И. Л. ЗАЙЦЕВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ФИЗМАТГИЗ · 1959

И. Л. ЗАЙЦЕВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

Под редакцией Г. С. БАРАНЕНКОВА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Управлением средних специальных учебных заведений Министерства высшего образования СССР в качестве учебника для техникумов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-4-2

Зайцев Иван Лазаревич.

Курс высшей математики для техникумов.

Редактор *Н. А. Угарова.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.* Корректор *М. М. Шулименко.*

Печать с матриц. Подписано к печати 2/III 1959 г. Бумага 84 × 108 1/32.
Физ. печ. л. 11,63. Условн. печ. л. 19,06. Уч.-изд. л. 18,20. Тираж 75 000 экз.
Цена книги 6 р. 45 к. Заказ № 215.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ

ДОПОЛНЕНИЯ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий учебник написан согласно программе по математике для техникумов, утвержденной Министерством высшего образования в 1952 г. Исключение составляют два раздела: кривизна кривой и дифференциальные уравнения, которые помещены в учебник по той причине, что сведениями из этих разделов часто пользуются преподаватели общетехнических и специальных дисциплин.

Кроме изложения теории, в учебнике приведены примеры и задачи. Количество и степень трудности их решения рассчитаны на прочное закрепление изучаемого материала.

При написании учебника обращалось особое внимание на доступность излагаемого материала пониманию учащихся, имеющих возраст 16—17 лет и подготовку, соответствующую 8—9 классам средней школы. Для достижения этой цели изложение велось по возможности простым языком, выяснение математических основ проводилось индуктивным способом. Так, например, изложение теории прямой линии начинается с частных случаев положения прямых, параллельных осям координат; ознакомлению с понятиями дифференциала и интеграла предпосылаются примеры и т. п.

Учитывая уровень подготовки учащихся техникума, а также крайне ограниченное число часов (90 часов), отводимое программой для прохождения высшей математики в техникумах, строгие выводы, представляющие большие трудности для усвоения, я опускал, ограничиваясь в таких случаях геометрическими иллюстрациями или рассмотрением примеров.

Пользуясь случаем, приношу искреннюю благодарность В. П. Минорскому, давшему мне много методических советов.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В третьем издании учебника «Курс высшей математики для техникумов» я учел опыт преподавания по первым двум его изданиям, а также принял во внимание критические замечания преподавателей и их пожелания.

Мною были подвергнуты существенной переработке некоторые главы курса: «Функция и ее простейшие свойства», «Понятие о производной функции», «Приложения производной», «Интеграл», «Приложения интеграла».

Кроме того, рассмотрены некоторые вопросы, не затронутые в первых изданиях: область существования функции, второе определение непрерывности функции, сравнение бесконечно малых величин между собой, элементы гармонического анализа.

В некоторых параграфах добавлены примеры и задачи для упражнений.

Чтобы улучшить изложение, в текст внесены некоторые стилистические исправления.

Автор

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА I
МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Предмет аналитической геометрии. Предметом аналитической геометрии служит изучение свойств геометрических образов (линий, фигур, тел, поверхностей и т. п.) с помощью особого метода, называемого *методом координат*. При этом широко используется алгебра.

В элементарной геометрии также прибегают иногда к методам алгебры, например, при определении площади треугольника по трем сторонам или при вычислении стороны вписанного в окружность правильного многоугольника и т. п. Однако область приложения методов алгебры к геометрии стала наиболее широкой со времени введения метода координат, который позволил изучать не только форму и размеры геометрических образов, но и их положение на плоскости и в пространстве.

Аналитическая геометрия состоит из двух частей. Первая часть — *аналитическая геометрия на плоскости*, вторая часть — *аналитическая геометрия в пространстве*.

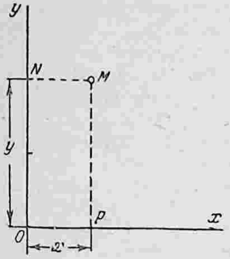
Здесь мы дадим элементарное изложение только аналитической геометрии на плоскости.

§ 2. Декартова прямоугольная система координат на плоскости. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (черт. 1) и произвольную точку M. Опустим из нее перпендикуляры MN и MP на Oy и Ox. Выбрав какую-нибудь единицу масштаба и измерив ею отрезки NM и PM, получим числа:

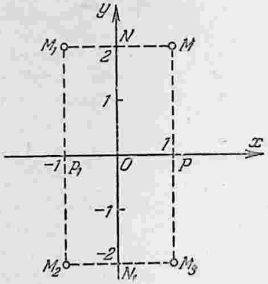
$$x = NM = OP,$$
$$y = PM = ON.$$

Эти числа x и y, определяющие положение точки M по отношению к заданным прямым Oy и Ox, называются *координатами* точки M. Их обычно записывают в скобках рядом с обозначением точки: $M(x;\ y)$, причем сначала выписывают координату x, а потом координату y.

Пусть, например, $x = OP = 1$ единице выбранного масштаба, а $y = ON = 2$ единицам того же масштаба. Тогда говорят, что точка M имеет координаты $M(1;\ 2)$.



Черт. 1.



Черт. 2.

Возникает, однако, вопрос, нет ли на плоскости еще точек, имеющих те же координаты, что и точка M. На черт. 2 показано, что каждая из точек M, M_1, M_2 и M_3 удалена на 1 единицу масштаба от прямой Oy и на 2 единицы масштаба от прямой Ox. Получается неопределенность: четыре точки имеют одинаковые координаты (1; 2). Чтобы устранить этот недостаток, уточним определение прямоугольных координат точек на плоскости.

Координатой x точки M называется число, измеряющее расстояние точки M от прямой Oy и взятое со знаком $+$, если M удалена вправо от Oy, и со знаком $-$, если M удалена влево от Oy.

Координатой y точки M называется число, измеряющее расстояние точки M от прямой Ox и взятое со знаком $+$, если M удалена вверх от Ox, и со знаком $-$, если M удалена вниз от Ox.

Теперь точки M, M_1, M_2 и M_3 на черт. 2 имеют уже различные и вполне определенные координаты: $M(1;\ 2)$, $M_1(-1;\ 2)$, $M_2(-1;\ -2)$, $M_3(1;\ -2)$.

Таким образом, чтобы определить положение любой точки на плоскости координатами x и y, нужно задать:

1) две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy, называемые *осями координат*, точку O пересечения которых принято называть *началом координат*;

2) единицу масштаба;

3) направление на каждой из осей координат, принимаемое за положительное (на чертеже принятое положительное направление на осях отмечается стрелками).

Все эти данные называются *декартовой системой прямоугольных координат* на плоскости [по имени французского математика Декарта (1596—1650) — создателя аналитической геометрии].

Координату x называют *абсциссой*, а координату y — *ординатой*.

Как выше показано, в декартовой системе прямоугольных координат на плоскости *каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел* x и y (ее координат), определяющих положение точки на плоскости, и наоборот, *каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости*. Вследствие указанного соответствия между точками и координатами этих точек принято говорить: «да́на точка $M(a;\ b)$» вместо «даны координаты точки M», «найти точку $M(x;\ y)$» вместо «найти координаты точки M».

Упражнения

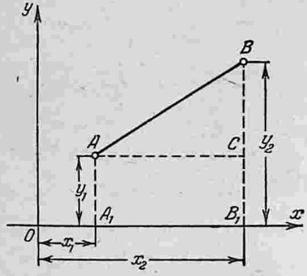
1. Построить точки $A\,(3;\ 5)$, $B\,(-3;\ 4)$, $C\,(5;\ -1)$, $D\,(-2;\ -4)$, $E\,(0;\ 2)$, $F\,(2;\ 0)$, $K\,(-3;\ 0)$, $L\,(0;\ -4)$ и $O\,(0;\ 0)$.

2. Дана точка $A\,(3; 2)$. Найти координаты точки B, симметричной с A относительно оси Ox, и точки C, симметричной с B относительно оси Oy; построить эти три точки.

3. Стороны прямоугольника равны 6 *см* и 10 *см*. Найти координаты его вершин, приняв за оси координат прямые, параллельные его сторонам и делящие эти стороны пополам.

4. Дан квадрат со стороной, равной 8 *см*. Приняв его диагонали за координатные оси, найти координаты вершин квадрата.

§ 3. Расстояние между двумя точками. Пусть даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (черт. 3); требуется найти расстояние между ними.



Черт. 3.

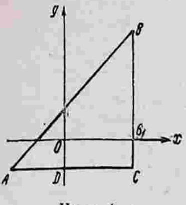
Опустим из A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ось Ox и проведем $AC \parallel Ox$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора найдем:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}. \qquad (1)$$

Но, как видно из чертежа,

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1, \\ CB &= B_1B - B_1C = B_1B - A_1A = y_2 - y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставив значение AC и CB из равенств (2) в выражение (1) и обозначив AB через d, получим:



Черт. 4.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3)$$

Можно показать, что формула (3) верна для любого положения точек A и B на плоскости. Пусть, например, точки A и B расположены, как указано на чертеже 4, тогда по-прежнему напишем равенство (1), в котором

$$\left.\begin{aligned} &AC = AD + DC \\ \text{и}\quad & \\ &CB = CB_1 + B_1B. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Так как AC и CB, как длины сторон треугольника, положительны, то и слагаемые правых частей равенств (4) должны быть положительными. Но координаты точки A

$$x_1 < 0 \quad \text{и} \quad y_1 < 0;$$

следовательно,

$$AD = -x_1 \quad \text{и} \quad CB_1 = -y_1.$$

Отрезки же

$$DC = x_2 \quad \text{и} \quad B_1B = y_2.$$

Итак,

$$AC = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1,$$

$$CB = -y_1 + y_2 = y_2 - y_1.$$

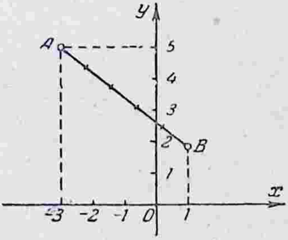
После замены AC и CB в равенстве (1) их значениями получим ту же формулу (3).

Пример. Найти расстояние между точками $A(-3;\ 5)$ и $B(1;\ 2)$.

Решение. По условию $x_1 = -3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$. Подставив эти координаты в формулу (3), получим:

$$AB = \sqrt{[1-(-3)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Решим тот же пример графически. Для этого построим данные точки A и B (черт. 5) и, измерив отрезок AB, найдем $AB = 5$.



Черт. 5.

Если одной из точек будет начало координат $O(0;\ 0)$, а другой $M(x;\ y)$, то формула (3) примет вид

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Упражнения

1. Найти расстояние точки $M(6; -8)$ от начала координат.

2. Найти расстояние между точками: 1) $A(14; 12)$ и $B(8; 4)$, 2) $M(-2; 4)$ и $N(2; 1)$, 3) $C(0; 4)$ и $D(3; 0)$.

3. Найти аналитически и графически длину отрезка, соединяющего точки $A(-10; -10)$ и $B(2; -1)$.

4. Найти длины сторон треугольника с вершинами $A(3; 2)$, $B(-1; -1)$ и $C(11; -6)$.

5. Показать, что треугольник с вершинами $A(-5; 2)$, $B(3; 6)$ и $C(4; -6)$ равнобедренный.

6. Показать, что треугольник с вершинами $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ и $C(-1; 4)$ прямоугольный.

7. На оси абсцисс найти точку A, удаленную от точки $B(4; 6)$ на 10 единиц. Пояснить графически, почему получаются два решения.

8. Даны две вершины равностороннего треугольника $O(0; 0)$ и $A(2\sqrt{3}; 0)$. Найти третью вершину B.

9. Найти точку, равноудаленную от точек $O(0; 0)$, $A(-4; 0)$ и $B(0; 8)$.

10. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(10; 8)$ и $B(-6; 4)$.

11. Найти точку, удаленную на 10 единиц и от оси Ox и от точки $A(-5; 2)$.

12. Найти точку, находящуюся на равных расстояниях от осей координат и от точки $A(1; 2)$.

§ 4. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (черт. 6). Требуется найти точку $M(x; y)$, делящую отрезок AB в отношении:

$$AM : MB = m : n\text{*)}.$$

Опустим из точек A, M и B перпендикуляры AA_1, MM_1 и BB_1 на ось Ox и проведем прямые $AC \parallel Ox$ и $MD \parallel Ox$. Из подобия треугольников AMC и MBD найдем:

$$\frac{AC}{MD} = \frac{CM}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

---

*) Отношение $\frac{m}{n}$ имеет положительное значение, так как точка M находится внутри отрезка AB. В ... ае, есл... M расположена на продолжении отрезка ... чи... отрицательное значение (см. Прива... геометрия, 1958, гл. I, § 6).

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1M_1 = OM_1 - OA_1 = x - x_1, \\ MD &= M_1B_1 = OB_1 - OM_1 = x_2 - x, \\ CM &= M_1M - M_1C = M_1M - A_1A = y - y_1, \\ DB &= B_1B - B_1D = B_1B - M_1M = y_2 - y. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ив (2) в (1), получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}. \quad (3)$$

краткости положим $\frac{m}{n} = \lambda$. Тогда из равенств (3) два уравнения:

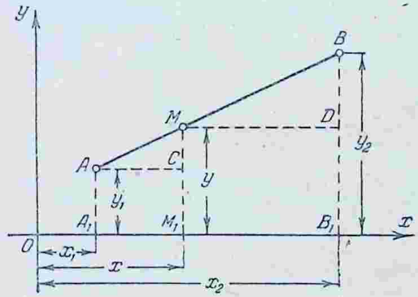
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad (4)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda. \quad (5)$$

уравнения (4) и (5) относительно x и y, получим:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

улы (6) служат для определения координат точки делящей отрезок между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ ении $m : n = \lambda$.



Черт. 6.

но показать, что формулы (6) справедливы для любого ия точек A и B на плоскости.

