 0.$$

Действительные значения начальной угловой скорости прецессии должны удовлетворять этому уравнению, причем корни этого уравнения будут действительны, если выполняется неравенство

$$b^2r_0^2 - 2aeu_0 \geq 0,$$

которое одновременно является *условием регулярной прецессии гироскопа в кардановом подвесе*.

Условия устойчивости вертикального положения оси симметрии можно получить тем же приемом, что и в случае Лагранжа. Для этого достаточно потребовать, чтобы корни полинома $f(1-\delta-z)$ были бы отрицательными, т. е. чтобы корни полинома $f(u)$ лежали справа от точки $1-\delta$.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Для определения реакции в неподвижной точке освободим твердое тело от связи в этой неподвижной точке, заменив действие связи силой реакции R . Твердое тело, освобожденное от связи, может перемещаться поступательно в любом направлении. Поэтому можно применить теорему об изменении количества движения, которая в векторной форме запишется в виде

$$\frac{dQ}{dt} + [\omega, Q] = \sum_v F_v^{(e)} + R,$$

где производная $\frac{dQ}{dt}$ от вектора количества движения Q берется по отношению к системе осей, неизменно связанной с твердым телом. Так как

$$Q = Mv_C = M[\omega, \rho_C],$$

где ρ_C — радиус-вектор центра масс твердого тела, M — его масса, то для производной получим

$$\frac{dQ}{dt} = M \left\{ \left[\frac{d\omega}{dt}, \rho_C \right] + \left[\omega, \frac{d\rho_C}{dt} \right] \right\}.$$

Но

$$\frac{d\rho_C}{dt} = 0,$$

поэтому уравнение, определяющее движение центра масс, будет иметь вид

$$M \left\{ \left[\frac{d\omega}{dt}, \rho_C \right] + \omega(\omega, \rho_C) - \rho_C \omega^2 \right\} = \sum_v F_v^{(e)} + R.$$

Если центр тяжести лежит на оси z_1 , то, полагая $z_C = a$, получим наиболее простые уравнения в проекциях на оси, связанные с телом:

$$M(q' + pr)a = \sum_v X_v^{(e)} + R_x, \quad M(-p' + qr)a = \sum_v Y_v^{(e)} + R_y,$$

$$M[r^2 a - a(p^2 + q^2 + r^2)] = \sum_v Z_v^{(e)} + R_z.$$

Здесь величины p, q, r, p', q' и r' определяются из уравнений движения. Полученные уравнения определяют проекции сил реакции R_x, R_y, R_z .

§ 6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Чтобы знать движение свободного твердого тела, достаточно знать движение какой-нибудь точки тела и движение относительно системы осей, имеющих начало в этой точке и совершающих поступательное движение. Удобнее всего за такую точку выбрать центр масс твердого тела.

Введем некоторую инерциальную систему координат $Ox_1y_1z_1$. Координаты центра масс G твердого тела в этой системе обозначим через ξ, η, ζ . Массу тела обозначим через M . Тогда уравнения движения центра масс примут вид:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum_v X_v, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum_v Y_v, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum_v Z_v,$$

где в правых частях стоят проекции внешних сил на оси x_1, y_1, z_1 . Свяжем с центром масс твердого тела систему осей Кенига $Gx_2y_2z_2$, совершающих поступательное движение относительно инерциальной системы $Ox_1y_1z_1$. Введем еще три оси x, y, z , неизменно связанные с твердым телом и направленные по главным осям его

центрального эллипсоида инерции. К свободному твердому телу можно применить теорему об изменении момента количества движения по отношению к осям Кенига. Следствием этой теоремы будут три уравнения Эйлера:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N,$$

где L, M, N — суммы моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно главных осей центрального эллипсоида инерции.

Мы получили шесть дифференциальных уравнений движения, определяющих шесть параметров $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \theta$ в функции времени t . В общем случае правые части этих уравнений зависят от шести параметров и их производных, так что приходится рассматривать совместно все шесть уравнений. В ряде частных случаев обе группы уравнений оказывается возможным изучать независимо одну от другой, и задача разбивается на две: 1) изучение движения центра масс твердого тела; 2) изучение движения твердого тела относительно центра масс. Таким образом, например, удастся решать многие задачи о движении искусственных спутников Земли.

§ 7. ГИРОСТАТЫ

Гиростатом называют механическую систему S , состоящую из твердого тела S_1 и связанных с ним неизменно других тел S_2 , изменяемых или твердых, движение которых относительно тела S_1 не меняет геометрию масс системы S . Такими системами являются, например, твердое тело, с которым неизменно связаны оси одного или нескольких симметричных гироскопов, твердое тело с полостью произвольной формы, полностью заполненной однородной жидкостью, и др.

При заданном распределении масс гиростата, в результате внутренних движений тел S_2 не изменяются ни положение центра тяжести, ни направление главных осей инерции, ни моменты инерции гиростата по отношению к какой-либо точке твердого тела.

В случае гиростата, так как он не является вполне неизменяемой системой, нельзя рассматривать систему как одно твердое тело.

Рассмотрим в качестве примера гиростат, представляющий собой твердое тело S_1 , имеющее закрепленную точку O , которую примем за начало двух прямоугольных систем осей координат: неподвижной $O\xi\eta\zeta$, ось ζ которой направлена вертикально вверх, и подвижной $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции гиростата для точки O .

Вектор σ_2 момента количества движения тела S_2 можно представить в виде геометрической суммы векторов момента количества переносного движения σ_e и момента количества относительного движения σ_r этого тела. Если обозначить через σ_1 момент количества движения всей системы, рассматриваемой как одно твердое тело, то момент количества движения гиростата относительно точки O представится в виде

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_r.$$

Обозначая проекции вектора σ_r на оси x, y, z через $\sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \sigma_{r3}$, а проекции вектора σ_1 на те же оси соответственно

$$\sigma_{11} = Ap, \quad \sigma_{12} = Bq, \quad \sigma_{13} = Cr,$$

где A, B, C — главные моменты инерции гиростата S для точки O , а p, q, r — проекции на оси x, y, z вектора ω мгновенной угловой скорости тела S_1 , по теореме об изменении момента количества движения получим следующие уравнения:

$$A \frac{dp}{dt} + \frac{d\sigma_{r1}}{dt} + (C - B)qr + q\sigma_{r3} - r\sigma_{r2} = P(zc\gamma_2 - yc\gamma_3),$$

$$B \frac{dq}{dt} + \frac{d\sigma_{r2}}{dt} + (A - C)rp + r\sigma_{r1} - p\sigma_{r3} = P(xc\gamma_3 - zc\gamma_1),$$

$$C \frac{dr}{dt} + \frac{d\sigma_{r3}}{dt} + (B - A)pq + p\sigma_{r2} - q\sigma_{r1} = P(yc\gamma_1 - xc\gamma_2),$$

где P — вес гиростата; x_c, y_c, z_c — координаты его центра тяжести; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — косинусы углов между вертикалью ζ и осями x, y, z , удовлетворяющие уравнениям Пуассона:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

К этим уравнениям необходимо еще присоединить уравнения относительного движения тела S_2 , зависящие от вида тела S_2 , характера наложенных на него связей и действующих сил, внутренних для всей системы.

Если тело S_2 представляет собой симметричный ротор с неподвижной относительно тела S_1 осью, то уравнения относительного движения будут иметь вид уравнений движения твердого тела с неподвижной осью.

Если σ_r заранее известен из условий задачи (когда связи зависят явно от времени), то выписанных уравнений оказывается достаточно для изучения движения гиростата.

Пусть действующие на тело S_2 внутренние силы обладают силовой функцией U , а связи не зависят явно от времени, тогда можно получить три первых интеграла уравнений движения гиростата:

1) интеграл живых сил

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(p\sigma_{r1} + q\sigma_{r2} + r\sigma_{r3}) + \\ + 2(T_r - U) + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = \text{const},$$

где T_r — живая сила тела S_2 в его относительном движении;

2) интеграл площадей

$$(Ap + \sigma_{r1})\gamma_1 + (Bq + \sigma_{r2})\gamma_2 + (Cr + \sigma_{r3})\gamma_3 = \text{const},$$

3) тривиальный геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Дальнейший анализ движения гиростата зависит от ряда дополнительных условий, в частности от распределения масс, от начальных условий и т. п.

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Аналитическая динамика занимается изучением таких свойств уравнений движения механических систем, которые обусловлены особой формой этих уравнений. Она рассматривает общие принципы механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения и методов их интегрирования. Аналитическая динамика имеет свои методы исследования, пригодные для решения сложных задач как механики, так и различных областей физики.

Аналитическая динамика начала развиваться в конце XVII—начале XVIII в., в период буржуазной революции в Европе. Торричелли и Бернулли положили начало аналитической статике. Галилей и Ньютон сформулировали основные законы динамики, а в конце XVIII в. Лагранж разработал основы современной аналитической динамики. Весь этот период характеризуется бурным развитием техники и точных наук. В результате появилась потребность к обобщению накопленных знаний, к созданию таких принципов, откуда вытекали бы все основные положения механики. Одним из результатов такого обобщения явился принцип Даламбера—Эйлера—Лагранжа, как наиболее общий принцип механики. Он позволил сформулировать различные задачи о движении в виде системы дифференциальных уравнений.

Принцип Даламбера—Лагранжа не исчерпывал все возможности познания движения. Еще в XVIII в. возникли новые задачи, в которых искомые движения выделяются из всех мыслимых (допускаемых связями) при помощи некоторого экстремального принципа отбора. К таким задачам относятся, например, задача о линии наибыстрейшего ската, задача о маятнике с постоянным периодом, не зависящим от амплитуды, и др. Задачи такого рода сводятся к отысканию экстремума интегралов от некоторых функций. Задача экстремума отвечает и более ранним принципам механики — принципу Бернулли и принципу Даламбера—Лагранжа.

Развитие принципов механики связано с развитием принципов оптики и приводит к задаче об оптико-механической аналогии. В оптике принципы распространения света высказывались значительно раньше, чем принципы динамики. Герон еще в I в. до н. э. высказывал мысль, что свет распространяется по кратчайшему пути. В XVII в. П. Ферма (1601—1665) предложил принцип распространения света, согласно которому при прохождении границы двух сред свет распространяется по тому пути, на который затрачивается наименьшее время. Дальнейшим развитием этого принципа занимались Эйлер, Лагранж, Гамильтон. Последний установил аналогию принципа Ферма с принципами механики.

Не меньшее значение получили в аналитической механике методы исследования малых движений системы вблизи положения устойчивого равновесия или установившегося движения. Эти методы начали развиваться из запросов небесной механики и нашли широкое применение в технике. Развитие методов связано с именами Лагранжа, Рауса, Пуанкаре, Ляпунова и целого ряда других математиков и механиков.

В нашем курсе мы останавливаемся лишь на изложении основных положений аналитической динамики. Не придерживаясь исторической последовательности, мы начнем изложение с принципа Гамильтона, который может быть непосредственно получен из принципа Даламбера—Лагранжа. Автор ряда исследований в оптике, ирландский математик Гамильтон (1805—1865) внес в механику принцип, аналогичный принципу Ферма, смысл которого заключается в том, что механическое движение совершается из одного заданного положения в другое за определенный отрезок времени при условии, что разность потенциальной и кинетической энергии в среднем имеет в этом движении экстремальное значение (минимум). Гамильтоном этот принцип был установлен для систем, на которые наложены не зависящие от времени связи. Независимо от Гамильтона и несколько позже этот принцип был установлен русским механиком М. В. Остроградским (1801—1861) для систем со связями, зависящими явно от времени.

§ 1. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО

Рассмотрим движение системы материальных точек m_v относительно некоторой инерциальной системы отсчета $Oxyz$ под действием активных сил X_v, Y_v, Z_v . Пусть перемещения точек стеснены идеальными голономными связями. Обозначим декартовы координаты точки m_v через x_v, y_v, z_v , а независимые лагранжевы координаты через $q_1, q_2, \dots, q_k$. Зависимость между декартовыми и лагранжевыми координатами задается соотношениями:

$$x_v = x_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \quad y_v = y_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k),$$

$$\dot{z}_v = z_v(t, q_1, q_3, \dots, q_k).$$

В дальнейшем будем предполагать, что координаты x_v, y_v, z_v представляются однозначными непрерывными и сколь угодно раз дифференцируемыми функциями переменных $t, q_1, q_2, \dots, q_k$. Кроме того, будем предполагать, что из каждого положения системы параметры $q_1, q_2, \dots, q_k$ могут изменяться как в положительном, так и в отрицательном направлении. Движение системы будем рассматривать начиная с некоторого момента t_0 до момента t_1 . Пусть начальному положению системы отвечают значения лагранжевых координат $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_k^{(0)}$, а положению системы в момент t_1 — значения $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_k^{(1)}$. В $k+1$ -мерном простран-

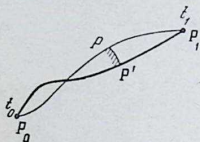


Рис. 69

стве координат $q_1, q_2, \dots, q_k$ и времени t начальному и конечному положениям системы будут соответствовать точки P_0 и P_1 (рис. 69). В действительном движении системы из положения P_0 в положение P_1 лагранжевы координаты непрерывно изменяются, определяя в $k+1$ -мерном пространстве некоторую кривую, которую будем называть действительной траекторией системы. В соответствии с наложенными

на систему связями можно заставить перемещаться систему из положения P_0 в положение P_1 за тот же интервал времени, но по другой траектории, близкой к действительной, не заботясь о том, чтобы удовлетворялись уравнения движения. Такую траекторию в $k+1$ -мерном пространстве назовем окольной траекторией. Сравнивая движения по действительной и окольным траекториям, зададимся целью определить действительную траекторию среди окольных. Пусть положение системы в момент t на действительной траектории отмечается точкой P , а положение системы в этот же момент времени на окольной траектории — точкой P' (рис. 69). Отрезок PP' , соединяющий две точки на различных траекториях, в один и тот же момент времени будет давать возможное перемещение системы в момент t . Он соответствует изменению лагранжевых координат в момент t при переходе из положения P в положение P' на величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$. Возможному перемещению системы будут отвечать вариации декартовых координат $\delta x, \delta y, \delta z$, так что

$$\delta x_v = \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_v = \sum_s \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta z_v = \sum_s \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Последовательность возможных перемещений можно связать с некоторой последовательностью траекторий, переводящих систему из положения P_0 в положение P_1 , задав эту последовательность при помощи некоторого параметра α . Перемещению системы вдоль какой-либо определенной траектории будет соответствовать определенное значение параметра α , который меняется лишь при переходе с одной траектории на другую. Лагранжевы координаты си-

стемы можно теперь рассматривать как функции двух параметров α , t , причем t меняется лишь при перемещении системы вдоль траекторий

$$q_s = q_s(t, \alpha).$$

Вариация δq_s определяет переход с одной траектории на другую. Поэтому будем иметь

$$\delta q_s = \frac{\partial q_s}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Производная же по времени от параметра q определяет перемещение вдоль той или иной траектории, так что

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial q_s}{\partial t}.$$

Предположим, что лагранжевы координаты q_s являются однозначными непрерывными дифференцируемыми функциями от t и α . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d \delta q_s}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} (\delta q_s) = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha} \delta \alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial t} \delta \alpha = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dq}{dt} \right) \delta \alpha = \delta \left(\frac{dq}{dt} \right), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dt} (\delta q_s) = \delta \left(\frac{dq_s}{dt} \right),$$

т. е. операции варьирования и дифференцирования для лагранжевых координат перестановочны. Покажем перестановочность этих операций и для декартовых координат в случае голономных связей. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d \delta x_v}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \delta q_s \right) = \\ &= \sum_{i, s} \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_i \partial q_s} \cdot \frac{dq_i}{dt} \delta q_s + \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \cdot \frac{d \delta q_s}{dt} + \sum_s \frac{\partial^2 x_v}{\partial t \partial q_s} \delta q_s, \\ \frac{dx_v}{dt} &= \frac{\partial x_v}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \cdot \frac{dq_s}{dt}, \\ \delta \frac{\partial x_v}{dt} &= \sum_s \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_s \partial t} \delta q_s + \sum_{i, s} \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_i \partial q_s} \cdot \frac{dq_i}{dt} \delta q_s + \sum_s \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_s} \delta \frac{dq_s}{dt}. \end{aligned}$$

Вычитая последнее равенство из первого, получим

$$\frac{d}{dt} (\delta x_v) - \delta \left(\frac{dx_v}{dt} \right) = \sum_s \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \left(\frac{d \delta q_s}{dt} - \delta \frac{dq_s}{dt} \right) \equiv 0.$$

откуда

$$\frac{d\delta x_v}{dt} = \delta \frac{dx_v}{dt},$$

т. е. операции дифференцирования и варьирования перестановочны и для декартовых координат в случае голономных идеальных связей (для неголономных связей перестановочность дифференцирования и варьирования, вообще говоря, не имеет места).

Перейдем к определению действительной траектории среди всех околных. Действительное движение системы происходит в соответствии с принципом Даламбера—Лагранжа

$$\sum_v [(m_v \ddot{x}_v - X_v) \delta x_v + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) \delta y_v + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) \delta z_v] = 0,$$

который определяет «тенденцию» истинного, или действительного, движения в каждый момент времени. Рассмотрим интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_v [(m_v \ddot{x}_v - X_v) \delta x_v + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) \delta y_v + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) \delta z_v] \right\} dt = 0$$

вдоль действительной траектории. Все сравниваемые траектории начинаются в один и тот же момент времени из одной и той же точки. Все они оканчиваются также в один и тот же момент времени в одной и той же точке. Следовательно, на концах траекторий при $t=t_0$ и $t=t_1$ будут выполняться условия

$$\delta x_v = \delta y_v = \delta z_v = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение, проинтегрировав по частям выражение

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} m_v \ddot{x}_v \delta x_v dt &= \int_{t_0}^{t_1} m_v \delta x_v \frac{dx'_v}{dt} dt = \\ &= m_v \delta x_v x'_v \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_v x'_v \frac{d\delta x_v}{dt} dt. \end{aligned}$$

На концах траектории вариации $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ обращаются в нуль, поэтому будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} m_v \ddot{x}_v \delta x_v dt = - \int_{t_0}^{t_1} m_v x'_v \frac{d\delta x_v}{dt} dt.$$

В силу перестановочности операций дифференцирования и варьирования имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} m_v x'_v \frac{d\delta x_v}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} m_v \ddot{x}_v \delta x_v dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \frac{m_v \dot{x}_v^2}{2} dt.$$

Тогда уравнение примет вид

$$-\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \sum_v \frac{m_v}{2} (\dot{x}_v'^2 + \dot{y}_v'^2 + \dot{z}_v'^2) + \sum_v (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) \right\} dt = 0,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T + \sum_v (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) \right] dt = 0.$$

В таком виде полученное уравнение выражает «принцип наименьшего действия» Гамильтона для общих механических систем. На действительной траектории обращается в нуль интеграл от функции

$$\delta T + \sum_{v=1}^n (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v).$$

Если силы обладают силовой функцией $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, то имеет место соотношение

$$\sum (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = \delta U,$$

и выведенное выше уравнение принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U) dt = 0.$$

Поскольку варьирование связано лишь с изменением параметра, то операции варьирования и интегрирования можно поменять местами:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0.$$

Таким образом, интеграл $\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt$ на действительной траектории имеет стационарное значение. Мы показали необходимость стационарного значения интеграла на действительной траектории. Покажем, что обращение вариации интеграла в нуль является достаточным условием действительного движения. Для этого достаточно вывести уравнения движения из принципа Гамильтона.

Рассмотрим механическую систему с голономными идеальными связями, положение которой определяется лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$, а живая сила

$$T = T(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k)$$

зависит от обобщенных скоростей, координат и времени. Принимая во внимание известное соотношение

$$\sum_v (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = \sum_s Q_s \delta q_s,$$

перепишем принцип Гамильтона в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_s Q_s \delta q_s) dt = 0.$$

Выполняя варьирование живой силы

$$\delta T = \sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} \delta q'_s,$$

интегрируя затем по частям

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q'_s} \delta q'_s dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q'_s} \cdot \frac{d \delta q_s}{dt} dt = \\ &= \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} dt \end{aligned}$$

и учитывая, что на концах интервала вариации координат равны нулю, из принципа Гамильтона получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s - \sum_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} \delta q_s + \sum_s Q_s \delta q_s \right) dt = 0,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_s \left[\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} + Q_s \right] \delta q_s \right\} dt = 0.$$

Вариации δq_s произвольны внутри интервала (t_0, t_1) , а тогда, в силу основной леммы вариационного исчисления, равенство будет возможно только в том случае, когда все коэффициенты при δq_s обращаются в нуль, т. е. когда выполняются условия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Полученные уравнения должны выполняться в действительном движении механической системы. Достаточность принципа Гамильтона доказывается тем, что эти уравнения являются уравнениями Лагранжа второго рода, описывающими движение механической системы, на которую наложены голономные идеальные связи.

Принцип Гамильтона для механических систем с голономными идеальными связями можно сформулировать следующим образом:

Действительное движение системы с голономными идеальными связями между двумя заданными положениями отличается от кинематически возможных между этими положениями движений, совершаемых за тот же промежуток времени, тем, что на действительном движении обращается в нуль интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T + \sum_v (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) \right] dt = 0$$

для всех значений δx_v , δy_v , δz_v , удовлетворяющих указанным условиям.

§ 2. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

Система уравнений Лагранжа второго рода состоит из k обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q . Эту систему можно привести к $2k$ дифференциальным уравнениям первого порядка, в которых скорости q' должны рассматриваться как неизвестные функции. Вместо лагранжевых переменных q_s и q_s' можно ввести новые переменные: координаты q_i и импульсы p_i . Такие переменные были введены Пуассоном и Гамильтоном и называются каноническими переменными Гамильтона. Переход к новым переменным осуществляется с помощью линейного преобразования Гамильтона

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Преобразование будет возможно, если система из k уравнений преобразования может быть разрешена относительно q'_i . Это имеет место, если функциональный определитель системы не равен нулю, т. е.

$$\det \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_j} \right\| \neq 0.$$

Лагранжева система, для которой этот определитель отличен от нуля, называется нормальной. Для механических систем живая сила в общем случае представляется в виде суммы трех однородных относительно обобщенных скоростей форм

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} q'_i q'_j, \quad T_1 = \sum_i a_i q'_i$$

а T_0 не зависит от обобщенных скоростей. Поэтому для механических систем импульсы являются линейными функциями обобщенных скоростей

$$p_i = \sum a_{ij} \dot{q}_j + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Функциональный определитель такой системы имеет вид

$$\left| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| = |a_{ij}|,$$

т. е. равен дискриминанту однородной квадратичной формы T_2 , который не равен тождественно нулю. В самом деле, если связи не зависят явно от времени, то

$$T_1 = T_0 = 0, \quad T = T_2.$$

По определению T отлична от нуля, если хотя бы одна точка системы не находится в покое. При независимых от времени связях система будет двигаться лишь в том случае, когда по крайней мере одна из обобщенных скоростей отлична от нуля. Следовательно, T_2 — знакоопределенная положительная квадратичная форма от обобщенных скоростей, и ее дискриминант отличен от нуля.

Если связи зависят явно от времени, то система может находиться в движении и при неизменяющихся лагранжевых координатах. Такое движение системы обуславливается изменением связей. Изменение лагранжевых координат определяет движение системы по отношению к связям. Изменение связей можно представить зависящим от некоторых параметров q_1^* , q_2^* , ..., q_s^* , являющихся известными функциями времени, так что декартовы координаты x_v , y_v , z_v точек системы определяются как функции параметров q_1^* , q_2^* , ..., q_s^* и лагранжевых координат q_1 , q_2 , ..., q_k :

$$\begin{aligned} x_v &= x_v(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, q_1, q_2, \dots, q_k), \\ y_v &= y_v(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, q_1, q_2, \dots, q_k), \quad (v = 1, 2, \dots, k), \\ z_v &= z_v(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, q_1, q_2, \dots, q_k), \\ \dot{q}_i &= f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Сообщим системе такое движение, при котором параметры q_1^* , q_2^* , ..., q_s^* остаются неизменными. Это движение будет соответствовать движению с «неизменными» (застывшими) связями, причем будем иметь:

$$T_0 = T_1 = 0, \quad \tilde{T} = T_2,$$

где $\tilde{T}$ — живая сила системы при застывших связях. Она будет отлична от нуля, если не равна нулю хотя бы одна из обобщенных скоростей $\dot{q}_i$. Последнее говорит о том, что T_2 является знакоопределенной от обобщенных скоростей функцией в каждый момент времени, а следовательно, дискриминант этой формы положителен, т. е.

$$|a_{ij}| > 0.$$

Пример 37. Исследовать живую силу точки, положение которой определяется сферическими координатами r, ψ, ϑ , так что (рис. 70)

$$x = r \sin \vartheta \cos \psi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \psi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Решение. Для живой силы точки будем иметь

$$T = \frac{m}{2} (r^2 \vartheta'^2 + r'^2 + r^2 \psi'^2 \sin^2 \vartheta).$$

Живая сила является знакоопределенной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей r', ψ', ϑ' . Предположим, что изменение координаты r задано заранее

$$r = f(t),$$

тогда

$$T = \frac{m}{2} [f^2(t) (\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \vartheta) + f'^2(t)],$$

а для T_2 и T_0 получим:

$$T_2 = \frac{m}{2} \{f^2(t) [\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \vartheta]\}, \quad T_0 = \frac{m}{2} f'^2(t).$$

Если $r = \text{const}$, то $f'(t) = 0$, и живая сила

$$T = T_2 = \frac{m}{2} [r^2 (\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \vartheta)]$$

является знакоопределенной формой относительно ϑ' и ψ' . Дискриминант формы имеет вид

$$g = \begin{vmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2 \sin^2 \vartheta \end{vmatrix} = m^2 r^4 \sin^2 \vartheta > 0, \text{ если } \vartheta \neq 0.$$

При $\vartheta=0$ точка находится в покое, если $\vartheta'=0$.

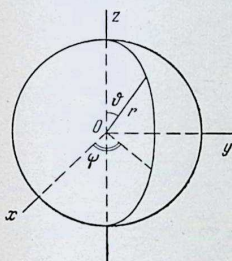


Рис. 70

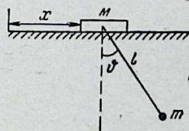


Рис. 71

Пример 38. Исследовать живую силу эллиптического маятника (рис. 71), состоящего из ползуна массы M , способного скользить по горизонтальному рельсу, и точки массы m , соединенной стержнем с ползуном.

Решение. Положение системы определяется лагранжевыми координатами x и ϑ , а живая сила имеет вид

$$T = \frac{Mx'^2}{2} + \frac{m}{2} [x'^2 + 2lx'\vartheta' \cos \vartheta + l^2 \vartheta'^2].$$

Если $x = f(t)$ является заранее заданной известной функцией времени, то

$$T = \frac{M+m}{2} \dot{f}^2(t) + m l f'(t) \dot{\vartheta}' \cos \vartheta + \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}'^2,$$

$$T_2 = \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}'^2, \quad T_1 = m l f'(t) \dot{\vartheta}' \cos \vartheta, \quad T_0 = \frac{M+m}{2} \dot{f}^2(t).$$

В силу того что дискриминант квадратичной формы T_2 отличен от нуля, система уравнений

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j a_{ij} \dot{q}_j + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

может быть однозначно разрешена относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, а обобщенные скорости представлены линейными функциями обобщенных импульсов

$$\dot{q}_i = \sum_j b_{ij} p_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

При выводе канонических уравнений движения Гамильтон ввел функцию H

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - T - U,$$

которую называют функцией Гамильтона. Функция Гамильтона с помощью преобразования Гамильтона

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

представляется как функция координат q_i , импульсов p_i и времени t , т. е.

$$H = H(t, q, p).$$

Рассмотрим частную производную от функции H по импульсу p_i . Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i + \sum_{s=1}^k \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_i} p_s - \sum_{s=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \cdot \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_i} = \\ &= \dot{q}_i + \sum_{s=1}^k \left(p_s - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в скобках, обращается в нуль в силу преобразования Гамильтона, поэтому для частной производной $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ будем иметь

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Формулы

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

осуществляют взаимнообратимое преобразование переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ и переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$. Такого рода преобразования называют преобразованиями Лежандра.

При выводе канонических уравнений Гамильтона будем исходить из принципа Гамильтона, предполагая, что на рассматриваемую систему наложены идеальные голономные связи, а действующие на точки системы активные силы обладают силовой функцией U . Принцип Гамильтона для этого случая представляется уравнением

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i p_i \dot{q}_i + T + U \right) dt = 0.$$

Введем функцию Гамильтона H , после чего будем иметь

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0.$$

Выполняя операцию варьирования интеграла, в предположении, что интервал времени не варьируется, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \delta \dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \delta H \right) dt = 0.$$

Интегрируя по частям первую сумму

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} p_i \frac{d \delta q_i}{dt} dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_i \frac{dp_i}{dt} dt$$

и принимая во внимание, что вариации координат на концах интервала равны нулю, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i dt.$$

Математическое выражение принципа Гамильтона приобретает новую форму

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(- \sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0.$$

Здесь коэффициенты при вариациях δp_i обращаются в нуль, в силу преобразования Лежандра, поэтому

$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Последнее равенство, в силу произвольности множителей δq_i , имеет место только в том случае, когда все коэффициенты при δq_i обращаются в нуль одновременно

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, на действительной траектории канонические переменные удовлетворяют уравнениям

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где первая группа уравнений следует непосредственно из преобразования Лежандра. Полученные уравнения называются каноническими уравнениями Гамильтона. Функцию Гамильтона H в этих уравнениях называют иногда характеристической функцией. Уравнения Гамильтона симметричны относительно основных переменных и оказываются удобными для исследования не только динамических задач классической механики, но и ряда вопросов современной физики. Впервые эти уравнения были получены У. Гамильтоном в 1834 г.

1. Свойства функции Гамильтона

Так как живая сила системы, в общем случае, является суммой трех однородных форм относительно обобщенных скоростей

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

то функцию Гамильтона можно представить в следующем виде:

$$H = T_2 - T_0 - U.$$

В самом деле, имеем

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - T - U = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T - U.$$

Подставляя сюда значение T , получим

$$H = \sum_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T - U.$$

На основании теоремы Эйлера об однородных функциях отсюда следует

$$H = 2T_2 + T_1 - T - U,$$

или

$$H = T_2 - T_0 - U.$$

Если связи, наложенные на систему, не зависят явно от времени, то

$$T_0 = T_1 = 0, \quad T = T_2$$

и тогда

$$H = T - U = T + V,$$

где V — потенциальная энергия системы. Функция Гамильтона здесь представляет полную энергию механической системы.

Вернемся к общему случаю. Для производной от функции H будем иметь

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt}.$$

На интегральной кривой [переменные q_i и p_i удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона, поэтому вдоль интегральной кривой для производной $\frac{dH}{dt}$ получим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, т. е. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

откуда сразу следует первый интеграл канонических уравнений Гамильтона

$$H = T_2 - T_0 - U = h.$$

Это известный уже нам интеграл Якоби, который, при тех же предположениях, является первым интегралом уравнений Лагранжа второго рода. Когда связи, наложенные на механическую систему, не зависят явно от времени, интеграл Якоби совпадает с интегралом живых сил

$$H = T - U = h.$$

Пример 39. Составить канонические уравнения движения материальной точки массы m , которая может свободно скользить по окружности радиуса r , вращающейся вокруг вертикального диаметра (рис. 72).

Решение. За лагранжевы координаты примем угол φ поворота системы вокруг вертикальной оси, и угол α , определяющий положение точки m , отсчитываемый от вертикального диаметра. Тогда живая сила системы записывается в виде

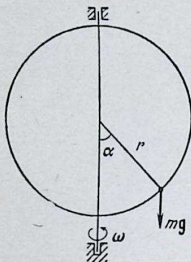


Рис. 72

$$T = \frac{J\varphi'^2}{2} + \frac{m}{2}(r^2\varphi'^2\sin^2\alpha + r^2\alpha'^2)$$

и представляет собой однородную квадратичную форму относительно φ' и α' . Предположим, что закон вращения окружности вокруг вертикального диаметра задан заранее

$$\varphi = \varphi(t).$$

Тогда

$$T_2 = \frac{mr^2\alpha'^2}{2}, \quad T_1 = 0, \quad T_0 = \frac{J + mr^2\sin^2\alpha}{2} \varphi'^2(t),$$

$$U = mgr \cos \alpha.$$

Функция Гамильтона

$$H = \frac{mr^2\alpha'^2}{2} - \frac{(J + mr^2\sin^2\alpha)}{2} \varphi'^2(t) - mgr \cos \alpha \Big|_{\alpha' \rightarrow p}.$$

Но

$$p = \frac{\partial T}{\partial \alpha'} = mr^2\alpha',$$

поэтому

$$H = \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{(J + mr^2\sin^2\alpha)}{2} \varphi'^2(t) - mgr \cos \alpha.$$

Канонические уравнения Гамильтона принимают вид

$$\alpha' = \frac{p}{mr^2}, \quad p' = -[-mr^2\varphi'^2\sin\alpha\cos\alpha + mgr\sin\alpha]$$

и допускают первый интеграл $H = \text{const}$, т. е.

$$\frac{p^2}{2mr^2} - \frac{(J + mr^2\sin^2\alpha)}{2} \varphi'^2 - mgr \cos \alpha = h.$$

Пример 40. Составить канонические уравнения Гамильтона для свободной материальной точки массы m , движущейся в центральном ньютоновском поле сил, определяя ее положение сферическими координатами.

Решение. Рассматривая движение в сферической системе координат r, φ, ϑ (рис. 73), живую силу точки представим в виде

$$T = \frac{m}{2}(\varphi'^2 r^2 \sin^2 \vartheta + r'^2 + r^2 \vartheta'^2).$$

Для силовой функции будем иметь

$$U = \frac{\mu m}{r}.$$

На точку не наложено никаких связей, поэтому функция Гамильтона H запишется в виде

$$H = T - U \Big|_{r', \varphi', \vartheta' \rightarrow p_r, p_\varphi, p_\vartheta}.$$

Определяя импульсы

$$p_r = mr', \quad p_\varphi = m\varphi' r^2 \sin^2 \vartheta, \quad p_\vartheta = mr^2 \vartheta'$$

и заменяя обобщенные скорости в H их выражениями через импульсы, имеем

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} + p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu m}{r},$$

после чего запишем канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{p_r}{m}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_\vartheta}{mr^2}, \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \vartheta} + \frac{p_\vartheta^2}{mr^3} - \frac{\mu m}{r^2}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = 0, \\ \frac{dp_\vartheta}{dt} &= \frac{p_\varphi^2 \cos \vartheta}{mr^2 \sin^3 \vartheta}. \end{aligned}$$

Функция Гамильтона здесь не зависит явно от времени, а поэтому существует первый интеграл

$$H = h$$

или, в явном виде,

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} + p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right] - \frac{\mu m}{r} = h.$$

Кроме того, уравнения движения допускают еще один первый интеграл, соответствующий циклической переменной φ

$$p_\varphi = \text{const.}$$

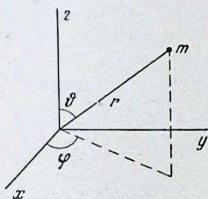


Рис. 73

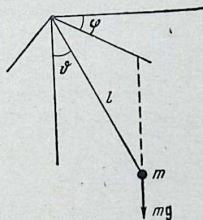


Рис. 74

Пример 41. Составить канонические уравнения Гамильтона для сферического маятника (рис. 74).

Решение. Живая сила и силовая функция точки в сферических координатах соответственно равны

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (l^2 \varphi'^2 \sin^2 \vartheta + l^2 \vartheta'^2), \\ U &= mgl \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Уравнения, определяющие импульсы через обобщенные скорости, имеют вид:

$$p_{\vartheta} = ml^2 \dot{\vartheta}', \quad p_{\varphi} = ml^2 \varphi' \sin^2 \vartheta.$$

Поэтому функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2}{l^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{l^2 \sin^2 \vartheta} \right) - mgl \cos \vartheta,$$

а канонические уравнения — в виде

$$\dot{\vartheta}' = \frac{p_{\vartheta}}{ml^2}, \quad \dot{\varphi}' = \frac{p_{\varphi}}{ml^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$\dot{p}_{\vartheta}' = \frac{p_{\varphi}^2 \cos \vartheta}{ml^2 \sin^2 \vartheta} - mgl \sin \vartheta, \quad \dot{p}_{\varphi}' = 0.$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2}{l^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{l^2 \sin^2 \vartheta} \right) - mgl \cos \vartheta = h,$$

$$p_{\varphi} = \text{const.}$$

2. Принцип Гамильтона в форме Пуанкаре

При выводе уравнений движения из принципа Гамильтона предполагалось, что независимыми являются только координаты $q_1, q_2, \dots, q_k$. Обобщенные скорости и импульсы предполагались зависимыми. Относительно вариаций координат предполагалось: а) вариации δq_i обращаются в нуль на концах интервала (при $t=t_0$ и $t=t_1$); б) вариации δq_i произвольны и независимы внутри интервала (t_0, t_1) . Французский математик и механик А. Пуанкаре (1854—1912) заметил, что при переходе с одной окольистой траектории на другую можно считать независимыми не только вариации координат, но и вариации импульсов. Справедливость такого утверждения может быть доказана, если при выполнении условий: а) на концах интервала (t_0, t_1) обращаются в нуль вариации координат и импульсов:

$$\delta q_1 = \dots = \delta q_k = 0, \quad \delta p_1 = \delta p_2 = \dots = \delta p_k = 0;$$

б) внутри интервала (t_0, t_1) вариации координат δq_i и импульсов δp_i произвольны и независимы, — из принципа Гамильтона будут следовать уравнения движения механической системы.

Записывая принцип Гамильтона в форме

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0$$

и производя варьирование подынтегральной функции

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \delta q_i' + \sum_i q_i' \delta p_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0,$$

после интегрирования по частям выражения

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta q_i' dt = \int_{t_0}^{t_1} p_i \frac{d\delta q_i}{dt} dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_i}{dt} \delta q_i dt,$$

где $p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$, представим принцип Гамильтона в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(- \sum_i p_i' \delta q_i + \sum_i q_i' \delta p_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0.$$

В сделанных предположениях интеграл обращается в нуль, если равны нулю все коэффициенты при независимых вариациях δq_i , δp_i , т. е. если выполняются равенства

$$\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad - \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

вдоль действительной интегральной кривой. Последние же представляют уравнения движения голономной механической системы, чем и доказываются справедливость принципа Гамильтона в форме Пуанкаре.

З а м е ч а н и е. Если за независимые переменные в интеграле

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum p_i q_i' - H) dt = 0$$

принять величины q_i и p_i , то мы получим новую вариационную задачу с $2k$ независимыми переменными. Для геометрического представления такого движения необходимо использовать пространство $2k$ измерений. Американский физик Д. Гиббс (1839—1903) пространство переменных p, q , в котором одна точка P определяет состояние механической системы, назвал фазовым пространством. Фазовое пространство не имеет определенной метрики, поэтому будем считать, что p и q являются ортогональными координатами $2k$ -мерного евклидова пространства. Использование фазового пространства вносит целый ряд преимуществ при изучении движения механических систем. Так, например, на многие вопросы механики нельзя дать удовлетворительного ответа, рассматривая одно частное решение, соответствующее определенным начальным данным. Необходимо знать все множество траекторий. Движение может начинаться из любой точки k -мерного простран-

ства в произвольном направлении. В фазовом пространстве задание одной точки P однозначно определяет всю траекторию. Для полного решения канонических уравнений Гамильтона необходимо знать величины q_i и p_i как функции времени t и $2k$ постоянных интегрирования, которые можно интерпретировать как значения $2k$ координат фазового пространства в момент $t=0$. Рассматривая $2k$ координат как различные измерения в фазовом пространстве, можно изобразить полное решение канонических уравнений в упорядоченном виде без пересечений, в виде бесконечного множества кривых, заполняющих $2k+1$ -мерное пространство (пересечение кривых означало бы, что в одной и той же точке возможны две касательные к кривой, а канонические уравнения при отсутствии особых точек определяют единственную касательную).