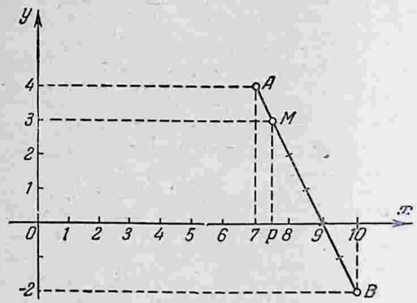
В частном случае, при делении отрезка AB пополам, т. е. в отношении $1:1$, получим $\lambda = 1:1 = 1$, и поэтому

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Если в формулах (6) заменить λ отношением $\frac{m}{n}$, то получим:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}. \tag{8}$$

Формулы (8) часто применяются в механике для определения положения центра тяжести однородного тела или отыскания центра параллельных сил.



Черт. 7.

Пример. Даны точки $A(7;\ 4)$ и $B(10;\ -2)$. Точка M делит отрезок AB в отношении $AM : MB = 0{,}2$. Найти точку M.

Решение. По условию $x_1 = 7$, $y_1 = 4$, $x_2 = 10$, $y_2 = -2$, $\lambda = 0{,}2$. Подставив эти данные в формулы (6), получим:

$$x = \frac{7 + 0{,}2 \cdot 10}{1 + 0{,}2} = \frac{9}{1{,}2} = 7{,}5,$$

$$y = \frac{4 + 0{,}2\,(-2)}{1 + 0{,}2} = \frac{3{,}6}{1{,}2} = 3.$$

Итак, искомая точка будет $M(7{,}5;\ 3)$.

Решим тот же пример графически. Для этого построим точки A и B (черт. 7) и разделим отрезок AB на шесть равных частей. Отложив одну такую часть от точки A, получим точку M, которая и разделит AB в отношении $1:5=0{,}2$. Измерив отрезки OP и PM, найдем координаты точки M:

$$OP=x=7{,}5; \quad PM=y=3.$$

Упражнения

1. Определить координаты середины отрезка, соединяющего две точки A и B.

1) $A(3;\ 5)$ и $B(7;\ 9)$, 2) $A(0;\ -12)$ и $B(8;\ 0)$.

2. Даны координаты четырех вершин параллелограмма:

$$A(-1;\ -1),\quad B(1;\ 1),\quad C(2;\ -1)\quad \text{и}\quad D(0;\ -3).$$

Найти длины диагоналей AC и BD, а также точку их пересечения.

3. Даны координаты трех вершин треугольника ABC:

$$A(3;\ 7),\quad B(5;\ 2)\quad \text{и}\quad C(-1;\ 3).$$

Найти длину медианы, проведенной из вершины B.

4. Найти конец B отрезка AB, если дано: начало его $A(7;\ -4)$ и середина $C(-1;\ 3)$.

5. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(4;\ 2)$ и $B(5;\ 7)$ и точка пересечения диагоналей $M\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$. Найти остальные его вершины.

6. На отрезке, соединяющем точки $A(6;\ 4)$ и $B(1;\ 9)$, лежит точка M, делящая данный отрезок так, что $AM:MB=2:3$. Найти точку M. Дать аналитическое и графическое решения.

7. Найти точки, делящие отрезок между точками $M(-3;\ -7)$ и $N(10;\ 2)$ на три равные части.

8. Точка $C(-2;\ 1)$ делит отрезок AB в отношении $AC:CB=2$. Найти координаты конца B отрезка, если начало его A имеет координаты $(10;\ 5)$.

9. В точке $A(2;\ 5)$ сосредоточена масса 2 *кг*, в точке $B(12;\ 0)$ — масса 3 *кг*. Найти центр этих масс.

10. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника, зная координаты вершин $A(1;\ 4)$, $B(-5;\ 0)$ и $C(-2;\ -1)$.

11. Даны вершины треугольной однородной пластинки $A(4;\ -2)$, $B(1;\ 5)$ и $C(-2;\ 0)$. Найти центр тяжести этой пластинки.

12. Найти центр тяжести треугольной однородной пластинки, вершины которой лежат в точках $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$.

13. Даны координаты двух вершин треугольника $A(0;\ 5)$, $B(5;\ 3)$ и точка пересечения его медиан $M(1;\ 3)$. Найти координаты третьей вершины треугольника.

ГЛАВА II

ЛИНИИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

§ 5. Постоянные и переменные величины. В практической деятельности, в технике, при исследовании какого-либо процесса мы встречаемся с величинами двух родов: постоянными и переменными.

Постоянной величиной называется такая, которая при изучении какого-либо процесса не меняет своего значения. Например, длина радиуса одной и той же окружности, температура кипения чистой воды при постоянном давлении — величины постоянные.

Постоянные величины принято обозначать первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d и т. д.

Переменной величиной называется такая, которая в условиях изучаемого процесса меняет свое значение. Например, периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при увеличении числа его сторон, длина металлического стержня при его нагревании — величины переменные.

Переменные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита: x, y, z, а также t, u, v, w.

Часто бывает, что одна и та же величина при одних условиях является постоянной, при других — переменной. Например, в правильном вписанном в окружность многоугольнике апофема — величина постоянная; при неограниченном удвоении числа сторон этого многоугольника апофема становится величиной переменной.

Среди постоянных величин имеются, однако, и такие, которые сохраняют свое значение при любых условиях; они называются *абсолютными постоянными*. Например, сумма внутренних углов треугольника, отношение длины окружности к диаметру.

§ 6. Функциональная зависимость между переменными величинами. Переменные величины в математике играют важную роль: они служат средством изучения явлений природы и технических процессов. При этом используются переменные величины не в отрыве друг от друга, а в их взаимной связи, в определенной зависимости между ними. Рассмотрим случай зависимости двух переменных величин между собой.

Две переменные величины могут быть взаимосвязаны так, что каждому данному значению одной из них соответствует вполне определенное значение другой. Возьмем, например, уравнение

$$S = 4{,}9t^2, \tag{1}$$

в котором S означает расстояние, пройденное падающим телом, а t — время падения. Дадим времени t какое-либо числовое значение, тогда величина пройденного расстояния S получит соответствующее значение; например,

если $t = 2$, то $S = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$,

„ $t = 3$, „ $S = 4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1$,

„ $t = 4$, „ $S = 4{,}9 \cdot 4^2 = 78{,}4$ и т. д.

Переменная величина t, которой мы давали произвольные значения, называется *независимой переменной* или *аргументом*; другая же переменная S, изменяющаяся в зависимости от изменения t, называется *зависимой переменной* или *функцией*. Связь между этими переменными носит название *функциональной зависимости*.

Следует отметить, что хотя аргументу мы даем произвольные значения, однако эти значения выбираются только такими, которые допускаются условиями задачи. Так, в разобранном примере время t может принимать только положительные значения или нуль, ибо время, выраженное отрицательным числом, здесь смысла не имеет.

Заметим также, что выбор независимой переменной диктуется условиями задачи. Если, например, нас интересует время, в течение которого тело прошло то или иное расстояние, то в уравнении (1) мы должны давать S числовые значения, которым будут соответствовать определенные значения t; при этом условии S явится уже аргументом, а t — функцией. В таком случае для удобства вычисления функции t уравнение (1) следует переписать так:

$$t=\sqrt{\frac{S}{4,9}}.$$

Определение. *Переменная величина y называется функцией переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.*

Функция, определяемая таким образом, называется *однозначной*.

В математике рассматриваются и такие функции, которые имеют несколько значений, соответствующих одному значению аргумента, например $y=\pm\sqrt{x^2-1}$, $y=\mathrm{Arctg}\,x$ и т. п. Такого рода функции, называемые *многозначными*, в нашем курсе рассматриваться не будут.

Пример 1. Площадь круга

$$S=\pi r^2.$$

Каждому значению r в этом равенстве соответствует определенное значение S; следовательно, площадь круга есть функция радиуса, а само равенство выражает функциональную зависимость между этими переменными.

Пример 2. Путь, пройденный телом в прямолинейном движении с постоянной скоростью v,

$$S=vt.$$

Здесь путь S получает определенное значение, соответствующее значению t; поэтому S — функция времени t.

Пример 3. Согласно закону Бойля — Мариотта давление p и объем v газа связаны формулой:

$$p=\frac{c}{v},$$

где c — постоянная величина для данной массы и температуры газа. С изменением объема v изменяется и давление p; следовательно, давление p газа есть функция его объема v.

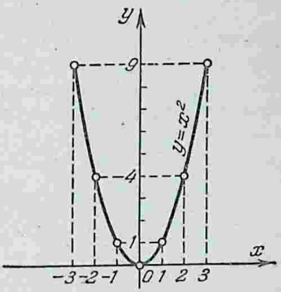
§ 7. Линии и их уравнения. Из курса алгебры известно, что по уравнению, определяющему функцию, можно построить линию, называемую *графиком функции*.

Пусть, например, дано уравнение $y=x^2$, определяющее y как функцию x.

Составим таблицу значений x и соответствующих значений y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Каждой полученной в этой таблице паре значений x и y соответствует точка плоскости. Построив эти точки (черт. 8) и соединив их плавной линией, мы получим график функции $y=x^2$. Этот график, как видно, представляет линию, все точки которой обладают одинаковым свойством, а именно: ордината каждой из них равна квадрату соответствующей абсциссы. Линия, все точки которой обладают одним и тем же свойством, называется *геометрическим местом* таких *точек*.



Черт. 8.

Наш пример показывает, что *уравнению с переменными x и y соответствует на плоскости некоторая линия как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Обратно, *линии на плоскости, представляющей геометрическое место точек, соответствует некоторое уравнение с переменными x и y.* Покажем это на примере.

Пусть дана на плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5 (черт. 9). Из элементарного курса геометрии известно, что эта окружность есть геометрическое место точек, удаленных от центра на 5 единиц. Возьмем на окружности произвольную точку $M(x; y)$. По условию, $OM=5$; с другой стороны, по формуле (5) § 3

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно, для любой точки нашей окружности должно быть

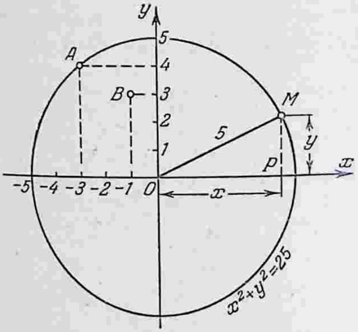
$$\sqrt{x^2+y^2}=5,$$

или

$$x^2 + y^2 = 25. \qquad (1)$$

Итак, окружности с радиусом, равным 5, и с центром в начале координат соответствует уравнение (1).

Уравнение (1) вполне определяет данную окружность, а потому оно называется *уравнением* этой *окружности*.



Черт. 9.

Имея уравнение (1) окружности, можно узнать, лежат ли на ней какие-нибудь данные точки, например $A(-3;\,4)$ и $B(-1;\,3)$. Для этого нужно проверить, удовлетворяют ли координаты точек A и B уравнению (1). Подставив их в уравнение (1) на место x и y, получим:

для точки A:

$$(-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

для точки B:

$$(-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 \neq 25.$$

Координаты точки A удовлетворяют уравнению (1), значит, точка A лежит на данной окружности; координаты же точки B не удовлетворяют этому уравнению, значит, точка B на этой окружности не лежит (черт. 9).

Определение. *Уравнением линии называется уравнение с переменными x и y, которому удовлетворяют коор-*

динаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на линии.

Переменные x и y, входящие в уравнение линии, называются *текущими координатами.*

Таким образом мы установили, что между линиями и их уравнениями существует связь, поэтому принято говорить:

«дана линия» вместо «дано уравнение линии»,

«найти линию» вместо «найти уравнение линии».

Установленная выше связь между линиями и их уравнениями позволяет изучать свойства линий путем анализа уравнений, соответствующих этим линиям. Отсюда и название изучаемого нами предмета — *аналитическая геометрия.*

Пример 1. Лежит ли точка $A(-2; 4)$ на линии $y=x^2$?

Решение. Подставив вместо x и y в данное уравнение координаты точки $A(-2; 4)$, получим тождество:

$$4=(-2)^2=4.$$

Следовательно, точка A лежит на данной линии.

Пример 2. Дана линия $y=-3x+1$ и точка A на ней с абсциссой, равной -1. Определить ординату точки A.

Решение. Так как точка A лежит на данной линии, то ее координаты должны удовлетворять данному уравнению. Одна координата $x=-1$. Чтобы найти вторую, т. е. y, мы подставим в уравнение вместо x его значение. Получим:

$$y=-3(-1)+1=4.$$

Итак, ордината точки A равна 4.

Упражнения

1. Дана линия $y=\frac{1}{2}x+2$. Узнать, лежат ли на ней точки $A(2; 3)$, $B(3; 3)$ и $C(4; 4)$?

2. На линии $4x-5y=8$ лежат точки $A(2; y)$ и $B(x; 4)$. Найти неизвестную координату каждой точки.

3. Написать уравнение линии, все точки которой одинаково удалены от осей координат. Построить эту линию.

4. Ординаты любой точки некоторой линии в 4 раза больше ее абсциссы. Написать уравнение этой линии и построить ее.

5. Написать уравнение линии, все точки которой удалены от точки $O(0; 0)$ на одинаковое расстояние, равное 2. Какой вид имеет эта линия?

6. Написать уравнение линии, все точки которой удалены от точки $M(2; -3)$ на одинаковое расстояние, равное 4.

7. Точки некоторой линии одинаково удалены от двух точек $A(-2; 1)$ и $B(-1; -3)$. Написать уравнение этой линии.

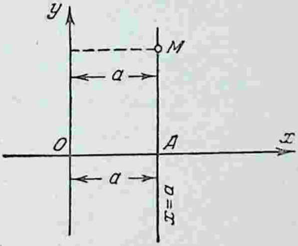
8. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$ так, что ее расстояние от оси Ox остается все время равным расстоянию ее от точки $F(0; -2)$.

9. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе от точки $A(1; 0)$, чем от точки $B(4; 0)$.

ГЛАВА III

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 8. Уравнения прямых, параллельных осям координат. Возьмем прямую линию, параллельную оси Oy и проходящую на расстоянии a от неё (черт. 10).



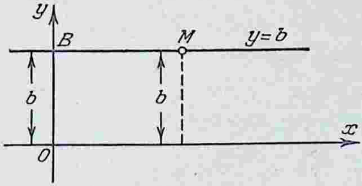
Черт. 10.

Все точки этой прямой одинаково удалены от оси ординат на расстояние, равное a. Следовательно, для каждой точки прямой AM абсцисса одна и та же, а именно:

$$x = a, \qquad (1)$$

ордината же различна. Таким образом, уравнение (1) вполне определяет прямую, параллельную оси Oy, а потому оно является ее *уравнением*.

Возьмем прямую, параллельную оси Ox, на расстоянии,



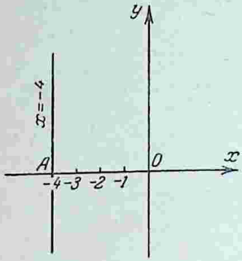
Черт. 11.

равном b от нее (черт. 11). Все точки этой прямой одинаково удалены от оси Ox на расстояние, равное b, т. е.

любая точка прямой BM имеет постоянную ординату, а именно:

$$y = b, \tag{2}$$

абсциссу же различную. Как видно, уравнение (2) вполне определяет прямую, параллельную оси Ox, а потому оно является ее *уравнением.*



Черт. 12.

По уравнениям (1) и (2) можно построить соответствующие им прямые. Пусть, например, дана прямая $x = -4$. Отложив на оси Ox отрезок $OA = -4$ (черт. 12) и проведя через точку A прямую, параллельную оси Oy, получим искомую прямую.

§ 9. Урав[...] коор-динат. Возьм[...] пря-мой, паралле[...]:

и станем в нем уменьшать абсолютну[...] го прямая, определяемая этим уравнением, [...] к оси Oy, оставаясь [...]ей пара[...] сольется с ней. Урав[...]

0

является *уравнени*[...]

Если же в ур[...]

b

прямой, паралле[...] величину b, то [...] оставаясь ей [...] Таким образом [...]

будет *уравне*[...]

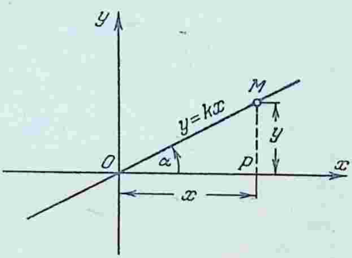
Упражнения

Построить прямые:

1) $x=3$, 2) $x=-5$, 3) $y=3$, 4) $y=-2$.

Іаписать уравнение прямой, параллельной оси Ox и отсекаю- оси Oy отрезок, равный -5.
Іаписать уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекаю- оси Ox отрезок, равный -2.
Составить уравнение прямой, проходящей через точку 2) и параллельной оси Ox.
Составить уравнение прямой, параллельной оси Oy и прохо- через точку $A(-3;\ -1)$.
Сторона квадрата равна 12. Написать уравнения всех его если за оси координат принять прямые, параллельные его м и проходящие через центр квадрата.
Стороны прямоугольника, равные 6 и 8, совпадают с осями ат. Написать уравнения сторон этого прямоугольника для когда он расположен в первом координатном углу.

0. Уравнение прямой, проходящей через начало нат. Проведем прямую через начало координат под α ($\alpha \neq 90°$) к оси Ox (черт. 13). Принято положи-



Черт. 13.

й угол α отсчитывать от положительного направления цисс в сторону, противоположную движению часовой (черт. 13), а отрицательный — по часовой стрелке. ьмем на проведенной прямой произвольную точку). Опустив перпендикуляр MP на ось Ox, получим гольный треугольник OMP, из которого найдем:

$$PM = OP \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

Но

$$OP = x \quad \text{и} \quad PM = y,$$

поэтому равенство (1) перепишется так:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Положим

$$\operatorname{tg} \alpha = k, \tag{2}$$

тогда получим:

$$y = kx. \tag{3}$$

Координаты любой точки прямой OM удовлетворяют полученному уравнению; можно показать, что координаты любой точки, не лежащей на прямой OM, не удовлетворяют ему; поэтому оно является *уравнением прямой* OM. Итак,

$$y = kx$$

есть *уравнение прямой, проходящей через начало координат.* В нем x и y — *текущие координаты*, а k — *угловой коэффициент.*

Определение. *Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона этой прямой к положительному направлению оси* Ox.

Величина k может быть как положительной, так и отрицательной. Если угол α острый, то тангенс его имеет положительное значение; если же угол α тупой, — то отрицательное. Поэтому величина k в уравнении прямой будет положительной, если α — острый угол, и отрицательной, если тупой.

Заметим, что при $\alpha = 90^\circ$ углового коэффициента не существует, так как $\operatorname{tg} 90^\circ$ не имеет числового значения.

Зная угловой коэффициент прямой $y = kx$, можно определить ее положение.

Пусть требуется построить прямую $y = 2x$.

Для этого найдем угол α из условия

$$k = \operatorname{tg} \alpha = 2,$$

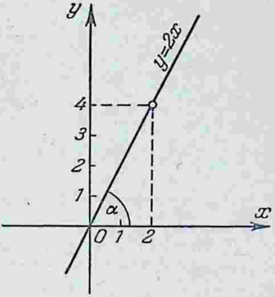
откуда

$$\alpha = 63^\circ 26'.$$

Построив при точке O найденный угол, мы и получим искомую прямую (черт. 14).

Построение этой прямой можно провести и проще. Известно, что положение прямой определяется двумя точками, поэтому для решения задачи нужно знать их координаты. В нашем же случае достаточно определить координаты одной точки, так как вторая (начало координат) нам известна. Для этого дадим x произвольное значение, например $x=2$, тогда из уравнения прямой найдем:

$$y = 2 \cdot 2 = 4.$$



Черт. 14.

Значения $x=2$ и $y=4$ и будут координатами точки, лежащей на данной прямой. Построив эту точку, проведем через нее и начало координат прямую линию (черт. 14).

Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с положительным направлением оси Ox один из следующих углов:

$$1)\ 45°,\quad 2)\ 30°,\quad 3)\ 135°,\quad 4)\ 0°,\quad 5)\ 180°.$$

2. Прямая задана уравнением $y = kx$. Каково будет положение прямой при 1) $k = 0$, 2) $k = 1$, 3) $k = -1$?

3. Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонены следующие прямые:

$$1)\ y = \sqrt{3}\,x,\quad 2)\ y = \frac{2}{3}x,\quad 3)\ y = -2x?$$

4. Построить прямые: 1) $y = 2x$, 2) $y = \frac{1}{2}x$, 3) $y = -2x$, 4) $y = -\frac{1}{2}x$.

5. Дана прямая $y = 3x$. Лежат ли на ней точки $A(1;\ 3)$, $B(2;\ 5)$, $C\left(-\frac{1}{3};\ -1\right)$?

6. На какой из прямых $y = 4x$, $y = -3x$ и $y = 2x$ лежит точка $A(-2;\ -4)$?

7. Дана прямая $y=1{,}5x$ и точки на ней $A(x;\ 6)$ и $B(-2;\ y)$. Найти неизвестные координаты этих точек.

8. Прямая $y=kx$ проходит через точку $A(-1;\ 5)$. Найти ее угловой коэффициент.

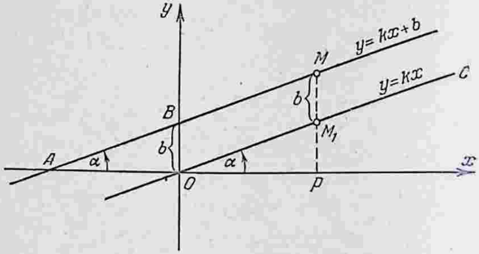
9. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(2;\ -4)$.

10. Вершина острого угла равнобедренного прямоугольного треугольника совпадает с началом координат, а катет, равный 10, — с положительным направлением оси Ox. Найти уравнения его сторон.

11. Построить точки $A(-6;\ 0)$ и $B(0;\ 3)$ и прямоугольник $OACB$. Написать уравнения сторон прямоугольника и его диагонали OC.

12. Сила приложена к началу координат и составляющие ее по осям Ox и Oy соответственно равны 5 и -2. Написать уравнение прямой, по которой направлена сила, и построить эту прямую.

§ 11. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой. Пусть дана прямая OC, проходящая через начало координат под углом α к положительному



Черт. 15.

направлению оси Ox (черт. 15). Ее уравнение имеет вид

$$y=kx,$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$ (§ 10).

Проведем прямую $AB\parallel OC$, отсекающую на оси Oy отрезок $OB=b$. Прямая AB составляет с положительным направлением оси Ox тот же угол α. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка прямой AB. Из черт. 15 найдем:

$$y=PM=PM_1+b. \tag{1}$$

Но

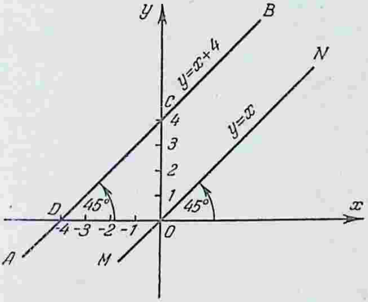
$$PM_1=kx;$$

подставив значение PM_1 в равенство (1), получим уравнение прямой AB в виде

$$y = kx + b, \qquad (2)$$

где k — *угловой коэффициент*, а b называется *начальной ординатой*.

Заметим, что прямая $y = kx + b$ получается смещением всех точек прямой $y = kx$ (черт. 15) на отрезок b вверх (при положительном b) и вниз (при отрицательном b).



Черт. 16.

Уравнение $y = kx$, определяющее прямую, проходящую через начало координат, является частным случаем уравнения (2) при $b = 0$.

Зная угловой коэффициент k и начальную ординату b, можно определить положение прямой. Пусть, например, требуется построить прямую

$$y = x + 4.$$

Из данного уравнения имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,$$

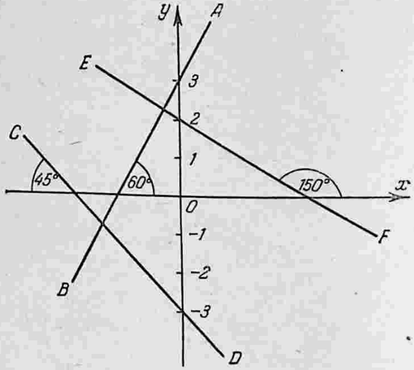
откуда

$$\alpha = 45°.$$

Проведем через начало координат прямую MN под углом в 45° к положительному направлению оси Ox (черт. 16).

Но прямая $y = x + 4$, как видно из уравнения ее, пересекает ось Oy на расстоянии OC, равном 4 единицам масштаба от начала координат. Поэтому прямая AB, проведенная через точку C параллельно прямой MN, и будет искомой.

Однако проще построить указанную прямую по двум ее точкам. Удобнее для этого брать точки пересечения прямой с осями координат. Одна из них — точка C пересечения прямой с осью Oy — дается самим уравнением, а именно $C(0; 4)$. Для нахождения точки D пересечения этой прямой с осью Ox положим в данном уравнении $y=0$, получим $x=-4$; значит, прямая пересекает ось Ox в точке $D(-4; 0)$. Строим точки C и D и проводим через них искомую прямую.



Черт. 17.

Пример. Найти уравнения прямых AB, CD и EF, изображенных на черт. 17.

Решение. Чтобы написать уравнения данных прямых, нужно определить величины k и b, а затем подставить их значения в уравнение $y=kx+b$.

Для прямой AB $k=\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3},\ b=3$;

» » CD $k=\operatorname{tg}(180°-45°)=\operatorname{tg} 135°=-1,$
$b=-3$;

» » EF $k=\operatorname{tg} 150°=-\operatorname{tg} 30°=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ b=2.$

Следовательно, уравнения данных прямых будут:

$$AB: \quad y=\sqrt{3}x+3,$$
$$CD: \quad y=-x-3,$$
$$EF: \quad y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2.$$

Упражнения

1. Построить прямые

$$1)\ y=3x+2, \qquad 3)\ y=-3x+2,$$
$$2)\ y=3x-2, \qquad 4)\ y=-3x-2.$$

2. На какой из прямых

$$1)\ y=-3x+1, \quad 2)\ y=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}, \quad 3)\ y=-8x-10$$

лежит точка $A(-1;\ -2)$?

3. Дана прямая $y=5x-2$ и точка на ней с абсциссой, равной 1. Определить ее ординату.

4. На прямой $y=-2x+1$ лежит точка, ордината которой равна 5. Найти ее абсциссу.

5. Даны прямые: 1) $y=4x-2$, 2) $y=-3x-6$. Найти точки пересечения этих прямых с осями координат.

6. Составить уравнение прямой, образующей с положительным направлением оси Ox угол в $135°$ и отсекающей на оси Oy отрезок, равный -5.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A под углом α к положительному направлению оси Ox, если дано: 1) $A(0;\ 2)$, $\alpha=45°$; 2) $A(0;\ -3)$, $\alpha=135°$; 3) $A(0;\ 4)$, $\alpha=150°$.

8. Найти углы, образуемые с положительным направлением оси Ox прямыми: 1) $y=\sqrt{3}x+2$; 2) $y=-x-3$; 3) $y=\frac{1}{2}x+5$.

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол:

$$1)\ \alpha=0°, \qquad 2)\ \alpha=90°, \qquad 3)\ \alpha=180°.$$

10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ -3)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол, равный $\operatorname{arctg}(-2)$.

11. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку A и отсекающей на оси Oy отрезок, равный b, если дано:

$$1)\ A(3;\ 4),\ b=-2; \qquad 2)\ A(-2;\ 5),\ b=5.$$

12. Две стороны квадрата совпадают с положительными направлениями осей координат. Написать уравнения диагоналей квадрата, если сторона его равна 12.

13. Написать уравнения сторон квадрата, диагонали которого служат осями координат. Длина стороны квадрата равна 4.

14. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найти уравнения его сторон и диагоналей, если одна из его вершин лежит в начале координат, а диагональ совпадает с положительным направлением оси Oy.