Геометрическая картина аналогична движению жидкости. В самом деле, рассмотрим движение жидкости в обычном трехмерном пространстве. Это движение можно описывать различными способами. Метод Лагранжа изучает движение жидкости в объеме, метод Эйлера рассматривает движение в каждой точке. В первом случае координаты точек являются функциями начальных значений этих координат и времени:

$$x = f_1(a, b, c, t), \quad y = f_2(a, b, c, t), \quad z = f_3(a, b, c, t),$$

а во втором рассматриваются характеристики в определенных точках пространства:

$$a = \varphi(x, y, z, t), \quad b = \psi(x, y, z, t), \quad c = \chi(x, y, z, t).$$

Скорость точки равна

$$x' = x'(x, y, z, t), \quad y' = y'(x, y, z, t), \quad z' = z'(x, y, z, t).$$

Гидродинамическая картина полностью переносится на фазовое пространство, но вместо трех координат x, y, z здесь имеется $2k$ координат q, p .

3. Элементарный вывод канонических уравнений Гамильтона

Пусть имеется механическая система с голономными идеальными связями, положение которой определяется лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$. Пусть на эту систему действуют активные силы, обладающие силовой функцией $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$. Движение такой системы определяется уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

которые могут, вместе с группой уравнений $\frac{dq_i}{dt} = q'_i$, рассматриваться как система $2k$ уравнений относительно переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, q'_2, \dots, q'_k$.

С помощью преобразования Гамильтона

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

перейдем от переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, q'_2, \dots, q'_k$ к новой системе переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$. При этом возникает вопрос о тех дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют эти новые переменные. Чтобы получить уравнения, введем функцию Гамильтона

$$H = \Sigma p_i q'_i - T - U = H(t, p, q).$$

Рассмотрим вариацию функции H при фиксированных связях (изменение функции H при переходе на соседнюю траекторию)

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_i p_i \delta q'_i + \sum_i q'_i \delta p_i - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i - \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \\ &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \end{aligned}$$

Заметим, что это равенство должно тождественно удовлетворяться для любых значений вариаций координат, а это возможно лишь в том случае, если все коэффициенты при вариациях переменных левой и правой частей совпадают. Приравнивание этих вариаций дает

$$p_i - \frac{\partial T}{\partial q'_i} = 0, \quad q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$(i = 1, 2, \dots, k).$$

Первая группа уравнений тождественно удовлетворяется в силу преобразования Гамильтона. Вторая группа

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

представляет зависимость обобщенных скоростей от координат и импульсов. Подстановка соотношений

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \text{ и } -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

в уравнения Лагранжа дает группу уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода преобразуются в канонические уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Необходимо заметить, что в соотношении

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

производные в левой части берутся в системе переменных q, q' , а в правой — в системе переменных q, p .

Если связи не зависят явно от времени, а силовая функция тождественно равна нулю, будем иметь

$$H = T|_{q' \rightarrow p}$$

и тогда

$$-\frac{\partial T}{\partial q}\bigg|_{q, q'} = \frac{\partial T}{\partial q}\bigg|_{q, p}.$$

Пример 42. Рассмотрим преобразование Гамильтона для свободной материальной точки, движущейся по инерции, положение которой задается полярными координатами ϑ и r .

Решение. Живая сила точки имеет вид

$$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\vartheta'^2),$$

а обобщенные импульсы равны

$$p_r = mr', \quad p_\vartheta = mr^2\vartheta'.$$

Функция Гамильтона

$$H = T = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right).$$

Рассмотрим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\vartheta'^2, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\vartheta^2}{mr^3} = -mr\vartheta'^2,$$

откуда сразу устанавливаем

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial r}.$$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Действие по Гамильтону и его свойства

Задача интегрирования канонических уравнений Гамильтона оказывается связанной с интегралом

$$v = \int_{t_0}^t (T + U) dt,$$

взятым вдоль действительной траектории системы в фазовом пространстве. Этот интеграл называется действием по Гамильтону.

На действительной траектории координаты и импульсы являются функциями времени и начальных значений координат и импульсов:

$$q_i = q_i(t, q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0; p_1^0, p_2^0, \dots, p_k^0),$$

$$p_i = p_i(t, q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0; p_1^0, p_2^0, \dots, p_k^0).$$

Определяя отсюда импульсы и их начальные значения, получим

$$v = v(t, q_1, \dots, q_k, q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0).$$

Запишем действие в виде

$$v = \int_{t_0}^t (\sum p_i \dot{q}_i - \sum p_i \dot{q}_i + T + U) dt = \int_{t_0}^t (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt$$

и рассмотрим вариацию действия при переходе с одной действительной траектории на другую (получающуюся изменением начальных условий)

$$\delta v = \int_{t_0}^t \left(\sum p_i \delta \dot{q}_i + \sum \dot{q}_i \delta p_i - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt.$$

Так как

$$\int_{t_0}^t p_i \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^t p_i \frac{d\delta q_i}{dt} dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \delta q_i \frac{dp_i}{dt} dt,$$

то для вариации действия получим

$$\delta v = \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i^0 \delta q_i^0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \left(- \sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = \\
& = \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i^0 \delta q_i^0 + \int_{t_0}^t \left\{ - \sum_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \sum_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right\} dt.
\end{aligned}$$

Последний интеграл на действительной траектории обращается в нуль в силу уравнений Гамильтона, поэтому будем иметь

$$\delta v = \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i^0 \delta q_i^0.$$

Это соотношение можно рассматривать как самостоятельный принцип механики, если за функцию v взять определенное выше действие по Гамильтону.

В самом деле, пусть моменты времени t и t_0 бесконечно близки, так что можно принять $t = t_0 + dt$. Тогда

$$\begin{aligned}
p_i^0 &= p_i(t - dt) = p_i(t) - \frac{dp_i}{dt} dt + \frac{d^2 p_i}{dt^2} \cdot \frac{(dt)^2}{2!} + \dots, \\
q_i^0 &= q_i(t - dt) = q_i(t) - \frac{dq_i}{dt} dt + \frac{d^2 q_i}{dt^2} \cdot \frac{(dt)^2}{2!} + \dots.
\end{aligned}$$

Применяя теорему о среднем, получим для вариации действия

$$\delta v = \delta(T + U) dt,$$

или

$$\delta v = \left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\delta v &= \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i^0 \delta q_i^0 = \sum_i p_i \delta q_i - \\
&- \sum_i \left(p_i - \frac{dp_i}{dt} dt + \dots \right) \delta \left(q_i - \frac{dq_i}{dt} dt + \dots \right).
\end{aligned}$$

Пренебрегая членами выше первого порядка малости, получим

$$\delta v = \sum_i p_i \delta q_i - \sum_i p_i \delta q_i + \sum_i \dot{p}_i \delta q_i dt + \sum_i p_i \delta \dot{q}_i dt.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим уравнения движения механической системы, совпадающие с уравнениями Лагранжа второго рода, что и доказывает утверждение. В самом деле,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

откуда, после подстановки значений p_i в первую группу уравнений, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Функция v зависит от переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0$. Варьирование этой функции дает

$$\delta v = \sum_i \frac{\partial v}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial v}{\partial q_i^0} \delta q_i^0.$$

Сравнивая результаты варьирования, получим:

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad p_i^0 = - \frac{\partial v}{\partial q_i^0} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Вторая группа этих уравнений приводит к зависимости

$$p_i^0 = p_i^0(t, q, q^0) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Если отличен от нуля определитель матрицы из вторых производных

$$\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial q_i^0 \partial q_j} \right\|,$$

отсюда можно определить координаты как функции времени, т. е. найти закон движения системы. Трудность заключается в определении самого действия v , поскольку интеграл должен рассматриваться вдоль действительной траектории, которую мы не знаем до интегрирования. Задача сводится к определению функции v . Рассматривая производную от функции v вдоль действительной траектории, будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial v}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

С другой стороны,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t (T + U) dt = T + U,$$

так что

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial v}{\partial q_i} \dot{q}_i = T + U.$$

Подставляя значение $\frac{\partial v}{\partial q_i} = p_i$, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial v}{\partial q_i}\right) = 0.$$

т. е. функция действия удовлетворяет уравнению в частных производных, которое называется уравнением Гамильтона—Якоби. Функция эта зависит от переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$ и от произвольных начальных условий $q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0$. Такая функция, удовлетворяющая уравнению в частных производных и условию, что определитель матрицы из вторых производных

$$\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial q_i^0 \partial q_j} \right\|$$

отличен от нуля, является полным интегралом уравнения в частных производных. Мы получили, что для определения движения механической системы достаточно найти полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, после чего задача определения действительного движения сводится к уравнениям:

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad p^0 = -\frac{\partial v}{\partial q_i^0} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

2. Канонические преобразования

При изучении движения механической системы, на которую наложены голономные идеальные связи, удобно пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. При этом удачный выбор параметров, определяющих положение системы, может значительно облегчить задачу исследования движения. Так, наличие циклических координат дает возможность сразу найти первые интегралы уравнений движения. Циклические координаты иногда могут быть получены преобразованием первоначальной системы обобщенных координат.

Аналогичная ситуация возникает и при изучении движения системы с помощью канонических уравнений Гамильтона. Возникает задача — найти такое преобразование фазового пространства, после которого канонические уравнения, в новых переменных, можно было бы сравнительно просто проинтегрировать.

Пусть состояние движения механической системы, на которую наложены голономные идеальные связи, определяется лагранжианами координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$ и обобщенными импульсами $p_1, p_2, \dots, p_k$. Рассмотрим преобразование к новой системе переменных $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k$, определяющей состояние движения той же механической системы. Преобразование называют каноническим, или контактным, если после преобразования канонические уравнения Гамильтона переходят в канонические уравнения для новых переменных. Пусть старые и новые переменные связаны соотношением

$$\sum p_i \delta q_i = \sum P_i \delta Q_i + \delta W,$$

где функция $W(t, q_1, q_2, \dots, q_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$ удовлетворяет условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial Q_j} \right\| \neq 0.$$

Такую функцию будем называть производящей функцией преобразования. Вычисляя вариацию функции W , отсюда будем иметь

$$\sum p_i \delta q_i = \sum P_i \delta Q_i + \sum \frac{\partial W}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial W}{\partial Q_i} \delta Q_i.$$

Это равенство должно удовлетворяться в каждый момент времени для любых вариаций переменных. Последнее условие выполняется, если в уравнении обращаются в нуль коэффициенты при вариациях одинаковых переменных, т. е.

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Полученные соотношения являются формулами преобразования переменных q_i, p_i к переменным Q_i, P_i и представляют частный случай преобразования Лежандра. Так как производящая функция W зависит от переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$, то формулы преобразования имеют вид:

$$p_i = p_i(t, q, Q), \quad P_i = P_i(t, q, Q) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Функциональный определитель матрицы $\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial Q_j} \right\|$

существует и отличен от нуля, поэтому формулы преобразования можно разрешить либо относительно новых переменных:

$$Q_i = Q_i(t, q, p), \quad P_i = P_i(t, q, p),$$

либо относительно старых переменных:

$$q_i = q_i(t, Q, P), \quad p_i = p_i(t, Q, P).$$

Для осуществления канонического преобразования достаточно задать производящую функцию преобразования.

Если, например,

$$W = \sum_i q_i Q_i,$$

то преобразование примет вид:

$$p_i = Q_i, \quad P_i = -q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

и в новых переменных лагранжевы координаты становятся импульсами, а импульсы — координатами.

Нетрудно видеть, что любые два последовательных канонических преобразования можно заменить одним, которое также будет каноническим. Для любого канонического преобразования всегда имеется обратное ему каноническое преобразование. Множеству канонических преобразований присуще свойство ассоциативности. На основании этого можно сказать, что канонические преобразования образуют группу. Нейтральным элементом группы является тождественное преобразование.

Для получения уравнений движения в новых переменных воспользуемся принципом Гамильтона в форме Пуанкаре

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0.$$

Преобразуя подынтегральное выражение к новым переменным, заметим, что

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

поэтому

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i - \frac{\partial W}{\partial t},$$

или

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \frac{dW}{dt} + \sum_i P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Принцип Гамильтона теперь запишется в форме

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dW}{dt} + \sum_i P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial W}{\partial t} - H \right) dt = 0,$$

где

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dW}{dt} dt = \delta W \Big|_{t=t_1} - \delta W \Big|_{t=t_0}.$$

Из формул преобразования видно, что вариации новых переменных линейно выражаются через вариации старых δq_i и δp_i . Последние обращаются в нуль на концах интервала при $t=t_0$ и $t=t_1$. Следовательно, и вариации δQ_i и δP_i должны обращаться в нуль на концах интервала и остаются произвольными внутри интервала. Исходя из этих соображений, получим, что на концах интервала (t_0, t_1) обращается в нуль вариация функции W , т. е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dW}{dt} dt = 0.$$

Введем новую функцию H^*

$$H^* = \frac{\partial W}{\partial t} + H, \quad H^* = H^*(t, Q, P)$$

и представим принцип Гамильтона в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Sigma (Q_i \dot{P}_i - H^*) dt = 0.$$

В новых переменных этот принцип имеет такую же структуру, как и в старых. Роль функции Гамильтона в новых переменных играет функция H^* . В силу независимости вариаций переменных Q_i и P_i внутри интервала и равенства их нулю на концах интервала, подобно тому как это делалось в старых переменных, получим уравнения движения в новых переменных:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = - \frac{\partial H^*}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Уравнения в новых переменных имеют гамильтонову форму. Следовательно, преобразование, осуществляемое с помощью производящей функции W , каноническое. Уравнения принимают наиболее простой вид в том случае, когда функция H^* тождественно равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = 0.$$

Канонические уравнения в новых переменных:

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0, \quad \frac{dP_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Отсюда сразу получаем систему первых интегралов:

$$Q_i = \text{const}, \quad P_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Производящая функция $W(t, q_1, q_2, \dots, q_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$ такого преобразования зависит от всех переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$ и k произвольных постоянных α_i . Определитель матрицы, составленной из вторых производных от этой функции

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial Q_j} \right\|,$$

существует и отличен от нуля. Кроме того, эта функция удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = 0.$$

Функция W , удовлетворяющая этим условиям, является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби. Уравнения преобразования принимают теперь вид:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Последнюю группу этих уравнений можно разрешить относительно переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$. Она определяет закон движения механической системы.

3. Бесконечно малые канонические преобразования

Рассмотрим фазовое пространство переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$. Каноническое преобразование, которое задается производящей функцией $W(t, q, Q)$, определяет множество преобразований этого пространства с помощью формул

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

если рассматривать время как некоторый параметр. Каждому значению времени соответствует свое определенное преобразование. Рассмотрим два таких преобразования, соответствующих моментам времени t и $t + \Delta t$. Каждое из этих преобразований можно рассматривать как преобразование фазового пространства самого на себя. Первое отображает некоторую точку A фазового пространства в точку B , второе — ту же точку A в некоторую другую точку B_1 . Производящая функция преобразования W является непрерывной функцией времени t . Поэтому при $\Delta t \rightarrow 0$ точка B_1 стремится к точке B .

Ввиду того что канонические преобразования обладают групповыми свойствами, переход от точки B к точке B_1 тоже осуществляется каноническим преобразованием. Таким образом, с помощью канонических преобразований каждая точка фазового пространства переходит в соседнюю близкую к ней точку, так что

$$Q_i = q_i + \Delta q_i, \quad P_i = p_i + \Delta p_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где Δq_i и Δp_i — малые величины. Подобное преобразование называется бесконечно малым каноническим преобразованием. При бесконечно малом каноническом преобразовании точки фазового пространства получают бесконечно малые смещения. Рассмотрим два бесконечно малых канонических преобразования одной и той же точки фазового пространства (Q, P) в бесконечно близкие точки фазового пространства (q, p) :

$$\sum_i p_i \delta q_i = \sum_i [P_i \delta Q_i + \delta W,$$

$$\sum_i (p_i + \Delta p_i) \delta (q_i + \Delta q_i) = \sum_i P_i \delta Q_i + \delta W_1,$$

где

$$W_1 = W(t + \Delta t, q + \Delta q, Q) = W(t, q, Q) + \\ + \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial W}{\partial t} \Delta t + \dots$$

Так как Δq_i — бесконечно малые, то, пренебрегая величинами выше первого порядка малости, получим

$$W_1 = W(t, q, Q) + \sum_i p_i \Delta q_i + \frac{\partial W}{\partial t} \Delta t.$$

Отсюда

$$\delta W_1 = \delta W + \sum \Delta q_i \delta p_i + \sum p_i \delta \Delta q_i + \delta \frac{\partial W}{\partial t} \Delta t,$$

поэтому, рассматривая разность уравнений преобразования, будем иметь

$$\sum_i \Delta p_i \delta q_i = \sum_i \Delta q_i \delta p_i + \delta \frac{\partial W}{\partial t} \Delta t.$$

Определяя из формул преобразования $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ координаты Q_i как функции q_i , p_i , t и подставляя эти значения в $\frac{\partial W}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -V(t, q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k).$$

Тогда условие канонического преобразования примет вид

$$\sum_i \Delta p_i \delta q_i = \sum_i \Delta q_i \delta p_i - \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \Delta t - \sum_i \frac{\partial V}{\partial p_i} \delta p_i \Delta t.$$

Сравнивая коэффициенты при δq_i и δp_i в предыдущем соотношении, будем иметь:

$$\Delta p_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \Delta t, \quad \Delta q_i = \frac{\partial V}{\partial p_i} \Delta t \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Эти уравнения в явном виде определяют бесконечно малое каноническое преобразование. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

которые являются каноническими уравнениями Гамильтона, если V — функция Гамильтона. Таким образом, в фазовом пространстве движение системы можно представить как непрерывную последо-

вательность канонических преобразований, т. е. как задачу о преобразовании координат.

З а м е ч а н и е. Точки (q, p) и (Q, P) связаны формулами канонического преобразования, которому в случае $(Q_i = \text{const}, P_i = \text{const})$ соответствует производящая функция W , удовлетворяющая уравнению $\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$. Тогда V будет совпадать с функцией Гамильтона.

4. Теорема Лиувилля

Т е о р е м а. (1838 г.). Произвольно выделенный в момент t_0 объем σ фазового пространства, ограниченный контрольной поверхностью Σ , не изменяется при движении системы, в то время как сама контрольная поверхность деформируется и перемещается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим элементарный объем фазового пространства $d\sigma = dq_1 dq_2 \dots dq_k dp_1 dp_2 \dots dp_k$. Тогда интеграл $\int d\sigma$, взятый по области фазового пространства, ограниченной контрольной поверхностью Σ , будет равен ее объему. Покажем инвариантность интеграла по отношению к каноническому преобразованию переменных $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$ к новым переменным $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k$. После преобразования объем, ограниченный поверхностью Σ , перейдет в новый объем $\int dQ_1 dQ_2 \dots dQ_k dP_1 dP_2 \dots dP_k$, ограниченный той же поверхностью. Преобразуя этот интеграл к старым переменным, имеем

$$\int dQ_1 dQ_2 \dots dQ_k dP_1 dP_2 \dots dP_k = \int |D| dq_1 dq_2 \dots dq_k dp_1 dp_2 \dots dp_k,$$

где

$$D = \frac{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)}$$

якобиан преобразования. Неизменяемость объема будет, очевидно, обеспечена, если этот якобиан равен единице.

Но

$$\begin{aligned} & \frac{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)} = \\ & = \frac{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k)} \cdot \frac{D(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \frac{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)} = \\ & = (-1)^k \frac{D(P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k)} \cdot \frac{D(p_1, p_2, \dots, p_k)}{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k)}. \end{aligned}$$

Переменные P, Q и q, p связаны каноническим преобразованием:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

поэтому:

$$\frac{D(P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k)} = (-1)^k \left| \frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial q_j} \right|,$$

$$\frac{D(p_1, p_2, \dots, p_k)}{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k)} = \left| \frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial q_j} \right|,$$

откуда

$$\frac{D(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k)}{D(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)} = 1,$$

и объем, ограниченный поверхностью Σ , остается неизменным при перемещении в фазовом пространстве.

5. Теорема Якоби

Мы установили, что для построения общего интеграла канонических уравнений Гамильтона достаточно найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. К. Якоби принадлежит следующая замечательная теорема:

Теорема. Если известен полный интеграл

$$W(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \alpha_{k+1}$$

уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k}) = 0,$$

то $2k$ независимых первых интегралов канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

определяются равенствами

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Доказательство. Пусть $W = W(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \alpha_{k+1}$ — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Покажем, что уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = -\beta_i$$

являются первыми интегралами канонических уравнений Гамильтона. Рассмотрим сначала соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \beta_i = 0,$$

и покажем, что оно сохраняет постоянное значение вдоль действительной траектории. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим производную по времени

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \beta_i \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial \alpha_i} \cdot \frac{dq_s}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (a)$$

Последние равенства представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно величин q'_s . Определитель матрицы

$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial \alpha_i} \right\|$ этой системы существует и не равен нулю, а следовательно, система имеет единственное решение. С другой стороны, функция W является интегралом уравнения Гамильтона — Якоби и при подстановке в уравнение Гамильтона — Якоби обращает его в тождество. Дифференцируя тождество по α_i , получим систему алгебраических уравнений относительно величин $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ уравнений

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (b)$$

Коэффициенты уравнений (a) и (b) совпадают, поэтому будут совпадать и решения, откуда

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Эти равенства представляют уравнения Гамильтона, чем и доказывается утверждение для данной группы уравнений.

Обращаясь теперь к первой группе равенств $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ и дифференцируя их по времени, находим

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial q_i} - \sum_s \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial q_i} \cdot \frac{dq_s}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (c)$$

Дифференцируя уравнение Гамильтона — Якоби по q_i , получим другую систему уравнений

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_s \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (d)$$

Сравнивая (c) и (d), заметим, что они полностью совпадают, если имеют место уравнения

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Последние тождественно выполняются на действительной траектории системы, что и доказывает теорему Якоби.

Задача определения общего интеграла канонических уравнений Гамильтона сводится теперь к нахождению полного интеграла уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби.

6. Интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби

Метод Имшенецкого разделения переменных. Общего метода нахождения полного интеграла уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби не существует, однако при некоторых условиях оказывается возможным сравнительно просто найти полный интеграл, причем нахождение его сводится к интегрированию системы k обыкновенных дифференциальных уравнений с одной зависимой переменной каждое. Последние полностью интегрируются. Такого рода задачи называются задачами с разделяющимися переменными. Метод решения уравнений в частных производных с разделяющимися переменными был предложен русским математиком и механиком В. Г. Имшенецким (1832—1892). Этот метод обобщает известные теоремы Лиувилля и Штеккеля.

Метод Имшенецкого применим к уравнениям Гамильтона — Якоби, в которых может быть выделена одна из переменных, например q_1 , после чего уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left[t, f \left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1} \right), q_2, q_3, \dots, q_k, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_k} \right] = 0.$$

Тогда полный интеграл этого уравнения можно представить в виде

$$V = \varphi(q_1, \alpha_1) + W(t, q_2, q_3, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

где $\varphi(q_1, \alpha_1)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$f \left(q_1, \frac{d\varphi}{dq_1} \right) = \alpha_1, \quad \alpha_1 = \text{const},$$

а $W(t, q_2, q_3, \dots, q_k)$ — полный интеграл уравнения в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H \left(t, \alpha_1, q_2, q_3, \dots, q_k, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k} \right) = 0.$$

В самом деле, такая функция V удовлетворяет уравнению Якоби и зависит от всех переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$ и произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, а W — полный интеграл уравнения в частных производных, поэтому определитель Гесса для функции W существует и отличен от нуля, т. е.

$$\left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\rho} \right| \neq 0 \quad (\sigma, \rho = 2, 3, \dots, k).$$

Определитель Гесса для функции V теперь принимает вид

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial \alpha_1} & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\rho} \right| \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial \alpha_1} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_\sigma \partial \alpha_\rho} \right|$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (\sigma, \rho = 2, 3, \dots, k).$$

Он отличен от нуля, так как $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial \alpha_1} \neq 0$ (Φ является интегралом уравнения $f\left(\Phi, \frac{d\Phi}{dq_1}\right) = \alpha_1$), а это означает, что функция V действительно является полным интегралом исходного уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Частные случаи: 1. Координата q_1 является циклической, так что $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$. Тогда $f = \frac{\partial V}{\partial q_1}$, а полный интеграл имеет вид

$$V = \alpha_1 q_1 + W(t, q_2, q_3, \dots, q_k),$$

где функция W — полный интеграл уравнения в частных производных

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_2, q_3, \dots, q_k, \alpha_1, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 0.$$

2. Функция Гамильтона H не зависит явно от времени:

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0.$$

Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$V = -ht + W(q_1, q_2, \dots, q_k),$$

где функция W — полный интеграл уравнения в частных производных

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h.$$

Пример 43. Методом Гамильтона — Якоби исследовать движение планеты в центральном ньютоновском поле притяжения (рис. 75).

Решение. Выбирая за лагранжевы переменные сферические координаты r, ψ, ϑ , для живой силы будем иметь

$$T = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \vartheta'^2 + r^2 \psi'^2 \sin^2 \vartheta),$$

а силовая функция ньютоновского поля тяготения $U = \frac{\mu m}{r}$. Выражая обобщенные импульсы через обобщенные скорости

$$p_r = mr', \quad p_\vartheta = mr^2\vartheta', \quad p_\psi = mr^2\psi' \sin^2 \vartheta$$

и полагая $m = 1$, получим для функции Гамильтона значение

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\psi^2 \right) - \frac{\mu}{r}.$$

Для определения закона движения планеты необходимо найти полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = 0.$$

Здесь время не входит явно в функцию Гамильтона, а координата ψ — циклическая. Поэтому полный интеграл можно искать в виде

$$V = -ht + \alpha_1 \psi + W(r, \vartheta),$$

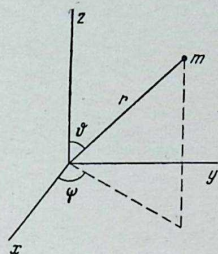


Рис. 75

где $W(r, \vartheta)$ — полный интеграл уравнения в частных производных

$$-h + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] - \frac{\mu}{r} = 0.$$

Выделяя отсюда группу членов с переменной ϑ

$$f\left(\vartheta, \frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta},$$

полный интеграл W получим в виде

$$W = \varphi(\vartheta) + \Phi(r),$$

где $\varphi(\vartheta)$ и $\Phi(r)$ — решения дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha_2^2,$$

$$-h + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r} = 0.$$

Из последних уравнений находим:

$$\varphi(\vartheta) = \int_0^\vartheta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta, \quad \Phi(r) = \int_0^r \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr.$$

Таким образом, полный интеграл исходного уравнения Гамильтона — Якоби получает вид

$$V = -ht + \alpha_1 \psi + \int_0^{\vartheta} V \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \\ + \int_0^r V \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_3$$

и зависит от переменных ψ , ϑ , r , произвольных постоянных h , α_1 , α_2 и аддитивной постоянной α_3 . На основании теоремы Якоби общий интеграл канонических уравнений движения получим из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Вторую группу этих уравнений можно представить в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t + \int_0^r \frac{dr}{V \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = -\beta_1, \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \psi - \int_0^{\vartheta} \frac{\alpha_1 d\vartheta}{\sin^2 \vartheta V \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta}}} = -\beta_2, \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \int_0^{\vartheta} \frac{\alpha_2 d\vartheta}{V \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta}}} - \int_0^r \frac{\alpha_2 dr}{r^2 V \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = -\beta_3.$$

Из первого уравнения определяется r как функция времени и произвольных постоянных

$$r = r(t, h, \alpha_2, \beta_1).$$

Третье уравнение, после подстановки r , дает

$$\vartheta = \vartheta(t, h, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

и, наконец, из второго имеем

$$\psi = \psi(t, h, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Эти три уравнения полностью определяют закон движения планеты в переменных r , ψ , ϑ .

З а м е ч а н и е. Определенная здесь функция V является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби, если функциональный определитель $\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right|$ существует и отличен от нуля. Для рассматриваемой задачи этот определитель имеет вид

$$\Delta = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial \vartheta} & 1 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial r} & \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial \vartheta} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial r} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial \vartheta}.$$

Подставляя сюда значения производных, получим

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} \cdot \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \vartheta}}}.$$

Определитель не существует, если обращается в нуль один из корней, стоящих в знаменателе правой части. Он обращается в нуль, когда $\alpha_2 = 0$. При этих условиях функция V не является полным интегралом для рассматриваемой задачи и не определяет первых интегралов канонических уравнений Гамильтона. Оставшаяся группа уравнений дает систему первых интегралов уравнений движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= \alpha_1 = p_\psi, \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= \frac{\sqrt{\alpha_2^2 \sin^2 \vartheta - \alpha_1^2}}{\sin \vartheta} = p_\vartheta, \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\sqrt{2\mu r + 2hr - \alpha_2^2}}{r} = p_r, \end{aligned}$$

первый из которых представляет закон сохранения момента количества движения относительно оси z

$$p_\psi = r^2 \psi' \sin^2 \vartheta = \alpha_1.$$

Второй из первых интегралов дает закон изменения момента количества движения в подвижной плоскости, вращающейся вокруг оси z . Его можно записать в виде

$$\alpha_2^2 \sin^2 \vartheta - \alpha_1^2 = p_\vartheta^2 \sin^2 \vartheta,$$

или

$$\alpha_2 = r^2 \sqrt{\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \vartheta}.$$

По последний интеграл — интеграл живых сил. В самом деле,

$$\sqrt{2\mu r + 2hr - \alpha_2^2} = p_r r,$$

или

$$2\mu r + 2hr^2 - \alpha_2^2 = p_r^2 r^2,$$

так что

$$\frac{\mu}{r} + h = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2^2}{r^2} + p_r^2 \right).$$

Подставляя сюда значение α_2 , получим

$$\frac{\mu}{r} + h = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) + p_r^2 \right],$$

чем и доказывается наше утверждение.

Пример 44. Теорема Лиувилля. Лиувилль показал, что уравнения движения механической системы с голономными идеальными связями интегрируются в квадратурах, если живая сила и силовая функция имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k A_i(q_i) \right] \left[\sum_{i=1}^k B_i(q_i) \dot{q}_i^2 \right],$$

$$U = \frac{\sum_{i=1}^k U_i(q_i)}{\sum_{i=1}^k A_i(q_i)}.$$

Доказательство. Для определения импульсов будем иметь уравнения

$$p_i = \left[\sum_{s=1}^k A_s(q_s) \right] B_i(q_i) \dot{q}_i' \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

и тогда для функции Гамильтона находим выражение

$$H = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^k A_i(q_i)} \sum_{i=1}^k \frac{p_i^2}{B_i(q_i)} - \frac{\sum_{i=1}^k U_i(q_i)}{\sum_{i=1}^k A_i(q_i)}.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби запишется следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k A_i(q_i)} \sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2B_j(q_j)} \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)^2 - U_j(q_j) \right] = 0.$$

Так как время не входит явно в функцию Гамильтона, то полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби можно искать в виде

$$V = -ht + W(q_1, q_2, \dots, q_k).$$

Функция W представляет собой полный интеграл уравнения в частных производных

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^k A_i(q_i)} \sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2B_j(q_j)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \right)^2 - U_j(q_j) \right] = h,$$

которое можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{2B_i(q_i)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 - U_i(q_i) - hA_i(q_i) \right] = 0.$$

В последнем уравнении переменные полностью разделены, поэтому его можно переписать как

$$\sum_{i=1}^k f_i \left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) = 0,$$

где

$$f_i = \frac{1}{2B_i(q_i)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 - U_i(q_i) - hA_i(q_i).$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \dots + W_k(q_k),$$

где $W_i(q_i)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{dW_i}{dq_i} = \sqrt{2B_i(q_i) [U_i(q_i) + hA_i(q_i) + \alpha_i]},$$

т. е.

$$W_i = \int \sqrt{2B_i(q_i) [U_i(q_i) + hA_i(q_i) + \alpha_i]} dq_i.$$

Следовательно, полный интеграл исходного уравнения Гамильтона — Якоби запишется следующим образом:

$$V = -ht + \sum_{i=1}^k \int \sqrt{2B_i(q_i) [U_i(q_i) + hA_i(q_i) + \alpha_i]} dq_i,$$

где постоянные α_i подчинены условию

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0.$$

Полагая $\alpha_k = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1})$, получим систему первых интегралов уравнений движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial h} &= -t + \sum_{i=1}^k \int \frac{A_i(q_i) \sqrt{B_i(q_i)} dq_i}{\sqrt{2U_i(q_i) + 2hA_i(q_i) + 2\alpha_i}} = -\beta_1, \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} &= \int \frac{\sqrt{B_i(q_i)} dq_i}{\sqrt{2U_i(q_i) + 2hA_i(q_i) + 2\alpha_i}} = \end{aligned}$$

$$-\int \frac{\sqrt{B_k(q_k)} dq_k}{\sqrt{2U_k(q_k) + 2hA_k(q_k) + 2\alpha_k}} = -\beta_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, k-1),$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sqrt{2B_i(q_i)[U_i(q_i) + hA_i(q_i) + \alpha_i]} = p_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, k).$$

Пример 45. С помощью метода Гамильтона — Якоби найти общее решение задачи о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа — Пуассона ($A=B \neq C$, $\xi=\eta=0$, $\zeta>0$) (рис. 76).

Решение. Живая сила твердого тела

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2),$$

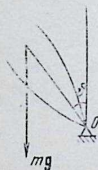


Рис. 76

а силовая функция

$$U = -mg\zeta \cos \vartheta.$$

Для проекций угловой скорости на оси, неизменно связанные с твердым телом, имеем

$$p = \psi' \sin \vartheta \sin \varphi + \vartheta' \cos \varphi, \quad q = \psi' \sin \vartheta \cos \varphi - \vartheta' \sin \varphi,$$

$$r = \psi' \cos \vartheta + \varphi',$$

откуда

$$p^2 + q^2 = \psi'^2 \sin^2 \vartheta + \vartheta'^2,$$

и живая сила твердого тела получит вид

$$T = \frac{1}{2} [A(\psi'^2 \sin^2 \vartheta + \vartheta'^2) + C(\psi' \cos \vartheta + \varphi')^2].$$

Принимая углы Эйлера за обобщенные координаты, вычислим значения импульсов:

$$p_\varphi = C(\psi' \cos \vartheta + \varphi') = Cr,$$

$$p_\vartheta = A\vartheta',$$

$$p_\psi = A\psi' \sin^2 \vartheta + C(\psi' \cos \vartheta + \varphi') \cos \vartheta = A\psi' \sin^2 \vartheta + Cr \cos \vartheta.$$

Так как связи не зависят явно от времени, функция Гамильтона будет иметь вид

$$H = T - U |_{q' \rightarrow p},$$

или

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_\varphi^2}{C} + \frac{p_\vartheta^2}{A} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta)^2}{A \sin^2 \vartheta} \right] + mg\zeta \cos \vartheta.$$

Для решения задачи о движении твердого тела достаточно найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{C} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{A \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right)^2 \right] + mg\zeta \cos \vartheta = 0.$$

Здесь время не входит явно в функцию Гамильтона, а координаты φ и ψ являются циклическими, поэтому полный интеграл можно искать в виде

$$V = -ht + \alpha_1 \varphi + \alpha_2 \psi + W(\vartheta),$$

где функция $W(\vartheta)$ является решением дифференциального уравнения, которое получим подстановкой в исходное уравнение Гамильтона — Якоби вместо V его выражения

$$-h + \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_1^2}{C} + \frac{1}{A} \left(\frac{dW}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{1}{A \sin^2 \vartheta} (\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2 \right] + mg\zeta \cos \vartheta = 0,$$

или

$$\left(\frac{dW}{d\vartheta} \right)^2 = 2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{\alpha_1^2 A}{C} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta},$$

откуда

$$W = \int \sqrt{2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{\alpha_1^2 A}{C} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta.$$

Для полного интеграла теперь имеем

$$V = -ht + \alpha_1 \varphi + \alpha_2 \psi + \int \sqrt{2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{\alpha_1^2 A}{C} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta.$$

Закон движения твердого тела определится системой первых интегралов:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t + \int \frac{Ad\vartheta}{\sqrt{2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{\alpha_1^2 A}{C} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}} = -\beta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \varphi + \int \frac{\left(-\frac{\alpha_1 A}{C} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \right) d\vartheta}{\sqrt{2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{\alpha_1^2 A}{C} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}} = -\beta_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \psi - \int \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta) d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{\alpha_1^2 A}{C} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}} = -\beta_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \alpha_1 = p_\varphi, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \alpha_2 = p_\psi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \sqrt{2Ah - 2mgA\zeta \cos \vartheta - \frac{a_1^2 A}{C} - \frac{(a_2 - a_1 \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}} = p_\vartheta,$$

которые сводят задачу к эллиптическим квадратурам.

Исследование этих квадратур было подробно проведено нами выше.

Пример 46. Исследовать движение частицы массы m с электрическим зарядом e в электромагнитном поле, считая, что напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ (E_x, E_y, E_z), а напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ (H_x, H_y, H_z).

Решение. Пусть v — скорость частицы. Электрическое поле действует на частицу с силой F , компоненты которой

$$X_1 = -eE_x, \quad Y_1 = -eE_y, \quad Z_1 = -eE_z.$$

Сила F_1 , с которой магнитное поле действует на частицу, определяется по формуле

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{e}{c} [\mathbf{H}, \mathbf{v}],$$

где c — скорость света. Тогда для проекций результирующей силы получим:

$$F_x = -eE_x - \frac{e}{c} (z'H_y - y'H_z), \quad F_y = -eE_y - \frac{e}{c} (x'H_z - z'H_x),$$

$$F_z = -eE_z - \frac{e}{c} (y'H_x - x'H_y).$$

Заметим, что по своей структуре электромагнитная сила, действующая на частицу, напоминает силу Кориолиса.

Уравнения движения частицы можно привести к лагранжевой форме, если ввести функцию Лагранжа

$$L = T + U + A_x x' + A_y y' + A_z z',$$

где $T = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, а члены A_x, A_y, A_z зависят лишь от координат и времени. Тогда уравнения Лагранжа в переменных x, y, z примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = mx' + A_x,$$

так что

$$mx'' + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} x' + \frac{\partial A_x}{\partial y} y' + \frac{\partial A_x}{\partial z} z' - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} x' - \\ - \frac{\partial A_y}{\partial x} y' - \frac{\partial A_z}{\partial x} z' = 0,$$

или

$$mx'' + \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) y' + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) z' = 0.$$

Если ввести в рассмотрение вектор

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

проекции которого определяются из матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{array} \right\|,$$

так что

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

то уравнение получит вид

$$mx'' - \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} - H_z y' + H_y z' = 0.$$

Если принять условие, что

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} \equiv 0,$$

то будем иметь

$$mx'' = \frac{\partial U}{\partial x} + H_z y' - H_y z'.$$

Чтобы уравнения Лагранжа описывали движение такой частицы, достаточно записать функцию Лагранжа в виде

$$L = T + U + \frac{e}{c} (A_x x' + A_y y' + A_z z'),$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial x} = eE_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = eE_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = eE_z$$

и

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Уравнения движения можно записать в каноническом виде. Преобразования Гамильтона здесь принимают вид

$$p_x = mx' + \frac{e}{c} A_x,$$

или

$$p_i = mx'_i + \frac{e}{c} A_i,$$

так что для функции Гамильтона будем иметь

$$H = \sum_i p_i x'_i - L = \sum_i mx_i'^2 + \frac{e}{c} \sum_i A_i x'_i - T - U - \frac{e}{c} \sum_i A_i x'_i = T - U,$$

или

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 - U.$$

Канонические уравнения Гамильтона получают вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - A_i \right)^2 - U = 0.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных.