§ 12. Общее уравнение прямой. В предыдущих параграфах были выведены следующие виды уравнения прямой:

уравнение прямой, параллельной оси Oy:

$$x = a, \text{ где } a \neq 0, \tag{1}$$

уравнение прямой, параллельной оси Ox:

$$y = b, \text{ где } b \neq 0, \tag{2}$$

уравнение оси Oy:

$$x = 0, \tag{3}$$

уравнение оси Ox:

$$y = 0, \tag{4}$$

уравнение прямой, проходящей через начало координат:

$$y = kx, \tag{5}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой:

$$y = kx + b. \tag{6}$$

Уравнения (1)—(6) исчерпывают все возможные положения прямой, поэтому можно сказать, что

всякая прямая линия определяется уравнением первой степени относительно текущих координат.

Покажем теперь, что указанные виды уравнения прямой можно получить из уравнения

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

при некоторых частных значениях коэффициентов A, B и C.

I. Если $B = 0$, то уравнение (7) обратится в следующее:

$$Ax + C = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Положив

$$-\frac{C}{A} = a,$$

получим:

$$x = a.$$

Уравнение $Ax+C=0$ есть уравнение прямой, параллельной оси Oy.

II. Если $A=0$, то

$$By+C=0,$$

отсюда

$$y=-\frac{C}{B}.$$

Положив

$$-\frac{C}{B}=b,$$

получим:

$$y=b.$$

Уравнение $By+C=0$ определяет прямую, параллельную оси Ox.

III. Если $B=0$ и $C=0$, то

$$Ax=0,$$

отсюда

$$x=0.$$

IV. Если $A=0$ и $C=0$, то

$$By=0,$$

отсюда

$$y=0,$$

V. Если $C=0$, то

$$Ax+By=0,$$

отсюда

$$y=-\frac{A}{B}x.$$

Положим

$$-\frac{A}{B}=k,$$

тогда

$$y=kx.$$

Уравнение $Ax+By=0$ определяет прямую, проходящую через начало координат.

VI. Если ни один из коэффициентов уравнения (7) не равен нулю, то и в этом случае его можно преобразовать в знакомую нам форму уравнения прямой. Найдем из уравнения (7) значение y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Положив

$$-\frac{A}{B}=k \tag{8}$$

и

$$-\frac{C}{B}=b,$$

можем написать:

$$y=kx+b.$$

Следовательно, уравнение

$$Ax+By+C=0$$

включает в себя все рассмотренные нами ранее уравнения прямой; поэтому оно называется *общим уравнением прямой.*

Итак, *всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+C=0$$

при любых значениях коэффициентов A, B и C, исключая одновременное равенство A и B нулю, определяет прямую линию.

Пример 1. Построить прямую $2x-5y+10=0$.

Решение. Проще всего построить прямую по двум ее точкам пересечения с осями координат. Положив в данном уравнении $y=0$, получим $x=-5$; координаты $(-5;\ 0)$ и будут определять положение точки пересечения прямой с осью Ox. Для нахождения точки пересечения прямой с осью Oy положим в том же уравнении $x=0$, тогда найдем $y=2$; координаты искомой точки будут $(0;\ 2)$.

Построив эти точки, проводим через них прямую $2x-5y+10=0$ (черт. 18).

Пример 2. Найти угловой коэффициент и начальную ординату прямой $4x+6y-3=0$.

Решение. Преобразуем это уравнение к виду $y=kx+b$; для этого находим:

$$6y=-4x+3,$$

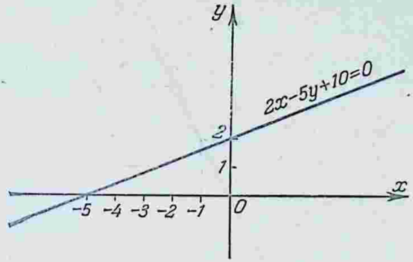
отсюда

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}.$$

Сравнив полученное уравнение с уравнением $y=kx+b$, найдем:

$$k=-\frac{2}{3},\quad b=\frac{1}{2}.$$

Угловой коэффициент можно найти и из равенства (8). Для этого, как видно, нужно *коэффициент при x общего уравнения прямой разделить на коэффициент при y и частное*



Черт. 18.

взять с противоположным знаком. Таким образом, в данном примере

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Упражнения

1. Построить прямые:

1) $3x - 4y + 12 = 0$, 2) $4x + 5y + 20 = 0$, 3) $3x - 4y = 0$.

2. Даны прямые $5x - 3y + 2 = 0$ и $4x + 5y = 0$. Какая из них проходит через начало координат?

3. Даны прямые:

$$1)\ 6x - 3y + 10 = 0, \quad 2)\ 5x + 8y - 15 = 0.$$

Преобразовать их к виду $y = kx + b$.

4. Даны прямые:

$$1)\ y = -\frac{3}{4}x, \quad 2)\ y = \frac{2}{3}x - 4.$$

Представить данные уравнения в общем виде.

5. Определить угловые коэффициенты прямых:

$$1)\ 2x - 3y + 5 = 0, \quad 2)\ x + 2y = 0.$$

6. Найти начальную ординату прямых:

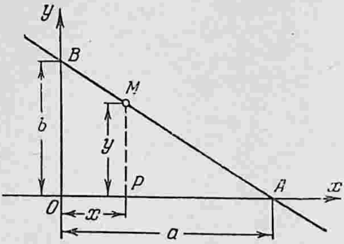
$$1)\ 2x - 9y - 6 = 0, \quad 2)\ 5x + 2y = 0.$$

7. Найти начальную ординату и угол наклона к положительному направлению оси Ox прямой $5x+6y-15=0$.

8. Показать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек $A(2;\ 4)$ и $B(-3;\ 1)$, есть прямая линия.

9. Показать, что геометрическое место точек, равноудаленных от любых двух точек, есть прямая линия.

§ 13. Уравнение прямой в отрезках. Как мы уже знаем, положение прямой определяется или двумя точками или одной точкой и углом наклона прямой к оси Ox. Если прямая не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит



Черт. 19.

через начало координат, то ее положение может быть определено и другими данными, например отрезками, которые она отсекает на осях. Выведем уравнение прямой для этого случая.

Пусть дана прямая, отсекающая на координатных осях отрезки $OA=a$ и $OB=b$ (черт. 19).

Возьмем на этой прямой произвольную точку $M(x;\ y)$ и проведем $MP\perp Ox$. Из подобия треугольников PMA и OBA имеем:

$$\frac{PM}{OB}=\frac{PA}{OA},$$

или

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}.$$

Разделив $a-x$ почленно на a, будем иметь:

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a},$$

откуда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

Можно показать, что координаты любой точки нашей прямой будут удовлетворять этому равенству, а потому его нужно рассматривать как *уравнение прямой AB*.

В уравнение (1) входят отрезки a и b, отсекаемые прямой на осях; поэтому оно называется *уравнением прямой в отрезках*.

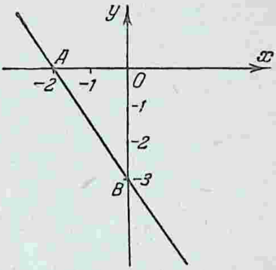
Величины a и b могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от того, в какую сторону от начала координат откладываются отрезки a и b.

Пусть, например, дана прямая AB (черт. 20). Здесь $a=-2$, $b=-3$; следовательно, уравнение прямой AB запишется в таком виде:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}=1,$$

или

$$-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1.$$



Черт. 20.

По уравнению вида (1) очень просто строится прямая. Для этого нужно только отложить на осях отрезки a и b, взятые из уравнения, и через их концы провести прямую.

Заметим, что уравнение в отрезках легко получается из общего уравнения прямой: $Ax+By+C=0$, если все коэффициенты общего уравнения отличны от нуля (иначе уравнение в отрезках не имеет смысла).

Упражнения

1. Построить прямые:

1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, 2) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$,

3) $-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$, 4) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

2. Прямая проходит через точки A и B:

1) $A(0; 2)$, $B(4; 0)$, 2) $A(-2; 0)$, $B(0; -1)$; 3) $A(0; 3)$, $B(-2; 0)$. Написать уравнение прямой в отрезках.

3. Определить длину отрезка прямой $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$, заключенного между точками пересечения прямой с осями координат.

4. Преобразовать следующие уравнения прямой в форму уравнения прямой в отрезках:

1) $2x+3y-6=0$, 2) $x-6y+6=0$, 3) $2x-y-1=0$.

5. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.

6. Диагонали ромба совпадают с осями координат. Определить площадь ромба, если одна из сторон его задана уравнением

$$\frac{x}{2,5}+\frac{y}{10}=1.$$

7. Две смежные вершины ромба лежат в точках $A(5; 0)$ и $B(0; 8)$. Написать уравнения в отрезках для всех его сторон, если диагонали ромба совпадают с осями координат.

8. Отрезок прямой, заключенный между осями координат, равен $3\sqrt{2}$ и наклонен к положительному направлению оси Ox под углом $135°$. Написать уравнение этой прямой в отрезках (два случая).

§ 14. Уравнение пучка прямых. Пусть прямая AB проходит через точку $M(x_1; y_1)$ и образует угол α с положительным направлением оси Ox (черт. 21). Составим для прямой AB уравнение вида

$$y=kx+b. \tag{1}$$

Для этого нужно найти величины k и b, определяющие прямую AB, а затем подставить в уравнение (1) их значения. Так как угол α дан, то величина k определится из равенства

$$k=\operatorname{tg}\alpha.$$

Для нахождения b воспользуемся тем, что точка M лежит на прямой (1) и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

Подставив в уравнение (1) вместо x и y их значения x_1 и y_1, а величину k полагая известной, получим:

$$y_1=kx_1+b,$$

откуда

$$b=y_1-kx_1.$$

Уравнение (1) можем теперь записать в виде

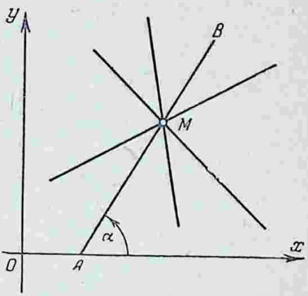
$$y = kx + y_1 - kx_1$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2)$$

Таково искомое уравнение прямой AB; в нем k имеет одно, вполне определенное значение.

Допустим, что через ту же точку $M(x_1; y_1)$ проходит несколько прямых; тогда угол α наклона этих прямых к оси Ox, а также множитель k в уравнении (2) будут иметь различные значения.



Черт. 21.

В таком случае уравнение (2) будет определять уже не одну прямую, проходящую через данную точку M, а множество прямых, пересекающихся в этой точке.

Совокупность всех прямых, проходящих через одну точку M, называется *пучком прямых* с *центром* в точке M. Таким образом, уравнение (2) с переменным k можно рассматривать как *уравнение пучка прямых*, проходящих через данную точку, исключая прямую, параллельную оси ординат (так как $\operatorname{tg} 90°$ не имеет числового значения) (черт. 21).

Чтобы выделить из этого пучка прямую, образующую заданный угол с осью Ox, нужно в уравнении (2) вместо k подставить его числовое значение. Пусть, например, пучок прямых проходит через точку $M(2; -5)$, тогда его уравнение будет:

$$y + 5 = k(x - 2). \qquad (3)$$

Выделим из этого пучка одну прямую, которая наклонена к положительному направлению оси Ox под углом $\alpha = 45°$; тогда

$$k = \operatorname{tg} 45° = 1,$$

и уравнение (3) обратится в следующее:

$$y+5=x-2,$$

или

$$x-y-7=0.$$

Упражнения

1. Дано уравнение пучка прямых $y+2=k(x-6)$. Найти координаты центра этого пучка прямых.

2. Дано уравнение пучка прямых $y-4=k(x+3)$. Проходят ли эти прямые через точку $M(-3;\ 4)$?

3. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(-6;\ -9)$.

4. Из пучка прямых, проходящих через точку $M(2;\ -7)$, одна прямая образует с положительным направлением оси Ox угол 60°, а другая — угол 150°. Написать уравнения этих прямых.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 8)$ и образующей с положительным направлением оси Ox один из углов: 45°, 30°, 135°, 180°.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(10;\ -2)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол, равный

$$1)\ \operatorname{arctg} 3, \qquad 2)\ \operatorname{arctg}(-2).$$

7. Высота равнобедренного треугольника совпадает с положительным направлением оси Oy, а основание — с осью Ox. Написать уравнения боковых сторон треугольника, если одна из них образует с положительным направлением оси Ox угол в 135°, а высота его равна 5.

8. Высота равностороннего треугольника, равная $6\sqrt{3}$, совпадает с положительным направлением оси Oy, а основание — с осью Ox. Написать уравнения боковых сторон треугольника.

9. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с основанием угол в 60°. За оси координат взяты бóльшее основание (ось Ox) и ось симметрии трапеции (ось Oy). Рассмотреть два случая.

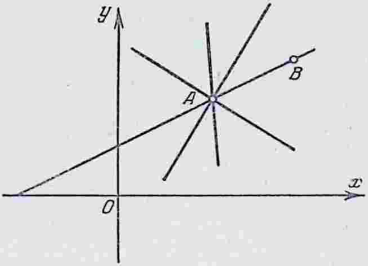
§ 15. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$; требуется найти уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Если взять одну точку, например A, то через нее можно провести пучок прямых, уравнение которого будет:

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{1}$$

где каждому значению k отвечает одна прямая.

Выделим из этого пучка прямую, которая проходит и через вторую точку B (черт. 22). Чтобы найти ее уравнение, необходимо определить угловой коэффициент. Для этого примем во внимание, что точка B лежит на искомой прямой, а потому ее координаты должны обращать уравнение (1)



Черт. 22.

в тождество при k, равном угловому коэффициенту этой прямой. Подставив в уравнение (1) вместо текущих координат x и y координаты точки B, получим:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

отсюда находим угловой коэффициент искомой прямой:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Уравнение (1) можно переписать так:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Преобразуем это уравнение, разделив обе части его на $y_2 - y_1$; получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{2}$$

где x и y — текущие координаты. Равенство (2) является уравнением прямой, проходящей через две данные точки. Это, как и уравнение в отрезках, частный случай общего уравнения прямой.

Если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, то формула (2) теряет смысл, так как делить на нуль нельзя. В этих случаях точки A и B лежат либо на прямой, параллельной оси Oy, либо на прямой, параллельной оси Ox. В первом случае уравнение прямой запишется в виде

$$x = x_1,$$

а во втором — в виде

$$y = y_1.$$

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$A(-4;\ 6) \text{ и } B(2;\ -3).$$

Решение. Имеем:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

и

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -3.$$

Подставим эти значения в уравнение (2); получим:

$$\frac{y-6}{-3-6} = \frac{x+4}{2+4},$$

или

$$\frac{y-6}{-9} = \frac{x+4}{6}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на -18, будем иметь:

$$2y - 12 = -3x - 12,$$

откуда

$$3x + 2y = 0.$$

Пример 2. Через две точки $A(3;\ 2)$ и $B(5;\ 2)$ проходит прямая. Написать ее уравнение.

Решение. Так как ординаты данных точек равны, то заключаем, что искомая прямая параллельна оси Ox, а потому ее уравнение будет $y = 2$.

Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки A и B, если даны:

1) $A(1;\ 2)$ и $B(4;\ 3)$,
2) $A(-2;\ 3)$ и $B(5;\ -3)$,
3) $A(0;\ 0)$ и $B(4;\ -1)$,
4) $A(-2;\ -3)$ и $B(-2;\ 5)$.

2. Даны вершины треугольника ABC:

$$A(3; -1), \quad B(4; 2) \quad \text{и} \quad C(-2; 0).$$

Написать уравнения его сторон.

3. На план участка нанесено положение двух вех, координаты которых в прямоугольной системе $M_1(30; 40)$, $M_2(50; 80)$. Найти угол наклона прямой M_1M_2 к положительному направлению оси абсцисс плана.

4. Определить отрезки, отсекаемые на координатных осях прямою, проходящей через две точки $A(2; 3)$ и $B(4; 1)$.

5. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(4; -2), \quad B(-1; 5) \quad \text{и} \quad C(-5; -3).$$

Написать уравнение медианы, проведенной из вершины A.

6. Дан треугольник с вершинами

$$A(2; 4), \quad B(0; 2) \quad \text{и} \quad C(4; -2).$$

Написать уравнение прямой, проходящей через середины сторон AC и BC треугольника.

7. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$:

$$A(-1; 2), \quad B(-2; -2) \quad \text{и} \quad C(5; -2).$$

Найти уравнения его диагоналей AC и BD.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$ и отсекающей на оси Ox отрезок, равный 5.

9. Точка, двигаясь прямолинейно, в некоторые моменты занимала положения $A(5; 2)$ и $B(-1; -2)$. Определить положение этой точки в момент нахождения ее на оси Ox.

§ 16. Угол между двумя прямыми. Пусть даны уравнения двух прямых:

$$y = k_1x + b_1,$$
$$y = k_2x + b_2,$$

где k_1, k_2, b_1 и b_2 имеют вполне определенные значения. Выведем формулу для определения угла между этими прямыми.

Обозначим углы, образуемые данными прямыми с положительным направлением оси Ox, через α_1 и α_2, а угол между этими прямыми через φ (черт. 23).

Угол α_2, как внешний угол треугольника ABC, будет равен сумме внутренних, с ним не смежных, т. е.

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi,$$

откуда

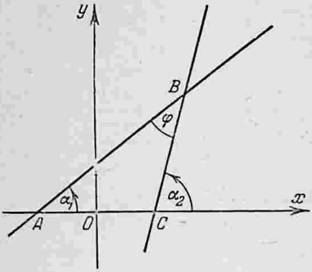
$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Если углы равны между собой, то и тангенсы их равны друг другу, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1).$$

Применяя формулу для тангенса разности двух углов, получим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}.$$



Черт. 23.

Но

$$\operatorname{tg}\alpha_1=k_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_2=k_2,$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (1)$$

Определив $\operatorname{tg}\varphi$ по формуле (1), можно найти и самый угол φ.

Пример. Определить угол между прямыми:

$$2x-3y+6=0$$

и

$$x+5y-2=0.$$

Решение. Из данных уравнений найдем угловые коэффициенты этих прямых [(8) § 12]:

$$k_1=\frac{2}{3} \text{ и } k_2=-\frac{1}{5}.$$

Согласно формуле (1) имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=-1,$$

откуда

$$\varphi=\operatorname{arctg}(-1)=135^\circ.$$

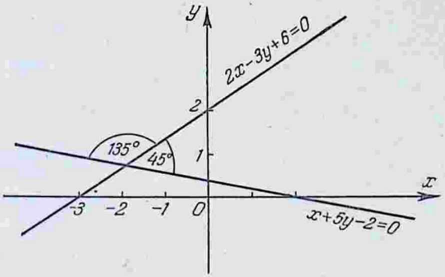
Полученный угол между прямыми тупой. Но если принять

$$k_1=-\frac{1}{5} \text{ и } k_2=\frac{2}{3},$$

то, вычисляя $\operatorname{tg}\varphi_1$ по той же формуле (1), получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{5}\right)}{1+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1,$$

откуда $\varphi_1=45^\circ$. Получился угол острый, смежный с ранее



Черт. 24.

найденным тупым углом (черт. 24). Первое и второе значение угла будет ответом на вопрос задачи.

Упражнения

1. Определить острый угол между прямыми:

1) $y=2x+3$ и $y=x-2$, 3) $\frac{y}{8}-\frac{x}{4}=1$ и $\frac{x}{2}+\frac{y}{0{,}8}=1$,

2) $3x-y+6=0$ и $x-y+4=0$, 4) $y+5=3x$ и $y-2=0$.

2. Найти угол между прямой $2x-3y+6=0$ и прямой, проходящей через точки A (4; —5) и B (—3; 2).

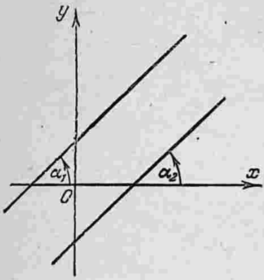
3. Под каким углом пересекаются прямые:

$$1)\ x-2y-2=0 \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2}x+3,$$

$$2)\ 3x+y-2=0 \quad \text{и} \quad x-3y+1=0?$$

4. Две прямые пересекаются в точке A (2; —1). Одна из них проходит через начало координат, другая же через точку B (5; 1). Найти острый угол между этими прямыми.

§ 17. Условие параллельности прямых. Если прямые параллельны между собой, то они образуют одинаковые углы α_1 и α_2 с положительным направлением оси Ox (черт. 25).



Черт. 25.

Из равенства углов α_1 и α_2 следует

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$$

или

$$k_1 = k_2.$$

Обратно, если $k_1 = k_2$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$, то

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

а это значит, что данные прямые параллельны.

Итак, *если прямые параллельны между собой, то их угловые коэффициенты равны (и наоборот).*

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(-2;\,6)$ и параллельной прямой $5x + 3y - 7 = 0$.

Решение. Через точку A проходит пучок прямых, среди которых находится искомая прямая. Следовательно, прежде всего пишем уравнение пучка прямых [(2) § 14], проходящих через точку A:

$$y - 6 = k(x + 2).$$

Затем находим из данного в задаче уравнения прямой ее угловой коэффициент; применяя равенство (8) § 12, получим:

$$k = -\frac{5}{3}.$$

Согласно условию параллельности угловой коэффициент искомой прямой тоже равен $-\frac{5}{3}$.

Подставим найденное значение $k = -\frac{5}{3}$ в уравнение пучка:

$$y - 6 = -\frac{5}{3}(x + 2).$$

Выполнив необходимые преобразования, получим искомое уравнение прямой:

$$5x + 3y - 8 = 0.$$

Упражнения

1. Параллельны ли прямые:

$$1)\ 2x + 3y - 7 = 0 \text{ и } 2x + 3y + 9 = 0,$$
$$2)\ y = 2x + 3 \text{ и } 4y - 8x = 1,$$
$$3)\ 3x - 5y = 0 \text{ и } 6x + 10y + 5 = 0?$$

2. Чему равно a в уравнении прямой $y = ax + 4$, которая параллельна прямой $2y - 3x - 5 = 0$.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A (2; 3) и параллельной прямой $y = 2x + 5$.

4. Прямая проходит через точку A (—2; —1) и параллельна прямой $2x - y = 5$. Написать ее уравнение.

5. Точка движется по прямой, параллельной данной $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$, и в некоторый момент времени проходит точку A (—1; 8). Найти уравнение прямой, по которой движется точка.

6. Даны точки A (3; 5) и B (—3; 4). Написать уравнение прямой, проходящей через точку C (—2; 1) параллельно AB.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A (2; 5) и параллельной прямой, на которой лежат точки B (—4; 3) и C (—4; 1).

8. Прямая, параллельная прямой $4x - 5y - 9 = 0$, пересекает ось Oy на расстоянии, равном 3 единицам масштаба вверх от начала координат. Написать уравнение этой прямой.

9. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок, равный 5, и параллельной прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

§ 18. Условие перпендикулярности прямых. Пусть две прямые взаимно перпендикулярны и образуют с положительным направлением оси Ox углы α_1 и α_2 (черт. 26).

В этом случае

$$\alpha_2 = 90° + \alpha_1,$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(90° + \alpha_1).$$

Но

$$\operatorname{tg}(90° + \alpha_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (1)$$

Обратно, если

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

то

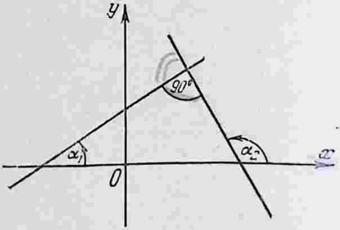
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1} = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha_1).$$

Отсюда

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1,$$

т. е. данные прямые взаимно перпендикулярны.

Таким образом, *если прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку (и наоборот).*



Черт. 26.

Так, например, если у одной прямой угловой коэффициент равен $\frac{2}{5}$, то у перпендикулярной ей прямой он равен $-\frac{5}{2}$.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 5)$ и перпендикулярной прямой $4x - 3y - 10 = 0$.

Решение. Через точку A проходит пучок прямых, среди которых находится и искомая прямая. Поэтому напишем сначала уравнение этого пучка

$$y - 5 = k(x + 3). \qquad (2)$$

Чтобы выделить из него нашу прямую, нужно найти ее угловой коэффициент k_1, связанный с угловым коэффициентом k_2 данной прямой равенством (1). Но $k_2 = \frac{4}{3}$; следовательно, $k_1 = -\frac{3}{4}$.

Подставив в уравнение (2) вместо k найденное его значение k_1, получим:

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 3).$$

Это и есть искомое уравнение прямой. Преобразовав его, найдем:

$$4y - 20 = -3x - 9,$$

или

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Упражнения

1. Перпендикулярны ли прямые

$$1)\ 3x - y - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x + 3y - 17 = 0,$$
$$2)\ 2x + 5y - 6 = 0 \quad \text{и} \quad 5x + 2y - 3 = 0?$$

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 7)$ перпендикулярно к прямой $3x - 2y - 8 = 0$.

3. Из точки $A(-2; -3)$ на прямую $x - 2y + 3 = 0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(-2; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

5. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок, равный 5, и перпендикулярной к прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

6. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(3; 4), \quad B(2; 5) \quad \text{и} \quad C(7; 6).$$

Написать уравнение высоты, опущенной на сторону AC.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки $A(4; 3)$ и $B(-2; 5)$, перпендикулярно к нему.

8. Противоположные вершины ромба лежат в точках $A(5; 7)$ и $C(3; 3)$. Написать уравнения его диагоналей.

§ 19. Пересечение прямых. Пусть даны две прямые, определяемые уравнениями:

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Требуется найти точку их пересечения.

Так как точка пересечения данных прямых есть их общая точка, то ее координаты должны удовлетворять как первому, так и второму уравнению, т. е. эти координаты должны быть общими корнями данных уравнений.

Чтобы найти эти корни, нужно, как известно из алгебры, *решить совместно данные уравнения*, рассматривая их как систему уравнений.

Пример 1. Найти точку пересечения прямых

$$2x+3y-12=0 \quad \text{и} \quad x-y-1=0.$$

Решение. Решим данные уравнения как систему. Умножив второе уравнение на 3 и сложив результат с первым уравнением, получим:

$$+\begin{array}{l} 2x+3y-12=0 \\ 3x-3y-\ \ 3=0 \\ \hline 5x \qquad\ \ -15=0, \end{array}$$

откуда

$$x=3.$$

Зная x, находим y, например, из второго уравнения:

$$y=x-1=3-1=2.$$

Пример 2. Найти точку пересечения прямых

$$2x-5y+8=0 \quad \text{и} \quad 4x-10y-3=0.$$

Решение. Умножив все члены первого уравнения на -2 и сложив полученное уравнение со вторым, найдем:

$$+\begin{array}{r} -4x+10y-16=0 \\ 4x-10y-\ \ 3=0 \\ \hline -19=0, \end{array}$$

что невозможно. Значит, данная система уравнений решений не имеет, а потому прямые, определяемые этими уравнениями, не имеют общих точек, т. е. данные прямые параллельны.

К этому же заключению можно прийти, сравнивая угловые коэффициенты данных прямых.

Упражнения

1. Найти координаты точки пересечения прямой $4x-3y-10=0$:

$$1) \text{ с осью } Ox, \quad 2) \text{ с осью } Oy.$$

2. Найти точку пересечения двух прямых:

$$1)\ 3x-2y-4=0 \quad \text{и} \quad x+3y-5=0;$$
$$2)\ x-5y+7=0 \quad \text{и} \quad 15y-3x-4=0.$$

3. Показать, что прямые $7x-9y+15=0$ и $13x+12y-20=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy.

4. Определить координаты вершин треугольника, если даны уравнения его сторон:

$$y=2x-1, \quad 2y-x=3, \quad 3y+2x-5=0.$$

5. Найти точку, в которой прямая, соединяющая точки $A(4;\ 1)$ и $B(-1;\ -4)$, пересекает ось абсцисс.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и через точку B, в которой пересекаются прямые

$$3x-y=0 \quad \text{и} \quad 2x+5y-17=0.$$

7. Через точку пересечения прямых

$$2x-y-3=0 \quad \text{и} \quad x-3y-4=0$$

проведена прямая, параллельная прямой $x+y=1$. Написать уравнение проведенной прямой.