7. Скобки Пуассона

Рассмотрим некоторые свойства первых интегралов канонических уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Функция $f(t, q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k) = c$ называется первым интегралом канонических уравнений Гамильтона, если она сохраняет постоянное значение для любого конкретного движения системы (постоянная c меняется при переходе от одного движения системы к другому). Производная от функции f , взятая в силу системы канонических уравнений, тождественно обращается в нуль, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv 0.$$

Очевидно, что если функции $f_1, f_2, \dots, f_k$ являются первыми интегралами уравнений движения, то произвольная функция от этих интегралов

$$F(f_1, f_2, \dots, f_k)$$

также будет первым интегралом. В дальнейшем нас будут интересовать только независимые интегралы. Метод Пуассона дает возможность по двум первым интегралам канонических уравнений Гамильтона найти еще один первый интеграл (он может вообще, оказаться некоторой функцией двух первых).

Чтобы пояснить метод, введем понятие скобок Пуассона. Пусть имеются две произвольные функции $\varphi(t, q, p)$ и $\psi(t, q, p)$. Выражение

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \equiv (\varphi, \psi)$$

называется скобками Пуассона.

Условие, что функция $f(t, q, p)$ является первым интегралом канонических уравнений Гамильтона, с помощью скобок Пуассона запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

Из определения скобок Пуассона вытекают следующие их свойства:

- 1) $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$;
- 2) $(C\varphi, \psi) = C(\varphi, \psi), \quad C = \text{const};$
- 3) $(\varphi + \psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi)$;
- 4) $(\chi, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, \chi)) + (\psi, (\chi, \varphi)) \equiv 0$;

$$5) \frac{\partial}{\partial t} (\varphi, \psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

Свойства эти очевидны, за исключением соотношения (4), называемого тождеством Пуассона. Доказать его можно непосредственным вычислением двойных скобок Пуассона. Можно также воспользоваться следующими соображениями. Заметим, что в скобке $(\chi, (\varphi, \psi))$ операция дифференцирования выполняется дважды над функциями φ и ψ , а вся скобка представляет линейную однородную функцию производных второго порядка от φ и ψ . Таким образом, левая часть тождества Пуассона является линейной функцией вторых производных от всех трех функций φ, ψ и χ . Соберем вместе члены, содержащие вторые производные от χ . Они войдут в выражение

$$(\varphi, (\psi, \chi)) + (\psi, (\chi, \varphi)) = (\varphi, (\psi, \chi)) - (\psi, (\varphi, \chi)).$$

Введем линейные дифференциальные операторы

$$A(f) = (\varphi, f) \text{ и } B(f) = (\psi, f).$$

Тогда

$$(\varphi, (\psi, \chi)) - (\psi, (\varphi, \chi)) = A(B(\chi)) - B(A(\chi)) = (AB - BA)(\chi).$$

Легко видеть, что такая комбинация линейных операторов не может содержать вторых производных от χ . В самом деле, обозначая, для упрощения вычислений, координаты и импульсы через x_k и представляя

$$A = \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad B = \sum_k \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

будем иметь:

$$AB = \sum_{k,j} \alpha_k \beta_j \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k,j} \alpha_k \frac{\partial \beta_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$BA = \sum_{k,j} \beta_k \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k,j} \beta_k \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Разность этих операторов

$$AB - BA = \sum_{k,j} \left(\alpha_k \frac{\partial \beta_j}{\partial x_k} - \beta_k \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

есть снова оператор, содержащий только первые производные. Таким образом, в левой части тождества Пуассона сокращаются все члены со вторыми производными от χ . То же самое относится, очевидно, и к функциям φ и ψ . Следовательно, левая часть тождественно равна нулю.

Теорема Пуассона. Если f и g — первые интегралы канонических уравнений Гамильтона, то скобка Пуассона $(f, g) = \text{const}$ также является первым интегралом этих уравнений.

Доказательство. Если f и g — первые интегралы, то для них выполняются соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (g, H) = 0.$$

Из пятого свойства скобок Пуассона теперь имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right).$$

Подставляя в правую часть значения производных $\frac{\partial f}{\partial t}$ и $\frac{\partial g}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (f, g) = -((f, H), g) - (f, (g, H)) = ((H, f), g) + ((g, H), f),$$

или, на основании тождества Пуассона,

$$\frac{\partial}{\partial t} (f, g) = -((f, g), H).$$

Последнее равенство означает, что скобка (f, g) является первым интегралом канонических уравнений.

Теорема Пуассона дает правило, позволяющее из двух первых интегралов получать третий. При этом не всегда получается новый интеграл. Часто оказывается, что скобка Пуассона от двух первых интегралов или является линейной функцией уже найденных интегралов, или тождественно обращается в нуль.

§ 4. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

1. Исторические замечания

Уравнения движения механических систем можно получать исходя из весьма различных положений, которые могут рассматриваться как основные принципы механики. Эти принципы должны полностью характеризовать движение системы и быть эквивалент-

ными всей системе дифференциальных уравнений движения. Все законы механики системы материальных точек, на которую наложены идеальные связи, могут быть получены из принципа Даламбера — Лагранжа (общего уравнения динамики). Тем не менее представляет интерес преобразовать общее уравнение динамики так, чтобы получить новую форму, эквивалентную этому уравнению, но отличающуюся от него по структуре. Новые формы либо допускают некоторые обобщения, выходящие за рамки узко механических задач, либо дают возможность получить новые формы дифференциальных уравнений движения. С теоретической точки зрения новые формы в некоторых случаях позволяют обнаруживать общие свойства системы, которые не всегда очевидны в первоначальной формулировке принципа. Полученный новый принцип может быть принят за основной закон, и из него можно вывести все свойства движения, если только он правильно отображает природу.

Первые основные принципы механики связаны с именами Галилея, Ньютона, Лагранжа. В основу механики эти ученые положили понятия пространства, времени, силы и массы. Так, принцип Галилея — Ньютона определяет силу как причину, вызывающую движение материального тела. Законы Ньютона создают основу дальнейшего развития механики. С их помощью можно проанализировать любые механические движения.

Даламбер, Эйлер и Лагранж создали принцип, основанный на сравнении движений. Этот принцип изучает мгновенное состояние движения и возможные отклонения от этого состояния, допускаемые связями в данный момент времени (возможные перемещения). Для механических систем с голономными идеальными связями из этого принципа непосредственно следуют уравнения движения — уравнения Лагранжа второго рода.

Гамильтоном был предложен другой принцип, сравнивающий движения за конечный промежуток времени. Сравнимые движения происходят за один и тот же промежуток времени в соответствии с наложенными на систему связями. Принцип содержит в себе всю механику систем с голономными идеальными связями. Из аналитического выражения принципа видно, что он содержит такие физические понятия, которые не связаны с определенной лагранжевой системой переменных $q_1, q_2, \dots, q_n$. Достоинство его заключается еще и в том, что он легко распространяется на немеханические системы. Последнее обстоятельство дает возможность переносить результаты и методы исследования из механики в различные области физики, и наоборот.

Свойства механических движений могут быть выведены из других принципов. Из многих принципов, предлагавшихся до настоящего времени, представляет интерес принцип наименьшего действия в форме Якоби.

Принципы не всегда вносят новое физическое содержание в механику или упрощают практическое решение механических задач.

Тем не менее они в ряде случаев более удобны для общего анализа движения. Так, интегральные принципы Гамильтона и Якоби позволили построить такой метод интегрирования уравнений динамики, благодаря которому было решено много задач, представлявшихся до того неразрешимыми.

Впервые вариационный принцип для физической проблемы был отчетливо сформулирован в геометрической оптике в XVII в. французским математиком Пьером Ферма (1601—1665), автором знаменитой теоремы о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где n — целое число, большее двух, не имеет решения в целых положительных числах. Принцип Ферма является обобщением известного принципа Герона об отражении света и основан на положении, что природа действует наиболее легкими и доступными путями. Этот принцип заключается в том, что действительный путь распространения света есть тот, для прохождения которого свету требуется минимальное время по сравнению с другими мыслимыми путями между теми же точками. Математическое выражение принципа следует из определения скорости $v = \frac{ds}{dt}$, откуда, обозначая через A_0 и A_1 начальную и конечную точки, будем иметь

$$t = \int_{A_0}^{A_1} \frac{ds}{v}.$$

Условие минимума времени дает математическую трактовку принципа

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} \frac{ds}{v} = 0.$$

Президент Берлинской академии наук, французский математик Мопертюи (1698—1759) сформулировал принцип, который назвал «общим законом природы». Согласно принципу Мопертюи, всякое изменение в природе происходит таким образом, что количество действия, необходимое на это изменение, является наименьшим. Природа как бы «экономит» свое действие. Под количеством действия Мопертюи понимал произведение массы точки на ее скорость и пройденный путь, т. е.

$$M = m v ds.$$

Заслуга аналитического оформления этого принципа принадлежит швейцарскому математику Леонарду Эйлеру, долгое время работавшему в Петербурге и в Берлине. Он определил действие в виде интеграла

$$A = \int_{A_0}^{A_1} v ds,$$

взятого по дуге траектории, соединяющей начальную и конечную точки. По Эйлеру, этот интеграл имеет наименьшее значение для любого отрезка истинной траектории по сравнению со смежными кривыми, имеющими те же концы.

Лагранж распространил принцип Эйлера на систему материальных точек. Полное математическое обоснование этого принципа принадлежит К. Якоби.

Принцип наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа менее общий, чем принцип Гамильтона. Он применим лишь к системам, у которых связи не зависят явно от времени, а силы обладают силовой функцией, не зависящей явно от времени.

2. Принцип Лагранжа

Пусть имеется механическая система материальных точек, на которую наложены голономные идеальные связи, не зависящие явно от времени, а силы обладают силовой функцией U . Для такой системы существует интеграл живых сил

$$T = U + h, \quad (a)$$

где постоянная h имеет значение полной механической энергии системы, не меняющейся во все время движения. Будем рассматривать лишь такие движения, переводящие систему из положения A_0 в положение A_1 , которые совершаются с одним и тем же запасом механической энергии h .

Принцип Лагранжа утверждает, что интеграл

$$\int_{A_0}^{A_1} \sum_i m_i v_i ds_i$$

имеет минимальное значение на действительной траектории, если рассматриваемые движения обладают одним и тем же запасом энергии.

Преобразуем подынтегральное выражение, разделив и умножив его на dt ,

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i ds_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 dt = T dt.$$

Тогда принцип Лагранжа запишется в виде

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} T dt = 0,$$

т. е. интеграл от кинетической энергии системы на действительной траектории принимает экстремальное значение, если сравниваемые движения обладают одной и той же полной энергией. При этих условиях движение по действительной и сравниваемой траекториям

происходит вообще за разное время. Время достижения точки A_1 оказывается различным.

Если через t_0 обозначить момент начала движения системы из положения A_0 , а через t —момент прохождения через положение A_1 , то математическая формулировка принципа может быть представлена уравнением

$$\delta \int_{t_0}^t T dt = 0$$

при условии, что все движения происходят с одинаковым запасом энергии h .

Задача определения действительного движения системы сводится теперь к отысканию условного экстремума интеграла с подвижным верхним пределом. Вариации координат уже не являются независимыми и связаны условием

$$\delta T - \delta U = 0.$$

В таком виде задачу впервые рассмотрел в 1815 г. испанский математик Оленд Родригес (1794—1851), применивший метод неопределенных множителей Лагранжа (независимо от Родригеса, позднее этой же задачей занимался английский механик Раус). Метод неопределенных множителей сводится здесь к отысканию безусловного экстремума интеграла от функции

$$\Phi = T + \lambda (T - U - h),$$

после чего принцип можно сформулировать следующим образом:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^t \Phi dt = 0,$$

или

$$\delta \int_{t_0}^t [T + \lambda (T - U - h)] dt = 0,$$

и метод сводится к отысканию экстремума интеграла с подвижным верхним концом. Все сравниваемые траектории совпадают на концах интервала, проходя через точку A_1 в различные моменты времени, поэтому для вариаций координат в точках A_0 и A_1 будем иметь:

$$\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = 0, \quad \delta x_1 = \delta y_1 = \delta z_1 = 0,$$

или, переходя к обобщенным координатам,

$$\delta q_{i0} = 0, \quad \delta q_{i1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

В курсах вариационного исчисления показывается, что вариация функционала с подвижными концами имеет вид

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \\ + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t=t_1} - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t=t_0} - \left(\Phi - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t \Big|_{t=t_0} + \\ + \left(\Phi - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t \Big|_{t=t_1},$$

где t_1 — момент прохождения *действительной траектории* через точку A_1 (рис. 77). В нашем случае все сравниваемые движения начинаются в один и тот же момент времени, поэтому $\delta t_0 = 0$. Тогда формула для экстремума функционала получает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left(\Phi - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t \Big|_{t=t_1} = 0.$$

Действительная траектория дает экстремум функционала $\int_{t_0}^{t_1} \Phi dt$ среди всех допустимых траекторий, а следовательно, и среди траекторий, проходящих через точки A_0 и A_1 за одно и то же время. Тогда

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt = 0,$$

т. е. на действительной траектории удовлетворяются уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

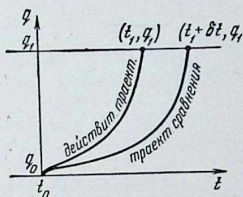


Рис. 77

которые называются уравнениями Эйлера, а основное условие экстремума записывается в форме

$$\Phi - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big|_{t=t_1} = 0$$

и называется условием трансверсальности. Записывая последнее условие в явном виде, будем иметь

$$T + \lambda(T - U - h) - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \lambda \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big|_{t=t_1} = 0.$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, обращается в нуль, так как для сравниваемых траекторий имеет место интеграл энергии.

Кроме того, в силу независимости связей от времени, живая сила T является однородной квадратичной формой от обобщенных скоростей. Тогда по теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' = 2T,$$

после чего условие трансверсальности приобретает вид

$$-T - 2\lambda T = 0,$$

откуда $\lambda = -\frac{1}{2}$, а функция Φ равна

$$\Phi = \frac{1}{2}L + h_1,$$

где

$$h_1 = \frac{h}{2}.$$

После подстановки этого значения в уравнения Эйлера получим уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Эти уравнения подтверждают справедливость принципа наименьшего действия в форме Лагранжа.

После Лагранжа принцип наименьшего действия сначала не оказывал практического действия на развитие науки. Его рассматривали как математический курьез, как интересный, но излишний придаток к ньютоновской механике. Пуассон (1837) называл его «бесполезным правилом», и лишь после исследований Томсона, Тэта, Кирхгофа и других механиков оказалось, что принцип является важным инструментом при решении задач гидродинамики. В 1867 г. Томсон и Тэт показали, что принцип имеет большое значение для развития многих разделов физики. Как оказалось впоследствии, он играет существенную роль в теории относительности, но при его применении необходимо соблюдать осторожность при формулировке условий на концах.

3. Принцип наименьшего действия в форме Якоби

Наиболее аккуратное изложение принципа дал К. Якоби. В лекциях по динамике, которые он читал в 1843—1844 гг., говорится о том, что принцип наименьшего действия трудно понять, так как обычно забывают об исключении времени с помощью интеграла живых сил. После такого исключения все рассмотрение сводится к пространственным элементам.

Переходя к изложению принципа наименьшего действия в форме Якоби, будем предполагать, что положение механической системы в каждый момент времени определяется лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$, а наложенные на систему связи не зависят явно от времени. Будем, кроме того, предполагать, что силы, действующие на точки системы, консервативны. При сделанных предположениях живая сила системы будет однородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей

$$2T = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где коэффициенты a_{ij} зависят только от координат $q_1, q_2, \dots, q_k$.

Движение изучаемой системы происходит в соответствии с интегралом живых сил

$$T = U + h,$$

в котором $U = U(q_1, \dots, q_k)$ — силовая функция.

В пространстве обобщенных координат ($q_1, q_2, \dots, q_k$) введем метрику, определив квадрат длины дуги ds^2 с помощью положительно-определенной квадратичной дифференциальной формы

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} dq_i dq_j,$$

где коэффициенты a_{ij} те же, что и в выражении живой силы. Каждому положению системы в пространстве обобщенных координат будет отвечать точка. Пусть P_0 и P_1 — два положения системы материальных точек в этом пространстве. Задача заключается в отыскании действительной траектории, соединяющей точки P_0 и P_1 , по которой система будет двигаться из положения P_0 в положение P_1 при заданных силах и заданной величине полной энергии системы h .

Принцип Якоби утверждает, что на действительной траектории интеграл

$$\int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)} ds$$

принимает стационарное значение, иначе говоря, вариация интеграла обращается в нуль

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)} ds = 0.$$

Принцип Якоби является дальнейшим развитием принципа Лагранжа. В самом деле, если $ds^2 = 2T dt^2$, то

$$\int_{P_0}^{P_1} 2T dt = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2T} \sqrt{2T} dt = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2T} ds = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)} ds,$$

поэтому из соотношения

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} 2T dt = 0$$

следует

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)} ds = 0,$$

если соответствующим образом определен класс сравниваемых траекторий и исключено полностью время.

Чтобы убедиться в том, что принцип наименьшего действия является фундаментальным принципом механики, необходимо показать, что он может быть получен из других принципов и что из него следуют уравнения движения механических систем (в предположении, что связи не зависят явно от времени, а силы консервативны). Заметим, что принцип Якоби не является непосредственным следствием принципа Гамильтона, так как экстремали в обоих принципах определяются при совершенно различных предположениях. Тем не менее принцип Якоби можно получить исходя из принципа Гамильтона, если наложить определенные ограничения на рассматриваемую систему.

В самом деле, рассмотрим механическую систему, на которую наложены голономные идеальные связи, не зависящие явно от времени. Движение такой системы происходит в соответствии с законом живых сил

$$T = U + h.$$

Пусть в момент t_0 система находится в положении A , а в момент t_1 — в положении B . Тогда, в соответствии с принципом Гамильтона, на действительной траектории интеграл $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ принимает

стационарное значение среди всех допускаемых связями траекторий, соединяющих точки A и B за то же время. Переходя к новой независимой переменной $\tau = f(t)$, преобразуем этот интеграл к виду

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} L' d\tau,$$

где $t' = \frac{dt}{d\tau}$. Преобразование обобщенных скоростей дает

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\tau} : \frac{dt}{d\tau} = \frac{q'}{t'}.$$

Введем функцию

$$L_1 = L\left(q_1, q_2, \dots, q_k, \frac{q'_1}{t'}, \frac{q'_2}{t'}, \dots, \frac{q'_k}{t'}\right) t',$$

рассматривая ее как функцию Лагранжа для задачи о движении системы с $k+1$ степенью свободы, положение которой определяется параметрами $q_1, q_2, \dots, q_h, t$. Так как связи, наложенные на первоначальную систему, не зависят явно от времени, то и функция L_1 не зависит явно от t , и t является циклической координатой для L_1 . Применяя метод Рауса игнорирования циклических координат к переменной t , рассмотрим циклический интеграл

$$\frac{\partial L_1}{\partial t'} = \text{const},$$

который можно представить в виде

$$\frac{\partial L_1}{\partial t'} = L - t' \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\dot{q}_i}{t'^2} = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = -h.$$

Этот интеграл равносителен интегралу живых сил исходной механической системы

$$T - U = h.$$

Рассматривая функцию Рауса $R = L_1 - \frac{\partial L_1}{\partial t'} t'$, сведем задачу к системе с k степенями свободы, где роль функции Лагранжа уже играет функция Рауса R , откуда переменная t' исключена с помощью циклического интеграла $T - U = h$. Величина h должна оставаться одной и той же для всех сравниваемых траекторий, что накладывает ограничения на переменную t . Задача сводится к отысканию движения в пространстве k переменных, где роль времени играет τ , а роль функции Лагранжа — функция R , не зависящая явно от τ . Параметр τ следует выбирать так, чтобы движение по всем траекториям происходило с одной и той же энергией h , начинаясь в момент τ_0 и заканчиваясь в момент τ_1 . Записывая для такого движения принцип Гамильтона, будем иметь

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} R d\tau = 0.$$

$$R = L_1 - \frac{\partial L_1}{\partial t'} t' = Lt' - Lt' + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i t' = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i t' = 2Tt',$$

поэтому принцип Гамильтона примет следующий вид:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} 2Tt' d\tau = 0,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2t'^2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2.$$

Тогда

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 \frac{1}{t'} d\tau = 0.$$

Живая сила рассматриваемой системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2t'^2} \sum a_{ij} q'_i q'_j,$$

а интеграл живых сил

$$\frac{1}{2t'^2} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = U + h,$$

откуда

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2(U+h)}} \cdot \frac{ds}{d\tau}.$$

Но тогда из принципа Гамильтона имеем

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \frac{ds}{d\tau} d\tau = 0.$$

Итак, принципу Якоби можно придать следующую трактовку:

Если система вынуждена двигаться, сохраняя постоянную энергию $T-U=h$, то ее действительная траектория представляет собой экстремаль интеграла

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \frac{ds}{d\tau} d\tau$$

среди всех траекторий, определенных двумя крайними положениями системы, соответствующими значениям τ_0 и τ_1 параметра τ .

Пример 47. Записать принцип Якоби для системы с одной степенью свободы, живая сила которой $T = q'^2/2$ и силовая функция $U = q^2/2$.

Решение. Функция Лагранжа запишется в виде

$$L = \frac{1}{2} (q'^2 + q^2),$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{q'^2}{t'} + q^2 t' \right), \quad \frac{\partial L_1}{\partial t'} = \frac{1}{2} \left(-\frac{q'^2}{t'^2} + q^2 \right) = -h,$$

откуда

$$t' = \frac{q'}{\sqrt{q^2 + 2h}} = \frac{q'}{\sqrt{2(U+h)}}.$$

Функция Рауса

$$R = 2Tt' = \frac{q'^2 \sqrt{2(U+h)}}{q'} = q' \sqrt{2(U+h)},$$

и принцип Якоби для этой системы

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \frac{dq}{d\tau} d\tau = 0.$$

Вывод уравнений движения из принципа Якоби. Так как предполагается, что движение по всем сравниваемым траекториям происходит с одним и тем же запасом энергии h , то необходимо ввести такой параметр, чтобы начальным и конечным точкам траекторий соответствовали одни и те же значения этого параметра. С этой целью рассмотрим семейство поверхностей

$$\lambda(q_1, q_2, \dots, q_k) = \text{const},$$

каждая из которых пересекает все сравниваемые траектории и на каждой из которых остается неизменной новая независимая переменная τ . Пусть через точки P_0 и P_1 проходят поверхности $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$ (рис. 78). Рассматривая последовательность поверхностей вдоль траекторий, на каждой траектории определим зависимость лагранжевых координат от параметра λ

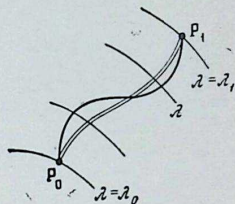


Рис. 78

$$q_\sigma = q_\sigma(\lambda) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, k)$$

так, чтобы для всех траекторий начальное и конечное значения параметра λ были одинаковыми.

За возможное перемещение системы примем перемещение с одной траектории на другую по поверхности $\lambda = \text{const}$. Тогда на концах интервала движения при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$ будем иметь

$$\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_k = 0.$$

Внутри же интервала вариации координат δq_σ могут принимать произвольные значения. Вариационный принцип Якоби получает теперь вид вариационной задачи с неподвижными концами

$$\delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{2(U+h)} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = 0$$

и аналогичен принципу Гамильтона. Роль функции Лагранжа играет

$$\Phi = \sqrt{2(U+h)} \frac{ds}{d\lambda},$$

откуда уже исключено время, а выражение $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2$ по своей структуре напоминает удвоенную живую силу. В самом деле,

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \sum_{ij} a_{ij} \frac{dq_i}{d\lambda} \cdot \frac{dq_j}{d\lambda}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = q'_i, \quad 2\theta = \sum_{ij} a_{ij} q'_i q'_j.$$

Тогда

$$\Phi = \sqrt{2(U+h)} \sqrt{2\theta},$$

а уравнения Эйлера для вариационной задачи примут вид

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial q'} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0,$$

или, после вычисления частных производных,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\sqrt{2(U+h)}}{\sqrt{2\theta}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial q'_i} \right] - \frac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2(U+h)}} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_i} - \\ - \frac{\sqrt{2(U+h)}}{\sqrt{2\theta}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Параметр λ отличается от времени движения по различным траекториям, поэтому для θ , вообще говоря, не существует зависимости вида

$$T = U + h$$

на всех траекториях, и вообще

$$\theta \neq U + h,$$

поэтому до вычисления частных производных мы не можем производить сокращений.

После того как частное дифференцирование выполнено, последовательности моментов времени t на действительной траектории сопоставим однозначно последовательность значений λ так, чтобы всюду выполнялось условие

$$\lambda = t,$$

где t — время движения системы по действительной траектории. На действительной траектории теперь будем иметь

$$\theta = T,$$

а для T справедлив закон живых сил

$$T = U + h,$$

поэтому

$$\frac{\sqrt{2(U+h)}}{\sqrt{2T}} = 1.$$

Уравнения Эйлера, определяющие экстремаль, перейдут в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

т. е. в самые общие уравнения, описывающие движение механической системы с голономными идеальными связями. Этим доказывается принцип наименьшего действия в форме Якоби.

4. Оптико-механическая аналогия

Одним из важнейших открытий аналитической механики является оптико-механическая аналогия, обнаруженная Гамильтоном, который установил одинаковый вид канонических уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

для консервативных механических систем и для волновой теории света Гюйгенса. Дальнейшая разработка оптико-механической аналогии связана с именами Якоби, Пуанкаре, Гельмгольца, Четаева. Оптико-механическая аналогия играет немалую роль и при разработке современных проблем аналитической механики.

Сравним сначала оптический принцип Ферма с принципом наименьшего действия Якоби. Согласно принципу Ферма, луч в неоднородной среде распространяется по такому пути, чтобы время его движения

$$t = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{v}$$

было минимальным, т. е. для действительного пути луча должно выполняться условие

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{v} = 0.$$

Вводя коэффициент преломления света в среде $\mu = \frac{c}{v}$,

где c — скорость света в пустоте, запишем этот принцип в виде

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \mu ds = 0.$$

С другой стороны, для одной материальной точки принцип наименьшего действия Якоби дает

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{2(U+h)} ds = 0.$$

Сравнивая эти два принципа, можно заметить, что траектория светового луча совпадает с траекторией точки, если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$n\mu = \sqrt{2(U+h)},$$

где n — коэффициент пропорциональности. При $n=1$ будем иметь

$$\mu^2 = 2(U+h).$$

Полагая, что вблизи поверхности Земли показатель преломления μ является линейной функцией высоты z

$$\mu = \mu_0 \left(1 - k \frac{z}{H}\right),$$

где H — высота атмосферы, получим

$$\mu_0^2 \left(1 - k \frac{z}{H}\right)^2 = 2(U+h),$$

или

$$2(U+h) = \mu_0^2 - 2\mu_0^2 k \frac{z}{H} + k^2 \mu_0^2 \frac{z^2}{H^2}.$$

Считая отношение $\frac{z}{H}$ малым и пренебрегая членами второго порядка малости, находим отсюда (с точностью до аддитивной постоянной)

$$U = -\mu_0^2 k \frac{z}{H}.$$

Следовательно, луч света движется как материальная точка, находящаяся под действием силы с силовой функцией, линейной относительно z . Такой вид имеет силовая функция для силы тяжести вблизи поверхности Земли. При произвольных начальных условиях тяжелая точка движется вблизи поверхности Земли по параболе с вертикальной осью. Такой же вид будет иметь и путь светового луча. Это предположение остается справедливым при всех существующих гипотезах о природе света.

Аналогия между динамическими уравнениями и волновой теорией света была предложена Гамильтоном. В основе лежит предположение, что свет распространяется волновым фронтом, теория которого была разработана Христианом Гюйгенсом еще в 1690 г.

Пусть имеется оптически изотропная среда. В этой среде рассмотрим две близкие точки: $P(x, y, z)$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Время, в течение которого свет распространяется из точки P в точку P_1 , является функцией координат точек

$$t_1 - t = V(x, y, z, x_1, y_1, z_1). \quad (a)$$

Функцию V Гамильтон назвал характеристической. Принцип Гюйгенса заключается в том, что каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, является, в свою очередь, центром вторичных волн; поверхность, огибающая эти вторичные волны, указывает положение фронта действительно распространяющейся волны. Поэтому если Σ является фронтом световой волны в момент t , то огибающая Σ_1 вторичных волн, центрами которых являются точки, расположенные на Σ , представляет фронт волны в момент t_1 (рис. 79). В изотропной среде световой луч распространяется по нормали к волновому фронту. Обозначая через (α, β, γ) направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ к поверхности волнового фронта Σ в точке P , а через $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}_1$ в точке P_1 волнового фронта Σ_1 , запишем уравнение поверхности Σ в виде

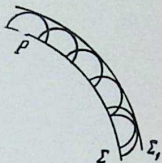


Рис. 79

$$\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z = 0, \quad (b)$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ — бесконечно малое перемещение вдоль поверхности Σ .

Характеристическая функция V сохраняет постоянное значение вдоль поверхности Σ , поэтому при неизменном времени получим

$$\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z = 0. \quad (c)$$

Сравнивая (b) и (c), получим

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\beta} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\gamma} = \kappa. \quad (d)$$

Аналогичное соотношение будем иметь для фронта волны Σ_1

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\alpha_1} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y_1}}{\beta_1} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z_1}}{\gamma_1} = \kappa_1. \quad (e)$$

Из уравнений (a), (d), (e) и тождеств

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \quad (f)$$

можно найти величины $x_1, y_1, z_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ как функции от $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, что полностью определяет поведение светового луча в сре-

де. Таким образом, функция V определяет изменение системы световых лучей.

Переход от переменных $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ к переменным $x_1, y_1, z_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ можно рассматривать как преобразование переменных. Преобразование это является каноническим, или контактным (Софус Ли). В самом деле, функция V определяет преобразование поверхности Σ в поверхность Σ' . Дифференцируя V , получим

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} dz_1 = \kappa (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) + \kappa_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1), \quad (g)$$

а это и есть условие канонического преобразования.

Пусть u — скорость распространения света в точке P , направленная ортогонально к фронту волны Σ , а ds — путь, который проходит луч света из точки P за время dt . Тогда $ds = u dt$. Положив скорость распространения света в пустоте равной единице, для показателя преломления среды в точке P будем иметь $\mu = \frac{1}{u}$.

Тогда

$$dt = \frac{ds}{u} = \mu ds = \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) ds = \mu (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz).$$

Рассуждая аналогично, для перемещения луча из точки P_1 получим

$$dt_1 = \mu_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1),$$

а изменение характеристической функции V равно

$$dV = dt_1 - dt = \mu_1 (\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1) - \mu (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz).$$

Сравнивая это с (g), находим

$$\kappa_1 = \mu_1, \quad \kappa = -\mu,$$

т. е. коэффициент пропорциональности κ представляет собой показатель преломления. Введем новую систему переменных:

$$\xi = \mu\alpha, \quad \eta = \mu\beta, \quad \zeta = \mu\gamma,$$

$$\xi_1 = \mu_1\alpha_1, \quad \eta_1 = \mu_1\beta_1, \quad \zeta_1 = \mu_1\gamma_1.$$

Тогда

$$dV = \xi_1 dx_1 + \eta_1 dy_1 + \zeta_1 dz_1 - (\xi dx + \eta dy + \zeta dz). \quad (h)$$

Функция V определяет преобразование переменных $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ в переменные $x_1, y_1, z_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$. Распространение света по лучу представляется как каноническое преобразование.

Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование на малом интервале времени $\Delta t = t_1 - t$. Положим:

$$x_1 = x + u \Delta t, \quad y_1 = y + v \Delta t, \quad z_1 = z + w \Delta t,$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi + f \Delta t, & \eta_1 &= \eta + g \Delta t, & \zeta_1 &= \zeta + h \Delta t, \\ V &= W \Delta t.\end{aligned}\tag{i}$$

Тогда уравнение (h) примет вид

$$\begin{aligned}dV &= dW \Delta t = (\xi_1 dx_1 + \eta_1 dy_1 + \zeta_1 dz_1) - (\xi dx + \eta dy + \zeta dz) = \\ &= (\xi + f \Delta t) d(x + u \Delta t) + \dots - (\xi dx + \eta dy + \zeta dz) = \\ &= \Delta t (\xi du + \eta dv + \zeta dw + f dx + g dy + h dz) + \text{чл. высш. пор.}\end{aligned}$$

Отсюда, пренебрегая малыми величинами, получим

$$dW = f dx + g dy + h dz + d(\xi u + \eta v + \zeta w) - (u d\xi + v d\eta + w d\zeta).$$

Вводя обозначение

$$-H = W - (\xi u + \eta v + \zeta w),$$

будем иметь

$$d(-H) = f dx + g dy + h dz - (u d\xi + v d\eta + w d\zeta).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}d(-H) &= -\frac{\partial H}{\partial x} dx - \frac{\partial H}{\partial y} dy - \frac{\partial H}{\partial z} dz - \frac{\partial H}{\partial \xi} d\xi - \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial H}{\partial \zeta} d\zeta.\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых дифференциалах, получим:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H}{\partial x} &= f, & -\frac{\partial H}{\partial y} &= g, & -\frac{\partial H}{\partial z} &= h, \\ \frac{\partial H}{\partial \xi} &= u, & \frac{\partial H}{\partial \eta} &= v, & \frac{\partial H}{\partial \zeta} &= w.\end{aligned}$$

В силу формул (i) в пределе будем иметь:

$$\begin{aligned}f &= \frac{d\xi}{dt}, & g &= \frac{d\eta}{dt}, & h &= \frac{d\zeta}{dt}, \\ u &= \frac{dx}{dt}, & v &= \frac{dy}{dt}, & w &= \frac{dz}{dt},\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{d\zeta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \\ * \quad \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta}.\end{aligned}$$

По форме эти уравнения совпадают с уравнениями Гамильтона. Вся система может рассматриваться как аналитическое выражение

бесконечно малого преобразования, определяющего перемещение волнового фронта из данного положения в бесконечно близкое.

Используя волновую теорию света, Гамильтон получил возможность написать уравнения динамики в форме, зависящей лишь от одной функции H . Дальнейшим развитием теории распространения света занимались Коши, Кирхгоф, Максвелл, Гельмгольц и другие физики. Коши поставил задачу о дальнейшем развитии оптико-механической аналогии. В рамках аналитической механики этой задачей занимался немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925). Развитие аналогии следует искать в области колебательных движений, поскольку свет представляет некоторый колебательный процесс. Аналогией между математической теорией света Коши и устойчивыми движениями голономных консервативных систем занимался Н. Г. Четаев (1902—1959), но рассмотрение этих вопросов выходит за рамки нашего курса.

5. Принцип наименьшего принуждения Гаусса

В начале XIX в. получил большое развитие метод обработки наблюдений — метод наименьших квадратов. В аналитической механике он приводит к новому общему принципу. В 1829 г. Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) опубликовал свой знаменитый мемуар, в котором дал доказательство принципа наименьшего принуждения. (Это была единственная работа Гаусса по аналитической механике.) Как замечает сам Гаусс, каждый новый принцип вносит новую точку зрения на законы природы. По мнению Гаусса, его принцип имеет то преимущество, что обнимает одинаковым образом как законы движения, так и законы покоя.

Доказательство принципа, которое дает Гаусс, не содержит явного выражения вида связей (это доказательство приводится во II томе аналитической механики Лагранжа). По-видимому, Болотов первым обратил внимание на необходимость строго определить понятие возможного перемещения при распространении принципа Гаусса на неголономные системы. Болотов рассматривал линейные неголономные связи. Позднее Н. Г. Четаев распространил принцип Гаусса на нелинейные неголономные связи.

Рассмотрим систему материальных точек m_v (x_v , y_v , z_v), на которые действуют активные силы X_v , Y_v , Z_v и наложены связи вида

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \dot{x}'_j + b_{ij} \dot{y}'_j + c_{ij} \dot{z}'_j) + l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где через $\dot{x}'_j$, $\dot{y}'_j$, $\dot{z}'_j$ обозначены производные по времени от соответствующих координат, а коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} и l_i являются функциями времени и координат.

Наиболее общим принципом динамики, позволяющим отбрасывать

действительные движения среди возможных, является принцип Даламбера — Лагранжа, аналитическая запись которого имеет вид

$$\sum_v [(m_v \dot{x}_v - X_v) \delta x_v + (m_v \dot{y}_v - Y_v) \delta y_v + (m_v \dot{z}_v - Z_v) \delta z_v] = 0.$$

Определим возможные перемещения системы при неголономных связях как перемещения, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \delta x_j + b_{ij} \delta y_j + c_{ij} \delta z_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Эти условия, очевидно, содержат в себе и определения возможного перемещения для голономных связей. Возможные перемещения стеснены m условиями связей, так что независимых перемещений будет $3n - m$.

Координаты точек механической системы в действительном движении изменяются в соответствии с наложенными на систему связями. В этом смысле координаты системы тождественно удовлетворяют условиям связи. Дифференцируя по времени уравнения связи, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{x}_j + b_{ij} \ddot{y}_j + c_{ij} \ddot{z}_j) + A_i(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (a)$$

где A_i представляют совокупность членов, не зависящих от ускорений.

Характер движения системы из заданного состояния зависит от активных сил, действующих на систему. Силы эти сообщают ускорения точкам системы. Ускорения стеснены уравнениями связи.

Изменяя для данного состояния системы действующие силы, мы будем изменять ускорения, оставляя неизменными, в данный момент, координаты и скорости.