8. Через точку пересечения прямых

$$x+2y+2=0 \quad \text{и} \quad 3x+4y+9=0$$

проведен перпендикуляр к прямой $2x+3y+6=0$. Написать уравнение этого перпендикуляра.

9. Даны уравнения сторон треугольника:

$$2x-5y=3, \quad x+3y=7 \quad \text{и} \quad 3x-2y+1=0.$$

Написать уравнение высоты, проведенной на сторону $2x-5y=3$.

10. Дан треугольник, уравнения сторон которого суть

$$3x+2y-5=0, \quad 3x-y-11=0, \quad 3x+y-1=0.$$

Написать уравнение перпендикуляра, восставленного к стороне $3x+2y-5=0$ в ее середине.

11. Диагонали ромба пересекаются в точке $M(5;\ 1)$. Уравнения одной из диагоналей и одной из сторон его соответственно

$$y-x+4=0 \quad \text{и} \quad 3y-x-6=0.$$

Найти координаты вершин ромба.

Смешанные задачи

1. Найти точки пересечения прямой $3x+4y=8$ с осями координат.

2. Показать, что прямые

$$4x+3y-5=0, \quad 3x-y+6=0 \quad \text{и} \quad 2x-y+5=0$$

проходят через одну точку.

3. Прямая, параллельная оси Ox и проходящая выше ее на расстоянии, равном 4, пересекает прямую $3x-4y+5=0$. Найти точку пересечения этих прямых.

4. Показать, что прямая, на которой лежат точки $A(-3;\ 6)$ и $B(2;\ -4)$, проходит через начало координат.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ -5)$ и отсекающей на оси Ox отрезок, равный -2.

6. Проверить, лежат ли на одной прямой точки

$$A(1;\ 3), \quad B(5;\ 7) \quad \text{и} \quad C(10;\ 12).$$

7. Найти длину отрезка прямой $4x+3y+12=0$, заключенного между осями координат.

8. Какую ординату имеет точка $C(5;\ y)$, лежащая на той же прямой, что и точки $A(-8;\ -6)$ и $B(-3;\ -1)$?

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;\ 4)$ и параллельной биссектрисе первого координатного угла.

10. На биссектрисе первого координатного угла найти точку, расстояние которой от точки $M(-2;\ 0)$ равно 10.

11. При каком значении m прямая $y=mx+3$ проходит через точку пересечения прямых $2x-y+1=0$ и $y=x+5$?

12. Противоположные вершины квадрата лежат в точках $A(-2;\ 5)$ и $C(2;\ 8)$. Найти длину и уравнения его диагоналей.

13. Две смежные вершины квадрата $ABCD$ лежат в точках $A(-5;\ 4)$ и $D(-3;\ 2)$, а диагональ его AC параллельна оси Ox. Определить координаты двух других вершин квадрата.

14. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x+2y-2=0, \quad 2x+y-13=0 \quad \text{и} \quad x-2y+6=0.$$

Показать, что этот треугольник прямоугольный, и определить радиус окружности, описанной около него.

15. Нужно провести прямую, проходящую через точку $M(30;\ 50)$ и образующую с положительным направлением оси Ox угол $45°$. На каком расстоянии от оси Ox нужно взять две точки, отстоящие от оси ординат на расстоянии 1 и 3, чтобы искомая прямая проходила через них?

16. Определить углы наклона к положительному направлению оси Ox сторон треугольника ABC, вершины которого находятся в точках $A(1;\ 3)$, $B(6;\ 1)$ и $C(-1;\ -3)$.

17. Две прямые пересекаются в точке $A(2;\ -5)$. Найти острый угол между ними, если одна из них проходит через точку $B(1;\ -3)$, а другая — через точку $C(4;\ 1)$.

18. Даны две прямые $y=2x+1$ и $3x-2y-5=0$. Определить расстояние между точками, в которых они пересечены прямой $x-y-3=0$.

19. Через точку $A(-5;\ 3)$ проведена прямая так, что ее отрезок, заключенный между координатными осями, делится в этой точке пополам. Написать уравнение этой прямой.

20. Через точку $A(-4; -3)$ проведена прямая так, что она отсекает на осях координат равные отрезки. Написать уравнение этой прямой.

21. Сторона треугольника, равная 10, лежит на оси Ox, а одна из его вершин — в точке $A(4;\ 6)$. Найти уравнения сторон треугольника, если одна из боковых сторон его отсекает на оси абсцисс отрезок, равный -2 (два случая).

22. Дан треугольник ABC с вершинами

$$A(8;\ 4),\quad B(-2;\ 6)\quad \text{и}\quad C(4;\ 0).$$

Из точки D, делящей сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$, проведена прямая через середину E стороны AB. Найти уравнение и длину отрезка DE.

23. Даны две точки $A(-4;\ -3)$ и $B(1;\ 2)$. Написать уравнение прямой, проведенной перпендикулярно к прямой AB через точку C, делящую отрезок AB в отношении $AC : CB = 1 : 2$.

24. Две вершины треугольной однородной пластинки лежат в точках $A(6;\ 0)$ и $B(-8;\ -2)$, а ее центр тяжести в точке $M(1; 2)$. Найти координаты третьей вершины этой пластинки.

25. В трех точках $A(-1;\ 0)$, $B(-2;\ 4)$ и $C(4;\ -5)$ помещены грузы соответственно в 30 *кг*, 50 *кг* и 70 *кг*. Найти центр тяжести этой системы.

26. Дан треугольник ABC с вершинами

$$A(-5;\ -1),\quad B(-1;\ 4)\quad \text{и}\quad C(3;\ 2).$$

Через вершину A проведена прямая, параллельная BC, а через вершину B — прямая, перпендикулярная к BC. Найти координаты точки пересечения проведенных прямых.

27. По какой линии должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами $(3;\ 8)$, чтобы дойти кратчайшим путем до прямой $y = \frac{1}{2}x - 1$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь?

28. Две прямые пересекаются в точке, лежащей на оси Ox, под углом 45° друг к другу; прямая с меньшим наклоном к положительному направлению оси Ox имеет уравнение $2x - 3y - 6 = 0$. Написать уравнение второй прямой.

29. Даны уравнения сторон треугольника

$$2x - 3y + 11 = 0,\quad 3x + y - 11 = 0,\quad x + 4y = 0.$$

Найти угол, образованный с положительным направлением оси Ox медианой, проведенной на сторону $x + 4y = 0$.

30. Отрезок прямой $x + 2y - 6 = 0$, заключенный между осями координат, разделен на три равные части и в точках деления восставлены перпендикуляры к этой прямой до пересечения с осью Oy. Найти координаты точек пересечения.

31. В треугольнике ABC даны середины его сторон $M_1(1;\ 1)$, $M_2(3;\ -5)$ и $M_3(5;\ -3)$. Составить уравнения сторон треугольника ABC.

32. Даны две вершины $A(3; -1)$ и $B(5; 5)$ треугольника ABC и точка $N(6; 2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины треугольника.

33. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x+y-3=0, \quad x=0, \quad 2x+y-1=0.$$

Найти длину высоты, проведенной на сторону $x+y-3=0$.

34. Определить площадь параллелограмма, зная уравнения его сторон:

$$y=2x+1, \quad y=2x-5, \quad y=x-2, \quad y=x+2.$$

35. Определить площадь ромба, зная уравнения его сторон:

$$y=0, \quad y=4, \quad y=\frac{4}{3}x, \quad y=\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}.$$

36. Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника параллелен оси Ox и отстоит от нее на расстоянии, равном 8, а продолжение гипотенузы проходит через начало координат. Написать уравнения сторон этого треугольника, если его катет равен 6 и треугольник расположен в первом координатном углу (два случая).

37. Две стороны квадрата определяются уравнениями:

$$x+3y+10=0 \quad \text{и} \quad 3x-y-20=0,$$

а его центр лежит в точке $M(3; -1)$. Найти уравнения диагоналей квадрата.

38. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника параллельна оси Ox. Вершина прямого угла лежит в точке $A(8; 20)$, а одна из вершин острого угла расположена на оси Oy. Написать уравнения сторон этого треугольника (два случая).

39. Одна из сторон правильного треугольника параллельна оси Oy и отсекает на оси Ox отрезок, равный -4, а противоположная вершина лежит в точке $A(2; 0)$. Найти уравнения высот треугольника.

40. Гипотенуза прямоугольного треугольника пересекает оси координат в точках $A(-5; 0)$ и $B(0; 5)$; а один из катетов — в точках $C(-2; 0)$ и $D(0; 1)$; продолжение же другого катета отсекает на оси Ox отрезок, равный 4. Найти координаты вершин этого треугольника.

41. Две стороны и диагональ, исходящие из одной вершины параллелограмма, определяются соответственно уравнениями

$$x-y+4=0, \quad y=5 \quad \text{и} \quad 5x+2y-15=0.$$

Написать уравнения двух других сторон параллелограмма, если точка пересечения его диагоналей лежит на оси Ox.

42. Две противоположные вершины ромба $ABCD$ лежат в точках $A(1; 3)$ и $C(5; 9)$, а сторона AD определяется уравнением $x-y+2=0$. Найти координаты двух других вершин его.

43. Две противоположные вершины прямоугольника $ABCD$ лежат в точках $A(1; 4)$ и $C(5; 6)$, а сторона CD наклонена к положительному направлению оси Ox под углом 45°. Найти площадь этого прямоугольника.

44. Одна из сторон ромба проходит через начало координат и образует с положительным направлением оси Ox угол, равный $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, а другая сторона определяется уравнением $y=8$. Найти уравнения остальных сторон ромба, если его диагонали пересекаются между собой в точке, лежащей на оси абсцисс.

45. Дан треугольник ABC с вершинами

$$A(4;\ 1),\quad B(7;\ 5)\quad \text{и}\quad C(-4;\ 7).$$

Найти точку пересечения биссектрисы угла A с противоположной стороной BC.

46. Даны вершины треугольника:

$$A(-2;\ -8),\quad B(3;\ -8)\quad \text{и}\quad C(3;\ -5).$$

Написать уравнение биссектрисы угла B.

47. Из точки $A(6;\ 9)$ направлен луч света под углом $45°$ к положительному направлению оси Ox; дойдя до оси Ox, он отражается от нее. Найти уравнения падающего и отраженного лучей.

48. Луч света направлен по прямой $y=\frac{2}{3}x-4$; дойдя до оси Ox, он от нее отражается. Определить уравнение отраженного луча.

49. Луч света, выйдя из точки $A(2;\ 3)$, отражается от оси Ox и попадает в точку $B(5;\ 8)$. Найти уравнения падающего и отраженного лучей.

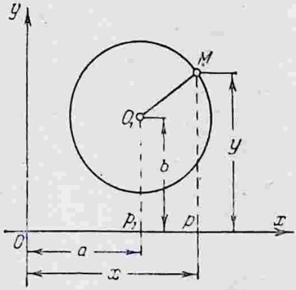
50. Луч света, проходящий через точку $A(3;\ 4)$, отражается от прямой $x+y-2=0$ и после отражения проходит через точку $B(5;\ 2)$. Найти уравнения падающего и отраженного лучей.

ГЛАВА IV

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 20. Окружность и ее уравнение. *Окружностью называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от одной точки, называемой центром.*

Пользуясь этим определением, выведем уравнение окружности. Пусть радиус ее равен r, а центр находится в точке



Черт. 27.

$O_1(a; b)$. Возьмем на окружности произвольную точку $M(x; y)$ (черт. 27).

По формуле расстояния между двумя точками можем написать:

$$O_1M = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

или, после возведения обеих частей равенства в квадрат,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{1}$$

Так как точка M нами взята произвольно, а радиус r — величина постоянная, то равенство (1) справедливо для всех точек окружности, т. е. координаты любой ее точки удовлетворяют этому равенству. А если так, то равенство (1) нужно рассматривать как *уравнение окружности.*

В уравнении (1) a и b — *координаты центра окружности*, а x и y — *текущие координаты.*

Если положить $a=0$, то уравнение (1) обратится в следующее:

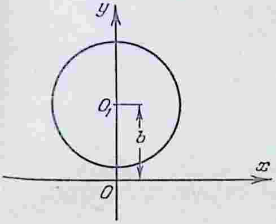
$$x^2+(y-b)^2=r^2$$

и будет определять *окружность с центром на оси* Oy (черт. 28).

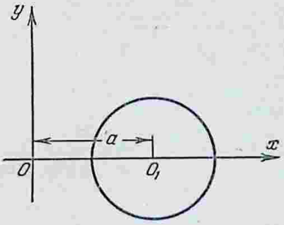
При $b=0$ уравнение (1) примет вид

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

и будет определять *окружность с центром на оси* Ox (черт. 29).



Черт. 28.



Черт. 29.

Наконец, при $a=0$ и $b=0$ уравнение (1) преобразуется в следующее:

$$x^2+y^2=r^2$$

и будет определять *окружность с центром в начале координат* (черт. 30).

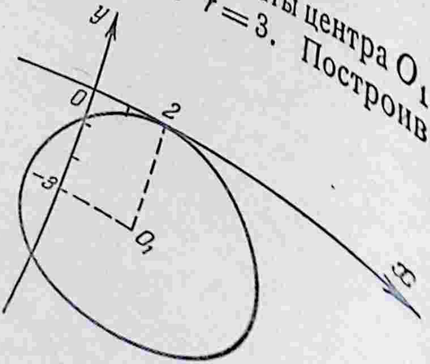
Можно построить окружность, имея ее уравнение. Пусть, например, требуется построить окружность

$$(x-2)^2+(y+3)^2=9.$$

...ерепишем это уравнение в следующем виде:

$$(x-2)^2+[y-(-3)]^2=9;$$

...ивая это уравнение с (1), видим, что координаты центра O_1 ...ности суть $(2; -3)$ и радиус ее $r=3$. Построив



Черт. 31.

...шем из нее радиусом, равным 3 еди-
...ло окружность (черт. 31).
...жности как частный вид ... общего
— Раскрыв скобки в у...

$$\ldots^2-2by+b^2=r^2,$$

$$\ldots a^2+b^2-r^2=\ldots$$

...венства на A,

$$\ldots^2+Ab^2-\ldots$$

Уравнение (2) является частным случаем общего уравнения второй степени с двумя переменными. В самом деле, сравним уравнение (2) с общим уравнением второй степени с двумя переменными, имеющим, как известно, следующий вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3)$$

Мы видим, что уравнение (2) отличается от уравнения (3) только тем, что у первого коэффициенты при x^2 и y^2 одинаковы и отсутствует член, содержащий произведение xy.

Таким образом, *окружность определяется общим уравнением второй степени с двумя переменными, если в нем коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой и отсутствует член с произведением xy.*

Обратно, уравнение вида (2), вообще говоря, определяет окружность. Убедимся в этом на примере. Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0.$$

Перепишем его в следующем виде:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 8y) = 5$$

и преобразуем двучлены, стоящие в скобках, в полные квадраты суммы и разности, прибавив к первому 4, ко второму 16. Чтобы равенство при этом не нарушилось, увеличим и правую часть его на сумму $4 + 16$. Получим:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = 5 + 4 + 16,$$

или

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

и... нее равенство является уравнением окружности, ...диус, равный 5, и центр в точке $O_1(-2; 4)$.

р... ...днако случаи, когда уравнение (2) при некото-
н... ... коэффициентов не определяет окружности;
е... ...нению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют координаты
у... ...чки (0; 0), а уравнению $x^2 + y^2 = -4$ не
...координаты ни одной точки, так как сумма
...ительных чисел не может иметь отрицатель-

...а окружность $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$
...$= 0$. Найти длину этой хорды.
...как концы хорды являются общими точ-
...орды, то их координаты удовлетворяют

как уравнению первой, так и уравнению второй линии. Поэтому, чтобы найти эти координаты, нужно решить совместно уравнения окружности и хорды. Подставив значение

$$y = 7 - x$$

в уравнение окружности, получим:

$$x^2 + (7 - x)^2 - 4x + 2(7 - x) - 15 = 0,$$

или

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 - 4x + 14 - 2x - 15 = 0,$$

или, наконец,

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Отсюда

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1,$$

$$x_1 = 5 - 1 = 4, \quad x_2 = 5 + 1 = 6.$$

Находим значение y:

$$y_1 = 7 - x_1 = 7 - 4 = 3,$$

$$y_2 = 7 - x_2 = 7 - 6 = 1.$$

Итак, концами хорды служат точки с координатами (4; 3) и (6; 1).

По формуле расстояния между двумя точками можем определить искомую длину хорды

$$d = \sqrt{(4-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$$

Упражнения

1. Написать уравнение окружности с центром в точке O_1 и с радиусом r, если даны:

1) $O_1(-1; 2)$, $r = 5$, 2) $O_1(-2; -3)$, $r = \sqrt{5}$, 3) $O_1(0; 5)$, $r = 6$.

2. Построить окружности:

1) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$, 2) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, 3) $x^2 + (y-4)^2 = 25$.

3. Дана окружность $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$. Лежат ли на ней точки:

$$A(3; -1), \quad B(3; -9) \quad \text{и} \quad C(0; -3)?$$

4. Дана окружность $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 13$ и точка на ней с ординатой, равной нулю. Найти ее абсциссу.

5. Написать уравнение окружности с центром в точке O_1 и проходящей через точку A, если даны:

$$1)\ O_1(2;\ 1),\ A(5;\ 5),\quad 2)\ O_1(-3;\ 2),\ A(-4;\ 0).$$

6. Написать уравнение окружности, проходящей через две точки: $A(-5;\ 5)$ и $B(1;\ 3)$ и имеющей радиус $r=\sqrt{10}$.

7. Написать уравнение окружности, проходящей через две точки: $A(2;\ 4)$ и $B(-2;\ 0)$, и имеющей центр на оси Ox.

8. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и проходящей через точку $A(0;\ -8)$.

9. Найти координаты центра и длину радиуса окружности $x^2+y^2-6x-8y=0$.

10. Построить окружности:

1) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$, 3) $x^2+y^2-12y+11=0$,

2) $x^2+y^2+8x+7=0$, 4) $4x^2+4y^2-16x+8y-5=0$.

11. Даны окружности

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+2x-12y+1=0.$$

Написать уравнение их линии центров (т. е. уравнение прямой, проходящей через центры данных окружностей).

12. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=16$ и $x^2+y^2-12x+11=0$.

13. Написать уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+6x+8y=0$, параллельного оси Oy.

14. Дана окружность $x^2+y^2-8x-4y-5=0$. Написать уравнение ее диаметра, образующего с осью Ox угол 45°.

15. Дана окружность $x^2+y^2-2x+6y-6=0$. Написать уравнение ее диаметра, перпендикулярного к хорде $2x-y+3=0$.

16. Найти координаты точек, в которых окружность $x^2+y^2-6x+8y+5=0$ пересекает ось Ox.

17. Написать уравнение радиуса, проведенного в точку $A(1;\ 4)$ окружности $x^2+y^2-4y-1=0$.

18. Написать уравнение касательной, проведенной к окружности $x^2+y^2-12x+2y+12=0$ в точке ее $A(9;\ 3)$.

19. Найти координаты точек пересечения прямой $y=x-1$ с окружностью $x^2+y^2-8x-4y-5=0$.

20. Найти точки пересечения прямой $x=3$ с окружностью $x^2+y^2+3x-6y-9=0$.

21. Как расположена прямая $y-6=0$ по отношению к окружности $x^2+y^2-8x-9=0$?

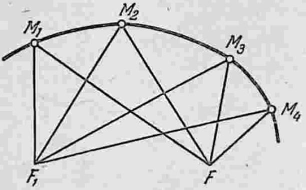
22. Написать уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

§ 22. Эллипс и его уравнение. *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (и бо́льшая, чем расстояние между фокусами).*

Пусть, например, на эллипсе взяты точки M_1, M_2, M_3, M_4 и т. д. (черт. 32). Если фокусы обозначить через F и F_1, то согласно данному определению можно написать:

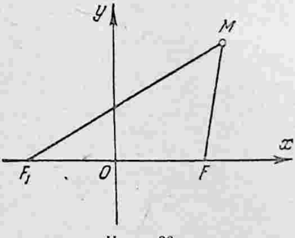
$$F_1M_1 + FM_1 = F_1M_2 + FM_2 = F_1M_3 + FM_3 = \\ = F_1M_4 + FM_4 = \text{const}. \qquad (1)$$

Геометрическое место точек, обладающих вышеуказанным свойством (1), и есть эллипс.



Черт. 32.

На основании определения эллипса составим его уравнение. Для этого выберем систему координат следующим образом. За ось Ox примем прямую, проходящую через фокусы F и F_1, а за ось Oy — прямую, перпендикулярную



Черт. 33.

к FF_1 и проведенную через середину отрезка FF_1 (черт. 33). Обозначим расстояние F_1F между фокусами через $2c$, тогда координаты фокусов будут:

$$F(c;\ 0) \quad \text{и} \quad F_1(-c;\ 0).$$

Возьмем на эллипсе произвольную точку $M(x; y)$. Обозначим постоянную величину суммы расстояний каждой точки от фокусов через $2a$, тогда

$$FM + F_1M = 2a. \qquad (2)$$

По формуле расстояния между двумя точками найдем:

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Теперь равенство (2) перепишется следующим образом:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (3)$$

и будет представлять *уравнение эллипса* в принятой системе координат.

Упростим уравнение (3). Для этого перенесем один из радикалов в правую часть уравнения:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Раскроем скобки:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 =$$
$$= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Приведем подобные члены:

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + 2cx,$$

или

$$4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

Сократив на 4 и снова возведя в квадрат обе части равенства, получим:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2,$$

или

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2.$$

Перенесем все члены, содержащие x и y, в левую часть равенства, остальные члены — в правую:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

или

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{4}$$

Но согласно определению эллипса

$$2c < 2a,$$

отсюда

$$c < a.$$

Из последнего неравенства следует, что $a^2 - c^2 > 0$, а потому эту разность можно обозначить через b^2. Подставив это обозначение в равенство (4), найдем:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{5}$$

Наконец, разделим все члены последнего равенства на a^2b^2; окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

где x и y — текущие координаты точек эллипса, а

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{7}$$

Уравнение (6) и есть *простейший вид уравнения эллипса* *).

§ 23. Исследование уравнения эллипса. Определим сначала y из уравнения (5) § 22:

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2},$$

отсюда

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{1}$$

*) Уравнение (6) получилось в результате двукратного возведения в квадрат уравнения (3), благодаря чему, вообще говоря, возможно появление посторонних корней. Можно показать, что уравнение (6) не имеет посторонних корней, т. е. любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (6), лежит на эллипсе.

Из того же уравнения (5) найдем:

$$x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2},$$

следовательно,

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь равенства (1) и (2).

I. Пусть

$$|x| < a\text{*)}.$$

Тогда под корнем в равенстве (1) получится положительное число, а потому y будет иметь два значения, равные по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Это значит, что каждому значению x соответствуют две точки эллипса, симметричные относительно оси Ox.

Пусть теперь

$$|y| < b.$$

Тогда каждому значению y, как мы видим из равенства (2), отвечают два значения x, равные по абсолютной величине, но с разными знаками. Отсюда следует, что каждому значению y соответствуют на эллипсе две точки, симметричные относительно оси Oy.

Из сказанного заключаем: *эллипс* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *симметричен относительно координатных осей.*

II. Найдем точки пересечения эллипса с осью Ox. Пусть

$$y = 0;$$

тогда из равенства (2) имеем:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2} = \pm a.$$

Отсюда следует: *эллипс пересекает ось Ox в двух точ- х, координаты которых $(a;\ 0)$ и $(-a;\ 0)$* (точки A и A_1 ерт. 34).

---

*) ... что x берется по абсолютной величине; таким ... a нужно читать так: x по абсолютной вели-

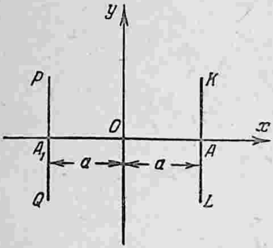
III. Найдем точки пересечения эллипса с осью Oy. Пусть

$$x=0;$$

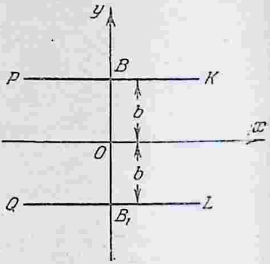
тогда из равенства (1) имеем:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2}=\pm b.$$

Отсюда заключаем, что *эллипс пересекает ось Oy в двух точках, координаты которых* $(0;\ b)$ и $(0;\ -b)$ (точки B и B_1 на черт. 35).



Черт. 34.



Черт. 35.

IV. Пусть x принимает такие значения, что

$$|x|>a; \tag{3}$$

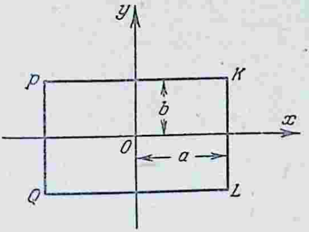
тогда выражение под корнем в равенстве (1) будет отрицательным, и, следовательно, y будет иметь мнимые значения. А это значит, что не существует точек эллипса, абсциссы которых удовлетворяют условию (3), т. е. эллипс расположен внутри полосы, заключенной между прямыми $x=+a$ и $x=-a$ (черт. 34, прямые KL и PQ).

Если же положить

$$|y|>b, \tag{4}$$

то из равенства (2) получим для x мнимые значения. Это говорит о том, что точки, удовлетворяющие условию (4), на эллипсе не лежат, т. е. эллипс заключен между прямыми $y=+b$ и $y=-b$ (черт. 35, прямые PK и QL).

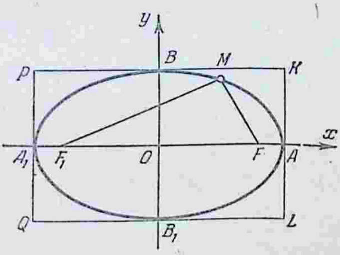
Из сказанного следует, что *все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины, равные* $2a$ *и* $2b$, *а диагонали пересекаются в начале координат* (черт. 36).



Черт. 36.

Эллипс имеет форму, показанную на черт. 37.

Точки A, A_1, B и B_1 называются *вершинами эллипса*, а точка O — его *центром*. Отрезок $A_1A = 2a$ называется его



Черт. 37.

большой осью, а отрезок $B_1B = 2b$ — *малой осью*. Отрезки FM и F_1M носят название *фокальных радиусов точки* M.

§ 24. Эксцентриситет эллипса. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между его фокусами к длине большой оси, т. е.* $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Эксцентриситет обычно обозначают буквой e. Таким образом,

$$e=\frac{c}{a}. \tag{1}$$

Но согласно формуле (7) § 22

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Поэтому для определения эксцентриситета может служить следующее равенство:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \tag{2}$$

Так как $0<c<a$ (§ 22), то эксцентриситет эллипса есть положительная величина, меньшая единицы.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса, что легко усмотреть из формулы (2). Например, если уменьшить величину b, не изменяя a, то разность a^2-b^2 увеличится, отчего увеличится и дробь правой части формулы, а следовательно, и e станет больше. Эксцентриситет также возрастет, если увеличить a, оставив b постоянной величиной.

Мы рассмотрели эллипс, у которого $b<a$. При $b>a$ уравнение (6) § 22 представляет эллипс, фокусы которого лежат на оси Oy; в этом случае его большая ось равна $2b$, а малая $2a$. В соответствии с этим формула (7) § 22 и формулы (1) и (2) настоящего параграфа примут такой вид:

$$a^2=b^2-c^2,$$

$$e=\frac{c}{b},$$

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}.$$

П р и м е р. Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$. Определить длину его осей, координаты вершин и фокусов, а также величину эксцентриситета.