Мыслимыми движениями системы будем называть такие движения, которые может совершать система при наложенных на нее связях, если изменять силы. Действительное движение всегда будет одним из мыслимых. Обозначая через $\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v$ ускорения в мыслимом движении, будем иметь следующие условия для мыслимых движений:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \bar{x}_j + b_{ij} \bar{y}_j + c_{ij} \bar{z}_j) + A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (b)$$

где координаты и скорости те же, что и в действительном движении. Вычитая уравнения (b) из уравнений (a), получим

$$\sum_{j=1}^n [a_{ij} (\ddot{x}_j - \bar{x}_j) + b_{ij} (\ddot{y}_j - \bar{y}_j) + c_{ij} (\ddot{z}_j - \bar{z}_j)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

откуда видим, что разности ускорений действительного и мыслимого движений удовлетворяют тем же условиям, что и возможные перемещения системы. Это значит, что среди возможных перемещений системы найдутся пропорциональные разностям ускорений, т. е.

$$\begin{aligned}\delta x_v &= \varepsilon (x_v'' - \bar{x}_v''), & \delta y_v &= \varepsilon (y_v'' - \bar{y}_v''), \\ \delta z_v &= \varepsilon (z_v'' - \bar{z}_v'') \quad (v = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}\quad (c)$$

Освободим систему от r последних связей. Будем предполагать, что движение той же системы стеснено $m-r$ связями

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j'' + b_{ij} y_j'' + c_{ij} z_j'') + A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-r).$$

Движение «освобожденной» системы, которое система будет совершать под действием сил X_v, Y_v, Z_v (тех же сил, что и в действительном движении), будем называть действительным освобожденным движением. Обозначим через $\tilde{x}_v'', \tilde{y}_v'', \tilde{z}_v''$ ускорения точек в действительном освобожденном движении. Ускорения эти подчинены условиям

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \tilde{x}_j'' + b_{ij} \tilde{y}_j'' + c_{ij} \tilde{z}_j'') + A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-r).$$

В соответствии со связями, возможные перемещения для освобожденного движения будут удовлетворять условиям

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \delta^* x_j + b_{ij} \delta^* y_j + c_{ij} \delta^* z_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-r).$$

Среди возможных перемещений освобожденной системы будут находиться и возможные перемещения неосвобожденной системы, среди которых есть перемещения, пропорциональные разностям ускорений действительного и мыслимого движений. Следовательно, и среди возможных перемещений освобожденного движения найдутся перемещения, пропорциональные разностям ускорений действительного и мыслимого движений, т. е.

$$\begin{aligned}\delta^* x_v &= \eta (x_v'' - \bar{x}_v''), & \delta^* y_v &= \eta (y_v'' - \bar{y}_v''), \\ \delta^* z_v &= \eta (z_v'' - \bar{z}_v'') \quad (v = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}\quad (d)$$

Как мы заметили выше, движение системы с идеальными связями подчиняется принципу Даламбера — Лагранжа

$$\sum_v [(m_v x_v'' - X_v) \delta x_v + (m_v y_v'' - Y_v) \delta y_v + (m_v z_v'' - Z_v) \delta z_v] = 0.$$

Этот принцип справедлив при любых возможных перемещениях. Следовательно, он будет справедлив и при перемещениях, определяемых равенствами (с), после подстановки которых получим

$$\varepsilon \sum_v [(m_v \ddot{x}_v - X_v) (\ddot{x}_v - \bar{\ddot{x}}_v) + (m_v \ddot{y}_v - Y_v) (\ddot{y}_v - \bar{\ddot{y}}_v) + (m_v \ddot{z}_v - Z_v) (\ddot{z}_v - \bar{\ddot{z}}_v)] = 0, \quad (e)$$

Принцип Даламбера — Лагранжа справедлив и для освобожденных систем, поэтому будем иметь

$$\sum_v [(m_v \ddot{\tilde{x}}_v - X_v) \delta^* x_v + (m_v \ddot{\tilde{y}}_v - Y_v) \delta^* y_v + (m_v \ddot{\tilde{z}}_v - Z_v) \delta^* z_v] = 0.$$

Поскольку и в этом случае принцип справедлив для любых возможных перемещений, то он справедлив и для перемещений (d). Подстановка этих перемещений в последнее уравнение дает

$$\eta \sum_v [(m_v \ddot{\tilde{x}}_v - X_v) (\ddot{x}_v - \bar{\ddot{x}}_v) + (m_v \ddot{\tilde{y}}_v - Y_v) (\ddot{y}_v - \bar{\ddot{y}}_v) + (m_v \ddot{\tilde{z}}_v - Z_v) (\ddot{z}_v - \bar{\ddot{z}}_v)] = 0. \quad (f)$$

Вычитая теперь (f) из (e), получим

$$\sum_v m_v [(\ddot{x}_v - \ddot{\tilde{x}}_v) (\ddot{x}_v - \bar{\ddot{x}}_v) + (\ddot{y}_v - \ddot{\tilde{y}}_v) (\ddot{y}_v - \bar{\ddot{y}}_v) + (\ddot{z}_v - \ddot{\tilde{z}}_v) (\ddot{z}_v - \bar{\ddot{z}}_v)] = 0. \quad (g)$$

Это соотношение дает возможность сравнивать действительные движения системы с освобожденным и мыслимым. Предварительно выполним некоторые преобразования вида

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_v - \ddot{\tilde{x}}_v) (\ddot{x}_v - \bar{\ddot{x}}_v) &= \ddot{x}_v^2 - \ddot{x}_v \bar{\ddot{x}}_v - \ddot{\tilde{x}}_v \ddot{x}_v + \ddot{\tilde{x}}_v \bar{\ddot{x}}_v = \\ &= \frac{1}{2} (\ddot{x}_v^2 - 2\ddot{x}_v \bar{\ddot{x}}_v + \bar{\ddot{x}}_v^2) - \\ &- \frac{1}{2} (\ddot{\tilde{x}}_v^2 - 2\ddot{\tilde{x}}_v \ddot{x}_v + \ddot{x}_v^2) + \frac{1}{2} (\ddot{\tilde{x}}_v^2 - 2\ddot{\tilde{x}}_v \ddot{x}_v + \ddot{x}_v^2) \end{aligned}$$

вместе с аналогичными преобразованиями для координат y и z . В результате будем иметь:

$$(\ddot{x}_v - \ddot{\tilde{x}}_v) (\ddot{x}_v - \bar{\ddot{x}}_v) = \frac{1}{2} [(\ddot{x}_v - \bar{\ddot{x}}_v)^2 + (\ddot{x}_v - \ddot{\tilde{x}}_v)^2 - (\bar{\ddot{x}}_v - \ddot{\tilde{x}}_v)^2],$$

$$(\ddot{y}_v - \ddot{\tilde{y}}_v) (\ddot{y}_v - \bar{\ddot{y}}_v) = \frac{1}{2} [(\ddot{y}_v - \bar{\ddot{y}}_v)^2 + (\ddot{y}_v - \ddot{\tilde{y}}_v)^2 - (\bar{\ddot{y}}_v - \ddot{\tilde{y}}_v)^2],$$

$$(\ddot{z}_v - \ddot{\tilde{z}}_v) (\ddot{z}_v - \bar{\ddot{z}}_v) = \frac{1}{2} [(\ddot{z}_v - \bar{\ddot{z}}_v)^2 + (\ddot{z}_v - \ddot{\tilde{z}}_v)^2 - (\bar{\ddot{z}}_v - \ddot{\tilde{z}}_v)^2].$$

Если ввести теперь обозначения:

$$A_{d\partial} = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} [(x_v'' - \tilde{x}_v'')^2 + (y_v'' - \tilde{y}_v'')^2 + (z_v'' - \tilde{z}_v'')^2],$$

$$A_{d\mu} = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} [(x_v'' - \bar{x}_v'')^2 + (y_v'' - \bar{y}_v'')^2 + (z_v'' - \bar{z}_v'')^2],$$

$$A_{\mu\partial} = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} [(\tilde{x}_v'' - \bar{x}_v'')^2 + (\tilde{y}_v'' - \bar{y}_v'')^2 + (\tilde{z}_v'' - \bar{z}_v'')^2],$$

то равенство (g) можно переписать в виде

$$A_{d\mu} + A_{d\partial} - A_{\mu\partial} = 0.$$

Каждое слагаемое этого соотношения неотрицательно. Следовательно, должны выполняться условия

$$A_{d\mu} \leq A_{\mu\partial}, \quad A_{d\partial} \leq A_{\mu\partial}.$$

Первое из них утверждает, что отклонение действительного движения от мыслимого не больше, чем отклонение освобожденного движения от мыслимого. Второе неравенство (неравенство Э. Маха (1838—1916))

$$A_{d\partial} \leq A_{\mu\partial}$$

представляет собой обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса, которому можно придать следующую формулировку:

Действительным является то из мыслимых движений, для которого отклонение от освобожденного движения принимает наименьшее значение.

Будем рассматривать независимые ускорения $q_1'', q_2'', \dots, q_{3n-m}''$. Сравнивая мыслимые движения с действительным освобожденным, будем менять независимые ускорения в классе мыслимых. Тогда

$$A_{\mu\partial} = A_{\mu\partial}(\bar{q}_1'', \bar{q}_2'', \dots, \bar{q}_{3n-m}'').$$

Условие экстремума функции $A_{\mu\partial}^1$ сводится к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial A_{\mu\partial}^1}{\partial \bar{q}_s''} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

Это и есть основные уравнения движения. При выполнении условий экстремума мыслимое движение становится действительным, $A_{\mu\partial} \rightarrow A_{d\partial}$, поэтому уравнения получают вид

$$\frac{\partial A_{d\partial}}{\partial q_j''} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

Эти уравнения не включают понятия силы. Если предположить систему освобожденной от всех связей, то для действительного освобожденного движения будем иметь:

$$m_v \ddot{x}_v = X_v, \quad m_v \ddot{y}_v = Y_v, \quad m_v \ddot{z}_v = Z_v \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Определяя из этих уравнений ускорения действительного освобожденного движения, получим выражение для «принуждения» по Гауссу

$$A = A_{d\partial} = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} \left[\left(\ddot{x}_v - \frac{X_v}{m_v} \right)^2 + \left(\ddot{y}_v - \frac{Y_v}{m_v} \right)^2 + \left(\ddot{z}_v - \frac{Z_v}{m_v} \right)^2 \right],$$

а условия минимума примут вид

$$\frac{\partial A}{\partial q_v''} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

Эти уравнения называются обобщенными уравнениями Аппеля. Они определяют движение механической системы, на которую наложены голономные или неголономные связи. Функцию «принуждения» A можно представить в виде

$$A = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} (\ddot{x}_v^2 + \ddot{y}_v^2 + \ddot{z}_v^2) - \sum_{v=1}^n (\ddot{x}_v X_v + \ddot{y}_v Y_v + \ddot{z}_v Z_v) + A^*,$$

где A^* не зависит от действительных ускорений. Первый член этого выражения называют «энергией ускорения» по аналогии с кинетической энергией

$$S = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{2} (\ddot{x}_v^2 + \ddot{y}_v^2 + \ddot{z}_v^2).$$

После подстановки функции S уравнения Аппеля преобразуются к следующей форме:

$$\frac{\partial S}{\partial q_v''} - \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_v''} + Y_i \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial q_v''} + Z_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial q_v''} \right) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

Введем обозначение

$$\sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial q_v''} + Y_i \frac{\partial \ddot{y}_i}{\partial q_v''} + Z_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial q_v''} \right) = Q_v \quad (v = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

Для систем с голономными связями величины Q_v совпадают с введенными ранее обобщенными силами. В самом деле,

$$\begin{aligned}x_v &= x_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \\x'_v &= \frac{\partial x_v}{\partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q'_s, \\x''_v &= \frac{\partial^2 x_v}{\partial t^2} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_s \partial t} q'_s + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 x_v}{\partial t \partial q_s} q'_s + \\&+ \sum_{s,r=1}^k \frac{\partial^2 x_v}{\partial q_s \partial q_r} q'_s q'_r + \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q''_s,\end{aligned}$$

откуда видно, что

$$\frac{\partial x''_v}{\partial q''_s} = \frac{\partial x_v}{\partial q_s},$$

а тогда

$$\begin{aligned}&\sum_{v=1}^n \left(X_v \frac{\partial x''_v}{\partial q''_s} + Y_v \frac{\partial y''_v}{\partial q''_s} + Z_v \frac{\partial z''_v}{\partial q''_s} \right) = \\&= \sum_{v=1}^n \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) = Q_s.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения Аппеля* записываются в виде

$$\frac{\partial S}{\partial q''_s} = Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, 3n - m).$$

Мы рассмотрели определение обобщенных сил для голономных связей. Рассмотрим теперь случай, когда на систему материальных точек наложены неголономные связи. Предположим, что положение системы определяется k параметрами $q_1, q_2, \dots, q_k$, так что

$$\begin{aligned}x_v &= x_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \quad y_v = y_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \\z_v &= z_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k) \quad (v = 1, 2, \dots, n)\end{aligned} \quad (i)$$

и, кроме того, на систему наложены неголономные связи в виде неинтегрируемых соотношений

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} x'_j + b_{ij} y'_j + c_{ij} z'_j) + l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (j)$$

* Уравнения впервые получены французским математиком и механиком П. Аппелем (1855—1930) в 1899 г.

Дифференцируя по времени уравнения (i) и подставляя в (j), получим:

$$x'_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial x_v}{\partial t}, \quad y'_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_v}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial y_v}{\partial t},$$

$$z'_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_v}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial z_v}{\partial t},$$

откуда

$$\sum_{j=1}^n \left[a_{ij} \left(\sum_{s=1}^k \frac{\partial x_j}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) + b_{ij} \left(\sum_{s=1}^k \frac{\partial y_j}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial y_j}{\partial t} \right) + c_{ij} \left(\sum_{s=1}^k \frac{\partial z_j}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial z_j}{\partial t} \right) \right] + l_i = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Последнее можно записать в форме

$$\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} q'_j + \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m < k), \quad (k)$$

где коэффициенты α_{ij} , α_i — функции лагранжевых координат $q_1, q_2, \dots, q_k$ и времени. В силу независимости уравнений (k) найдется по крайней мере один определитель m -го порядка из коэффициентов α_{sk} , отличный от нуля. Не нарушая общности, можно всегда предположить, что из матрицы коэффициентов

$$\| \alpha_{ij} \|$$

будет отличен от нуля минор

$$| \alpha_{ij} | \neq 0 \quad (i, j = k-m+1, k-m+2, \dots, k).$$

В этом случае можно разрешить систему относительно обобщенных скоростей $q'_{k-m+1}, q'_{k-m+2}, \dots, q'_k$

$$q'_i = \sum_{j=1}^{k-m} \beta_{ij} q'_j + \beta_i \quad (i = k-m+1, k-m+2, \dots, k) \quad (l)$$

и получить выражения для проекций скоростей на декартовы оси координат. В самом деле,

$$x'_v = \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial x_v}{\partial t} = \sum_{s=1}^{k-m} \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q'_s + \sum_{r=k-m+1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_r} q'_r + \frac{\partial x_v}{\partial t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{k-m} \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q'_s + \sum_{r=k-m+1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_r} \left(\sum_{s=1}^{k-m} \beta_{rs} q'_s + \beta_r \right) + \frac{\partial x_v}{\partial t} = \\
&= \sum_{s=1}^{k-m} \gamma_{vs} q'_s + \gamma_v,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
x'_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \gamma_{vs} q'_s + \gamma_v, & y'_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \bar{\gamma}_{vs} q'_s + \bar{\gamma}_v, \\
z'_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \bar{\bar{\gamma}}_{vs} q'_s + \bar{\bar{\gamma}}_v & (v = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned} \tag{m}$$

Для возможных перемещений получим соответственно:

$$\begin{aligned}
\delta q_i &= \sum_{j=1}^{k-m} \beta_{ij} \delta q_j & (i = k-m+1, \dots, k), \\
\delta x_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \gamma_{vs} \delta q_s, & \delta y_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \bar{\gamma}_{vs} \delta q_s, \\
\delta z_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \bar{\bar{\gamma}}_{vs} \delta q_s & (v = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

Дифференцируя соотношения (m), будем иметь:

$$\begin{aligned}
x'_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \gamma_{vs} q''_s + A_v, & y'_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \bar{\gamma}_{vs} q''_s + B_v, \\
z'_v &= \sum_{s=1}^{k-m} \bar{\bar{\gamma}}_{vs} q''_s + C_v & (v = 1, 2, \dots, n),
\end{aligned}$$

где A_v, B_v, C_v уже не содержат величин q'_s .

Рассматривая выражение работы активных сил на возможных перемещениях

$$\begin{aligned}
\delta A &= \sum_v (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = \sum_{v,s} (X_v \gamma_{vs} + Y_v \bar{\gamma}_{vs} + Z_v \bar{\bar{\gamma}}_{vs}) \delta q_s = \\
&= \sum_{s=1}^{k-m} \left[\sum_v \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_s} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_s} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \right) \right] \delta q_s = \sum_{s=1}^{k-m} Q_s \delta q_s,
\end{aligned}$$

видим, что обобщенные силы в уравнениях Аппеля и в случае неголономных связей определяются через работу на возможных перемещениях.

Пример 48. Составить уравнения Аппеля для материальной точки, движущейся под действием силы $F(X, Y, Z)$, предполагая, что на точку наложена связь

$$x' = zy'.$$

Решение. Уравнение связи не интегрируется, пока не известна зависимость z от x и y , поэтому данная связь является неголономной. Энергия ускорений в нашем случае имеет вид

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2).$$

Но ускорения x'' , y'' , z'' удовлетворяют соотношению

$$x'' = z'y' + zy'',$$

так что

$$S = \frac{m}{2} [(z'y' + zy'')^2 + y''^2 + z''^2],$$

и уравнения движения приобретают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial y''} = m [z(z'y' + zy'') + y''] = Q_y,$$

$$\frac{\partial S}{\partial z''} = mz'' = Q_z.$$

Работа активной силы с проекциями X, Y, Z на произвольном возможном перемещении имеет вид

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = Xz\delta y + Y\delta y + Z\delta z = (Xz + Y)\delta y + Z\delta z = Q_y\delta y + Q_z\delta z,$$

откуда

$$Q_y = Xz + Y, \quad Q_z = Z.$$

Пример 49. Составить уравнения движения в форме Аппеля задачи о движении материальной точки в плоскости под действием силы $F(X, Y)$.

Решение. Положение точки можно определить полярными координатами r и φ . Предполагая, что никаких связей не наложено, для энергии ускорения будем иметь выражение

$$S = \frac{m}{2} [(r'' - r\varphi'^2)^2 + (\varphi''r + 2r'\varphi')^2].$$

Для частных производных $\frac{\partial S}{\partial r''}$ и $\frac{\partial S}{\partial \varphi''}$ получим:

$$\frac{\partial S}{\partial r''} = m(r'' - r\varphi'^2), \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi''} = mr(\varphi''r + 2r'\varphi').$$

Подсчитаем работу силы (X, Y) на возможном перемещении

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y = X(\delta r \cos \varphi - r \sin \varphi \delta \varphi) + Y(\delta r \sin \varphi + r \cos \varphi \delta \varphi),$$

или

$$\delta A = (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \delta r + (-Xr \sin \varphi + Yr \cos \varphi) \delta \varphi.$$

Отсюда находим:

$$Q_r = X \cos \varphi + Y \sin \varphi, \quad Q_\varphi = -r(X \sin \varphi - Y \cos \varphi).$$

Тогда уравнения Аппеля запишутся в виде

$$\begin{aligned} m(r'' - r\varphi'^2) &= X \cos \varphi + Y \sin \varphi, \\ mr(r\varphi'' + 2r'\varphi') &= -r(X \sin \varphi - Y \cos \varphi). \end{aligned}$$

Если в качестве неголономной координаты ввести секторную скорость

$$\sigma' = \frac{1}{2} r^2 \varphi',$$

то

$$\varphi' = \frac{2\sigma'}{r^2}, \quad \varphi'' = -\frac{2(2r'\sigma' - r\sigma'')}{r^3},$$

и для энергии ускорения получим

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2} \left[\left(r'' - \frac{4\sigma'^2}{r^3} \right)^2 + \left(-\frac{4r'\sigma'}{r^3} + \frac{2r\sigma''}{r^2} + \frac{4r'\sigma'}{r^2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{m}{2} \left[\left(r'' - \frac{4\sigma'^2}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma''}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Составив выражения для частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial r''} = m \left(r'' - \frac{4\sigma'^2}{r^3} \right), \quad \frac{\partial S}{\partial \sigma''} = \frac{4\sigma''m}{r^2},$$

запишем уравнения Аппеля

$$m \left(r'' - \frac{4\sigma'^2}{r^3} \right) = Q_r^*, \quad \frac{4\sigma''m}{r^2} = Q_\sigma^*.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями в полярных координатах. Чтобы убедиться в этом, найдем сначала обобщенные силы]

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum (X\delta x + Y\delta y) = (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \delta r + (-X \sin \varphi + Y \cos \varphi) r \delta \varphi = \\ &= (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \delta r + (-X \sin \varphi + Y \cos \varphi) \frac{2\delta \sigma}{r}, \end{aligned}$$

откуда видим, что

$$Q_r^* = Q_r, \quad Q_\sigma^* = \frac{2}{r^2} Q_\varphi.$$

Переходя в уравнениях к старым координатам, получим:

$$m(r'' - r\varphi'^2) = Q_r, \quad mr(2r'\varphi' + r\varphi'') = Q_\varphi.$$

Последние уравнения совпадают с полученными ранее. Условие голономности нигде не фигурирует при выводе уравнений Аппеля. Независимыми должны быть лишь скорости. Это условие здесь выполнено.

6. Уравнения Рауса

Рассмотрим еще один вид уравнений движения механических систем, применимый как к системам с голономными, так и с неголономными связями. Предположим, что на систему материальных точек m_v , (x_v, y_v, z_v) действуют активные силы (X_v, Y_v, Z_v) и наложены голономные связи, так что положение системы определяется координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$:

$$\begin{aligned}x_v &= x_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), & y_v &= y_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \\z_v &= z_v(t, q_1, q_2, \dots, q_k).\end{aligned}\tag{a}$$

Пусть, кроме того, на систему наложены неголономные связи

$$f_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} q'_j + a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m < k), \tag{b}$$

тогда число независимых координат будет равно $k-m$. Для вывода уравнений движения системы используем метод множителей Лагранжа. Дифференцируя уравнения (а), получим:

$$\begin{aligned}x'_v &= \frac{\partial x_v}{\partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} q'_s, & y'_v &= \frac{\partial y_v}{\partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_v}{\partial q_s} q'_s, \\z'_v &= \frac{\partial z_v}{\partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_v}{\partial q_s} q'_s,\end{aligned}$$

где q'_s не являются независимыми.

Применяя принцип Даламбера — Лагранжа

$$\sum_{v=1}^n [(m_v x'_v - X_v) \delta x_v + (m_v y'_v - Y_v) \delta y_v + (m_v z'_v - Z_v) \delta z_v] = 0,$$

заметим, что вариации декартовых координат $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ можно выразить через зависимые вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r$:

$$\begin{aligned}\delta x_v &= \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_v}{\partial q_s} \delta q_s, & \delta y_v &= \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_v}{\partial q_s} \delta q_s, \\ \delta z_v &= \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_v}{\partial q_s} \delta q_s,\end{aligned}\tag{c}$$

на которые наложены условия

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} \delta q_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Подставляя в уравнение Даламбера — Лагранжа вариации декартовых координат (с), после преобразований представим его в виде

$$\sum_{s=1}^k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0.$$

К нему нужно добавить уравнения связей

$$\delta f_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \delta q_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Предполагается, что уравнения связей независимы, так что

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(q_1, q_2, \dots, q_m)} = |a_{ij}| \neq 0.$$

Умножая уравнения связей на неопределенные пока множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и добавляя к уравнению Даламбера — Лагранжа, получим

$$\sum_{s=1}^k \delta q_s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{js} \right) = 0. \quad (d)$$

Множители λ_j подберем так, чтобы уничтожились все коэффициенты при зависимых вариациях $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{js} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m). \quad (e)$$

Тогда в уравнении (d) останутся лишь независимые вариации δq_s . Равенство может выполняться при произвольных δq_s только в том случае, когда все коэффициенты при независимых вариациях обращаются в нуль, т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{js} = 0 \quad (s = m+1, \dots, k). \quad (f)$$

К этим уравнениям можно еще добавить m уравнений связи (b). В результате будем иметь $m+k$ уравнений для определения $m+k$ неизвестных $q_1, q_2, \dots, q_k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Число полученных уравнений превосходит число независимых параметров. Задача решается путем исключения лишних неизвестных.

Другие методы составления уравнений движения для систем с неголономными связями в нашем курсе рассматриваться не будут.

Пример 50. Составить уравнение движения однородного шара, катающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости, предполагая, что на шар кроме силы тяжести действуют еще и другие активные силы.

Решение. Обозначим через G центр тяжести шара. Пусть x_1, y_1, z_1 — оси Кенига, а x, y, z — оси, неизменно связанные с шаром. Положение шара можно определить пятью параметрами: координатами центра масс ξ, η и углами Эйлера φ, ψ, ϑ . Проекции мгновенной угловой скорости шара на оси Кенига будут иметь вид (рис. 80):

$$p_1 = \vartheta' \cos \psi + \varphi' \sin \vartheta \sin \psi, \quad q_1 = \vartheta' \sin \psi - \varphi' \sin \vartheta \cos \psi,$$

$$r_1 = \psi' + \varphi' \cos \vartheta.$$

Точку касания шара с горизонтальной плоскостью обозначим через P . Ее координаты в системе Кенига суть $0, 0, -a$. Так как проскальзывание отсутствует, то абсолютная скорость точки касания $v_P = 0$. Переносная скорость точки касания имеет проекции $\xi', \eta', 0$. Проекции относительной скорости определяются из матрицы

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$v_x = -q_1 a, \quad v_y = p_1 a, \quad v_z = 0,$$

и окончательные уравнения связи после подстановки значений q и r приобретают вид:

$$\xi' - a(\vartheta' \sin \psi - \varphi' \sin \vartheta \cos \psi) = 0,$$

$$\eta' + a(\vartheta' \cos \psi + \varphi' \sin \vartheta \sin \psi) = 0.$$

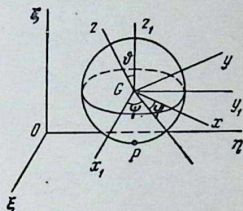


Рис. 80

Эти уравнения неинтегрируемы, т. е. связи неголономны. Поэтому мы не можем воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Чтобы применить уравнения Рауса, составим сначала уравнение живой силы

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{A}{2} (p^2 + q^2 + r^2) = \\ &= \frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{A}{2} (\varphi'^2 + \psi'^2 + \vartheta'^2 + 2\varphi'\psi' \cos \vartheta), \end{aligned}$$

где A — момент инерции шара.

Тогда уравнения Рауса запишутся в следующем виде:

$$m\xi'' = Q_\xi + \lambda_1, \quad m\eta'' = Q_\eta + \lambda_2,$$

$$A \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \vartheta) = Q_\varphi,$$

$$A \frac{d}{dt} (\psi' + \varphi' \cos \vartheta) = Q_\psi + \lambda_1 a \sin \vartheta \cos \psi + \lambda_2 a \sin \vartheta \sin \psi,$$

$$A \vartheta'' + A \varphi' \psi' \sin \vartheta = Q_\vartheta - \lambda_1 a \sin \psi + \lambda_2 a \cos \psi,$$

где $Q_\xi, Q_\eta, Q_\varphi, Q_\psi, Q_\vartheta$ — обобщенные силы.

Мы получили систему пяти уравнений для определения семи неизвестных $\xi, \eta, \varphi, \psi, \vartheta, \lambda_1, \lambda_2$. К ней необходимо присоединить еще два уравнения связей. При определении обобщенных сил $Q_\xi, Q_\eta, Q_\varphi, Q_\psi, Q_\vartheta$ параметры $\xi, \eta, \varphi, \psi, \vartheta$ следует рассматривать как независимые. Определив при этом условии работу сил на возможном перемещении, обобщенные силы получим обычным образом как

коэффициенты при вариациях $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$. В частном случае, когда на шар действуют активные силы, приложенные только к центру масс, с проекциями на неподвижные оси X и Y , будем иметь:

$$Q_{\xi} = X, \quad Q_{\eta} = Y, \quad Q_{\varphi} = Q_{\psi} = Q_{\theta} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Рассмотренный здесь пример можно решать и с помощью уравнений Аппеля. При определении энергии ускорений следует применять теорему, аналогичную теореме Кенига для живой силы, которую нетрудно распространить и на энергию ускорений.

§ 5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Теория малых колебаний является приближенной теорией движения механических систем вблизи положения равновесия или определенного состояния движения. Изучение колебательных процессов имеет первостепенное значение для самых разнообразных разделов механики и физики. Начало современного учения о колебаниях относится к классическим работам Галилея, Гюйгенса, Ньютона, Лагранжа. В основе теории лежат приближенные методы исследования движений в окрестности положения равновесия. Предположение о малости колебаний значительно упрощает математическую сторону задачи, позволяет ограничиться линейными дифференциальными уравнениями движения. Результаты оказываются справедливыми, когда рассматриваются колебания около устойчивого положения равновесия.

1. Малые колебания системы с одной степенью свободы

Прежде чем рассматривать общие методы теории малых колебаний механической системы, остановимся на некоторых задачах о колебании системы с одной степенью свободы и, в частности, о колебании одной материальной точки.

Систему с одной степенью свободы, совершающую колебательные движения около положения равновесия, называют осциллятором. Простейшим движением такой системы является гармоническое колебание. Система, совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором. В частном случае гармоническим осциллятором является материальная точка, совершающая прямолинейное движение под действием силы, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия, направленной в каждый момент в сторону положения равновесия. Такая сила всегда стремится вернуть точку в положение равновесия. Физическая природа силы может быть самой разнообразной, но проще всего ее представить как упругую силу, подчиняющуюся закону Гука.

Выбирая начало координат неподвижной системы отсчета в положении равновесия точки и направив ось x вдоль прямой, по кото-

рой движется точка, для живой силы и силовой функции точки получим:

$$T = \frac{mx'^2}{2}, \quad U = -\frac{cx^2}{2}.$$

Уравнение Лагранжа в этом случае имеет вид

$$mx'' = -cx,$$

или

$$x'' = -k^2x, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{c}{m} > 0.$$

Общее решение этого уравнения, как известно, имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

или

$$x = A \cos(kt + \alpha).$$

Движение точки, совершаемое по такому закону, называют гармоническим колебанием. Коэффициент A называется амплитудой гармонического колебания, аргумент $kt + \alpha$ — фазой колебания, а α — начальной фазой; $\cos(kt + \alpha)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Период определяет время, в течение которого точка совершает одно полное колебание. Величина k называется циклической, или круговой, частотой колебаний. Частота колебаний является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения. Она полностью определяется свойствами механической системы.

Состояние движения гармонического осциллятора в каждый момент времени определяется заданием значений его координаты x и скорости $x' = v$. Для изображения этого состояния движения можно воспользоваться представлением движения на фазовой плоскости переменных x и v , рассматриваемых как декартовы координаты. Тогда каждая точка фазовой плоскости будет определять состояние движения осциллятора. Такую точку будем называть изображающей.

В общем случае колебаний системы с одной степенью свободы, подчиненной голономным идеальным связям, не зависящим явно от времени, живая сила и силовая функция системы представляются в виде

$$T = \frac{1}{2} a(q) q'^2, \quad U = U(q).$$

Для малых движений в окрестности положения равновесия величины q и q' остаются малыми, если в положении равновесия $q = 0$. Тогда коэффициент $a(q)$ и силовую функцию $U(q)$ можно представить в виде степенных рядов

$$a(q) = a(0) + a'(0)q + a''(0)\frac{q^2}{2!} + \dots,$$

$$U(q) = U(0) + U'(0)q + U''(0)\frac{q^2}{2!} + \dots$$

Так как $q = 0$ является положением равновесия, то $U'(0) = 0$. Пренебрегая в выражениях для живой силы и силовой функции членами выше второго порядка малости, будем иметь:

$$T = \frac{a(0)q'^2}{2}, \quad U = \frac{U''(0)q^2}{2} = -\frac{b_0q^2}{2},$$

где $a(0)$ и b_0 — постоянные величины, причем $a(0) > 0$. Уравнения для малых движений примут теперь вид

$$a(0)q'' = -b_0q.$$

При $b_0 > 0$ система будет совершать колебательные движения в окрестности положения равновесия.

При движении системы изображающая точка описывает некоторую кривую на фазовой плоскости — фазовую траекторию (эта траектория не является траекторией в кинематическом смысле). Скорость изображающей точки называют фазовой скоростью.

Зная решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора, нетрудно найти уравнение траектории на фазовой плоскости. В самом деле, если

$$x = q = a \cos(kt + \alpha), \quad v = q' = -ak \sin(kt + \alpha),$$

то фазовой траекторией будет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2k^2} = 1.$$

При изменении начальных условий в общем случае будет меняться амплитуда колебаний. В результате получим семейство подобных эллипсов (рис. 81), представляющее фазовый портрет гармонических колебаний.

Уравнение гармонического осциллятора допускает первый интеграл — интеграл живых сил

$$\frac{x'^2}{2} = -\frac{k^2x^2}{2} + h,$$

где постоянная h определяется начальными значениями координаты и скорости, т. е. начальным запасом полной механической энергии.

Связывая значения скорости v и координаты q в каждой точке траектории, первый интеграл является конечным уравнением фазовых траекторий, которое и решает вопрос о движении системы. По фазовым траекториям можно выяснить направление движения изображающей точки. В самом деле, если скорость v положительна, то x возрастает, т. е. в первой четверти фазовой плоскости изображающая точка движется в сторону увеличения абсциссы и т. д.

Затухающие колебания. До сих пор предполагалось, что всякое сопротивление движению системы со стороны среды отсутствует. Сопротивление воздуха, трение и другие подобные силы во внимание не принимались. Действие же сил сопротивления проявляется прежде всего в том, что процесс движения перестает быть чисто механическим. Механическая энергия системы переходит в другие виды энергии, как говорят физики, — диссипируется. Имеется определенная категория случаев, когда движение в среде можно описать с помощью уравнений механики путем введения в последние некоторых дополнительных членов. При этом считается, что на точки системы действуют силы, зависящие только от скорости. Обобщенную силу в этом случае можно представить в виде отрицательной функции $\hat{f}(q')$. Если скорость точки достаточно мала, то можно считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости, т. е.

$$\hat{f}(q') \cong -\alpha q'.$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$a(0)q'' = -b_0q - \alpha q',$$

или

$$q'' = -k^2q - 2\lambda q', \quad \lambda = \frac{\alpha}{2a_0} > 0.$$

Общее решение этого уравнения зависит от характера корней характеристического уравнения

$$\kappa^2 + 2\lambda\kappa + k^2 = 0.$$

При $\lambda^2 \geq k^2$ корни действительны, при $\lambda^2 < k^2$ — комплексны. В соответствии с этим получим два типа решений и два различных процесса движения: при $\lambda^2 < k^2$ — затухающие колебания, при $\lambda^2 \geq k^2$ — затухающее аperiodическое движение. В случае затухающих колебаний решение имеет вид

$$q = ae^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \delta), \quad \text{где } \omega_0 = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$$

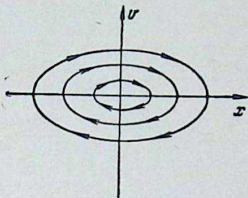


Рис. 81

(a и δ — постоянные интегрирования). На фазовой плоскости этому решению соответствует семейство спиралей, имеющих асимптотическую точку в начале координат. В самом деле, с помощью преобразования

$$\xi = \omega_0 q, \quad \eta = v + \lambda x,$$

где

$$v = q' = -ae^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega_0 t + \delta) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)],$$

обозначив $\omega_0 a = C_1$, получим:

$$\xi = C_1 e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \delta), \quad \eta = -C_1 e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t + \delta),$$

или, в полярных координатах,

$$\rho = C_1 e^{-\lambda t}, \quad \varphi = -(\omega_0 t + \delta)$$

получим уравнение логарифмической спирали (рис. 82). Заметим, что при малых значениях величины $\frac{\lambda}{\omega_0}$, называемой логарифмическим декрементом затухания, спираль в течение каждого оборота близка к соответствующему кругу $\xi^2 + \eta^2 = \text{const}$, а в плоскости (q, q') близка к эллипсу

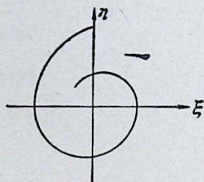


Рис. 82

$$q'^2 + 2\lambda qq' + k^2 q^2 = \text{const}.$$

Вынужденные колебания. Резонанс. Если на материальную точку кроме упругой силы действует некоторая изменяющаяся со временем сила $F(t)$ (возмущающая сила), то колебания называются **вынужденными**.

Пусть наряду с потенциальными силами, стремящимися вернуть отклоненную от положения равновесия систему обратно в это положение, действуют еще и возмущающие силы, зависящие от времени. Тогда уравнение движения системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q} + Q(t).$$

Для малых движений системы

$$T = \frac{a}{2} q'^2, \quad U = -\frac{c}{2} q^2, \quad a > 0, \quad c > 0,$$

поэтому

$$aq'' = -cq + Q(t).$$

Общее решение этого уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Наиболее распространенным является тот случай, когда возмущающая сила изменяется по синусоидальному закону

$$Q = H \sin(pt + \alpha).$$

Обозначая $\frac{c}{a} = k^2$, общее решение представим в виде

$$q = A \sin(kt + \delta) + \frac{P}{k^2 - p^2} \sin(pt + \alpha),$$

где $P = \frac{H}{a}$, а A и δ — произвольные постоянные.

При действии возмущающей силы система совершает сложное колебательное движение около положения равновесия, являющееся результатом суперпозиции (наложения) двух колебаний: собственных колебаний с частотой k и вынужденных колебаний с частотой p , равной частоте возмущающей силы. Амплитуда вынуж-

денных колебаний $\frac{P}{k^2 - p^2}$ не зависит от начальных условий. Если

частота возмущающей силы очень велика, то амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю, и действие возмущающей силы почти не нарушает режим собственных колебаний системы. При частоте возмущающей силы, равной частоте собственных колебаний системы $p = k$, уравнение движения не допускает частных решений вида

$$q_1 = \frac{P}{k^2 - p^2} \sin(pt + \alpha).$$

В этом случае частное решение можно получить в виде

$$q_1 = \frac{Pt}{2k} \sin(kt + \alpha),$$

поэтому общее решение теперь

$$q = A \sin(kt + \delta) + \frac{Pt}{2k} \sin(kt + \alpha).$$

Отсюда видно, что амплитуда вынужденных колебаний неограниченно растет со временем. Такое явление называется резонансом. Резонанс в колебательных системах может стать очень опасным явлением, влекущим за собой разрушение системы вследствие чрезмерного возрастания амплитуды.

Если частоты собственных колебаний и возмущающей силы имеют очень близкие значения, так что разность $k - p$ по модулю очень мала по сравнению с k , то сложные колебания называются биениями. Биения имеют вид то возрастающих, то ослабляющихся колебаний.

Нелинейные колебания. Теория нелинейных колебаний, или нелинейная механика, посвящена изучению колебательных движений, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Нелинейная механика дает вообще более точное и полное отображение свойств колебательных движений механических систем. Как мы уже могли заметить выше, линейные системы получаются в результате упрощения нелинейных. Поэтому изучение линейных систем дает возможность сделать лишь некоторые заключения о свойствах малых движений, однако такое представление может оказаться приближенным.

Реальные системы вообще неконсервативны. Полная механическая энергия таких систем не остается постоянной, а рассеивается. В некоторых случаях процесс рассеивания происходит медленно, и этим рассеиванием можно пренебрегать, считая справедливым закон сохранения механической энергии. В других случаях рассеиванием энергии пренебрегать нельзя, и системы рассматриваются как неконсервативные.

Простейшей консервативной системой является материальная точка, находящаяся под действием силы, зависящей от расстояния. Движение такой точки определяется уравнением

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = f(x) dx,$$

где $f(x)$ — консервативная сила. Зная совокупность фазовых траекторий, мы имеем возможность охватить всю картину движений при различных начальных условиях. Для консервативных систем исследование облегчается тем, что имеет место интеграл живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = U + h, \quad (a)$$

в котором константа h определяется из начальных условий. Но одному и тому же значению h соответствует множество состояний системы, что на фазовой плоскости представится линией равной энергии. Изображающая точка будет двигаться по одной из этих линий. Заметим, что уравнение (а) не меняется при замене v на $-v$, а точки, в которых касательные к фазовым траекториям параллельны оси v , будут находиться на оси x . Касательные к фазовым траекториям будут параллельны оси x , если $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$.

Для построения фазового портрета построим сначала график функции $z = U(x)$. Затем нужно вычислить квадратные корни из суммы $U_1 + h$ и отложить их на фазовой плоскости вверх и вниз от оси x .

Пусть, например, при $x=0$ $U(0) = a$. Выберем $h_1 = -a$ (рис. 83). Тогда при $x=0$ сумма $U + h_1 = 0$. Отложим на графике прямую $z = -h_1$. Разность $\Delta = U - h_1$ и будет определять значение $\frac{v^2}{2}$ на

фазовой плоскости. Для данного значения h_1 на оси x фазовой плоскости получим три точки, где сумма $U + h_1$ обращается в нуль (1, 2, 3). Выбирая $h_2 < h_1$, получим аналогичные точки 4, 5 и 6. При $h_3 < h_2$ получим точки 7 и 8.

Через точки 2 и 3 пройдет замкнутая фазовая траектория. Фазовая траектория, проходящая через точку 4, будет охватывать точку 1 и т. д. Точка 7 — особая точка. Особые точки фазовой плоскости соответствуют стационарным точкам графика функции $z = U(x)$. Фазовые кривые, проходящие через особые точки, называются сепаратрисами. Сепаратрисы состоят из одной или нескольких ветвей, каждая из которых представляет собой отдельную траекторию или состоит из двух фазовых траекторий. Они представляют собой граничные кривые, отделяющие области, заполненные траекториями различных типов.

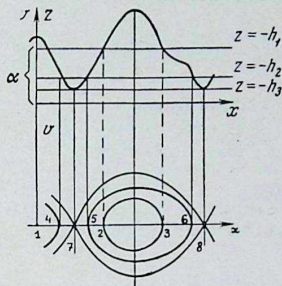


Рис. 83

Положения равновесия системы соответствуют стационарным значениям $U(x)$. Устойчивыми положениями являются те, которые на фазовой плоскости оказываются окруженными замкнутыми кривыми — циклами, т. е. для которых силавая функция имеет максимум.

Диссипативные системы. Предположим, что на систему с одной степенью свободы действуют кроме консервативных сил еще и некоторые неконсервативные силы, имеющие характер сопротивления, так что элементарная работа этих сил на действительном перемещении системы имеет вид

$$Q dq = Qq' dt \leq 0$$

и не равна нулю, если $q' \neq 0$. Такая система называется диссипативной. Из теоремы об изменении живой силы будем иметь

$$dT = dU + Qq' dt,$$

где $T = \frac{1}{2} a(q) q'^2$, $U = U(q)$, $Q = Q(q, q')$.

На фазовой плоскости линии

$$T - U = \text{const}$$

уже не являются интегральными кривыми. Ими можно воспользоваться как топографическими кривыми, позволяющими следить за изменением полной энергии системы во время движения. Примем, что в положении равновесия $q = 0$. В зависимости от характера положения равновесия кривые $T - U = \text{const}$ будут либо

оказывать начало координат, либо через начало будет проходить сепаратриса. В последнем случае положение равновесия будет неустойчивым. В первом же случае в положении равновесия функция $H = T - U$ имеет минимум в начале координат. Так как $\frac{dH}{dt} \leq 0$ на действительной траектории, то фазовые кривые либо пересекают топографические кривые снаружи внутрь, либо касаются их. Касание может быть только на оси абсцисс.

2. Общий случай малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия

Пусть имеется система материальных точек с массами m_v , на которые наложены идеальные голономные связи, а положение системы определяется лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \dots, q_k$. Будем предполагать, что наложенные связи не зависят явно от времени, а силы, действующие на точки системы, обладают силовой функцией $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$. Положение равновесия такой системы, как известно, определяется уравнениями:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0.$$

Предполагая, что эти уравнения определяют некоторую изолированную точку, лагранжевы координаты $q_1, q_2, \dots, q_k$ выберем таким образом, чтобы в рассматриваемом положении равновесия все они обращались в нуль. При сделанных предположениях живая сила системы будет представлять однородную квадратичную форму от обобщенных скоростей

$$2T = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где коэффициенты a_{ij} являются функциями только лагранжевых координат. Будем предполагать, что коэффициенты удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Устойчивость равновесия. Теорема Лагранжа. Рассматриваемое положение равновесия может оказаться устойчивым или неустойчивым. О характере положения равновесия можно судить по тому, как ведет себя система вблизи положения равновесия.

Определение. Положение равновесия системы называется устойчивым, если для любых, сколь угодно малых положительных чисел A и A_1 можно всегда подобрать два других числа λ и λ_1 , таких, что при начальных значениях координат q_{i0} и скоростей $\dot{q}_{i0}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum q_{i0}^2 \leq \lambda, \quad \sum \dot{q}_{i0}^2 \leq \lambda',$$

для каждого момента времени $t \geq t_0$ будут выполняться неравенства

$$\Sigma q_i^2 < A, \quad \Sigma q_i'^2 < A'.$$

Другими словами, для устойчивого положения равновесия координаты и скорости не будут превосходить некоторых заданных пределов, при достаточно малых начальных возмущениях координат и скоростей.

Задачей отбора устойчивых положений равновесия занимались еще в древности. Принципы отбора таких положений пытались установить Аристотель (384—322 гг. до н. э.) и Архимед (287—212 гг. до н. э.). Торричелли уже сформулировал общий принцип устойчивости равновесия тяжелых тел, заключающийся в том, что *при равновесии центр тяжести занимает наинизшее положение*. Общий принцип устойчивости равновесия консервативных систем впервые был сформулирован Лагранжем в 1788 г. в его знаменитой теореме об устойчивости равновесия, первое строгое доказательство которой дал Лежен-Дирихле в 1847 г. Доказательство Лежен-Дирихле легло в основу известной теоремы А. М. Ляпунова (1857—1918) об устойчивости движения.

Теорема Лагранжа. Если в положении равновесия системы силовая функция имеет изолированный максимум, то такое положение равновесия устойчиво.

Доказательство. Будем предполагать, что в положении равновесия силовая функция обращается в нуль, тогда в положении равновесия

$$U(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad T(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Рассмотрим такую окрестность положения равновесия

$$\Sigma q_s^2 \leq H,$$

в которой силовая функция не имеет других стационарных точек, кроме положения равновесия. Пусть на сфере A

$$\Sigma q_s^2 = A \leq H$$

силовая функция U удовлетворяет условию

$$U \leq -\varepsilon,$$

а на сфере A' , когда

$$\Sigma q_s^2 \leq A \text{ и } \Sigma q_s'^2 = A' \leq H,$$

живая сила системы удовлетворяет неравенству

$$T \geq \varepsilon.$$

В силу непрерывности функций U и T , всегда найдутся два таких числа λ и λ' , чтобы в области

$$\Sigma q_s^2 \leq \lambda, \quad \Sigma q_s'^2 \leq \lambda'$$

выполнялись неравенства

$$U > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad T < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая начальные значения координат и скоростей так, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\Sigma q_{s0}^2 \leq \lambda, \quad \Sigma q_{s0}'^2 \leq \lambda',$$

получим:

$$U_0 > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad T_0 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из интеграла живых сил

$$T = U + h$$

будем теперь иметь:

$$h = T_0 - U_0,$$

$$T = U + T_0 - U_0 \geq 0,$$

откуда

$$U \geq U_0 - T_0 > -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon,$$

и во все время движения выполняется неравенство

$$U > -\varepsilon.$$

Таким образом, движение, начавшееся при условиях

$$\Sigma q_{s0}^2 \leq \lambda, \quad \Sigma q_{s0}'^2 \leq \lambda',$$

никогда не выйдет на сферу A . Далее, из интеграла живых сил имеем

$$T = U + T_0 - U_0 \leq T_0 - U_0 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но на сфере A' всегда $T \geq \varepsilon$, и в каждый момент будет выполняться условие

$$\Sigma q_s'^2 < A'.$$

Мы показали, что по заданным числам A и A' находятся такие числа λ и λ' , что движение, начавшееся при условиях

$$\Sigma q_{s0}^2 \leq \lambda, \quad \Sigma q_{s0}'^2 \leq \lambda',$$

при всяком $t \geq t_0$ будет удовлетворять неравенствам

$$\Sigma q_s^2 < A, \quad \Sigma q_s'^2 < A',$$

и, следовательно, положение равновесия устойчиво.

Пример 51. На неподвижный круглый цилиндр радиуса r , ось которого горизонтальна, положен однородный круглый цилиндр радиуса R , ось которого тоже горизонтальна и перпендикулярна к оси первого цилиндра. Определить условия устойчивого положения равновесия системы (рис. 84).

Решение. Силовая функция имеет вид

$$U = -mgy_c,$$

где

$$y_c = r \cos \varphi + r \varphi \sin \varphi + R \cos \varphi.$$

Положение равновесия определяется из уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -(r \varphi \cos \varphi - R \sin \varphi) = 0,$$

так что при $\varphi=0$ система находится в равновесии. Рассматривая вторую производную от функций U , найдем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -r \cos \varphi + r \varphi \sin \varphi + R \cos \varphi,$$

и при $\varphi=0$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -r + R.$$

Силовая функция имеет максимум в положении равновесия, и, следовательно, оно будет устойчивым, если

$$R < r.$$

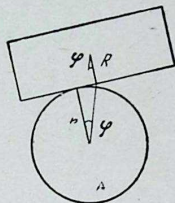


Рис. 84

Малые колебания системы около положения устойчивого равновесия. Рассмотрим малые колебания системы около положения устойчивого равновесия. Ограничиваясь лишь малыми движениями системы, будем предполагать, что величины $q_1, q_2, \dots, q_k, q_1', q_2', \dots, q_k'$ остаются во все время движения настолько малыми, что при разложении в степенные ряды живой силы и силовой функции можно ограничиться лишь первыми членами разложения. Разложим в ряд коэффициенты a_{ij} в выражении живой силы

$$a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_k) = a_{ij}^0 + \sum_{s=1}^k \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_s} \right)_0 q_s + \dots \quad (i, j = 1, 2, \dots, k),$$

где индекс «0» означает, что взяты значения величин, соответствующие $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$. При малых значениях q_s можно использовать их приближенные значения

$$a_{ij}(0, 0, \dots, 0) \cong a_{ij}^0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда для живой силы получим приближенное значение

$$2T \approx \sum_{i,j=1}^k a_{ij}^0 q_i' q_j',$$

которое является однородной квадратичной формой относительно $q_1', q_2', \dots, q_k'$ с постоянными коэффициентами.

Определяя силовую функцию U так, чтобы в положении равновесия она обращалась в нуль, разложим ее в степенной ряд в окрестности положения равновесия

$$U(q_1, q_2, \dots, q_k) = U(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots$$

Пренебрегая в разложении членами выше второго порядка малости относительно $q_1, q_2, \dots, q_k$ и принимая во внимание, что в положении равновесия

$$U(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

получим приближенное значение силовой функции

$$U(q_1, q_2, \dots, q_k) \cong -\frac{1}{2} \sum b_{ij} q_i q_j,$$

где постоянные коэффициенты b_{ij} определяются из равенств

$$b_{ij} = - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (j, i = 1, 2, \dots, k).$$

Воспользовавшись приближенными значениями живой силы и силовой функции, запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}^0 q_j' = - \sum_{j=1}^k b_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Задача определения движения в окрестности положения равновесия свелась к исследованию решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такой системы известно из курсов дифференциальных уравнений, и мы не будем останавливать на нем свое внимание.

Будем искать частное решение системы в виде

$$q_i = A_i \cos kt \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда для определения коэффициентов A_i получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^k (a_{ij}^0 k^2 - b_{ij}) A_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Отличное от нулевого решение такой системы существует только тогда, когда равен нулю определитель системы

$$\Delta(k) = |a_{ij}^0 k^2 - b_{ij}| = 0.$$

Это уравнение называют характеристическим, или уравнением частот.

Можно найти такое преобразование координат, чтобы в новых переменных живая сила и силовая функция были представлены в виде

$$2T = \Sigma x_v'^2, \quad 2U = -\Sigma \lambda_v x_v^2.$$

Для новых переменных будем иметь следующие уравнения Лагранжа:

$$x_v'' = -\lambda_v x_v \quad (v = 1, 2, \dots, k).$$

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$, в которых уравнения Лагранжа имеют указанный вид, называются главными, или нормальными, координатами.

Уравнения в нормальных координатах можно получить посредством линейной комбинации уравнений Лагранжа. Умножим каждое из уравнений движения

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}^0 q_j'' = -\sum b_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (a)$$

на неопределенный множитель m_i и сложим

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_i a_{ij}^0 q_j'' = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_i b_{ij} q_j. \quad (b)$$

Множители m_i подберем так, чтобы имело место соотношение

$$x = \sum_{i,j=1}^k m_i a_{ij}^0 q_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j=1}^k m_i b_{ij} q_j.$$

Тогда уравнение (b) примет вид

$$x'' = -\lambda x.$$

Преобразование должно выполняться для всех значений координат, а это возможно, если совпадают коэффициенты преобразования, т. е.

$$\sum_{i=1}^k m_i a_{ij}^0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k m_i b_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

или

$$\sum_{i=1}^k m_i (\lambda a_{ij}^0 - b_{ij}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Нетривиальные значения коэффициентов m_i могут быть определены отсюда, если обращается в нуль определитель системы

$$\Delta(\lambda) = |\lambda a_{ij}^0 - b_{ij}| = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением частот. Определив корни этого уравнения, для каждого значения корня λ_s будем иметь систему коэффициентов m_i , зависящих по крайней мере от одного параметра. Относительно корней λ_s докажем следующую теорему:

Теорема Сильвестра (1814—1897). Все корни уравнения частот вещественны.

Доказательство. Пусть λ_0 — комплексный корень. Тогда для коэффициентов m_i получим вообще комплексные значения. Для сопряженного корня $\bar{\lambda}_0$ будем иметь систему сопряженных коэффициентов $\bar{m}_i$, которые определяются из уравнений

$$\sum_{i=1}^k \bar{m}_i \bar{\lambda}_0 a_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{m}_i b_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Умножая эти уравнения на m_j и складывая, получим

$$\sum_{i,j=1}^k \bar{m}_i m_j \bar{\lambda}_0 a_{ij} = \sum_{i,j=1}^k \bar{m}_i m_j b_{ij},$$

откуда

$$\bar{\lambda}_0 = \frac{\sum_{i,j=1}^k \bar{m}_i m_j b_{ij}}{\sum_{i,j=1}^k \bar{m}_i m_j a_{ij}} = \frac{\sum_{i,j=1}^k m_i \bar{m}_j b_{ij}}{\sum_{i,j=1}^k m_i \bar{m}_j a_{ij}} = \lambda_0.$$

Этим и доказывается теорема.

Для каждого вещественного корня λ_0 можно определить систему коэффициентов m_i и тем самым координату x , удовлетворяющую уравнению

$$x'' = -\lambda_0 x.$$

Теорема Вейерштрасса. Матрица определителя $\Delta(\lambda)$ имеет простые элементарные делители.

Доказательство этого предложения можно провести с помощью известного метода Жордана. Предположим, что уравнения линейного преобразования имеют вид

$$q_i = \alpha_i x + \sum_{j=2}^k \gamma_{ij} q_j^* \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Уравнение Лагранжа для координаты x запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial T}{\partial q_i'} \alpha_i, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial U}{\partial q_i} \alpha_i,$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] = 0,$$

и при $\alpha_i = m_i$ получим, как это было показано выше

$$x'' + \lambda x = 0.$$

Последнее возможно лишь в случае, когда живая сила и силовая функция имеют вид:

$$2T = x'^2 + \sum_{i,j=1}^{k-1} a_{ij} q_i^* q_j^*, \quad 2U = -\lambda x^2 + \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij} q_i^* q_j^*.$$

По определению живая сила является знакоопределенной функцией.

Поэтому $\sum_{i,j=1}^{k-1} a_{ij} q_i^* q_j^*$ также знакоопределенная положительная функция от $k-1$ переменных $q_1^*, q_2^*, \dots, q_{k-1}^*$. Переменные $q_1^*, q_2^*, \dots, q_{k-1}^*$, x независимы, и можно представить движение в пространстве $k-1$ переменных, где живая сила

$$2T^* = \sum_{i,j=1}^{k-1} a_{ij} q_i^* q_j^*$$

и силовая функция

$$2U^* = \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij} q_i^* q_j^*.$$

Уравнения Лагранжа для оставшихся переменных будут допускать по меньшей мере одно преобразование, подобное рассмотренному. Продолжая этот процесс, в итоге придем к следующим выражениям для живой силы и силовой функции:

$$2T = \dot{x}_1'^2 + \dot{x}_2'^2 + \dots + \dot{x}_k'^2, \quad 2U = -(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_k x_k^2),$$

причем среди величин λ_v могут оказаться и равные. После выполненных преобразований уравнения Лагранжа примут вид

$$\ddot{x}_v + \lambda_v x_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, k),$$

а сами переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ оказываются главными координатами системы. Полученные уравнения системы интегрируются независимо одно от другого. Если в положении равновесия силовая функция имеет изолированный максимум, т. е. все $\lambda_i > 0$, то общее решение имеет следующую форму:

$$x_v = C_{1v} \cos \sqrt{\lambda_v} t + C_{2v} \sin \sqrt{\lambda_v} t \quad (v = 1, 2, \dots, k).$$

Если среди λ_v окажется хотя бы одно неотрицательное, то будет существовать неограниченное частное решение, и предположение о том, что можно пренебрегать членами высшего порядка в разложении живой силы и силовой функции, не будет оправдано. Существенным при выводе было предположение о том, что живая сила представляет знакоопределенную положительную функцию от обобщенных скоростей. Если это предположение не выполняется, то может оказаться, что нормальные координаты не существуют.

Пример 52. Материальная точка массы m привязана нитью длины a к неподвижной точке O и соединена со второй точкой той же массы m при помощи нити длины a . Система находится в однородном поле тяжести. Определить частоты малых колебаний и нормальные колебания системы (рис. 85).

Решение. Вводя в качестве обобщенных координат углы φ и ψ , как указано на рис. 85, для живой силы получим следующее выражение:

$$T = \frac{ma^2 \dot{\varphi}'^2}{2} + \frac{m}{2} [a^2 \dot{\varphi}'^2 + a^2 \dot{\psi}'^2 + 2a^2 \dot{\varphi}' \dot{\psi}' \cos(\varphi - \psi)],$$

или приближенно

$$T^* = ma^2 \left(\dot{\varphi}'^2 + \frac{\dot{\psi}'^2}{2} + \dot{\varphi}' \dot{\psi}' \right).$$

Силовую функцию задачи

$$U = mga \cos \varphi + mg(a \cos \varphi + a \cos \psi)$$

заменим ее приближенным значением

$$U^* = -\frac{mga}{2} (2\varphi^2 + \psi^2).$$

Уравнения Лагранжа для малых колебаний:

$$2a\varphi'' + a\psi'' = -2g\varphi,$$

$$a\varphi'' + a\psi'' = -g\psi.$$

Уравнение частот

$$\begin{vmatrix} 2ak^2 - 2g & ak^2 \\ ak^2 & ak^2 - g \end{vmatrix} = 0$$

можно записать в виде

$$2(ak^2 - g)^2 - a^2k^4 = 0,$$

откуда

$$k^2 = \frac{g}{a} (2 \pm \sqrt{2}).$$

При $k^2 = k_1^2 = \frac{g(2 + \sqrt{2})}{a}$ для определения величин m_1 и m_2 имеем уравнение

$$m_1ak_1^2 + m_2(ak_1^2 - g) = 0,$$

или

$$m_1\sqrt{2} + m_2 = 0,$$

откуда

$$m_1 = -\frac{m_2}{\sqrt{2}},$$

так что можно положить

$$m_2 = 2 + \sqrt{2}, \quad m_1 = -(1 + \sqrt{2}).$$

Для новой переменной

$$x_1 = -a\sqrt{2}\varphi + a\psi$$

уравнение примет вид

$$x_1'' = -\lambda_1 x_1,$$

где

$$\lambda_1 = k_1^2 = \frac{g}{a} (2 + \sqrt{2}).$$

При $k^2 = k_2^2 = \frac{g(2 - \sqrt{2})}{a}$ для определения величин m_1 и m_2 приходим к уравнению

$$m_1(2 - \sqrt{2}) + m_2(1 - \sqrt{2}) = 0,$$

или

$$m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$m_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad m_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Для новой переменной

$$x_2 = a\sqrt{2}\varphi + a\psi$$

уравнение движения примет вид

$$x_2'' = -\lambda_2 x_2,$$

где

$$\lambda_2 = k_2^2 = \frac{g}{a} (2 - \sqrt{2}).$$

В главных координатах решение имеет вид:

$$x_1 = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t,$$

$$x_2 = C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t.$$

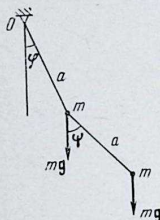


Рис. 85

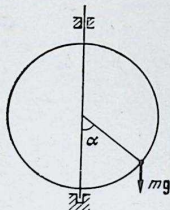


Рис. 86

Пример 53. Трубка, согнутая в виде окружности, плоскость которой вертикальна, может свободно вращаться вокруг неподвижного вертикального диаметра. Внутри трубки находится шарик массы m . Трубке сообщают начальную угловую скорость ω_0 вращения вокруг вертикального диаметра. При этом шарик находится в положении относительного равновесия, так что $\angle AOM = \alpha_0$. Исследовать устойчивость относительного положения равновесия (рис. 86).

Решение. Принимая за обобщенные координаты угол φ поворота системы вокруг вертикальной оси и угол α между вертикалью и радиус-вектором шарика, для живой силы и силовой функции соответственно будем иметь:

$$T = \frac{J\varphi'^2}{2} + \frac{m}{2} (a^2 \varphi'^2 \sin^2 \alpha + a^2 \alpha'^2),$$

$$U = mga \cos \alpha.$$

Угол φ представляет собой циклическую координату, которой соответствует первый интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = (J + ma^2 \sin^2 \alpha) \varphi' = \beta,$$

где для β из начальных условий получим следующее значение:

$$\beta = (J + ma^2 \sin^2 \alpha_0) \omega_0.$$

Составим функцию Рауса

$$\begin{aligned} R = L - \varphi' \beta &= \frac{\beta \varphi'}{2} + \frac{ma^2 \alpha'^2}{2} + mga \cos \alpha - \beta \varphi' = \\ &= mga \cos \alpha - \frac{\beta^2}{2(J + ma^2 \sin^2 \alpha)} + \frac{ma^2 \alpha'^2}{2}. \end{aligned}$$

Полагая

$$R = T^* + U^*,$$

где

$$T^* = \frac{ma^2 \alpha'^2}{2}, \quad U^* = mga \cos \alpha - \frac{\beta^2}{2(J + ma^2 \sin^2 \alpha)},$$

приходим к задаче об относительном движении точки по окружности в поле сил с силовой функцией U^* . Положение «относительного» равновесия определяется уравнением

$$\frac{\partial U^*}{\partial \alpha} = -mga \sin \alpha + \frac{\beta^2 ma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{(J + ma^2 \sin^2 \alpha)^2} = 0,$$

которое равносильно двум следующим условиям:

$$\sin \alpha_1 = 0,$$

$$-mga(J + ma^2 \sin^2 \alpha_0)^2 + \beta^2 ma^2 \cos \alpha_0 = 0.$$

Из последнего уравнения находим после подстановки значения β^2

$$\cos \alpha_0 = \frac{g}{\omega_0^2 a},$$

откуда следует, что положение равновесия существует при

$$g \leq \omega_0^2 a.$$

Если шарик поместить в положение, определяемое углом α_0 , то при движении системы будет изменяться только циклическая координата φ , а координата α сохраняет постоянное значение. Такие движения, в которых все нециклические координаты сохраняют постоянное значение, Раус назвал стационарными. Для исследования устойчивости положений относительного равновесия рассмотрим вторую производную от функции U^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} &= -mga \cos \alpha + m\beta^2 a^2 (J + ma^2 \sin^2 \alpha)^{-3} \times \\ &\times [J + ma^2 \sin^2 \alpha] \cos 2\alpha - ma^2 \sin^2 2\alpha]. \end{aligned}$$

При $\alpha = \alpha_0$ получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U^*}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_0} &= -mga \cos \alpha_0 + ma^2 \omega_0^2 [\cos 2\alpha_0 - \\ &- ma^2 (J + ma^2 \sin^2 \alpha_0)^{-1} \sin^2 2\alpha]. \end{aligned}$$

Здесь

$$-mga + ma^2 \omega_0^2 \cos \alpha_0 = 0,$$

поэтому

$$\left. \frac{\partial^2 U^*}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{ma^2 \omega_0^2 \sin^2 \alpha_0}{J + ma^2 \sin^2 \alpha_0} [J + ma^2 (1 + 3 \cos^2 \alpha_0)] < 0,$$

т. е. силовая функция при $\alpha = \alpha_0$ имеет максимум, и положение равновесия устойчиво.

При $\alpha_1 = 0$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 U^*}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha_1=0} = -mga + \frac{m\beta^2 a^2}{J^2} = mga \left(\frac{\beta^2 a}{J^2 g} - 1 \right) =$$

$$= mga \left[\frac{\omega^2 a}{g} - 1 + \frac{\omega^2 a}{J^2 g} (2ma^2 J \sin \alpha_0 + m^2 a^4 \sin^4 \alpha_0) \right] > 0,$$

если $a\omega^2 > g$, положение равновесия неустойчиво.

Малые движения в окрестности устойчивого положения равновесия будут определяться уравнением

$$ma^2 \alpha'' = - \frac{ma^3 \omega^2 \sin^2 \alpha_0}{J + ma^2 \sin^2 \alpha_0} [J + ma^2 (1 + 3 \cos^2 \alpha_0)] \alpha.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где

$$k = \omega_0 \sin \alpha_0 \sqrt{\frac{J + ma^2 (1 + 3 \cos^2 \alpha_0)}{J + ma^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

Такие движения будут существовать, если в начальный момент при $\alpha = \alpha_0$ и $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \neq 0$.

§ 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

1. Основные теоремы

Задача об устойчивости имеет значение не только при исследовании положений равновесия, но и при исследовании движения механических систем. Она возникает в связи с необходимостью знать, как изменится движение при отклонении начальных условий от заданных. Этой задачей занимались такие крупнейшие исследователи, как П. Тэт (1831—1901), Томсон (лорд Кельвин) (1824—1907), Э. Раус, А. Пуанкаре, Н. Е. Жуковский (1847—1921) и др. Наиболее полное решение задачи дал А. М. Ляпунов в своей докторской диссертации в 1892 г. В настоящее время задачи устойчивости решаются во всех областях механики.

Предположим, что уравнения движения механической системы сведены к дифференциальным уравнениям

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

правые части которых являются голоморфными функциями координат t и $y_1, y_2, \dots, y_n$, и пусть

$$y_s = f_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

— некоторое частное решение системы, отвечающее начальным условиям:

$$\text{при } t = t_0 \quad y_s = y_{s0}.$$

Это частное решение назовем невозмущенным движением. Все другие решения системы будем называть возмущен-

ными движениями. Разности значений y_s для возмущенного и невозмущенного движений

$$x_s = y_s - f_s(t)$$

называются возмущениями.

Определение. Невозмущенное движение $y_s = f_s(t)$ будем называть устойчивым по отношению к величинам y_s , если для всякого положительного числа A , как бы мало оно ни было, всегда найдется другое положительное число λ , такое, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих в начальный момент неравенству

$$\sum_{s=1}^n [y_s(t_0) - f_s(t_0)]^2 \leq \lambda,$$

при всяком $t \geq t_0$ будет выполняться условие

$$\sum_{s=1}^n [y_s(t) - f_s(t)]^2 < A.$$

В противном случае невозмущенное движение будем называть неустойчивым.

Решение задачи об устойчивости зависит от тех дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют возмущения

$$x_s = y_s - f_s(t)$$

и которые мы будем называть дифференциальными уравнениями возмущенного движения. Уравнения эти получаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \frac{dy_s}{dt} - \frac{df_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - \\ &- Y_s(t, f_1, f_2, \dots, f_n) = Y_s(t, f_1 + x_1, f_2 + x_2, \dots, f_n + x_n) - \\ &- Y_s(t, f_1, f_2, \dots, f_n) = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Отсюда получаем окончательную форму уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Определению устойчивости можно теперь дать иную формулировку.

Невозмущенное движение $x_s = 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$) будем называть устойчивым, если для любого положительного числа A , как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число λ такое, что для всех возмущений, удовлетворяющих в начальный момент условию

$$\sum_s x_s^2(0) \leq \lambda,$$

для всех $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum_s x_s^2(t) < A.$$

Если уравнения возмущенного движения не включают явно времени t , то невозмущенное движение будем называть установившимся, в противном случае — не установившимся.

Будем считать правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения непрерывными ограниченными функциями $t, x_1, x_2, \dots, x_n$, допускающими единственное решение для каждой системы начальных значений переменных, лежащих в области

$$\sum_s x_s^2 \leq H, \quad t \geq t_0.$$

Прямой метод Ляпунова заключается в отыскании некоторых функций вещественных переменных $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ и в изучении свойств их производных. В основе метода лежит изложенный ранее способ, использованный Лежен-Дирихле при доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия.

В области

$$\sum_s x_s^2 \leq H, \quad t \geq t_0 \quad (*)$$

будем рассматривать функции вещественных переменных $t, x_1, x_2, \dots, x_n$, однозначные, непрерывные, дифференцируемые и уничтожающиеся при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Такие функции называются функциями Ляпунова.

Определения. 1. Функция $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая в области (*) может принимать значения только одного знака, называется **знакопостоянной**.

2. Функцию $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая при сколь угодно малых значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ в области (*) может принимать значения как положительные, так и отрицательные, будем называть **знакопеременной**.

3. Функцию $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящую только от координат и не зависящую явно от времени, принимающую в области (*) значения лишь одного знака и обращающуюся в нуль лишь при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, будем называть **знакоопределенной**.

4. Функция $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **знакоопределенной**, если возможно найти такую знакоопределенную положительную функцию $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящую лишь от координат, которая удовлетворяет в области (*) условиям

$$V - W \geq 0 \quad \text{или} \quad -V - W \geq 0.$$

5. Будем говорить, что функция $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ допускает бесконечно малый высший предел, если для всякого положительного числа l как бы мало оно ни было, найдется другое число $\varepsilon > 0$ такое, что в области

$$\sum_s x_s^2 \leq \varepsilon, \quad t > t_0$$

функция V удовлетворяет неравенству

$$|V| < l.$$

Этому требованию, в частности, удовлетворяет всякая непрерывная, не зависящая от t функция $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Теорема Ляпунова. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

таковы, что можно найти знакоопределенную функцию $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, производная которой $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу системы дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t} = U(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

была бы знакопостоянной функцией, знака противоположного с V , или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. Покажем, что существование функции V , удовлетворяющей условиям теоремы, дает возможность по заданным числам A найти соответствующие числа λ , удовлетворяющие определению устойчивости.

Пусть V — знакоопределенная положительная, а V' — знакопостоянная отрицательная или тождественно равная нулю функция в области (*) и пусть $A < H$ — некоторое произвольное число. Тогда существует знакоопределенная функция $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что

$$V \geq W.$$

Рассмотрим сферу

$$\sum x_s^2 = A$$

и обозначим через l минимум функции W на сфере A . Тогда поверхность $W = l$ не будет выходить за пределы сферы A . Рассмотрим функцию $V(t_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящую только от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и начального значения времени t_0 . Такая функция

допускает бесконечно малый высший предел, т. е. найдется такое число λ , что в области

$$\sum_s x_s^2 \leq \lambda, \quad t \geq t_0$$

будет выполняться условие

$$V(t_0, x_1, x_2, \dots, x_n) < l.$$

Выберем теперь начальные значения координат $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\sum_s x_{s0}^2 \leq \lambda.$$

Тогда

$$V_0(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) < l.$$

Обозначим производную от функции V через V'

$$\frac{dV}{dt} = V'.$$

Интегрированием получим

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t V' dt.$$

Из условия $V' \leq 0$ следует

$$V - V_0 \leq 0,$$

но тогда

$$W \leq V \leq V_0 < l,$$

т. е. для всех $t \geq t_0$

$$W < l.$$

На сфере $\Sigma x_s^2 = A$ функция W удовлетворяет неравенству $W \geq l$. Следовательно, координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ во все время движения не будут удовлетворять уравнению поверхности сферы A , и возмущенное движение будет оставаться внутри сферы

$$\sum_s x_s^2 = A.$$

Этим доказана теорема об устойчивости движения.

З а м е ч а н и е. Если не зависящие от времени первые интегралы уравнений движения $U_1, U_2, \dots, U_p$ являются голоморфными функциями координат и скоростей и можно так подобрать числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, C_1, C_2, \dots, C_p$, чтобы разложение функции

$$V = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p + C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2 + \dots + C_p U_p^2$$

начиналось бы со знакоопределенной квадратичной формы, то функция V будет удовлетворять условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Пример 54. Методом Ляпунова доказать теорему Лагранжа об устойчивости равновесия.

Пусть на систему наложены идеальные голономные и не зависящие явно от времени связи. Тогда движение системы будет определяться системой уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}, \quad \frac{dq_s}{dt} = \dot{q}_s \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Частным решением этой системы является положение равновесия:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_k = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_k = 0.$$

В рассматриваемом случае существует интеграл живых сил

$$T - U = \text{const.}$$

Если функция U имеет в положении равновесия изолированный максимум, то она является знакоопределенной отрицательной функцией переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$ в некоторой окрестности положения равновесия. Живая сила системы по самому определению является знакоопределенной положительной функцией от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$. Тогда функция

$$V = T - U$$

будет знакоопределенной положительной функцией от переменных

$$q_1, q_2, \dots, q_k, \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k.$$

Производная от функции V тождественно равна нулю

$$\frac{dV}{dt} \equiv 0,$$

так как V есть первый интеграл уравнений движения. Тогда функция V удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения, и положение равновесия системы устойчиво.

Теорема Ляпунова дает только достаточные условия устойчивости движения. Самым трудным местом в использовании теоремы является вопрос о построении функции Ляпунова.

Определение. Невозмущенное движение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ будем называть асимптотически устойчивым, если оно удовлетворяет условиям устойчивости и, кроме того, если всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически при $t \rightarrow \infty$ так, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) = 0.$$

Теорема об асимптотической устойчивости. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что можно найти знакоопределенную функцию $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, допускающую

щую бесконечно малый высший предел, производная от которой, взятая в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения, представляет знакоопределенную функцию, противоположного с V знака, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Доказательство. По определению функций V и V' существуют такие знакоопределенные положительные функции W и W_1 , зависящие только от координат x_i , что

$$V - W \geq 0, \quad -V' - W_1 \geq 0$$

для всех значений координат и времени в области (*). Функция V удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, т. е. по заданному числу A можно найти такое число λ , что всякое движение, начинающееся внутри или на границе сферы

$$\sum_s x_s^2 \leq \lambda,$$

будет всегда оставаться внутри сферы

$$\sum_s x_s^2 = A.$$

Пусть l — точная низшая граница функции W на сфере A . Выберем λ так, чтобы для начальных значений координат

$$\sum_s x_{s0}^2 \leq \lambda$$

выполнялось неравенство

$$V(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) < l.$$

Покажем, что не существует положительного числа a , которое было бы меньше всех значений, получаемых функцией V при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, если бы такое число a существовало, то, в силу существования у функции V бесконечно малого высшего предела, нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что в области

$$\sum_s x_s^2 \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

выполнялось бы неравенство

$$V < a,$$

и для действительного возмущенного движения имело бы место условие

$$\varepsilon < \sum_s x_s^2 \leq A. \quad (**)$$

Но в замкнутой области функция W_1 имеет низший предел, который обозначим через l_1 , так что будем иметь в области (**)

$$-V' \geq W_1 \geq l_1 > 0.$$

Из уравнения

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t V' dt$$

получим теперь

$$V - V_0 \leq - \int_{t_0}^t l_1 dt = -l_1(t - t_0),$$

или

$$V \leq V_0 - l_1(t - t_0),$$

и всегда найдется такой момент $t > t_0$, когда функция V станет меньше, чем a . Мы пришли к противоречию с предположением, что во все время движения функция $V > a$. Будучи убывающей функцией, V затем всегда будет оставаться меньше a . Если за a прием точную низшую границу функции W в области

$$\mu \leq \sum_s x_s^2 \leq A,$$

то всегда наступит момент, когда функция V сделается и будет оставаться меньше a . Начиная с этого момента значения переменных x_s всегда будут оставаться в области

$$\sum_s x_s^2 < \mu.$$

Следовательно, при всяких начальных возмущениях x_{s0} в области (λ) значения переменных x_s с беспредельным возрастанием t стремятся к нулю.

Ляпуновым были предложены теоремы о неустойчивости невозмущенного движения. Эти теоремы были обобщены Н. Г. Четаевым, предложившим теорему, более пригодную для решения технических задач.

Чтобы установить неустойчивость невозмущенного движения, достаточно найти хотя бы одну траекторию возмущенного движения, не удовлетворяющую условию устойчивости.

При исследовании неустойчивости будем рассматривать функции $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, обращающиеся в нуль, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ и, может быть, на некоторой поверхности

$$V(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

проходящей через начало координат. Совокупность значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, где выполняются условия

$$V > 0, \quad \sum_s x_s^2 \leq H, \quad t \geq t_0,$$

будем называть областью $V > 0$. Эта область может вообще меняться со временем.

Функцию $W(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем знакоопределенной в области $V > 0$, если она может обращаться в нуль в этой области лишь на границе $V = 0$ и если для произвольного $\varepsilon > 0$ всегда найдется число $l > 0$ такое, что для всех значений координат, удовлетворяющих условию

$$V \geq \varepsilon, \quad t \geq t_0,$$

имеет место неравенство

$$W > l.$$

Теорема Четаева о неустойчивости движения

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что можно найти функцию V , ограниченную в области $V > 0$, существующей в сколь угодно малой окрестности невозмущенного движения, производная которой $\frac{dV}{dt}$, взятая в силу

уравнений возмущенного движения, была бы определенно положительной в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Функция V ограничена в области $V > 0$, так что в этой области

$$V < L,$$

где L — некоторое положительное число. Покажем, что не существует такого положительного числа λ , для которого при всех начальных возмущениях, удовлетворяющих условию

$$\sum x_{s0}^2 = \lambda,$$

и при всех $t \geq t_0$ не нарушается неравенство

$$\sum_s x_s^2 < A \leq H.$$

Доказательство будем проводить от противного. Пусть λ существует, когда выполняются условия теоремы. Выберем начальные возмущения так, чтобы

$$\sum_s x_{s0}^2 = \lambda, \quad V_0 > 0.$$

Так как V' — знакоопределенная положительная функция, то для значений координат x_s , удовлетворяющих неравенству

$$V > V_0,$$

найдется такое I_1 , что будем иметь

$$V' > I_1.$$

Тогда из соотношения

$$V - V_0 = \int_{t_0}^t V' dt$$

получим

$$V \geq V_0 + l_1(t - t_0),$$

где правая часть неограниченно растет вместе с t . Совместно с неравенством $V < L$ последнее неравенство может существовать лишь для значений t , не превосходящих величины

$$t_0 + \frac{L - V_0}{l_1}.$$

Этим и обнаруживается неустойчивость.

Пример 55. Исследовать устойчивость постоянных вращений тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Решение. Постоянными осями вращения, как было показано, являются главные оси эллипсоида инерции твердого тела, построенного для неподвижной точки. Таким образом, постоянным вращением будет движение

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0, \quad r = r_0 > 0,$$

удовлетворяющее уравнениям Эйлера. Для аналитического исследования устойчивости этого движения рассмотрим возмущенное движение

$$p = x, \quad q = y, \quad r = r_0 + z.$$

Тогда уравнения возмущенного движения запишутся следующим образом:

$$A \frac{dx}{dt} = (B - C)y(r_0 + z), \quad B \frac{dy}{dt} = (C - A)(r_0 + z)x,$$

$$C \frac{dz}{dt} = (A - B)xy.$$

Уравнения допускают существование первых интегралов:

$$\frac{A - C}{B} x^2 + \frac{B - C}{A} y^2 = C_1,$$

$$Ax^2 + By^2 + 2Cr_0z + Cz^2 = h.$$

Составим функцию Ляпунова в виде комбинации первых интегралов

$$V = \frac{A - C}{B} x^2 + \frac{B - C}{A} y^2 \pm (Ax^2 + By^2 + 2Cr_0z + Cz^2)^2.$$

При $A \geq B > C$ эта функция знакоопределенная положительная, при $A < B < C$ — функция знакоопределенная отрицательная. Производная от функции V в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, так что функция V удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения, т. е. постоянные вращения вокруг наибольшей и наименьшей полуосей эллипсоида инерции устойчивы.

Неустойчивость вращения вокруг средней оси эллипсоида инерции (когда $A < C < B$) доказывается рассмотрением функции

$$V = xy.$$

Ее производная в силу уравнений движения

$$\frac{dV}{dt} = (r_0 + z) \left(\frac{B-C}{A} y^2 + \frac{C-A}{B} x^2 \right).$$

Если $z+r_0=0$, то неустойчивость непосредственно следует из уравнений возмущенного движения. Если $r_0+z>0$, то V' определено положительно в области $V>0$. Таким образом, на основании теоремы Четаева о неустойчивости движения, вращение вокруг средней полуоси неустойчиво.

2. Влияние диссипативных сил на устойчивость равновесия

В механике движение системы в сопротивляющейся среде характеризуется тем, что на каждую точку системы действует сила, являющаяся функцией скорости и направленная противоположно скорости. Такие силы Кельвин назвал диссипативными. При малых скоростях движения можно считать, что сила сопротивления является линейной функцией скоростей. Рэлей (1842—1919) ввел понятие диссипативной функции (функции рассеивания)

$$2f = \sum c_{\alpha\beta} \dot{x}'_{\alpha} \dot{x}'_{\beta}.$$

Если функция f зависит от всех скоростей, то диссипация называется полной. Коэффициенты этой функции предполагаются постоянными, а сама функция — знакоопределенной положительной квадратичной формой относительно скоростей. Диссипативные силы в этом случае определяются из равенств

$$X_v = - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}'_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Если на систему действуют только консервативные силы, то в окрестности положения равновесия движение системы определяется системой линейных уравнений, которые в нормальных координатах принимают вид

$$\ddot{x}_v + \lambda_v \dot{x}_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

При наличии диссипативных сил уравнения движения получают вид:

$$\frac{dx_v}{dt} = \dot{x}'_v, \quad \frac{d\dot{x}'_v}{dt} = -\lambda_v \dot{x}'_v - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}'_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Кельвином установлены следующие теоремы о влиянии диссипативных сил на устойчивость равновесия.

Теорема 1. Диссипативные силы не нарушают устойчивости положения равновесия.

Доказательство. Пусть U — знакоопределенная отрицательная силовая функция координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогда положение равновесия устойчиво при наличии одних консервативных сил, а функция

$$V = T - U$$

является знакоопределенной положительной функцией координат и скоростей. Для главных координат эта функция имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n (x_v'^2 + \lambda_v x_v^2), \text{ где } \lambda_v > 0.$$

Производная от функции V в силу уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_v x_v' x_v'' + \sum_v \lambda_v x_v x_v' = \sum_v x_v' \left(-\lambda_v x_v' - \frac{\partial f}{\partial x_v'} \right) + \\ &+ \sum_v \lambda_v x_v x_v' = - \sum_v x_v' \frac{\partial f}{\partial x_v'} = -2f, \end{aligned}$$

где f — знакоопределенная положительная функция одних обобщенных скоростей. Следовательно, производная $\frac{dV}{dt}$ является знакопостоянной отрицательной функцией обобщенных координат и скоростей, т. е. невозмущенное движение остается устойчивым и после добавления диссипативных сил.

Теорема 2. *Устойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V = T - U + \beta \sum_v x_v x_v',$$

где постоянную β выберем так, чтобы функция V была знакоопределенной положительной функцией. Записанная в явном виде, функция получит вид

$$V = \frac{1}{2} \sum_v (x_v'^2 + \lambda_v x_v^2) + \beta \sum_v x_v x_v'.$$

Вычислим дискриминант квадратичной формы V

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \beta^2)(\lambda_2 - \beta^2) \dots (\lambda_n - \beta^2).$$

Выбирая β из условия

$$\beta^2 < \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

получим, что V — знакоопределенная квадратичная форма. Рассмотрим производную от функции V в силу уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_v \dot{x}_v' \left(-\lambda_v x_v - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v'} \right) + \sum_v \lambda_v x_v \dot{x}_v' + \beta \sum_v \dot{x}_v'^2 + \\ &+ \beta \sum_v x_v \left(-\lambda_v x_v - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v'} \right) = -2f + \beta \sum_v \dot{x}_v'^2 - \beta \sum_v \lambda_v x_v^2 - \\ &- \beta \sum_v x_v \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v'} = - \left[\sum_{i,j} (c_{ij} - \delta_{ij} \beta) \dot{x}_i' \dot{x}_j' + \beta \sum_v \lambda_v x_v^2 + \beta \sum_{i,j} c_{ij} x_i' x_j' \right], \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Дискриминант квадратичной формы, заключенной в скобки

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{ij} - \delta_{ij} \beta & \frac{1}{2} \beta c_{ij} \\ \frac{1}{2} \beta c_{ij} & \beta \lambda_j \delta_{ij} \end{vmatrix} > 0$$

в силу малости величины β .

Таким образом, производная $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной отрицательной формой переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1', \dot{x}_2', \dots, \dot{x}_n'$, т. е. положение равновесия асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Изолированное и неустойчивое при потенциальных силах положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами.*

Доказательство. Пусть среди λ_i существует по меньшей мере один отрицательный коэффициент и нет ни одного равного нулю. Для определенности положим $\lambda_1 < 0$. Тогда уравнение, соответствующее λ_1 , имеет вид

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\lambda_1 x_1,$$

где $\lambda_1 = -k^2 < 0$.

Общее решение этого уравнения запишется следующим образом:

$$x_1 = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}, \quad k > 0,$$

* Стабилизация означает, что исследуемое движение приобретает свойство устойчивости.

причем коэффициент C_1 связан с начальными условиями соотношением

$$C_1 = \frac{x_0 k + x_0'}{2k}.$$

Если $C_1 \neq 0$, то решение неограниченно возрастает с ростом времени, т. е. положение равновесия неустойчиво.

При наличии диссипативных сил уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\lambda_i x_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V = -(H + \beta \sum \lambda_v x_v x_v'),$$

где $H = T - U$. При $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, $x_1' = x_2' = \dots = x_n' = 0$, $x_1 \neq 0$ будем иметь

$$V(x_1) = -\frac{1}{2} \lambda_1 x_1^2 > 0.$$

Следовательно, всегда существует область $V > 0$. Вычислим производную от функции V в силу уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2f - \beta \sum_v \lambda_v x_v'^2 + \beta \sum_v \lambda_v^2 x_v^2 - \beta \sum_v \lambda_v x_v \frac{\partial f}{\partial x_v'} = \\ &= 2f - \beta \sum_v \lambda_v x_v'^2 + \beta \sum_v \lambda_v^2 x_v^2 + \beta \sum_{\mu, v} \lambda_v x_v x_\mu'. \end{aligned}$$

Она представляет однородную квадратичную форму переменных x, x' . Дискриминант этой квадратичной формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} |c_{ij} - \delta_{ij} \beta \lambda_j| & \left| \frac{1}{2} c_{ij} \beta \lambda_j \right| \\ \left| \frac{1}{2} c_{ij} \beta \lambda_j \right| & |\beta \lambda_i^2 \delta_{ij}| \end{vmatrix} > 0$$

(при достаточно малых значениях β можно пренебрегать членами с высшими степенями β). Таким образом, функция V удовлетворяет условиям теоремы Четаева о неустойчивости движения. Теорема доказана.

3. Влияние гироскопических сил на устойчивость равновесия

Если положение равновесия системы неустойчиво, то оно может быть в некоторых случаях стабилизировано добавлением гироскопических сил. Гироскопическими (по определению Томсона и

Тэта) называются силы, сумма работ которых на действительном перемещении системы равна нулю. Это могут быть действительные силы или просто некоторые члены, обусловленные определенной структурой уравнений движения. По этой причине гироскопические силы иногда называют гироскопическими членами. По определению гироскопические силы Γ_v удовлетворяют соотношению

$$\Gamma_1 dq_1 + \Gamma_2 dq_2 + \dots + \Gamma_k dq_k = 0,$$

из которого непосредственно следует, что гироскопические силы Γ_v являются линейными функциями обобщенных скоростей

$$\Gamma_v = \sum_{i=1}^k g_{vi} q'_i.$$

Из определения гироскопических сил находим

$$\sum_{v=1}^k \Gamma_v q'_v = \sum_{v=1}^k \sum_{i=1}^k g_{vi} q'_i q'_v = \frac{1}{2} \sum_{i,v} (g_{vi} + g_{iv}) q'_v q'_i = 0.$$

Таким образом, если матрица $\|g_{vi}\|$ кососимметрическая, т. е. $g_{vi} = -g_{iv}$, то работа сил тождественно равна нулю, и силы Γ_v будут гироскопическими. Гироскопические члены в уравнениях Лагранжа могут появляться, например, при наложении на систему связей, зависящих явно от времени. Действительно, так как в этом случае

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \sum_{i,j} a_{ij} q'_i q'_j, \quad T_1 = \sum_i b_i q'_i,$$

то уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_2}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} = Q_i,$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{v,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_v} q'_v q'_j + \sum_j a_{ij} q''_j + \sum_v \frac{\partial b_i}{\partial q_v} q'_v - \frac{1}{2} \sum_{v,j} \frac{\partial a_{vj}}{\partial q_i} q'_v q'_j - \\ - \sum_v \frac{\partial b_v}{\partial q_i} q'_v - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} = Q_i. \end{aligned}$$

Здесь члены

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \sum_{v=1}^k \left(\frac{\partial b_i}{\partial q_v} - \frac{\partial b_v}{\partial q_i} \right) q'_v$$

являются гироскопическими, так как

$$\sum_{i,v} \left(\frac{\partial b_i}{\partial q_v} - \frac{\partial b_v}{\partial q_i} \right) q'_v q'_i \equiv 0.$$

Эти гироскопические члены уничтожаются, если величины b_i постоянны.

Рассмотрим механическую систему, совершающую малые движения около положения равновесия. Предположим, что кроме консервативных сил на систему действуют еще диссипативные и гироскопические силы. Пусть диссипативная функция

$$2f = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta,$$

а гироскопические силы

$$\Gamma_v = \sum_{\mu} g_{v\mu} x'_\mu.$$

Укажем на следующие теоремы, принадлежащие Кельвину.

Теорема 1. *Равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, сохраняет устойчивость при добавлении гироскопических и диссипативных сил.*

Доказательство. При добавлении гироскопических и диссипативных сил уравнения движения системы вблизи положения равновесия принимают вид:

$$\frac{dx_v}{dt} = x'_v, \quad \frac{dx'_v}{dt} = -\lambda_v x_v - \frac{\partial f}{\partial x'_v} + \Gamma_v.$$

Если все λ_v положительны, то положение равновесия устойчиво при одних потенциальных силах, и функция

$$H = \frac{1}{2} \sum_v (x_v'^2 + \lambda_v x_v^2)$$

будет определено положительной. Производная от функции H в силу уравнений движения

$$\frac{dH}{dt} = \sum_v x'_v \left(-\lambda_v x_v - \frac{\partial f}{\partial x'_v} + \Gamma_v \right) + \sum_v \lambda_v x'_v x_v = -2f$$

не будет положительной. Справедливость утверждения следует из теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Теорема 2. *Изолированное неустойчивое положение равновесия не может быть стабилизировано добавлением гироскопических и диссипативных сил, если последние обладают полной диссипацией.*

Для доказательства достаточно рассмотреть функцию Ляпунова

$$W = \frac{1}{2} \sum_v (x_v'^2 + \lambda_v x_v^2) + \beta \sum_v \lambda_v x_v' x_v.$$

Она допускает бесконечно малый высший предел, так как не зависит явно от времени. Величины x_v' , x_v всегда можно подобрать так, чтобы функция W имела отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности начала координат, ибо среди λ_v существует по крайней мере одно отрицательное. Производная от функции W

$$\frac{dW}{dt} = -2f + \beta \sum_v \lambda_v x_v'^2 - \beta \sum_v \lambda_v^2 x_v^2 - \beta \sum_v \lambda_v x_v \frac{\partial f}{\partial x_v} + \beta \sum_v \lambda_v x_v' \Gamma_v$$

будет определено отрицательной функцией, если β достаточно мала. Следовательно, функция W удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости, чем и доказывается утверждение.

Отрицательный ответ дается и на вопрос о возможности стабилизации неустойчивого изолированного положения равновесия одними гироскопическими силами, если неустойчивость при одних консервативных силах имеет нечетную степень (число отрицательных λ_v нечетно).

В самом деле, пусть число отрицательных λ_v нечетно, и все λ_v отличны от нуля. Рассмотрим уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dx_v}{dt} = x_v', \quad \frac{dx_v'}{dt} = -\lambda_v x_v + \sum_{\mu} g_{v\mu} x_{\mu}',$$

$$g_{v\mu} = -g_{\mu v}.$$

Характеристическое уравнение системы запишется следующим образом:

$$\Delta(\kappa) = \begin{vmatrix} -\lambda_1 - \kappa^2 & g_{12}\kappa & g_{13}\kappa & \dots & g_{1n}\kappa \\ g_{21}\kappa & -\lambda_2 - \kappa^2 & g_{23}\kappa & \dots & g_{2n}\kappa \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}\kappa & g_{n2}\kappa & g_{n3}\kappa & \dots & -\lambda_n - \kappa^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что

$$\Delta(0) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \quad \Delta(\kappa)|_{\kappa \rightarrow \infty} = (-1)^n \kappa^{2n} + \dots |_{\kappa \rightarrow \infty} \rightarrow \infty,$$

и если число отрицательных λ_i нечетно, то $\Delta(0)$ и $\Delta(\kappa)$ имеют разные знаки, а характеристическое уравнение $\Delta(\kappa) = 0$ имеет по меньшей мере один положительный корень. При этих условиях общее решение линейной системы содержит экспоненциальный член, неограниченно возрастающий по модулю, откуда и следует, что положение равновесия оказывается неустойчивым.

Равновесие, неустойчивое при одних консервативных силах, может быть стабилизировано добавлением подходящих гироскопических сил, если степень неустойчивости была четной и диссипативные силы отсутствуют.

Покажем это на примере. Пусть система имеет вид:

$$x'' = -\alpha x + gy', \quad y'' = -\beta y - gx',$$

α и β — отрицательны. Характеристическое уравнение такой линейной системы

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2(g^2 + \alpha + \beta) + \alpha\beta = 0,$$

и если выполняются неравенства

$$g^2 + \alpha + \beta > 0, \quad (g^2 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0,$$

то уравнение имеет только чисто мнимые корни, и движение в окрестности положения равновесия будет совершаться по гармоническому закону. Этим и доказывается устойчивость при наличии гироскопических сил.

З а м е ч а н и е. Диссипативные силы в природе всегда существуют, поэтому такая стабилизация оказывается временной.

П р и м е р 56. Исследовать устойчивость равновесия гироскопического маятника, представляющего собой гироскоп с тремя степенями свободы, центр тяжести которого лежит на оси фигуры на некотором расстоянии от опоры (рис. 87).

Р е ш е н и е. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — абсолютная система координат с началом в неподвижной точке маятника, причем ось ζ направлена вертикально вверх. Ось ротора гироскопа обозначим через z и пусть z_1 — проекция оси z на плоскость $\xi\eta$. Обозначим через α угол между осями ξ и z_1 , а через β — угол между осями η и z . Линию пересечения плоскости $\xi\zeta$ с плоскостью, перпендикулярной к оси z и проходящей через точку O , обозначим через x , а ось y выберем так, чтобы система $Oxyz$ образовывала правую тройку. Преобразование от осей $O\xi\eta\zeta$ к осям $Oxyz$ можно осуществить двумя поворотами, так что

$$\xi = x \cos \alpha - y \sin \alpha \sin \beta + z \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\eta = y \cos \beta + z \sin \beta,$$

$$\zeta = -x \sin \alpha - y \sin \beta \cos \alpha + z \cos \beta \cos \alpha,$$

направляющие косинусы приведены в таблице

	x	y	z
ξ	$\cos \alpha$	$-\sin \beta \sin \alpha$	$\cos \beta \sin \alpha$
η	0	$\cos \beta$	$\sin \beta$
ζ	$-\sin \alpha$	$-\sin \beta \cos \alpha$	$\cos \beta \cos \alpha$

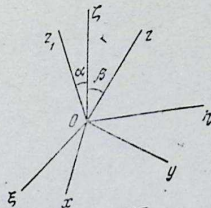


Рис. 87

Проекции угловой скорости Ω вращения подвижной системы координат на оси x, y, z суть

$$P = -\beta', \quad Q = \alpha' \cos \beta, \quad R = -\alpha' \sin \beta \cos \alpha.$$

Обозначим через ω_0 угловую скорость вращения твердого тела относительно системы координат $Oxyz$. Тогда проекции угловой скорости ω твердого тела на оси x, y, z

$$p = -\beta', \quad q = \alpha' \cos \beta, \quad r = \alpha' \sin \beta + \omega_0,$$

а живая сила равна следующему выражению:

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2,$$

или

$$2T = A(\beta'^2 + \alpha'^2 \cos^2 \beta) + C(\alpha' \sin \beta + \omega_0)^2.$$

Считая величины $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ малыми и пренебрегая в выражении для живой силы членами выше второго порядка малости, приближенно имеем

$$2T = A(\beta'^2 + \alpha'^2) + C(2\alpha'\beta\omega_0 + \omega_0^2).$$

Если к твердому телу приложены лишь силы тяжести, то силовая функция задачи запишется следующим образом:

$$U = -mgz_c = -mgl \cos \beta \cos \alpha \approx -mgl \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}\right).$$

Тогда приближенные уравнения для малых движений в окрестности положения равновесия примут вид:

$$A\alpha'' + C\omega_0\beta' = mgl\alpha, \quad A\beta'' - C\omega_0\alpha' = mgl\beta.$$

Если $\omega_0 = 0$, то гироскопические члены не войдут в уравнения, и система будет консервативной:

$$A\alpha'' - mgl\alpha = 0, \quad A\beta'' - mgl\beta = 0.$$

При $l < 0$ положение равновесия такой системы устойчиво, при $l > 0$ — неустойчиво.

При наличии гироскопических сил характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} Ar^2 - mgl & C\omega_0 r \\ -C\omega_0 r & Ar^2 - mgl \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$A^2 r^4 + (-2mglA + C^2 \omega_0^2) r^2 + m^2 g^2 l^2 = 0.$$

Положение равновесия будет устойчивым, если действительные части корней этого уравнения будут равны нулю (тогда решение представится в виде тригонометрических функций и будет ограничено). Последнее выполняется, если

$$\omega_0^2 > \frac{4mglA}{C^2}.$$

Таким образом, при $l > 0$ положение равновесия может быть стабилизировано гироскопическими силами. Диссипативные силы в природе нельзя уничтожить, поэтому такая стабилизация оказывается временной.

§ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Дифференциальные уравнения движения механической системы дают возможность определить в k -мерном пространстве траекторию этой системы, соответствующую определенным начальным условиям и заданным силам. В теории возмущений мы будем сопоставлять этой траектории другие движения системы, которые можно получить либо изменением начальных условий, либо изменением сил, действующих на систему. Обе эти задачи имеют много общего и по методам решения и по характеру приложений.

1. Уравнения в вариациях Пуанкаре

Уравнения в вариациях Пуанкаре дают возможность изучать поведение траекторий в окрестности некоторого заданного движения.

Пусть движение механической системы с k степенями свободы определяется каноническими переменными $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$, удовлетворяющими уравнениям Гамильтона:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Заданному движению системы отвечает частное решение уравнений Гамильтона:

$$q_s = q_s(t), \quad p_s = p_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, k),$$

соответствующее определенным начальным условиям. В отличие от других движений, отвечающих иным начальным условиям, будем называть это частное решение невозмущенным движением системы.

Изменяя начальные условия, получим другие частные решения, которые будут давать возмущенное движение. Для возмущенного движения обобщенные координаты и импульсы q_s^*, p_s^* представим в виде

$$q_s^* = q_s(t) + \xi_s(t), \quad p_s^* = p_s(t) + \eta_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Величины ξ_s, η_s представляют возмущения, или вариации, координат и импульсов. Возмущенное движение удовлетворяет тем же каноническим уравнениям, что и невозмущенное:

$$\frac{dq_s^*}{dt} = \frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial p_s^*}, \quad \frac{dp_s^*}{dt} = -\frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial q_s^*} \quad (s = 1, 2, \dots, k),$$

или

$$\frac{d}{dt} (q_s + \xi_s) = \frac{\partial H(t, q + \xi, p + \eta)}{\partial p_s},$$

$$\frac{d}{dt}(p_s + \eta_s) = - \frac{\partial H(t, q + \xi, p + \eta)}{\partial \xi_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Раскладывая правые части этих уравнений в ряды Тейлора, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dq_s}{dt} + \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p_s} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} \xi_j + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} \eta_j + \dots, \\ \frac{dp_s}{dt} + \frac{d\eta_s}{dt} &= - \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial q_s} - \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} \xi_j - \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} \eta_j + \dots \end{aligned}$$

Отсюда уравнения для возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} \eta_j \right) + \dots, \\ \frac{d\eta_s}{dt} &= - \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} \eta_j \right) + \dots \end{aligned}$$

Отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим приближенные уравнения для вариаций ξ_s, η_s :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} \eta_j \right), \\ \frac{d\eta_s}{dt} &= - \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} \eta_j \right), \end{aligned}$$

которые называются уравнениями в вариациях Пуанкаре. Эти уравнения играют очень важную роль при исследовании задач устойчивости невозмущенного движения.

Рассмотрим некоторые свойства уравнений в вариациях.

Теорема 1. Если

$$\begin{aligned} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \quad \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \\ \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k, \quad \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_k \end{aligned}$$

суть два частных решения уравнений в вариациях Пуанкаре, то вдоль интегральной кривой выполняется соотношение

$$J = \sum_{s=1}^k (\xi_s \eta'_s - \eta_s \xi'_s) = \text{const}^*.$$

* Величина J называется инвариантом Пуанкаре.

Доказательство. Справедливость этого положения устанавливается непосредственным дифференцированием

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_s \left(\xi_s \frac{d\eta'_s}{dt} - \eta_s \frac{d\xi'_s}{dt} \right) + \sum_s \left(\eta'_s \frac{d\xi_s}{dt} - \xi'_s \frac{d\eta_s}{dt} \right) = \\ &= \sum_s \left[-\xi_s \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} \xi'_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} \eta'_j \right) - \right. \\ &\quad \left. - \eta_s \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} \xi'_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} \eta'_j \right) \right] + \\ &\quad + \sum_s \left[\eta'_s \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} \eta_j \right) + \right. \\ &\quad \left. + \xi'_s \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} \eta_j \right) \right] = \\ &= \sum_{s,j} \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi_s \xi'_j - \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \xi_s \eta'_j - \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \eta_s \xi'_j - \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta_s \eta'_j \right) + \\ &\quad + \sum_{s,j} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \eta'_s \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta'_s \eta_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi'_s \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \xi'_s \eta_j \right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что после замены индексов суммирования правая часть тождественно обращается в нуль, что и доказывает предложение.

Теорема 2. Если функция

$$\Phi(t, q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k) = a$$

является первым интегралом уравнений Гамильтона, то выражение

$$\sum_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \Phi}{\partial p_s} \eta_s \right)$$

представляет собой интеграл уравнений в вариациях Пуанкаре.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим полные уравнения для возмущений:

$$\frac{d\xi_s}{dt} = A_s^{(1)} + A_s^{(2)} + \dots,$$

$$\frac{d\eta_s}{dt} = B_s^{(1)} + B_s^{(2)} + \dots,$$

где $A_s^{(i)}, B_s^{(i)}$ — совокупность членов i -го порядка относительно вариаций ξ_s, η_s . Так как $\Phi(t, q, p)$ — первый интеграл уравнений Гамильтона, то функция

$$\Phi(t, q + \xi, p + \eta) = a^*$$

также будет первым интегралом. Разложим функцию φ в ряд по степеням ξ_s и η_s

$$\varphi(t, q + \xi, p + \eta) = \varphi(t, q, p) + \\ + \sum_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \eta_s \right) + K^{(2)} + K^{(3)} + \dots = a^*,$$

где $K^{(i)}$ — совокупность членов i -го порядка относительно ξ_s и η_s . Так, например, при $i = 1$

$$K^{(1)} = \sum_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \eta_s \right).$$

Так как

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)} + \dots = a^* - a = \text{const},$$

то

$$\frac{dK}{dt} = 0.$$

Вычисляя эту производную, будем иметь

$$\sum_i \frac{\partial K^{(i)}}{\partial t} + \sum_i \sum_s \left(\frac{\partial K^{(i)}}{\partial \xi_s} \cdot \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial K^{(i)}}{\partial \eta_s} \cdot \frac{d\eta_s}{dt} \right) = 0,$$

или

$$\sum_i \frac{\partial K^{(i)}}{\partial t} + \sum_i \sum_{s,j} \left(\frac{\partial K^{(i)}}{\partial \xi_s} A_s^{(j)} + \frac{\partial K^{(i)}}{\partial \eta_s} B_s^{(j)} \right) = 0,$$

что можно переписать в виде

$$\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t} + \sum_s \left(\frac{\partial K^{(1)}}{\partial \xi_s} A_s^{(1)} + \frac{\partial K^{(1)}}{\partial \eta_s} B_s^{(1)} \right) + \text{чл. высш. пор.} = 0,$$

Голоморфная функция тождественно уничтожается лишь в случае, когда тождественно уничтожается по отдельности совокупность членов любого порядка, откуда

$$\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t} + \sum_s \left(\frac{\partial K^{(1)}}{\partial \xi_s} A_s^{(1)} + \frac{\partial K^{(1)}}{\partial \eta_s} B_s^{(1)} \right) \equiv 0,$$

а это и есть полная производная от $K^{(1)}$ по времени в силу уравнений в вариациях

$$\frac{dK^{(1)}}{dt} = 0.$$

Таким образом, функция

$$K^{(1)} = \sum_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \eta_s \right)$$

является первым интегралом уравнений в вариациях.

Теорема 3. Если

$$U = \sum_s (A_s \xi_s + B_s \eta_s) = \text{const},$$

где A_s и B_s — функции времени, — линейный интеграл уравнений в вариациях Пуанкаре, то уравнения в вариациях Пуанкаре допускают решение

$$\xi_s = -B_s, \quad \eta_s = A_s.$$

Доказательство. Так как U — первый интеграл уравнений в вариациях, то

$$\frac{dU}{dt} = \sum_s \left(\frac{dA_s}{dt} \xi_s + \frac{dB_s}{dt} \eta_s \right) + \sum_s \left(A_s \frac{d\xi_s}{dt} + B_s \frac{d\eta_s}{dt} \right) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \sum_s \left(\frac{dA_s}{dt} \xi_s + \frac{dB_s}{dt} \eta_s \right) + \sum_{s,j} \left(A_s \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} \xi_j + A_s \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} \eta_j \right) - \\ - \sum_{s,j} \left(B_s \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} \xi_j + B_s \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} \eta_j \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Равенство должно выполняться при любых значениях ξ, η , поэтому:

$$\frac{dA_s}{dt} + \sum_j A_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_s} - \sum_j B_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_s} = 0,$$

$$\frac{dB_s}{dt} + \sum_j A_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_s} - \sum_j B_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_s} = 0.$$

Если положить $\xi_s = B_s, \eta_s = -A_s$, то получим уравнения в вариациях Пуанкаре, что и доказывает теорему.

4. Теорема Пуассона (см. стр. 192). Пусть уравнения Гамильтона имеют два первых интеграла:

$$\Phi(t, q, p) = a \quad \text{и} \quad \Psi(t, q, p) = b.$$

В этом случае, как это показано выше, уравнения в вариациях Пуанкаре имеют два первых интеграла:

$$\sum_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \Phi}{\partial p_s} \eta_s \right) = \text{const},$$

$$\sum_s \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \Psi}{\partial p_s} \eta_s \right) = \text{const}$$

(см. теорему 2 об уравнениях Пуанкаре). Но на основании теоремы 3 уравнения в вариациях допускают частные решения:

$$\xi_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_s}, \quad \eta_s = \frac{\partial \Phi}{\partial q_s},$$

$$\xi'_s = -\frac{\partial \Psi}{\partial p_s}, \quad \eta'_s = \frac{\partial \Psi}{\partial q_s}.$$

Имея два частных интеграла, составим интегральный инвариант Пуанкаре

$$J = \sum_s (\xi_s \eta'_s - \eta_s \xi'_s) = - \sum_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \right) = \text{const.}$$

Это выражение уже не зависит от переменных ξ, η и, следовательно, является первым интегралом исходных канонических уравнений Гамильтона. Мы доказали теорему:

Если известно два первых интеграла канонических уравнений Гамильтона, то скобки Пуассона дают еще один первый интеграл.

Теорема Гельмгольца (1821—1894). Изменение в первоначальной системе какой-нибудь координаты ξ_1 за произвольный промежуток времени, вызванное изменением импульса η_{10} в начальный момент времени, равно и противоположно по знаку изменению в обратном движении за этот же промежуток времени координаты ξ'_{10} , вызванному таким же по величине изменением «начального» импульса η'_1 .

Доказательство. Рассмотрим возмущенное движение, определяемое начальными условиями:

$$\xi_i^0 = 0 \ (i = 1, 2, \dots, k), \quad \eta_1^0 \neq 0, \quad \eta_2^0 = \dots = \eta_k^0 = 0.$$

Пусть ξ_i и η_i — возмущения для этого движения в момент t , и возмущенное движение ξ'_i, η'_i с начальными возмущениями ξ'_{i0}, η'_{i0} в момент t_0 , для которого в момент t будем иметь $\xi'_i = 0, \eta'_1 \neq 0, \eta'_2 = \eta'_3 = \dots = \eta'_k = 0$.

Для двух частных решений имеет место инвариант Пуанкаре

$$J = \sum_{s=1}^k (\xi_s \eta'_s - \eta_s \xi'_s) = \sum_{s=1}^k (\xi_{s0} \eta'_{s0} - \eta_{s0} \xi'_{s0}).$$

После подстановки рассматриваемых решений получим

$$\eta'_1 \xi_1 = - \eta_{10} \xi'_{10}.$$

Если $\eta'_1 = - \eta_{10}$, то отсюда имеем

$$\xi_1 = \xi'_{10},$$

т. е. уравнения движения механических систем являются как бы обратимыми.

Гельмгольцем дано следующее физическое истолкование этого результата: если системе сообщить небольшой импульс p_{10} , то он может быть измерен вызванным им изменением одной из величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. Изменение ξ'_{10} , приводящее к изменению одного импульса η'_1 , может быть реализовано в обратном движении, т. е. в движении системы, у которой в каждом положении скорости отличаются знаком от соответствующих этому положению скоростей в необращенном движении. Будущее обращенной системы совпадает с прошедшим первоначальной системы.

Следствие. Из свойств инварианта Пуанкаре следует, что каноническими уравнениями Гамильтона невозможно записать необратимые процессы.

Устойчивость консервативных систем. Пусть имеется некоторая непрерывная функция $\varphi(t)$. Представим ее в виде произведения

$$\varphi(t) = f(t) e^{\lambda t},$$

где λ — некоторое постоянное число. Если окажется, что функция $f(t) e^{\varepsilon t}$ при $t \rightarrow \infty$ будет исчезающей при любом $\varepsilon < 0$ и неограниченной при любом $\varepsilon > 0$,

то число λ называют характеристическим показателем Ляпунова функции $\varphi(t)$.

Рассмотрим систему уравнений в вариациях Пуанкаре. Пусть имеется некоторое решение этой системы: ξ_s, η_s ($s=1, 2, \dots, k$) и пусть λ_0 — наибольший из характеристических показателей функций $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$. Представим решение в виде

$$\xi_s = A_s(t) e^{\lambda_0 t}, \quad \eta_s = B_s(t) e^{\lambda_0 t} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда функции $A_s(t)$ и $B_s(t)$ будут иметь только нулевые или отрицательные характеристические показатели и являются либо исчезающими, либо ограниченными. Число λ_0 называется характеристическим показателем решения уравнений в вариациях Пуанкаре.

Предположим, что имеется еще одно частное решение уравнений в вариациях Пуанкаре $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k, \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_k$ с характеристическим показателем решения λ' . Записывая инвариант Пуанкаре для этих двух решений, будем иметь

$$J = e^{(\lambda_0 + \lambda')t} \sum_s (A_s B'_s - B_s A'_s) = \text{const.}$$

Сумма $\sum_s (A_s B'_s - B_s A'_s)$ является исчезающей или ограниченной функцией, поэтому условие $J = \text{const}$ выполняется только при условии

$$\lambda_0 + \lambda' \geq 0,$$

т. е. хотя бы один из характеристических показателей λ_0, λ' должен быть неотрицательным.

Предположим, что характеристический показатель $\lambda_0 > 0$. Это значит, что среди функций ξ_s, η_s имеется хотя бы одна, неограниченно возрастающая при $t \rightarrow \infty$, и невозмущенное движение неустойчиво. Невозмущенное движение может быть устойчивым только тогда, когда ограничены все возмущения, т. е. когда все характеристические показатели решений уравнений в вариациях неположительны. Так как всегда существует два решения уравнений в вариациях, для которых

$$\lambda_0 + \lambda' \geq 0,$$

то невозмущенное движение консервативной системы может быть устойчивым только тогда, когда все характеристические показатели решений уравнений в вариациях равны нулю.

2. Метод изменения произвольных постоянных

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены голономные идеальные связи. Пусть состояние движения системы определяется каноническими переменными:

$$q_1, q_2, \dots, q_k, \quad p_1, p_2, \dots, p_k,$$

а закон движения определяется из уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k). \quad (a)$$

Предположим, что функцию Гамильтона можно представить в виде

$$H = H_0(t, q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k) + \\ + W(t, q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)$$

и возможно найти решение упрощенной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (b)$$

с помощью полного интеграла

$$V = V(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0\left(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0. \quad (c)$$

Общее решение укороченной системы имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = -\beta_s \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (d)$$

или

$$q_s = q_s(t, \alpha, \beta), \quad p_s = p_s(t, \alpha, \beta). \quad (e)$$

Функции (e) при любых значениях произвольных постоянных α и β обращают уравнения (b) в тождества. Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ рассматривать не как постоянные, а как некоторые функции времени, то их можно подобрать так, чтобы

$$q_s = q_s(t, \alpha, \beta), \quad p_s = p_s(t, \alpha, \beta)$$

удовлетворяли исходной системе уравнений. В этом и заключается идея метода изменения произвольных постоянных, предложенного Лагранжем.

Для выяснения свойства предложенного преобразования рассмотрим изменение функции $V(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ при переходе с действительной траектории на окольную. Тогда

$$\delta V = \sum_{i=1}^k \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = \sum_{i=1}^k p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^k \beta_i \delta \alpha_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^k p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^k \beta_i \delta \alpha_i + \delta V.$$

Полученное равенство определяет каноническое преобразование с производящей функцией $V(t, q, \alpha)$ при переходе от канонических переменных q_s, p_s к новым переменным α_s, β_s . Новые переменные удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \beta_s}, \quad \frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial \alpha_s} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где новая функция Гамильтона

$$H^* = \frac{\partial V}{\partial t} + H,$$

или

$$H^* = \frac{\partial V}{\partial t} + H_0 + W.$$

Так как V — полный интеграл уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0,$$

то $H^* = W$, а канонические уравнения для переменных α и β принимают вид:

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \beta_s}, \quad \frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Эти уравнения называются уравнениями теории возмущений. Сама функция W называется возмущающей, или пертурбационной. Она должна рассматриваться как функция величин α_s , β_s и t , получающаяся в результате подстановки вместо q и p их выражений через α_s , β_s и t .

До тех пор пока не делается никакого предположения о функции W , преобразованная система не имеет особых преимуществ по сравнению с первоначальной. Дело будет обстоять иначе, если W остается малой по сравнению с H_0 , например $W \approx -\varepsilon H_1$, где H_1 — сравнимая с H_0 функция, а ε — малая величина.

Такого рода задачи встречаются при исследовании движения планеты под действием Солнца, когда необходимо учитывать влияние других планет, или при исследовании влияния фигуры планеты на траекторию спутника. В этих задачах силовая функция может быть представлена в виде ряда, расположенного по степеням малого параметра ε ,

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots$$

Определяя невозмущенное движение, полагая $U = U_0$, для возмущений первого порядка малости относительно ε , получим уравнения:

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \beta_s}, \quad \frac{d\beta_s}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_s},$$

и если невозмущенное движение известно, то возмущения первого порядка определяются простыми квадратурами.

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Будем рассматривать такие движения системы материальных точек, при которых отдельные точки системы резко изменяют свои скорости за бесконечно малый промежуток времени, не меняя заметно своего положения. Явления такого рода будем называть ударом. Они вызываются очень большими силами, действующими на точки системы в течение короткого промежутка времени.

Рассмотрим сначала явление удара для одной материальной точки, массу которой обозначим через m . Уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Под действием больших по величине сил точка получит большое ускорение. Рассматривая силы, действующие на точку, как функции времени, проинтегрируем уравнения движения:

$$\left(m \frac{dx}{dt}\right)_1 - \left(m \frac{dx}{dt}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} X dt,$$

$$\left(m \frac{dy}{dt}\right)_1 - \left(m \frac{dy}{dt}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} Y dt,$$

$$\left(m \frac{dz}{dt}\right)_1 - \left(m \frac{dz}{dt}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} Z dt.$$

Здесь индексы «1» и «0» соответствуют моментам времени $t_0 + \varepsilon$ и t_0 . В левой части получим изменение проекций количества движения точки за время ε . Правые части представляют собой импульсы силы за время ε .

Таким образом, изменение количества движения точки равно импульсу силы

$$mv_1 - mv_0 = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} F dt.$$

Предположим, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} X dt = A, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} Y dt = B, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} Z dt = C,$$

где A , B и C — некоторые конечные, отличные от нуля числа. Это будет выполняться, когда сила имеет порядок $1/\varepsilon$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

При этих условиях скорость точки за время ε будет изменяться на конечную величину. Вектор с проекциями A , B и C будем называть ударом, или ударным импульсом. Введем обозначение

$$\Delta f = f_1 - f_0.$$

Тогда уравнения получают вид:

$$\Delta(mx') = A, \quad \Delta(my') = B, \quad \Delta(mz') = C.$$

Уравнения эти будем называть основными уравнениями теории удара для материальной точки. Они определяют изменение скорости за время удара.

Рассмотрим систему материальных точек $m_v(x_v, y_v, z_v)$, перемещения которых стеснены голономными связями. Связи, в соответствии с одной из основных аксиом, можно заменять силами, действующими на точки системы. Под действием ударных сил будут возникать очень большие реакции. Обозначим через R_x , R_y , R_z проекции реактивного удара, подразумевая под этим предельные значения импульсов сил реакции. Следуя идее Лагранжа, введем аксиому идеальных связей для удара.

Идеальными связями будем называть такие связи, для которых сумма работ сил реактивного удара на любом возможном перемещении системы равна нулю

$$\sum_v (R_{x_v} \delta x_v + R_{y_v} \delta y_v + R_{z_v} \delta z_v) = 0.$$

Такие связи не дают рассеивания энергии. Для каждой точки системы мы можем теперь записать уравнения удара:

$$\Delta(m_v x'_v) = A_v + R_{x_v}, \quad \Delta(m_v y'_v) = B_v + R_{y_v}, \quad \Delta(m_v z'_v) = C_v + R_{z_v}.$$

Определяя отсюда проекции реактивного удара и подставляя их в уравнение, определяющее идеальные связи, получим

$$\sum_v \{ [\Delta (m_v x'_v) - A_v] \delta x_v + [\Delta (m_v y'_v) - B_v] \delta y_v + [\Delta (m_v z'_v) - C_v] \delta z_v \} = 0.$$

Уравнение это называют общим уравнением теории удара. Оно имеет то же значение, что и общее уравнение динамики. Рассмотрим некоторые следствия из общего уравнения.

1. Пусть связи, наложенные на систему материальных точек, допускают поступательное перемещение всей системы как одного твердого тела вдоль неподвижной оси. Не нарушая общности, можно предположить, что связи допускают поступательное перемещение вдоль неподвижной оси x . В этом случае среди всех возможных перемещений системы будет находиться перемещение

$$\delta x_v = a, \quad \delta y_v = 0, \quad \delta z_v = 0.$$

Подставляя эти значения в общее уравнение теории удара, будем иметь

$$a \sum_v [\Delta (m_v x'_v) - A_v] = 0.$$

Но

$$\sum_v \Delta (m_v x'_v) = \Delta \sum_v m_v x'_v = \Delta \left(\sum_v m_v x_v \right)' = \Delta (M \xi'),$$

где ξ — координата центра тяжести по оси x . Основное уравнение теперь можно переписать в виде

$$\Delta (M \xi') = \sum_v A_v.$$

Мы получили теорему об изменении количества движения системы за время удара.

Теорема. Если среди возможных перемещений системы имеется поступательное перемещение вдоль оси x , то изменение проекции количества движения системы вдоль оси x равно сумме проекций ударов на эту ось x , приложенных к точкам системы.

2. Предположим, что среди возможных перемещений имеется поворот всей системы как одного твердого тела вокруг неподвижной оси z . В этом случае среди возможных перемещений системы будут находиться перемещения

$$\delta x_v = -y_v \delta \varphi, \quad \delta y_v = x_v \delta \varphi, \quad \delta z_v = 0.$$

Подставляя эти значения в общее уравнение теории удара, будем иметь

$$\delta \varphi \sum_v \{ -[\Delta (m_v x'_v) - A_v] y_v + [\Delta (m_v y'_v) - B_v] x_v \} = 0,$$

что легко привести к виду

$$\sum_v [x_v \Delta (m_v y'_v) - y_v \Delta (m_v x'_v)] = \sum_v (x_v B_v - y_v A_v).$$

За время удара скорости точек системы изменяются на конечную величину. В таком случае из уравнения

$$\frac{dx_v}{dt} = x'_v$$

получим

$$x_{v1} - x_{v0} = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} x'_v dt.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} x'_v dt = 0,$$

поскольку x'_v — конечная величина. Следовательно, в течение времени удара имеет место условие

$$x_{v1} - x_{v0} \rightarrow 0,$$

т. е. координаты точек системы не меняются. Принимая это обстоятельство во внимание, перепишем полученное уравнение в виде

$$\sum_v [\Delta (m_v x_v y'_v) - \Delta (m_v y_v \bar{x}'_v)] = \sum_v (x_v B_v - y_v A_v),$$

или

$$\Delta \sum_v m_v (x_v y'_v - y_v x'_v) = \sum_v (x_v B_v - y_v A_v).$$

Обозначая момент количества движения относительно оси z через K_z

$$K_z = \sum_v m_v (x_v y'_v - y_v x'_v),$$

перепишем уравнение

$$\Delta K_z = \sum_v (x_v B_v - y_v A_v).$$

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Теорема. Если среди возможных перемещений системы имеется поворот вокруг неподвижной оси z , то изменение момента количества движения системы относительно этой оси за время удара равно сумме моментов ударных импульсов относительно оси z .

§ 2. ТЕОРЕМЫ КАРНО

Рассмотрим некоторые следствия из основного уравнения теории удара, аналогичные теореме живых сил. Будем предполагать, что на точки системы не действуют внешние удары, т. е.

$$A_v = B_v = C_v = 0.$$

Удар в этом случае происходит лишь за счет наложения или снятия связей.

1. Предположим сначала, что удар происходит за счет внезапного наложения связей, не зависящих явно от времени. Пусть, кроме того, внезапно накладываемые на систему связи остаются во всем дальнейшем движении системы. Такие связи называются *удерживающими*, или *неупругими*, связями. Среди возможных перемещений системы будут находиться перемещения, совместимые со связями, так как связи не зависят явно от времени, то среди возможных перемещений находятся действительные перемещения, которые будут иметь точки после удара, т. е. перемещения, пропорциональные скоростям точек системы после удара:

$$\delta x_v = \theta x'_v, \quad \delta y_v = \theta y'_v, \quad \delta z_v = \theta z'_v.$$

Подставляя эти значения в основное уравнение теории удара

$$\sum_v [\Delta(m_v x'_v) \delta x_v + \Delta(m_v y'_v) \delta y_v + \Delta(m_v z'_v) \delta z_v] = 0,$$

будем иметь

$$\theta \sum_v [\Delta(m_v x'_v) x'_v + \Delta(m_v y'_v) y'_v + \Delta(m_v z'_v) z'_v] = 0,$$

или

$$\sum_v m_v [(x'_v - x'_{v0}) x'_v + (y'_v - y'_{v0}) y'_v + (z'_v - z'_{v0}) z'_v] = 0.$$

После преобразований вида

$$\begin{aligned} (x'_v - x'_{v0}) x'_v &= \frac{1}{2} (x_v'^2 - 2x'_{v0} x'_v + x_{v0}'^2) + \frac{1}{2} x_v'^2 - \frac{1}{2} x_{v0}'^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x'_v - x'_{v0})^2 + \frac{1}{2} x_v'^2 - \frac{1}{2} x_{v0}'^2 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &\sum_v \frac{m_v}{2} [(x'_v - x'_{v0})^2 + (y'_v - y'_{v0})^2 + (z'_v - z'_{v0})^2] + \\ &+ \sum_v \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - \sum_v \frac{m_v}{2} (x_{v0}'^2 + y_{v0}'^2 + z_{v0}'^2) = 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор потерянной скорости

$$\mathbf{w}_v(x'_v - x'_{v0}, y'_v - y'_{v0}, z'_v - z'_{v0}).$$

Тогда полученное уравнение можно представить в виде

$$\sum_v \frac{m_v w_v^2}{2} = T_0 - T_1.$$

Здесь $T_0 - T_1$ представляет изменение живой силы за время удара. Мы доказали первую теорему Л. Карно (1753—1823).

Теорема. Потеря живой силы при наложении связей равна живой силе потерянных скоростей.

Теорема определяет изменение живой силы при абсолютно неупругом ударе, происходящем от наложения неупругих связей на систему материальных точек.

2. Рассмотрим случай, когда на систему материальных точек наложены идеальные, не зависящие явно от времени, голономные связи. Предположим, что в некоторый момент связи внезапно снимаются (например, при взрыве летящего снаряда). За время удара происходит освобождение системы от связей. В течение времени удара возможные перемещения системы находятся в соответствии с наложенными связями. При этом среди возможных перемещений находятся и действительные перемещения до удара (соответствующие уравнениям связи), т. е. перемещения, пропорциональные скоростям точек системы до удара:

$$\delta x_v = \theta x'_{v0}, \quad \delta y_v = \theta y'_{v0}, \quad \delta z_v = \theta z'_{v0}.$$

Подставляя эти значения в основное уравнение теории удара, будем иметь

$$0 \sum_v m_v [(x'_v - x'_{v0}) x'_{v0} + (y'_v - y'_{v0}) y'_{v0} + (z'_v - z'_{v0}) z'_{v0}] = 0.$$

Преобразуем выражения вида

$$\begin{aligned} (x'_v - x'_{v0}) x'_{v0} &= x'_v x'_{v0} - x'^2_{v0} = -\frac{1}{2} (x'^2_v - 2x'_v x'_{v0} + x'^2_{v0}) - \\ &= -\frac{1}{2} x'^2_{v0} + \frac{1}{2} x'^2_v = \frac{1}{2} x'^2_v - \frac{1}{2} x'^2_{v0} - \frac{1}{2} (x'_v - x'_{v0})^2. \end{aligned}$$

Проделявая аналогичные преобразования для координат y и z , представим общее уравнение динамики в виде

$$\begin{aligned} & - \sum_v \frac{m_v}{2} [(x'_v - x'_{v0})^2 + (y'_v - y'_{v0})^2 + (z'_v - z'_{v0})^2] + \\ & + \sum_v \frac{m_v}{2} (x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v) - \sum_v \frac{m_v}{2} (x'^2_{v0} + y'^2_{v0} + z'^2_{v0}) = 0, \end{aligned}$$

или, вводя вектор потерянной скорости w ,

$$-\sum_v \frac{m_v w_v^2}{2} + \sum_v \frac{m_v v_v^2}{2} - \sum_v \frac{m_v v_{v0}^2}{2} = 0,$$

откуда

$$T_1 - T_0 = \sum_v \frac{m_v w_v^2}{2}.$$

Мы получили вторую теорему Карно, которую можно сформулировать так:

Теорема. При освобождении системы от связей приобретенная живая сила равна живой силе приобретенных скоростей.

Теоремы Карно применяются лишь к неупругим системам. На практике же чаще приходится встречаться с явлениями не вполне упругого удара. При не вполне упругом ударе происходит сначала наложение связи, затем ее снятие. В течение времени удара система находится под действием связей, причем происходит некоторая потеря энергии. Соударяющиеся тела не полностью восстанавливают свою форму. При расчете явлений удара для таких тел и систем необходимо вводить опытные гипотезы. Такая основная гипотеза была введена Ньютоном, который предположил, что *отношение величин проекций скоростей точек тел после и до удара на направление общей нормали к поверхности тел в точке соприкосновения тел есть величина постоянная, зависящая лишь от материала соударяющихся тел*

$$\frac{v_{n1}}{v_{n0}} = e.$$

Величина эта называется коэффициентом восстановления. Она показывает, насколько восстанавливается нормальная составляющая скорости после удара. При этом очевидно будем иметь

$$0 \leq e \leq 1.$$

Если $e=1$, то удар абсолютно упругий, а при $e=0$ имеет место абсолютно неупругий удар.

При гладких связях касательная составляющая скорости за время удара не меняется. В некоторых случаях учитывается импульс мгновенных сил трения посредством введения коэффициента мгновенного трения λ

$$\frac{v_{t1}}{v_{t0}} = 1 - \lambda,$$

где v_{t1} и v_{t0} — проекции скорости на плоскость, касательную к поверхностям тел в точке их контакта, соответственно в конце и начале удара.

Коэффициент λ определяется опытным путем. Иногда принимается гипотеза Кулона, т. е. делается предположение, что касательный удар связан с нормальным. Как показывает экспериментальная проверка, влияние трения на удар значительно меньше, чем влияние упругости.

В дальнейшем будем рассматривать удар, пренебрегая трением. На основании гипотезы Ньютона при ударе о неподвижную поверхность будем иметь

$$e\mathbf{v}_{n0} = -\mathbf{v}_{n1}, \quad \mathbf{v}_{t0} = \mathbf{v}_{t1}.$$

Рассматривая вектор

$$\begin{aligned} \sigma &= e\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 = e\mathbf{v}_{n0} + e\mathbf{v}_{t0} + \mathbf{v}_{n1} + \mathbf{v}_{t1} = -\mathbf{v}_{n1} + e\mathbf{v}_{t1} + \mathbf{v}_{n1} + \mathbf{v}_{t1} = \\ &= (1 + e)\mathbf{v}_{t1} = (1 + e)\mathbf{v}_{t0}, \end{aligned}$$

заметим, что он расположен в общей касательной плоскости соударяющихся поверхностей.

При изучении не вполне упругого удара системы материальных точек, происходящего благодаря наложению и снятию связей, среди возможных перемещений системы будут находиться перемещения, совместимые с накладываемыми на время удара связями. Среди всех перемещений будут находиться перемещения, пропорциональные векторам σ_v , т. е.

$$\delta x_v = \theta(x'_v + ex'_{v0}), \quad \delta y_v = \theta(y'_v + ey'_{v0}),$$

$$\delta z_v = \theta(z'_v + ez'_{v0}) \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

где θ — коэффициент пропорциональности. Подставляя эти значения в общее уравнение теории удара, будем иметь

$$\begin{aligned} \theta \sum_v \frac{m_v}{2} [(x'_v - x'_{v0})(x'_v + ex'_{v0}) + (y'_v - y'_{v0})(y'_v + ey'_{v0}) + \\ + (z'_v - z'_{v0})(z'_v + ez'_{v0})] = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} (x'_v - x'_{v0})(x'_v + ex'_{v0}) &= x_v'^2 + ex'_v x'_{v0} - x'_v x'_{v0} - ex_{v0}'^2 = \\ &= \frac{1}{2}(x_v'^2 - 2x'_v x'_{v0} + x_{v0}'^2) + \frac{1}{2}x_v'^2 - \frac{1}{2}x_{v0}'^2 + \\ &+ e \left[-\frac{1}{2}(x_v'^2 - 2x'_v x'_{v0} + x_{v0}'^2) + \frac{1}{2}x_v'^2 - \frac{1}{2}x_{v0}'^2 \right] = \\ &= \frac{1-e}{2}(x'_v - x'_{v0})^2 + \frac{1+e}{2}x_v'^2 - \frac{1+e}{2}x_{v0}'^2. \end{aligned}$$

После аналогичных преобразований для других координат общее уравнение теории удара можно привести к виду

$$(1-e) \sum_v \frac{m_v}{2} [(x'_v - x'_{v0})^2 + (y'_v - y'_{v0})^2 + (z'_v - z'_{v0})^2] + \\ + (1+e) \sum_v \frac{m_v}{2} (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - (1+e) \sum_v \frac{m_v}{2} (x_{v0}'^2 + y_{v0}'^2 + z_{v0}'^2) = 0,$$

или

$$(1-e) \sum_v \frac{m_v w_v^2}{2} + (1+e) T_1 - (1+e) T_0 = 0,$$

т. е.

$$T_0 - T_1 = \frac{1-e}{1+e} \sum_v \frac{m_v w_v^2}{2}.$$

Полученное уравнение определяет *потерю энергии при не вполне упругом ударе* и представляет обобщение теоремы Карно. При $e=1$ потери живой силы не происходит.

§ 3. ЗАДАЧА О ЦЕНТРЕ УДАРА

Пусть твердое тело может свободно вращаться вокруг неподвижной оси, закрепленной в точках O и O' , расстояние между которыми равно h (рис. 88). Будем предполагать, что твердое тело в начальный момент находится в покое. Неподвижную систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы центр тяжести твердого тела находился в плоскости Oxz : $G(\xi, 0, \eta)$. Предположим еще, что удар производится в точку $P(a, 0, c)$ той же плоскости ударным импульсом $\Phi(0, B, 0)$.

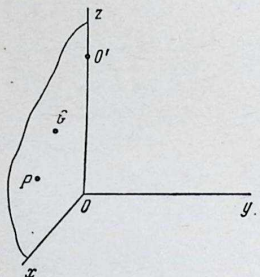


Рис. 88

Положение твердого тела не изменится за время удара, но при этом твердое тело приобретает угловую скорость ω вращения вокруг оси z , так что скорости точек твердого тела определяются из соотношений

$$x'_v = -\omega y_v, \quad y'_v = \omega x_v, \quad z'_v = 0.$$

Освободив твердое тело от связей в точках O и O' и заменив их действие реактивными ударами $R_x, R_y, R_z, R'_x, R'_y, R'_z$, мы сможем применить теорему о движении центра масс. Теорема дает следующие уравнения для скоростей точек тела после удара:

$$\sum m x' = R_x + R'_x, \quad \sum m y' = B + R_y + R'_y, \quad 0 = R_z + R'_z.$$

Но

$$\sum m x' = -\omega \sum m y = 0,$$

$$\sum m y' = \omega \sum m x = \omega M \xi,$$

поэтому уравнения удара можно будет переписать в виде

$$R_x + R'_x = 0, \quad \omega M \xi = B + R_y + R'_y, \quad 0 = R_z + R'_z.$$

Теперь обратимся к теореме об изменении момента количества движения за время удара. Сначала определим момент количества движения после удара с помощью соотношения

$$\sum_v m_v \left\| \begin{matrix} x_v & y_v & z_v \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix} \right\| = \omega \sum_v m_v \left\| \begin{matrix} x_v & y_v & z_v \\ -y_v & x_v & 0 \end{matrix} \right\|,$$

которое дает

$$K_x = -\omega \sum_v m_v x_v z_v, \quad K_y = -\omega \sum_v m_v y_v z_v,$$

$$K_z = \omega \sum_v m_v (x_v^2 + y_v^2).$$

Таким образом,

$$K_z = J_z \omega.$$

Поскольку момент количества движения системы до удара равен нулю, будем иметь:

$$-\omega \sum_v m x z = -Bc - hR'_y, \quad -\omega \sum_v m y z = hR'_x, \quad \omega J_z = aB.$$

Если удар, приложенный к некоторой точке P , не оказывает влияния на подшипники, то эта точка P называется центром удара. В таком случае

$$R_x = R'_x = R_y = R'_y = 0,$$

и уравнения примут вид:

$$\omega M \xi = B, \quad \omega \sum_v m_v x_v z_v = Bc,$$

$$-\omega \sum_v m_v y_v z_v = 0, \quad J \omega = aB.$$

Отсюда имеем

$$a = \frac{J}{M \xi},$$

т. е. центр удара находится с той же стороны, что и центр тяжести, и расстояние от оси вращения до центра удара зависит только от распределения масс в твердом теле. Кроме того,

$$\omega \sum_v m_v x_v z_v = C \omega M \xi,$$

или

$$C = \frac{\sum_v m_v x_v z_v}{M \xi}.$$

Рассмотрим свойства точки $S(0, 0, c)$. Если перенести начало координат в точку S , то получим

$$\sum_v m_v x_v (z_v - c) = \sum_v m_v x_v z_v = 0,$$

т. е. ось z для точки S является главной осью инерции. Отсюда получаем способ построения центра удара:

На оси вращения необходимо найти точку, для которой эта ось будет главной осью инерции, и отложить (в сторону центра масс) расстояние a .

§ 4. ЗАДАЧА О БАЛЛИСТИЧЕСКОМ МАЯТНИКЕ

Баллистическим маятником называют аппарат, предназначенный для измерения скорости снарядов. Он состоит из трубы, заполненной песком и подвешенной к горизонтальной оси. Снаряд, проникая в трубу, застревает в песке. Происходит очень быстрая потеря скорости снаряда — удар. Этот удар происходит благодаря наложению связи (рис. 89).

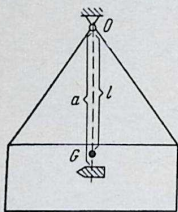


Рис. 89

Предположим, что центр тяжести маятника находится в точке G на расстоянии l от оси вращения. Массу маятника обозначим через M , а момент инерции его относительно оси вращения — через $J = Mk^2$. Для простоты будем считать, что снаряд застревает в цилиндрической трубе на продолжении линии OG на расстоянии a от оси вращения маятника. После удара маятник приобретает скорость и начинает совершать колебания около оси вращения. Применяя теорему Карно для случая наложения связей, будем иметь

$$T_0 - T_1 = \sum_v \frac{m_v \omega_v^2}{2},$$

где

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad T_1 = \frac{1}{2} (Mk^2 + ma^2) \omega^2. \quad (a)$$

Здесь m — масса снаряда; ω — скорость вращения маятника после удара; v_0 — скорость попадания снаряда

$$\sum_v \frac{m_v \omega_v^2}{2} = \frac{m}{2} (v_0 - a\omega)^2 + \frac{Mk^2}{2} \omega^2.$$

Подставляя эти значения в (a), получим

$$mv_0^2 - (Mk^2 + ma^2) \omega^2 = m(v_0 - a\omega)^2 + Mk^2 \omega^2.$$

Отсюда имеем

$$v_0 = \frac{ma^2 + Mk^2}{ma} \omega. \quad (b)$$

Предоставленная после удара самой себе, система будет совершать движение в соответствии с интегралом живых сил

$$T = U + h,$$

где

$$U = (ma + Ml) g \cos \vartheta,$$

так что

$$\frac{Mk^2 + ma^2}{2} \omega^2 = (ma + Ml) g \cos \vartheta + h.$$

Постоянную h надлежит определить из условия, что скорость в конце движения обращается в нуль, т. е.

$$h = -(ma + Ml) g \cos \vartheta.$$

Тогда, поскольку в начале движения $\vartheta = 0$, имеем

$$\frac{Mk^2 + ma^2}{2} \omega^2 = (ma + Ml) g - (ma + Ml) g \cos \vartheta,$$

или

$$(Mk^2 + ma^2) \omega^2 = 4(ml + Ma) g \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Отсюда

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{ma + Ml}{Mk^2 + ma^2}} g \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Подставляя это значение в (b), получим

$$v_0 = \frac{2\sqrt{(ma^2 + Mk^2)(ma + Ml)g}}{ma} \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Зная угол отклонения маятника ϑ , можем найти скорость снаряда при попадании его в маятник.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ УДАРА

Рассмотрим голономную механическую систему, состояние которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_h$. Движение системы удовлетворяет уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Рассмотрим интеграл за время удара

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial q_s} dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} Q_s dt. \quad (a)$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ — конечная величина, будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial q_s} dt = 0.$$

Тогда в пределе уравнения (a) примут вид

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} Q_s dt.$$

Полученные уравнения являются основными уравнениями теории удара в форме Лагранжа.

§ 6. ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ПО ТВЕРДОМУ ТЕЛУ С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Рассмотрим движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Выбирая за оси подвижной системы координат главные оси инерции тела, запишем динамические уравнения Эйлера:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr = M,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N.$$

Пусть в момент t_0 к твердому телу приложен внешний удар. Тогда будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (B - C) qr dt = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (C - A) pr dt = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (A - B) pq dt = 0.$$

Из уравнений Эйлера получим:

$$A\Delta p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} L dt, \quad B\Delta q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} M dt,$$

$$C\Delta r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} N dt.$$

Пример 57. Исследовать влияние удара, приложенного к твердому симметричному телу, совершающему быстрое вращение вокруг оси симметрии.

Решение. Предположим, что к телу приложен импульс Fdt в точке K , расположенной на оси вращения на расстоянии h от неподвижной точки. Систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы вектор удара лежал в плоскости Oyz (рис. 90). Не ограничивая общности, можно предполагать, что удар ортогонален к оси симметрии. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} L dt = Fh,$$

и изменение момента количества движения за время удара будет равно

$$Ap = Fh.$$

После удара момент количества движения твердого тела имеет проекции

$$(Ap, 0, Cr),$$

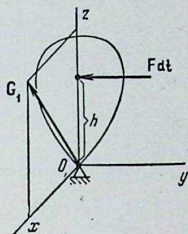


Рис. 90

т. е. твердое тело кроме вращения вокруг оси симметрии начинает вращаться вокруг оси x в сторону направления импульса.

З а м е ч а н и е. Рассматривая движение твердого тела с одной неподвижной точкой, из теоремы об изменении момента количества движения в подвижных осях, неизменно связанных с твердым телом, имеем

$$\frac{dG}{dt} + [\omega, G] = m.$$

Если величина m достаточно мала, а G велико, то скоростью изменения момента количества движения по отношению к телу за малый промежуток времени можно пренебречь. Тогда приближенное уравнение запишется в виде

$$[\omega, G] = m,$$

т. е. изменение момента количества движения определяется вращением самого тела.

Если действуют очень большие силы в течение короткого времени, то можно пренебрегать перемещением тела за время удара, т. е. величиной $[\omega, G]$, поэтому приближенное уравнение в этом случае принимает вид

$$\frac{dG}{dt} = m,$$

где производная левой части рассматривается в подвижной системе координат. Из этого уравнения следует, что вектор момента количества движения мгновенно изменяет свое положение в твердом теле.

Пример 58. Два шкива, вращающиеся вокруг параллельных осей, соединены бесконечным ремнем. Определить изменение угловых скоростей в момент натяжения ремня (рис. 91).

Решение. В результате наложения связи происходит удар. По теореме Карно имеем

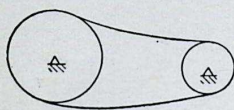


Рис. 91

$$T_0 - T_1 = \sum_v \frac{m_v \omega_v^2}{2}, \quad (a)$$

где

$$T_0 = \frac{J_1 \omega_{10}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{20}^2}{2}, \quad T_1 = \frac{J_1 \omega_{11}^2 + J_2 \omega_{21}^2}{2}.$$

Здесь использованы обозначения: J_1, J_2 — моменты инерции шкивов относительно их осей вращения; ω_{10}, ω_{20} — угловые скорости шкивов до удара, а ω_{11}, ω_{21} — после удара. Принимая во внимание ограничение на угловые скорости, накладываемые связью $R_1 \omega_{11} = R_2 \omega_{21}$, где R_1 и R_2 — радиусы шкивов, получим

$$\begin{aligned} \sum_v \frac{m_v \omega_v^2}{2} &= \sum_v \frac{m_v}{2} (v_v - v_{v0})^2 = \sum_v \frac{m_v}{2} (r_v \omega - r_v \omega_0)^2 = \\ &= \sum \frac{m_v r_v^2}{2} (\omega - \omega_0)^2 = \frac{J_1}{2} (\omega_{11} - \omega_{10})^2 + \frac{J_2}{2} (\omega_{21} - \omega_{20})^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (a), получим

$$J_1 (\omega_{10}^2 - \omega_{11}^2) + J_2 (\omega_{20}^2 - \omega_{21}^2) = J_1 (\omega_{11} - \omega_{10})^2 + J_2 (\omega_{21} - \omega_{20})^2.$$

Отсюда

$$-J_1 \omega_{11}^2 - J_2 \omega_{21}^2 = J_1 \omega_{11}^2 - 2J_1 \omega_{11} \omega_{10} + J_2 \omega_{21}^2 - 2J_2 \omega_{21} \omega_{20},$$

причем

$$\omega_{11} = \frac{R_2}{R_1} \omega_{21},$$

так что

$$-\left(J_1 \frac{R_2^2}{R_1^2} + J_2\right) \omega_{21}^2 = \left(J_1 \frac{R_2^2}{R_1^2} + J_2\right) \omega_{21}^2 - 2\left(J_1 \frac{R_2}{R_1} \omega_{10} + J_2 \omega_{20}\right) \omega_{21}.$$

Окончательно имеем

$$\omega_{21} = \frac{J_1 R_2 \omega_{10} + J_2 R_1 \omega_{20}}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2} R_1.$$

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основе классической механики лежит уравнение Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу, являющаяся функцией от времени, положения и скорости движения частицы, а длина и время измеряются в некоторой неподвижной системе отсчета.

Вопрос о выборе неподвижной системы отсчета возник в глубокой древности. Он обсуждался еще Аристотелем. Коперник (1473—1543) уже вводит понятие «преимущественной» системы отсчета, связанной с Солнцем и звездами. Наконец, Г. Галилей вводит понятие инерциальной системы координат и утверждает, что никакие механические опыты и наблюдения, производимые внутри этой инерциальной системы отсчета, не дают возможности решить вопрос о том, имеет ли система в целом прямолинейное равномерное движение или же она находится в покое. В этом утверждении заключается принцип относительности Галилея.

Принцип относительности Галилея связан с понятием закона инерции, согласно которому *тела, не взаимодействующие с другими телами, продолжают оставаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения*. До тех пор пока система координат не выбрана, закон инерции, в том виде, в каком он здесь сформулирован, не имеет смысла. Для любого тела можно выбрать такую систему отсчета, относительно которой это тело, не испытывающее влияния других тел, движется неускоренно. Это инерци-

альная система отсчета. С физической точки зрения инерциальные системы отсчета существуют только приближенно. Так, для земных условий инерциальной может считаться система, образованная осями, проведенными из центра Земли и ориентированными по звездам.

Переход от одной системы к другой, движущейся относительно первой, определяется формулами преобразования. Если одна система движется относительно другой поступательно, прямолинейно и с постоянной скоростью, то, предполагая, что в начальный момент оси обеих систем параллельны и совпадают, будем иметь:

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t,$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости системы $Ox_1y_1z_1$ относительно системы $Oxyz$. Такое преобразование называется преобразованием Галилея. Предполагается, что время не зависит от выбора системы отсчета, так что $t_1 = t$ (универсальное время), а также, что расстояния между любыми двумя точками в данный момент времени не зависят от того, в какой системе они измеряются (что непосредственно следует из формул преобразования Галилея). Обозначая через x_1, y_1, z_1 координаты точки A , а через x_2, y_2, z_2 — координаты точки B , будем иметь

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2},$$

где x', y', z' — координаты точек в подвижной системе.

По отношению к некоторой определенной инерциальной системе можно указать множество других инерциальных систем, получающихся одна из другой с помощью преобразования Галилея.

Уравнение Ньютона связано с предположением о существовании инерциальной системы отсчета, в которой на точку действуют только реальные силы. Неинерциальность системы можно объяснить наличием кориолисовых сил инерции, которые устраняются соответствующим выбором системы отсчета. Таким образом, если не выполняется закон инерции, то это может объясняться или выбором системы отсчета (неинерциальная система), или существованием некоторых реальных сил, природу которых мы не знаем.

Записанное в некоторой инерциальной системе уравнение Ньютона остается инвариантным относительно любой другой инерциальной системы.

В XIX в. начинает развиваться новая отрасль физики — электродинамика. Максвелл (1831—1879) сформулировал закон электромагнетизма. Характер максвелловской теории электромагнетизма существенно отличается от механики Ньютона, и возникает вопрос

о применимости принципа относительности Галилея к электродинамике.

Максвелл установил, что электромагнитные волны распространяются со скоростью, зависящей от свойств среды, заполняющей пространство, а в пустоте с постоянной скоростью c .

Кроме того, было установлено, что свет является одним из видов электромагнитного излучения. Господствовавшая до Максвелла теория Френеля (1788—1827) предполагала, что свет распространяется посредством колебаний упругого эфира. Теория Максвелла не требует наличия такой среды. Но уравнения Максвелла не удовлетворяют принципу относительности Галилея. Будучи справедливыми в одной какой-либо инерциальной системе, они перестают быть верными в другой инерциальной системе. Для разрешения этого противоречия нидерландским физиком Лоренцом (1853—1928) вновь вводится гипотеза эфира. Под эфиром понимается такая абстрактная среда, в которой всегда справедливы уравнения электродинамики Максвелла, и скорость света постоянна относительно неподвижного эфира. Для наблюдателя, движущегося относительно неподвижного эфира, световые явления должны протекать иначе, чем для неподвижного наблюдателя.

Для экспериментальной проверки теории эфира делались попытки определить скорость Земли относительно эфира. Эксперимент такого рода был поставлен Майкельсоном и Морли в 1880 г. Идея эксперимента состояла в сравнении наблюдаемых скоростей света в двух различных направлениях. Предположения сводились к тому, что Земля не может служить привилегированной системой отсчета, так как она движется относительно Солнца со скоростью около 30 км/сек. Если даже в некоторый момент времени движение Земли совпадает с движением эфира («эфирным ветром»), то через полгода скорость Земли относительно эфира будет равна около 60 км/сек. Движение это можно обнаружить, если измерить скорость света в двух перпендикулярных направлениях с относительной точностью, превышающей отношение $v/c \approx 10^{-4}$ (где v — скорость Земли; $c \approx 300\,000$ км/сек — скорость света), и если эксперимент осуществляется в течение периода, превышающего шесть месяцев.

Если обозначить через v скорость Земли относительно эфира, а через c — скорость света относительно эфира, то скорость света в направлении, противоположном направлению скорости Земли, будет равна $v + c$, а скорость света в противоположном направлении равна $c - v$. Если s — путь света от источника до зеркала, то промежуток времени, за который свет пройдет до зеркала и обратно, будет

$$t = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} = \frac{2sc}{c^2 - v^2} = \frac{2 \frac{s}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(луч света совпадает с линией действия вектора скорости Земли). Если скорость Земли ортогональна направлению луча (рис. 92), то за время движения света зеркало будет перемещаться, так что

$$t' = \frac{2s_1}{c},$$

где

$$s_1^2 = s^2 + \frac{(vt')^2}{4},$$

поэтому

$$t' = \frac{2s}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Для измерения разности

$$t - t' = \frac{2s}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \approx \frac{sv^2}{c^3}$$

Майкельсон и Морли воспользовались интерферометрами, имеющими два взаимно перпендикулярных плеча. Схема такого интерферометра представлена на рис. 93. Свет от источника S расщепляется полупрозрачным серебряным зеркалом P на два луча, которые после отражения от зеркал M_1 и M_2 снова встречаются на экране. Если для прохождения света по обоим

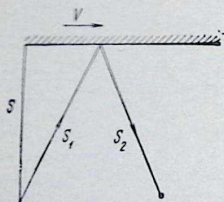


Рис. 92

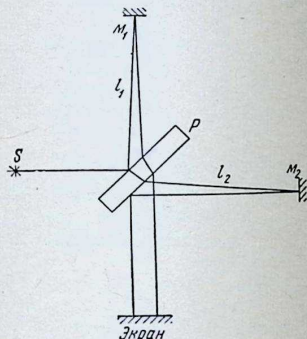


Рис. 93

путям требуется одинаковое время, то на экране должны появиться интерференционные полосы, положение которых зависит от разности скоростей в направлениях l_1 и l_2 . Эксперимент сводится к подбору соответствующих положений зеркал, после чего прибор поворачивается на 90° и, благодаря вращению Земли, на экране

должна наблюдаться другая интерференционная картина. Изменение интерференционной картины обусловливается изменением времени прохождения светом пути относительно эфира.

Майкельсон и Морли при помощи многократных отражений сумели довести эффективные расстояния l_1 и l_2 до нескольких метров, но обнаружить эффект движения Земли относительно эфира не удалось. Подобные опыты повторялись в течение десятилетий. Они показали, что обнаружить движение Земли относительно эфира невозможно. Предположение о том, что Земля увлекает прилегающий к ней эфир, не выдерживало критики, так как в этом случае видимые положения звезд смещались бы каждый год назад и вперед, но не так, как это наблюдается в действительности. Ирландский физик Фицджеральд (1851—1901) и Лоренц сделали попытку объяснить полученный Майкельсоном и Морли результат, предположив, что длины всех физических тел, движущихся со скоростью v относительно эфира, сокращаются в отношении $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Тогда при повороте интерферометра на 90° длина его плеча меняется так, что компенсируется ожидаемый эффект. Эта гипотеза, высказанная Лоренцом в 1892 г., сохраняет привилегированный характер определенной системы отсчета (эфира) и объясняет отрицательный результат опыта Майкельсона. В самом деле, при вычислении времени t вместо s необходимо взять величину $s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$,

после чего

$$t = \frac{2s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2s}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t',$$

так что разность $t-t'$ обращается в нуль. Эта гипотеза не удовлетворяла и самого ее автора. Поэтому Лоренц поставил задачу найти такую группу преобразований, в которой основные уравнения Максвелла остаются неизменными. Задачу эту разрешил в 1905 г. французский математик и физик Анри Пуанкаре и в том же 1905 г. Альберт Эйнштейн (1879—1955).

Решение Пуанкаре. Пуанкаре показал, что если первая система движется относительно второй прямолинейно и равномерно в направлении оси x , то для инвариантности уравнения Максвелла относительно выбора системы отсчета формулы преобразования должны иметь следующий вид:

$$x' = \beta(x - vt), \quad t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

$$y' = y, \quad z' = z,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это преобразование называется преобразованием Лоренца. Для обратного преобразования получим:

$$t = \beta \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right), \quad x = \beta (x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'.$$

Уравнения Максвелла выражают закон распространения электромагнитных волн в свободном пространстве. Пусть X, Y, Z — проекции вектора напряженности электрического поля на координатные оси, а L, M, N — соответствующие проекции вектора напряженности магнитного поля, тогда уравнения Максвелла записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L}{\partial t} = - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right), \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial N}{\partial t} = - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Лоренца к первому уравнению первой группы, будем иметь

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial t'} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t'} \right) = \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\beta v}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Подставляя сюда значения $\frac{\partial X}{\partial t}$ и $\frac{\partial X}{\partial x}$, получим

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial t'} = \beta \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) + \frac{\beta v}{c} \left(- \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial X}{\partial t'} = \frac{\partial \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right)}{\partial y'} - \frac{\partial \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right)}{\partial z'}. \quad (a)$$

Преобразуя первое уравнение второй группы, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t'} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L}{\partial t} \beta + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} \beta v = \\ &= - \beta \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \beta \frac{v}{c} \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L}{\partial t'} = - \left[\frac{\partial \beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right)}{\partial y} - \frac{\partial \beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right)}{\partial z} \right]. \quad (b)$$

Нетрудно видеть, что уравнения Максвелла сохраняют свою форму, если

$$\begin{aligned} X' &= X, \quad Y' = \beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right), \quad Z' = \beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right), \\ L' &= L, \quad M' = \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right), \quad N' = \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right). \end{aligned}$$

Тогда преобразованные уравнения будут иметь такой же вид, как и первоначальные:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, \dots, \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L'}{\partial t'} = - \left(\frac{\partial Z'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial z'} \right), \dots$$

Как видно из формул преобразования, векторы напряженности электрического и магнитного полей не являются инвариантными величинами. Это обстоятельство не является неожиданным, если вспомнить, что движущийся электрический заряд создает магнитное поле, которое отсутствует в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом.

Уравнения Максвелла оказываются инвариантными относительно преобразования Лоренца. Скорость же света принимается постоянной во всех системах координат.

§ 2. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

Задачу инвариантности уравнений Максвелла почти одновременно с Пуанкаре решает Эйнштейн, который, основываясь на опытных результатах, предполагает, что при движении источника свет в пустоте распространяется изотропно, и в любой галилеевской системе отсчета его скорость равна абсолютной постоянной $c \approx 300\,000$ км/сек. Изотропность и постоянство скорости света предполагают справедливость преобразований Лоренца, что и обеспечивает инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований.

Таким образом, или необходимо сохранить уравнения Ньютона и оставляющие их инвариантными преобразования Галилея, не сохраняя инвариантными уравнения Максвелла; или следует считать универсальными преобразования Лоренца — Пуанкаре, относительно которых инварианты уравнения Максвелла. В последнем случае необходимо строить соответствующую кинематику и динамику. Принимая последнее предложение, Эйнштейн показал,

что сокращение длин, определяемое формулами Лоренца, не носит искусственного характера. Оно вытекает из анализа понятия одновременности событий с точки зрения постулата постоянства скорости света в пустоте независимо от выбора галилеевой инерциальной системы.

Одновременность событий. Чтобы можно было говорить об одновременности событий в двух различных точках A и B , удаленных друг от друга на расстояние l , необходимо, чтобы в этих точках имелись синхронизованные часы. Для проверки синхронизации необходимо воспользоваться каким-то сигналом. Наиболее быстрыми являются электромагнитные сигналы. Поправки, связанные с конечностью времени распространения для этих сигналов, будут наименьшими. Можно, в частности, воспользоваться световыми сигналами.

Пусть два наблюдателя с часами находятся в точках A и B . Для синхронизации воспользуемся световыми сигналами. Пусть наблюдатель из точки A посылает в момент t_A^0 сигнал в точку B . Дойдя до точки B в момент t_B , сигнал возвращается в точку A вместе с сигналом времени наблюдателя B (наблюдатель A видит в зеркале отражение своих часов и непосредственно часы наблюдателя B). Будем говорить, что часы у обоих наблюдателей синхронны, если

$$t_B - t_A^0 = t'_A - t_B,$$

где t_B — время наблюдателя B ; t'_A — время возвращения сигнала в точку A . Такой способ включает в себе и определение одновременности в разных точках пространства с точки зрения данной инерциальной системы. При переходе к другой инерциальной системе синхронизация не сохраняется. Все эти соображения основываются на принципе постоянства скорости света и принципе относительности, которые были сформулированы Эйнштейном следующим образом:

1. Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся.

2. Каждый луч света движется в покоящейся системе координат с определенной скоростью c независимо от того, испускается этот луч света покоящимся или движущимся телом.

Пусть имеется покоящийся стержень, длина которого, измеренная покоящимся масштабом, равна l , и пусть этому стержню, ось которого направлена параллельно оси x покоящейся координатной системы, сообщается равномерное и параллельное оси x поступательное движение со скоростью v в сторону возрастающих значений x . Длину движущегося стержня будем определять двумя способами:

а) измерением в подвижной системе, движущейся вместе со стержнем, непосредственным приложением масштаба;

б) с помощью световых сигналов покоящегося наблюдателя и синхронных в покоящейся системе часов, расставленных в точках A и B , расстояние между которыми измерено покоящимся масштабом и равно l .

Согласно принципу относительности длина стержня в подвижной системе, измеренная операцией а), должна равняться длине l покоящегося стержня. Длину, устанавливаемую операцией б), будем называть «длиной движущегося стержня в покоящейся системе». Пусть на концах A и B движущегося отрезка имеются подвижные наблюдатели с часами, синхронными с часами неподвижного наблюдателя. Тогда сигнал, посланный подвижным наблюдателем A в момент t_A , достигает наблюдателя B в момент t_B по наблюдениям неподвижного наблюдателя. Принимая во внимание принцип постоянства скорости света, имеем

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}.$$

Отраженный сигнал вернется к наблюдателю A в момент t'_A , причем

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v},$$

и наблюдатели, движущиеся вместе со стержнем, найдут, что их часы идут несинхронно. Итак, два события, одновременные при наблюдении из одной координатной системы, не будут одновременными при рассмотрении из другой системы, движущейся относительно первой.

§ 3. ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим две системы координат: неподвижную $Oxyz$ и подвижную $O_1\xi\eta\zeta\tau$, движущуюся поступательно и равномерно с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x . Пусть соответственные оси систем отсчета $Oxyz$ и $O_1\xi\eta\zeta$ параллельны. Каждая система предполагается снабженной масштабом и часами. Масштабы и часы в обеих системах одинаковы. Пусть, кроме того, в начальный момент точки O и O_1 совпадают, а отсчет часов равен нулю. Каждому набору значений x, y, z, t , полностью определяющему место и время событий в покоящейся системе, соответствует набор значений ξ, η, ζ, τ , устанавливающий это событие в подвижной системе. Необходимо найти уравнения, связывающие эти величины. Эти уравнения должны быть линейными в силу свойства однородности, которое приписывается пространству и времени. Все точки системы должны быть эквивалентны по отношению к преобразованию.

Выберем на оси ξ точку P , покоящуюся в подвижной системе координат. Тогда для неподвижного наблюдателя

$$O_1P = x' = x - vt.$$

Время τ в подвижной системе является функцией координат и времени неподвижной системы

$$\tau = \tau(x', y, z, t).$$

Пусть из начала O_1 в момент времени t_0 посылается луч света в точку P , который отражается от этой точки в момент τ_1 и приходит в начало координат в момент τ_2 . Из свойства синхронности часов следует

$$\tau_1 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1,$$

или

$$\tau_1 = \frac{\tau_0 + \tau_2}{2}.$$

Применяя принцип постоянства скорости света к покоящейся системе, имеем

$$\begin{aligned} \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c-v}\right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau\left(0, 0, 0, t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}\right) \right], \end{aligned}$$

и, рассматривая x' как бесконечно малую величину, получим

$$\tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c-v}\right) = \tau(0, 0, 0, t) + \frac{\partial \tau}{\partial x'} x' + \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \frac{x'}{c-v} + \dots$$

Пренебрегая здесь членами выше второго порядка малости, будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(0, 0, 0, t) + \frac{\partial \tau}{\partial x'} x' + \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \frac{x'}{c-v} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[2\tau(0, 0, 0, t) + \frac{\partial \tau}{\partial t} \left(\frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v} \right) \right], \end{aligned}$$

откуда следует

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right),$$

где a — не известная пока функция от v . Чтобы найти теперь величины ξ , η , ζ , заметим, что свет, при измерении в движущейся системе, должен тоже распространяться со скоростью c . Если через

ξ обозначим координату точки P , то сигнал из начала координат достигнет точки P за время

$$\tau^* = \frac{\xi}{c}.$$

Но

$$\tau^* = a \left(t^* - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right),$$

где $t^* = \frac{x'}{c - v}$, поэтому

$$\tau^* = a \left(\frac{x'}{c - v} - \frac{vx'}{c^2 - v^2} \right) = \frac{ax'c}{c^2 - v^2},$$

откуда

$$\xi = c\tau^* = \frac{c^2 ax'}{c^2 - v^2} = \frac{ax'}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

или

$$\xi = ax'\beta^2,$$

причем

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Пусть, далее, Q — точка подвижной системы, расположенная на оси η . Время распространения сигнала из точки O_1 до точки Q в неподвижной системе определится из соотношения

$$c^2 t^2 = v^2 t^2 + y^2,$$

которое дает

$$t = \frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

В подвижной системе координат

$$\eta = c\tau_1 = \frac{yca}{\sqrt{c^2 - v^2}} = a\beta y.$$

Аналогично получим

$$\zeta = a\beta z.$$

Вводя обозначение $\varphi(v) = a\beta$ и подставляя значение x' , приходим к следующим формулам преобразования:

$$\tau = \varphi\beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad \xi = \varphi\beta (x - vt),$$

$$\eta = \varphi y, \quad \zeta = \varphi z.$$

Для определения функции $\varphi(v)$ рассмотрим еще одну систему $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$, движущуюся поступательно в отрицательном направлении оси ξ со скоростью v . Дважды применяя формулы преобразования, будем иметь:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \varphi(-v) \beta(-v) \left(\tau + \frac{v\xi}{c^2} \right) = \varphi(-v) \varphi(v) \beta^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2} t = \\ &= \varphi(-v) \varphi(v) t, \\ \xi_1 &= \varphi(-v) \beta(-v) [\xi + v\tau] = \varphi(-v) \varphi(v) x.\end{aligned}$$

Соотношение между ξ_1 и x не содержит времени t , и, следовательно, системы $Oxyzt$ и $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1\tau_1$ находятся в покое относительно друг друга. Тогда

$$\varphi(v) \varphi(-v) = 1.$$

Для выяснения физического смысла функции $\varphi(v)$ рассмотрим точку Q . Ордината y этой точки равна

$$y = \frac{\eta}{\varphi(v)}.$$

Из соображений симметрии ясно, что эта величина может зависеть только от величины скорости, а не от направления движения, поэтому

$$\varphi(v) = \varphi(-v) = 1.$$

Формулы преобразования теперь запишутся в виде

$$\begin{aligned}\tau &= \beta \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad \xi = \beta (x - vt), \quad \eta = y, \quad \zeta = z, \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\end{aligned}$$

а это и представляет собой преобразование Лоренца. Преобразования Лоренца приводят к представлениям, противоречащим привычным представлениям о свойствах пространства и времени. Рассмотрим, например, понятие «длины». Пусть в системе $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1\tau_1$ покоится некоторый стержень длины l , направленный вдоль оси ξ . Длину l измеренную в системе $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1\tau_1$, назовем собственной длиной. Найдем длину этого стержня в системе $Oxyzt$. Обозначим абсциссы концевых точек стержня через ξ_1 и ξ_2 . Для определения длины в системе $Oxyzt$ нужно определить координаты x_1 и x_2 концевых точек стержня в момент t . Воспользуемся формулами преобразования Лоренца

$$\xi_1 = \beta (x_1 - vt), \quad \xi_2 = \beta (x_2 - vt),$$

которые дают

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\beta} (\xi_2 - \xi_1),$$

т. е.

$$x_2 - x_1 < l.$$

Обе системы отсчета являются совершенно равноправными. Поэтому если стержень покоится в системе $Oxyz$, то его длина в системе $O_1\xi\eta\zeta$ будет меньше, чем в системе $Oxyz$, так что *собственная длина всегда больше той, которую отмечает неподвижный наблюдатель.*

Сокращение длины имеет чисто кинематический характер.

Фундаментальному изменению подвергается в теории относительности и представление о времени. В самом деле, если в некоторой точке ξ системы $O_1\xi\eta\zeta$ происходит физический процесс в течение времени $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, то в системе $Oxyz$ для моментов t_2 и t_1 получим:

$$t_2 = \beta \left(\tau_2 + \frac{v}{c^2} \xi \right), \quad t_1 = \beta \left(\tau_1 + \frac{v}{c^2} \xi \right).$$

Отсюда сразу же находим:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \beta (\tau_2 - \tau_1) = \beta \Delta\tau,$$

$$\beta > 1,$$

т. е. *собственное время всегда меньше, чем время, прошедшее между событиями в неподвижной системе отсчета.* Течение времени оказывается зависящим от состояния движения. Не существует универсального мирового времени. Подчеркнем, что имеется полная взаимность между системами $Oxyz$ и $O_1\xi\eta\zeta$, и если физический процесс происходит в точке x и имеет длительность Δt , то в системе $O_1\xi\eta\zeta$ он будет иметь длительность

$$\Delta\tau = \beta \Delta t.$$

Одновременность событий. Пусть в системе $O_1\xi\eta\zeta$ в некоторый момент τ произошли одновременно два физических события в точках ξ_1 и ξ_2 ($\xi_2 > \xi_1$). Рассмотрим инерциальную систему $Oxyz$, относительно которой система $O_1\xi\eta\zeta$ движется поступательно со скоростью v в положительном направлении вдоль оси x . В системе $Oxyz$ первое событие происходит в момент

$$t_1 = \beta \left(\tau_1 + \frac{v}{c^2} \xi_1 \right),$$

второе — в момент

$$t_2 = \beta \left(\tau_1 + \frac{v}{c^2} \xi_2 \right).$$

При этом события происходят уже не одновременно, так как

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \beta \frac{v}{c^2} (\xi_2 - \xi_1).$$

В общем случае промежуток времени Δt может оказаться как положительным, так и отрицательным, но понятие одновременности событий оказывается относительным.

Преобразование скорости. Преобразование Лоренца позволяет по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе. Эти же формулы позволяют определить зависимость скоростей частицы в различных системах координат. В самом деле, представим формулы Лоренца в виде

$$t = \beta \left(\tau + \frac{v}{c^2} \xi \right), \quad x = \beta (\xi + v\tau), \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

Дифференцированием отсюда получим:

$$dt = \beta \left(d\tau + \frac{v}{c^2} d\xi \right), \quad dx = \beta (d\xi + v d\tau), \\ dy = d\eta, \quad dz = d\zeta,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\xi}{d\tau} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{d\eta}{d\tau}}{\beta \left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} \right)}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{d\zeta}{d\tau}}{\beta \left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} \right)}.$$

Полученные формулы определяют преобразование скоростей. Они дают и закон сложения скоростей в теории относительности.

В частном случае, при движении частицы параллельно оси x , будем иметь

$$v_a = \frac{v_r + v_e}{1 + \frac{v_r v_e}{c^2}}.$$

Если же отношение $\frac{v_r v_e}{c^2} \rightarrow 0$, то формула переходит в обычный закон сложения скоростей классической механики.

Нетрудно убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших скорости света, во всяком случае не больше, чем скорость света.

В самом деле, пусть $v_e = kc$, $v_r = nc$, где k и n — постоянные положительные коэффициенты, меньшие единицы. Тогда

$$v_a = \frac{k+n}{1+kn} c,$$

и так как $\frac{k+n}{1+kn} < 1$, то абсолютная скорость v_a всегда меньше скорости света, если только переносная и относительная скорости меньше скорости света.

§ 4. ИНВАРИАНТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОР. МИР МИНКОВСКОГО

Задача теории относительности сводится к нахождению абсолютных, не зависящих от выбора инерциальной системы отсчета, законов природы. Эта задача связана с нахождением величин, инвариантных относительно преобразований Лоренца. Первой из таких инвариантных величин является скорость распространения света c , общая для всех инерциальных систем координат.

Второй инвариантной величиной является «интервал». Интервалом в теории относительности называется величина

$$s = \sqrt{c^2(\tau_1 - \tau)^2 - (\xi_1 - \xi)^2 - (\eta_1 - \eta)^2 - (\zeta_1 - \zeta)^2}.$$

Инвариантность интервала относительно преобразований Лоренца проверяется непосредственным вычислением. При этом если

$$s_1 = \sqrt{c^2(t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2},$$

то

$$s_1 = s.$$

Утверждение, что два события разделены интервалом s , имеет абсолютный характер. Из определения интервала непосредственно следует

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2.$$

Величина ds может рассматриваться как элементарный интервал четырехмерного эвклидова пространства, отнесенного к системе параллельных ортонормированных осей. Пространство это является несобственным, так как длина ds не обязательно будет положительно определенной.

Преобразования Лоренца указывают на равноправность всех четырех координат x, y, z, t . Этим воспользовался немецкий математик Герман Минковский (1864—1909), который, введя четырехмерное пространство, упростил многие проблемы и сделал релятивистские законы более ясными.

Отложим на ортогональных осях четырехмерного пространства три пространственные координаты и время (мир Минковского). Событие в этом пространстве будет изображаться точкой, называемой мировой точкой. Всякой частице соответствует мировая линия, точки которой определяют координаты частицы во все моменты времени. В силу инвариантности интервала качественное различие связи между событиями не будет зависеть от выбора системы отсчета.

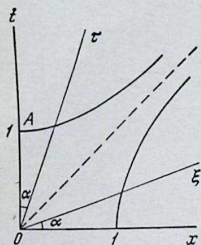


Рис. 94

Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, будем рассматривать «плоский мир» (t, x) , положив скорость распространения света с равной единице. Движение точки в этом мире будет представляться кривой $t = f(x)$, касательная к которой образует с осью времени угол ϑ

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dx}{dt} \leq 1,$$

поэтому всегда будем иметь $\vartheta \leq 45^\circ$. Прямая, для которой $\vartheta = 45^\circ$, соответствует траектории световых лучей (рис. 94). Наблюдатель, движущийся вдоль оси x со скоростью v , будет описывать прямую линию в плоскости неподвижного наблюдателя, которая образует с осью x угол α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{t} = v.$$

Этот угол α определяет скорость движения подвижного наблюдателя. Это же следует и непосредственно из формул Лоренца:

$$\tau = \beta(t - vx), \quad \xi = \beta(x - vt).$$

Из формулы

$$s^2 = t^2 - x^2$$

получим уравнение кривой, соответствующей единице длины

$$t^2 - x^2 = 1.$$

Это будет гипербола, проходящая через точку A. Сопряженная ей гипербола отличается знаком правой части. Переход от системы (x, t) к системе (ξ, τ) соответствует переходу от прямоугольных координат к косоугольным на плоскости Минковского. Это же следует и из преобразования Лоренца, которое можно представить в виде

$$x = \beta_1(\xi \cos \alpha + \tau \sin \alpha), \quad t = \beta_1(\xi \sin \alpha + \tau \cos \alpha),$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

После такого преобразования уравнение гиперболы принимает вид

$$\beta_1^2 [(\xi \sin \alpha + \tau \cos \alpha)^2 - (\xi \cos \alpha + \tau \sin \alpha)^2] = 1,$$

или

$$\beta_1^2 [(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \xi^2 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \tau^2] = 1.$$

Подставляя значение β_1 будем иметь

$$-\xi^2 + \tau^2 = 1.$$

В системе Oxt все события на оси x одновременны, в системе же $O\xi\tau$ эти же события уже не одновременны. Так, например, три одновременных события A, B, C в системе Oxt (рис. 95) будут чередоваться в последовательности C, B, A в системе $O\xi\tau$.

Часы, неподвижные в системе Oxt , изображаются точкой, описывающей прямую Ot . Единице времени в системе Oxt соответствует точка A . За это время стрелка часов подвижного наблюда-

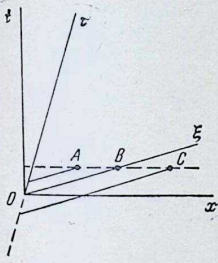


Рис. 95

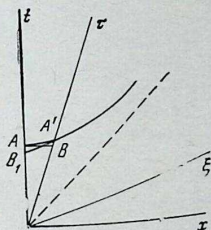


Рис. 96

теля еще не пройдет через единицу (с точки зрения неподвижного наблюдателя) и будет находиться в положении B (рис. 96). С точки зрения подвижного наблюдателя за единицу времени он окажется в положении A_1 , а часы неподвижного наблюдателя в этот момент покажут время, меньшее единицы (чему соответствует точка B_1). Таким образом, *движущиеся часы всегда идут медленнее*.

Взаимное сокращение длин и увеличение промежутков времени связано с отказом от возможности определить абсолютную одновременность.

Изменение собственной системы отсчета. Формулы Лоренца позволяют перейти от собственной системы отсчета к любой другой инерциальной системе. Собственной мы называем ту инерциальную систему, с которой неизменно связано движущееся тело. Посмотрим теперь, как будут изменяться размеры и время при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Предположим, что в системе Oxt находится стержень длины l_0 . Пусть этот стержень за короткое время получает ускорение, благодаря чему его скорость относительно системы Oxt становится равной v . Новая собственная система снова будет инерциальной. Длина стержня в этой новой системе равна l'_0 . В системе же Oxt его длина $l = \frac{l'_0}{\beta}$. Но длина l'_0 может отличаться от l_0 . Если

теперь стержень получает замедление и останавливается в системе Oxt , то длина его станет равной l_{00} , которая может отличаться и от l_0 , так как стержень два раза испытывал ускорение.

Аналогичные результаты получаются и с часами. Оказывается, что результаты такого мысленного эксперимента не обратимы.

Точки, движущиеся неравномерно и непрямолинейно, в пространстве Минковского изобразятся кривыми линиями. В каждой точке такие движения определяются касательной к мировой линии.

Введем понятие четырехмерного радиус-вектора g_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), проекции которого на оси координат равны x, y, z, ct . Четырехмерным вектором a_α будем называть вектор, проекции которого при преобразованиях Лоренца преобразуются по одному и тому же закону, так что компоненты вектора a_α должны изменяться, как и компоненты вектора g_α .

Ограничиваясь, для простоты, движением только в плоскости Oxt , будем иметь:

$$a_x = \beta (a_\xi + v a_\tau), \quad a_y = a_\eta, \quad a_z = a_\zeta, \quad a_t = \beta \left(a_\tau + \frac{v}{c^2} a_\xi \right).$$

Компоненты a_x, a_y, a_z называют пространственными, а компоненту a_t — временной. При преобразовании остается неизменным «квадрат» вектора

$$a_\alpha^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

В общем случае квадрат вектора не является положительным.

В дальнейшем нас будут интересовать четырехмерный вектор скорости и четырехмерный вектор ускорения. Первый образуется в виде производной по инварианту-скаляру от четырехмерного радиус-вектора. Выбор инварианта-скаляра определяется тем, что при малых скоростях $v \ll c$ пространственные компоненты четырехмерного вектора скорости должны превращаться в компоненты обычной скорости.

В связи со сказанным выше определим четырехмерный вектор скорости соотношением

$$u_\alpha = \frac{dr_\alpha}{d\tau_0},$$

где $d\tau_0 = \frac{ds}{c}$ — элемент собственного времени. Для компонент четырехмерного вектора скорости будем иметь:

$$u_x = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt} = \beta \frac{dx}{dt} = \beta v_x, \quad u_y = \beta v_y, \quad u_z = \beta v_z,$$

$$u_t = \frac{dt_c}{d\tau_0} = \beta c.$$

При $v \ll c$ получим отсюда совпадение пространственных компонент скорости с компонентами трехмерной скорости. Заметим, что компоненты четырехмерного вектора скорости не независимы, так как

$$u_\alpha^2 = u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 = c^2,$$

и величина вектора является заданной постоянной.

Четырехмерное ускорение. Определим четырехмерный вектор ускорения как вектор, проекции которого определяются равенствами:

$$j_x = \frac{du_x}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau_0} = \frac{d}{dt} (\beta v_x) \frac{dt}{d\tau_0} = \beta \left(\frac{d\beta}{dt} v_x + \beta \frac{dv_x}{dt} \right) = \\ = \beta^2 \dot{v}_x + \beta^4 \frac{v_x}{c^2} (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}),$$

$$j_y = \beta^2 \dot{v}_y + \beta^4 \frac{v_y}{c^2} (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}), \quad j_z = \beta^2 \dot{v}_z + \beta^4 \frac{v_z}{c^2} (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}),$$

$$j_\tau = \frac{du_t}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \beta c \frac{d\beta}{dt} = \beta^4 \frac{(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})}{c},$$

где

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

§ 5. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Будем рассматривать инвариантные и ковариантные свойства уравнений. Инвариантными относительно преобразований Лоренца называются такие уравнения, которые не изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой. Уравнения, остающиеся справедливыми в силу того, что их члены, не являющиеся инвариантными, преобразуются по одним и тем же законам, называются ковариантными относительно преобразований Лоренца.

Уравнения классической механики ковариантны относительно преобразований Галилея, но не ковариантны относительно преобразований Лоренца. Чтобы уравнения оставались ковариантными относительно преобразований Лоренца, необходимо иначе определить основные понятия динамики.

Как и в классической динамике, будем рассматривать движение материальной частицы. Заметим прежде всего, что закон инерции

инвариантен относительно преобразований Лоренца, т. е. если частица движется без ускорения относительно инерциальной системы S , то она будет двигаться без ускорения и относительно другой инерциальной системы S_1 . Для нахождения ковариантной формы уравнений движения их нужно представить четырехмерными векторами.

Состояние движения частицы в данный момент времени полностью определяется ее массой и скоростью. Введем понятие массы покоя m_0 , которая определяет инерционные свойства частицы и не меняется при изменении системы отсчета.

Количество движения точки определим четырехмерным вектором

$$p_\alpha = m_0 u_\alpha,$$

или, в проекциях на оси,

$$p_x = \beta m_0 v_x, \quad p_y = \beta m_0 v_y, \quad p_z = \beta m_0 v_z, \quad p_t = \beta c m_0.$$

Тогда в предельном случае, когда $v \ll c$ и $\beta \rightarrow 1$, будем иметь:

$$p_x^0 = m_0 v_x, \quad p_y^0 = m_0 v_y, \quad p_z^0 = m_0 v_z, \quad p_t^0 = c m_0.$$

Естественным обобщением уравнений Ньютона теперь будут уравнения Минковского

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \Phi_\alpha,$$

где Φ_α — четырехмерный вектор, называемый силой Минковского. Ковариантный характер уравнений Минковского будет следовать непосредственно из свойств четырехмерных векторов. Расписывая уравнения в проекциях на оси x, y, z, t , будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_0 \beta v_x) &= \frac{\Phi_x}{\beta}, & \frac{d}{dt} (m_0 \beta v_y) &= \frac{\Phi_y}{\beta}, \\ \frac{d}{dt} (m_0 \beta v_z) &= \frac{\Phi_z}{\beta}, & \frac{d}{dt} (m_0 \beta c) &= \frac{\Phi_\tau}{\beta}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы в правых частях первых трех уравнений стояла компонента обычной силы классической механики, т. е.

$$\frac{\Phi_x}{\beta} = F_x, \quad \frac{\Phi_y}{\beta} = F_y, \quad \frac{\Phi_z}{\beta} = F_z,$$

тогда при $v \ll c$ формулы превращаются в обычные уравнения Ньютона для точки с постоянной массой. Для четвертой компоненты здесь будем иметь

$$\frac{d}{dt} (c m_0 \beta) = \frac{\Phi_\tau}{\beta} = F_\tau.$$

Чтобы выяснить физический смысл компоненты Φ_τ , рассмотрим инвариант

$$u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 = c^2.$$

Дифференцируя его по τ_0 , получим

$$u_t \frac{du_t}{d\tau_0} - u_x \frac{du_x}{d\tau_0} - u_y \frac{du_y}{d\tau_0} - u_z \frac{du_z}{d\tau_0} = 0,$$

и после подстановки значений производных

$$u_t \Phi_t = u_x \Phi_x + u_y \Phi_y + u_z \Phi_z,$$

или

$$\beta c \Phi_\tau = \beta^2 (v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z).$$

Отсюда

$$\Phi_\tau = \frac{\beta}{c} (\mathbf{v}, \mathbf{F}).$$

Правая часть этой формулы содержит работу, производимую силой $\mathbf{F}$ за единицу времени. Подставляя значение Φ_τ , получим

$$\frac{d}{dt} (m_0 c^2 \beta) = (\mathbf{v}, \mathbf{F}).$$

Если в правой части стоит выражение работы силы за единицу времени, то в левой части должно быть изменение энергии за единицу времени. Выражение, стоящее в левой части под знаком производной, является полной энергией частицы

$$E = m_0 c^2 \beta = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Уравнение движения частицы

$$\frac{d}{dt} (m_0 \beta \mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

теперь можно представить в виде

$$m_0 \beta \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \frac{dE}{dt} = \mathbf{F},$$

откуда видно, что направление силы, действующей на частицу, вообще говоря, не совпадает с направлением ускорения.

Представляя трехмерный импульс

$$\mathbf{p} = \beta m_0 \mathbf{v}$$

в виде $p = m(v)v$, определим релятивистскую массу

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Эта релятивистская масса зависит от состояния движения частицы. Релятивистская масса равна полной энергии, деленной на c^2 .

Релятивистская энергия E не обращается в нуль, если скорость частицы равна нулю. В этом случае получим энергию покоя

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Оказывается, что масса покоя в c^2 раз меньше энергии покоя. При малых скоростях ($v \ll c$), раскладывая энергию по степеням v/c , получим

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Исключая скорость v из выражений для импульса и энергии, будем иметь

$$E = c^2 (p^2 + m_0^2 c^2), \quad p = mv.$$

Уравнения движения можно записать и в обобщенных координатах Лагранжа. Для этого нужно прежде всего составить функцию Лагранжа. Для свободной точки она является величиной, производные от которой по компонентам скорости представляют проекции импульса, а производные по координатам — компоненты силы, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i = m_0 v_i \beta, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

где U — силовая функция. Таким уравнениям удовлетворяет функция

$$L = -\frac{m_0 c^2}{\beta} + U,$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Зная функцию Лагранжа, можно найти и функцию Гамильтона

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = m_0 v^2 \beta + \frac{m_0 c^2}{\beta} - U = m_0 \beta c^2 - U.$$

Но так как

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = m_0^2 v^2 \beta^2 = p^2,$$

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - U,$$

т. е. в релятивистской механике функция Гамильтона совпадает с полной энергией, выраженной через импульс частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика, т. II. М., Физматгиз, 1960.
2. Бергман П. Введение в теорию относительности. М., ИЛ, 1947.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. II. М., «Наука», 1966.
4. Бухгольц Н. Н., Воронков И. М., Минаков А. П. Сборник задач по теоретической механике. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
6. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
7. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
8. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. М., Учпедгиз, 1955.
9. Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
10. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
11. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965.
12. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики, ч. II. Динамика. М.—Л., ГТТИ, 1948.
13. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
14. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., Гостехиздат, 1953—1966.
15. Монсеев Н. Д. Очерки развития механики. Изд-во МГУ, 1961.
16. Тоннела М. А. Основы электродинамики и теории относительности. М., ИЛ, 1962.
17. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.—Л., 1937.
18. Чаплыгин С. А. Механика системы. Соч., т. IV. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
19. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
20. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. Соч., т. I. М., «Наука», 1965.
21. Якоби К. Лекции по динамике, пер. с нем. М.—Л., ОНТИ, 1936.

УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда колебаний 225
 Аналогия оптико-механическая 147, 205
 Аппель П. 216
 Аппельрот 100
 Аристотель 233, 287

 Бернулли И. 146
 Бернулли Я. 7
 Биения 229
 Бобылев Д. К. 100
 Болотов Е. А. 210
 Боненбергер 89
 Булгаков Б. В. 95

 Вариация координат 55, 263
 — состояния 54
 — функции 54
 Вектор четырехмерный 301, 304
 Возмущения 244, 263
 Волны электромагнитные 289, 292
 Волчок 42
 — китайский 43
 — спящий 124
 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 82
 Время 193
 — собственное 299
 — универсальное 288

 Галилей Галилео 90, 146, 193, 224, 287
 Гамильтон 147, 153, 193, 205, 206, 210
 Гаусс К. Ф. 210
 Гельмгольц 205, 210, 268
 Герман 7
 Герон 147
 Герполодия 115
 Герц Г. 57
 Гесс 100
 Гиббс 163
 Гипотеза Кулона 279

 Гирогоризонт 128, 130
 Гирокомпас 128, 129
 Гироскоп 95, 125
 — астатический 129
 — в кардановом подвесе 136
 Ги́ростат 143
 Горячев 100
 Гюйгенс Х. 70, 82, 88, 90, 206, 224

 Даламбер 193
 Движение аperiодическое 227
 — возмущенное 244, 263
 — действительное 211
 — невозмущенное 244, 263
 — неустановившееся 246
 — планет 180, 271
 — прецессионное 42
 — снаряда 43, 96
 — свободного твердого тела 142
 — твердого тела вокруг неподвижной точки 90, 84
 — тел переменной массы 19
 — тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки 99
 — установившееся 246
 — электрона 188
 Движения мыслимые 211
 — стационарные 62, 243
 Действие по Гамильтону 167
 Декремент затухания логарифмический 228
 Делоне Н. Б. 100
 Динамика аналитическая 146
 — релятивистская 305
 — системы 7
 — твердого тела 69
 Дирихле Лежен 233, 246
 Диссипация энергии 227
 Длина собственная 298

Нейман К. 51

Некрасов П. А. 100

Неравенство Маха 214

Неустойчивость движения 118

Ньютон И. 146, 193, 224, 278

Одновременность событий 294, 299

Оси вращения естественные 85

— — перманентные 85, 115

— — постоянные 85, 115, 117

— — свободные 85

— инерции главные 74

— — центральные 75

— Кенига 39

Остроградский М. В. 147

Осциллятор 224

Переменные канонические 153, 158

Перемещения возможные 8, 10, 211

— — действительные 8

Перестановочные соотношения 149, 150

Плоскость фазовая 225

Подвес карданов 126, 129, 138

Показатели характеристические решений 269

— — Ляпунова 269

Полодия 115, 116

Портрет фазовый 226, 230

Правило Жуковского 128

Предел высший бесконечно малый 247

Преобразований группа 172

— — Лоренца 295

Преобразования Галилея 288, 293, 305

— — Гамильтона 153

— — канонические 170, 270

— — — бесконечно малые 174

— — Лежандра 157, 171

— — Лоренца 292, 293, 298, 305

Прецессия псевдорегулярная 127, 139

— — регулярная 111, 112, 141

— — — вынужденная 130, 131

Приборы гироскопические 68, 119, 128

Приведенная длина физического маятника 87

Принуждение по Гауссу 215

Принцип Бернулли 146

— Галилея—Ньютона 288

— Гамильтона 147, 162, 194, 200

— Гамильтона—Остроградского 147, 151

— Гаусса 210

— Герона 194

— Гюйгенса 207

— Даламбера 12

— Даламбера—Лагранжа 10, 12,

Принцип 45, 146, 147, 193, 211

— — динамики Петербургский 7

— — Лагранжа 195

— — Мопертюи 194

— — наименьшего действия 193, 195

— — — в форме

Якоби 193, 199, 200, 205

— — принуждения

— — Гаусса 210

— — относительности Галилея 287

— — — специальный 293

— — — Эйнштейна 294

— — распространения света 147

Принцип Торричелли 233

— — Ферма 147, 194, 205

— — Эйлера—Лагранжа 146

Принципы механики 192

— — — вариационные 192

Пространство 193

— — фазовое 192

— — четырехмерное 301

Пуанкаре А. 70, 147, 162, 205, 244, 291, 293

Пуансо 70, 99, 113

Пуассон 70, 94, 101, 119, 153, 198

Пюйзе 95

Радиус инерции 95

— — — центральный 88

Раус 53, 147, 196, 243, 244

Резаль 31, 95

Резонанс 229

Родригес 196

Рэлей 254

Свет 289

Связи 8, 45

— — — внешние 4

— — — внутренние 5

— — — голономные 9, 150, 211

— — — идеальные 10, 273

— — — интегрируемые 9

— — — линейные 8

— — — неголономные 210

— — — неинтегрируемые 9

— — — неупругие 276

Сепаратиса 231

Сила 193

— — — возмущающая 228

— — — восстанавливающая 228

— — — обобщенная 47

— — — реактивная 20

— — — Минковского 306

Силы внешние 16

— — — внутренние 16

— — — гироскопические 257, 258

— — — диссипативные 254

— — — инерции Даламбера 12

— — — реакции 10, 16, 63

- Силы электромагнитные 188
- Сильвестр 238
- Синхронизация часов 294
- Система гелиоцентрическая 18
 - нормальная 153
 - собственная 303
- Системы диссипативные 231
 - инерциальные 287
 - неголономные 210
- Скобки Пуассона 190
- Скоростей сложение в теории относительности 300
- Скорости обобщенные 45
- Скорость потерянная 277
 - света 293, 301
 - фазовая 226
 - четырехмерная 305
- Случай Ковалевской 105, 133
 - Лагранжа—Пуассона 105, 119, 186
 - Эйлера—Пуансо 105, 106
- Стабилизация временная 261, 262
 - движения 256
- Стекло 100
- Суперпозиция колебаний 229
- Тело абсолютно твердое 69
- Тензор инерции 81
- Теорема Вейерштрасса 239
 - Гельмгольца 268
 - Гюйгенса 88
 - живых сил 32, 33, 44, 58
 - Карно вторая 277, 278
 - первая 277
 - Лагранжа об устойчивости равновесия 233, 246, 249
 - Лиувилля 176, 179, 184
 - Ляпунова об асимптотической устойчивости 249
 - об устойчивости движения 247
 - о движении центра масс 13, 14, 57
 - о неустойчивости движения 252
 - об изменении количества движения 13
 - — момента количества движения 23, 24, 31, 41
 - Пуассона 192, 267
 - Сильвестра 238
 - Штейнера 72
 - Штеккеля 179
 - Четаева о неустойчивости движения 252
 - Якоби 177
- Теоремы динамики основные 13, 49, 57
 - — системы общие 49
- Карно 276
- — обобщенные 280
- Кельвина 254, 259
- Кеннига 39, 40
- Теория возмущений 263
 - гироскопов приближенная 125
 - относительности специальная 287
 - света волновая 205
 - удара 272
 - Френеля 289
- Тождество Пуассона 191
- Томсон 198, 244, 257
- Торричелли Е. 146, 233
- Точка изображающая 225
- Точки взаимные 88, 89
 - шаровые 81
- Траектория действительная 148, 167
 - фазовая 226
- Тэт 198, 244, 257
- Удар 272, 273
 - абсолютно неупругий 278
 - — упругий 278
 - не вполне упругий 278
 - неупругий 277
 - реактивный 273
- Удара центр 280, 281
- Уравнение Гамильтона—Якоби 170
 - динамики общее 12, 193
 - Мещерского 20
 - теории удара основное 273
 - характеристическое 237
 - частот 237
- Уравнений инвариантность 305
- Уравнения ковариантность 305
 - Аппеля 215, 216
 - возмущенного движения 245
 - Гамильтона канонические 133, 270
 - Лагранжа второго рода
 - для удара 284
 - Максвелла 292, 293
 - Минковского 306
 - Ньютона 287, 293, 306
 - Пуассона 102
 - Рауса 55, 221
 - теории возмущений 271
 - Эйлера 93, 94, 98
 - динамические 64, 94, 95, 285
 - кинематические 93, 94
- Условие трансверсальности 197
- Устойчивость движения 118, 244, 245
 - асимптотическая 249

Устойчивость консервативных систем
268
— по Ляпунову 118
— постоянных вращений
117, 253
— равновесия 232

Фаза колебаний 229

Ферма 147, 194

Фицджеральд 291

Формула Циолковского 23

Френель 289

Функция Гамильтона 156, 158, 308

— диссипативная 254

— знакоопределенная 246

— знакопеременная 246

— Лагранжа 50

— Ляпунова 246

— пертурбационная 271

— производящая 271

— рассеивания 254

— Рауса 54

— силовая 34

— характеристическая 158, 207

Хюссон 100

Центр масс 16

Циолковский К. Э. 23

Чаплыгин С. А. 45, 70, 100

Частота колебаний 225

Четаев Н. Г. 205, 210, 251

Число степеней свободы 7, 45

Члены гироскопические 258

Штейнер 72

Эйлер Л. 7, 69, 70, 95, 99, 133, 147,
193, 194

Эйнштейн 291, 293

Электродинамика 288

Электромагнетизм 288

Эллипсоид гирационный 80

— инерции 74

— центральный 75

Энергия 307

— кинетическая 33

— покоя 308

— полная 307

— релятивистская 308

— ускорений 215

Эфир 289

Якоби К. 60, 99, 177, 195, 205

Березкин Евгений Николаевич
ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ, Ч. II

Тематический план 1968 г. № 136.

Редактор *В. Г. Демин*
Редактор издательства *Р. Д. Солод*
Переплет художника *А. А. Иванова*
Технический редактор *И. Л. Тимашева*
Корректоры *С. С. Мазурская,*
Л. С. Клочкова, Л. М. Кауфман

Сдано в набор 29/I 1968 г.
Подписано к печати 22/VIII 1968 г.
Л-96968 Формат 60×90/16
 Бумага тип. № 3
Физ. печ. л. 19,75 Уч.-изд. л. 21,64
Изд. № 413 Зак. 13 Тираж 31 000 экз.
 Цена 81 коп.

Издательство
Московского университета
Москва, Ленинские горы
Административный корпус.
Типография Изд-ва МГУ,
Москва, Ленинские горы

**ИЗДАТЕЛЬСТВО МГУ ИМЕЕТ В НАЛИЧИИ И ВЫСЫЛАЕТ
НАЛОЖЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ
ПО МЕХАНИКЕ:**

Лабораторный практикум по общей и прикладной механике. 1963 г., 234 стр., ц. 58 коп.

Настоящее пособие является сборником задач общего и специального практикумов кафедры прикладной механики МГУ. Изучаются автоколебательные системы, приборы и системы автоматического регулирования, гироскопические устройства и некоторые классы машин и механизмов. Рассматривается методика электронного моделирования, изучаются методы снятия динамических характеристик объектов регулирования и коррекции автоматических систем.

Издание рассчитано на студентов механико-математических факультетов университетов и других высших учебных заведений при подготовке практикумов по теории механизмов и машин, элементам и системам автоматики, гироскопическим устройствам, электронному моделированию.

Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложением к геометрии, механике и физике, выпуск XII. 1963 г., 452 стр., ц. 1 р. 86 к.

Предлагаемый XII выпуск «Трудов семинара» содержит ряд оригинальных исследований, выполненных за последние годы в области тензорной дифференциальной геометрии и в смежных областях.

Издание рассчитано на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области дифференциальной геометрии.

Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. XIII. Под ред. П. К. Рашевского. 1966 г., 540 стр., ц. 2 р. 30 к.

Сборники «Труды семинара по векторному и тензорному анализу» издаются с 1933 г. и содержат работы советских геометров тензорного направления. Предлагаемый выпуск содержит важнейшие результаты ряда диссертационных работ аспирантов МГУ, а также исследования ученых Москвы, Ленинграда, Казани и Саратова, примыкающие по тематике к семинару.

Издание рассчитано на научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов старших курсов математических факультетов университетов.

ТЮЛИНА И. А., РАКЧЕЕВ Е. Н. История механики. Учебное пособие. 1962 г., 228 стр., ц. 40 коп.

Данное учебное пособие рассчитано на контингент студентов заочников механико-математических факультетов государственных университетов и представляет собой сокращенное и переработанное изложение курса истории механики.

**Заказы следует направлять по адресу: Москва, В-234.
Издательство МГУ. Отдел распространения.**

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
76	9 сверху	$C = \frac{mR^2}{4},$	$C = \frac{mR^2}{2},$
101	3 снизу	...скоростей для проекций относительной скорости конца вектора e_3 , получим...	...скоростей, для проекций относительной скорости конца вектора e_3 получим...
127	Рис. 60		рисунок следует перевернуть
133	5 сверху	$A > l,$	$A > C,$
148	14 снизу	...траекториях, в один и тот же момент времени будет...	...траекториях в один и тот же момент времени, будет...
173	12 снизу	...уравнения в новых переменных:	...уравнения в новых переменных тогда получают вид:
174	5 снизу	...два бесконечно малых...	...два бесконечно близких...
180	2 сверху	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial a_1} \quad 0$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial a_1} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial a_1}$
276	14 сверху	...со связями, так как...	...со связями. Так как...
278	1 сверху	...вектор потерянной...	...вектор приобретенной...
292	2 снизу	$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t'}$	$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L}{\partial t'}$
293	3 снизу	...инварианты уравнения Максвелла.	...инвариантны уравнения Максвелла.

МАТРОСОВ
МОСКОВС
ПЕЧАТ