Р е ш е н и е. Разделив обе части данного уравнения на 400, получим:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

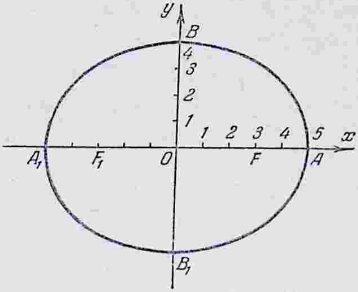
Отсюда

$$a^2=25, \quad b^2=16$$

и

$$a=5, \quad b=4.$$

Итак, большая ось эллипса $A_1A = 2a = 10$, а малая — $B_1B = 2b = 8$ (черт. 38).



Черт. 38.

Координаты вершин его будут:

$$A(5;\ 0),\quad A_1(-5;\ 0),\quad B(0;4),\quad B_1(0;\ -4).$$

Чтобы найти координаты фокусов, нужно узнать величину $OF = c$. Из равенства (7) § 22 имеем:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Следовательно, координаты фокусов будут:

$$F(3;\ 0) \text{ и } F_1(-3;\ 0).$$

Наконец, по формуле (1) настоящего параграфа находим:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

§ 25. Связь эллипса с окружностью. Положим, что полуоси эллипса равны между собой, т. е. $a = b$, тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\quad \text{или}\quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Полученное уравнение, как известно, определяет окружность радиуса, равного a.

Эксцентриситет обычно обозначают буквой e. Таким образом,

$$e=\frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Но согласно формуле (7) § 22

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Поэтому для определения эксцентриситета может служить следующее равенство:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \qquad (2)$$

Так как $0<c<a$ (§ 22), то эксцентриситет эллипса есть положительная величина, меньшая единицы.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса, что легко усмотреть из формулы (2). Например, если уменьшить величину b, не изменяя a, то разность a^2-b^2 увеличится, отчего увеличится и дробь правой части формулы, а следовательно, и e станет больше. Эксцентриситет также возрастет, если увеличить a, оставив b постоянной величиной.

Мы рассмотрели эллипс, у которого $b<a$. При $b>a$ уравнение (6) § 22 представляет эллипс, фокусы которого лежат на оси Oy; в этом случае его большая ось равна $2b$, а малая $2a$. В соответствии с этим формула (7) § 22 и формулы (1) и (2) настоящего параграфа примут такой вид:

$$a^2=b^2-c^2,$$

$$e=\frac{c}{b},$$

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}.$$

Пример. Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$. Определить длину его осей, координаты вершин и фокусов, а также величину эксцентриситета.

Решение. Разделив обе части данного уравнения на 400, получим:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

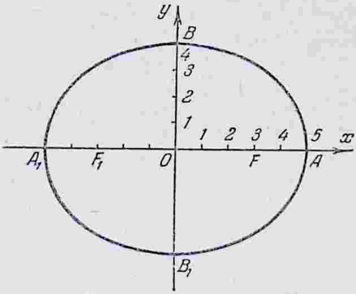
Отсюда

$$a^2=25, \quad b^2=16$$

и

$$a=5, \quad b=4.$$

Итак, большая ось эллипса $A_1A = 2a = 10$, а малая — $B_1B = 2b = 8$ (черт. 38).



Черт. 38.

Координаты вершин его будут:

$$A(5;\ 0),\quad A_1(-5;\ 0),\quad B(0;4),\quad B_1(0;\ -4).$$

Чтобы найти координаты фокусов, нужно узнать величину $OF = c$. Из равенства (7) § 22 имеем:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Следовательно, координаты фокусов будут:

$$F(3;\ 0) \text{ и } F_1(-3;\ 0).$$

Наконец, по формуле (1) настоящего параграфа находим:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

§ 25. Связь эллипса с окружностью. Положим, что полуоси эллипса равны между собой, т. е. $a = b$, тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\quad \text{или}\quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Полученное уравнение, как известно, определяет окружность радиуса, равного a.

Посмотрим, чему будет равен эксцентриситет в этом случае; полагая в формуле (2) § 24

$$a=b,$$

получим:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-a^2}}{a}=0.$$

Отсюда заключаем, что *окружность есть частный случай эллипса, у которого полуоси равны между собой, а следовательно, эксцентриситет равен нулю.*

Упражнения

1. Написать простейший вид уравнения эллипса, если даны его полуоси $a=5$ и $b=4$.

2. Дан эллипс $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. Определить его оси и расстояние между фокусами.

3. Определить длину осей и координаты фокусов эллипса $49x^2+24y^2=1176$.

4. Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A(8; 0)$ и $A_1(-8; 0)$, а фокусы имеют координаты $(\pm 5; 0)$.

5. Написать уравнение эллипса, координаты фокусов которого $(\pm 3; 0)$, а длина большой оси равна 12.

6. Написать уравнение эллипса, у которого длина малой оси равна 6, а фокусы имеют координаты $(0; \pm 4)$.

7. Найти эксцентриситет эллипса $4x^2+9y^2=180$.

8. Написать простейший вид уравнения эллипса, если даны $2c=8$ и $e=0,8$.

9. Написать уравнение эллипса, у которого фокусы имеют координаты $(0; \pm 5)$, а эксцентриситет равен $\frac{2}{3}$.

10. Написать простейший вид уравнения эллипса, если сумма полуосей его равна 10, а расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

11. Проверить, лежат ли на эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ точки $A(0; 2)$, $B(3; 0)$, $C(1; 2)$.

12. Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ и точка на нем с абсциссой, равной 3. Найти ее ординату.

13. Написать простейший вид уравнения эллипса, проходящего через точку $A(3; \sqrt{2})$ и имеющего большую ось $2a=2\sqrt{15}$.

14. Эллипс с центром в начале координат и фокусами на оси Ox проходит через две точки A и B; написать его уравнение, если даны:

1) $A(\sqrt{5}; \sqrt{6})$, $B(0; -2\sqrt{2})$; 2) $A(2\sqrt{5}; 2\sqrt{3})$, $B(-5; -3)$.

15. Найти длину хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к большой оси эллипса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$.

16. Найти точки пересечения эллипса $4x^2+9y^2=36$ с прямыми: 1) $2x+3y-6=0$, 2) $2x+3\sqrt{3}\,y=12$, 3) $y=x-6$.

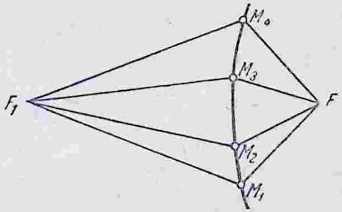
17. Прямая $2x+y-14=0$ пересекает эллипс $4x^2+y^2=100$. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри эллипса.

18. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается втрое ближе от точки $A(1;0)$, чем от прямой $x=9$.

19. Определить эксцентриситет эллипса, если отрезок между фокусами виден из конца малой оси под прямым углом.

20. Отрезок прямой линии движется так, что концы его скользят по осям координат. Показать, что при указанном движении любая точка этого отрезка, кроме середины и концов его, описывает эллипс.

§ 26. Гипербола и ее уравнение. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная* (эта постоянная берется по абсолютному значению, причем она меньше расстояния между фокусами и не равна нулю).



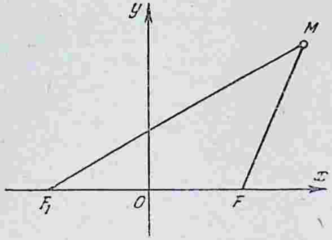
Черт. 39.

Пусть, например, точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на гиперболе, фокусы которой находятся в точках F и F_1 (черт. 39). Тогда, согласно данному выше определению, можно написать:

$$F_1M_1-FM_1=F_1M_2-FM_2=F_1M_3-FM_3=\\=F_1M_4-FM_4=\text{const}. \quad (1)$$

Пользуясь определением гиперболы, выведем ее уравнение.

Примем за ось Ox прямую, проходящую через фокусы F_1 и F (черт. 40), а за ось Oy — прямую, перпендикулярную к отрезку F_1F и делящую его пополам.



Черт. 40.

Положим $F_1F = 2c$, тогда координаты фокусов будут

$$F(c;\ 0) \quad \text{и} \quad F_1(-c;\ 0).$$

Возьмем на гиперболе произвольную точку $M(x;\ y)$ и обозначим величину разности расстояний каждой точки от фокусов через $2a$; тогда

$$F_1M - FM = \pm 2a\ ^{*}). \tag{2}$$

По формуле расстояния между двумя точками найдем:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и, заменив в равенстве (2) F_1M и FM их выражениями, напишем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{3}$$

Это и есть *уравнение гиперболы* относительно выбранной системы координат, так как оно согласно равенствам (1) справедливо для любой ее точки.

---

*) Знак $+$ берется в случае, если $F_1M > FM$, и знак $-$, если $F_1M < FM$.

Упростим уравнение (3). Для этого перенесем один из радикалов в правую часть уравнения:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

Раскроем скобки:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} + \\ + x^2-2cx+c^2+y^2.$$

Приведем подобные члены:

$$2cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} - 2cx,$$

или

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}.$$

Сократив на 4, снова возведем в квадрат обе части уравнения; получим:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2).$$

Раскроем скобки:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

или

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Перенесем в левую часть члены, содержащие x и y, а остальные члены в правую:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

отсюда

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \tag{4}$$

Согласно определению гиперболы

$$2c > 2a,$$

отсюда

$$c > a. \tag{5}$$

При условии (5) разность c^2-a^2 имеет только положительное значение, а потому ее можно обозначить через b^2. Сделав это в равенстве (4), получим:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{6}$$

Разделив последнее равенство на a^2b^2, найдем окончательно:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (7)$$

где x и y — текущие координаты точек гиперболы, а

$$b^2=c^2-a^2. \qquad (8)$$

Равенство (7) представляет собой *простейший вид уравнения гиперболы* *).

§ 27. Исследование уравнения гиперболы. Из уравнения (6) § 26 имеем:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2,$$

отсюда

$$y^2=\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}=\frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2}$$

и

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (1)$$

Из этого же уравнения (6) § 26 находим:

$$x^2=\frac{a^2y^2+a^2b^2}{b^2}=\frac{a^2(y^2+b^2)}{b^2}$$

и

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}. \qquad (2)$$

Исследуем уравнения (1) и (2) для выяснения геометрической формы гиперболы.

I. Найдем точки пересечения гиперболы с осью Ox. Для этого полагаем $y=0$ и из уравнения (2) получаем:

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2}=\pm a.$$

Отсюда следует: *гипербола пересекает ось Ox в двух точках, координаты которых* $(a; 0)$ и $(-a; 0)$ (черт. 41, точки A и A_1).

II. Положим в уравнении (1)

$$|x|<a; \qquad (3)$$

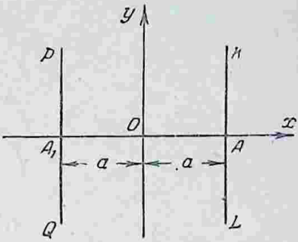
---

*) Как и в случае эллипса, можно показать, что уравнение (7) равносильно уравнению (3), т. е. не имеет посторонних корней.

тогда y получит мнимое значение, а это значит, что на гиперболе нет точек, удовлетворяющих условию (3). Следовательно, в полосе между прямыми $x=+a$ и $x=-a$ (прямые KL и PQ на черт. 41) нет точек гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

III. Пусть

$$|x|>a; \tag{4}$$



Черт. 41.

тогда из равенства (1) найдем для каждого x два действительных значения y, равных по абсолютной величине, но с противоположными знаками. А это значит, что каждому значению x, удовлетворяющему неравенству (4), соответствуют на нашей кривой две точки, симметричные относительно оси Ox.

Следовательно, *гипербола* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *симметрична относительно оси* Ox.

С другой стороны, для каждого значения y из равенства (2) найдем два действительных значения x, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку, т. е. каждому значению y на гиперболе соответствуют две точки, симметричные относительно оси Oy.

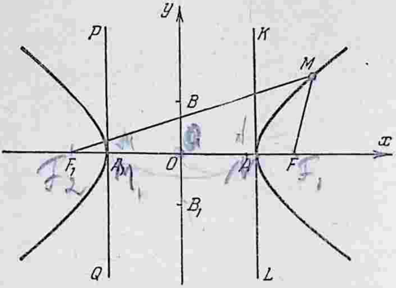
Следовательно, *гипербола* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *симметрична относительно оси* Oy.

IV. Если в уравнении (1) давать x значения, заключенные между $+a$ и $+\infty$, то величина y будет изменяться от 0 до $\pm\infty$, т. е. в этом случае каждому значению x соответствуют на кривой две точки, симметричные относительно оси Ox и отстоящие друг от друга тем дальше, чем больше величина абсциссы. Таким образом, можно сказать, что гипербола имеет бесконечную ветвь, расположенную справа от прямой $x=a$.

Если же давать x значения, заключенные между $-a$ и $-\infty$, то y будет изменяться опять от 0 до $\pm\infty$, а это значит, что, как в предыдущем случае, гипербола имеет бесконечную ветвь, но идущую влево от прямой $x = -a$.

Итак, *гипербола есть кривая, состоящая из двух ветвей, простирающихся в бесконечность.*

Из всего изложенного следует, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ состоит из двух симметричных относительно оси Oy бесконечных ветвей, одна из которых расположена справа от



Черт. 42.

прямой $x = +a$, а другая слева от прямой $x = -a$. Каждая из этих ветвей симметрична относительно оси Ox (черт. 42).

Точки $A(a; 0)$ и $A_1(-a; 0)$ называются *вершинами гиперболы*, а точка O (0; 0) — ее *центром*.

Отрезок $AA_1 = 2a$ носит название *действительной* или *вещественной оси* гиперболы в отличие от оси $BB_1 = 2b$, называемой *мнимой* *).

Отрезки F_1M и FM — *фокальные радиусы точки* M.

§ 28. Эксцентриситет гиперболы. *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине вещественной оси, т. е.* $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

*) Отрезок $BB_1 = 2b$ называется мнимой осью, так как на нем нет точек гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы, так же как и для эллипса, обозначается буквой e:

$$e=\frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Но согласно равенству (8) § 26

$$c=\sqrt{a^2+b^2},$$

поэтому формулу (1) можно представить в следующем виде:

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Так как для гиперболы $c>a$ (§ 26), то дробь

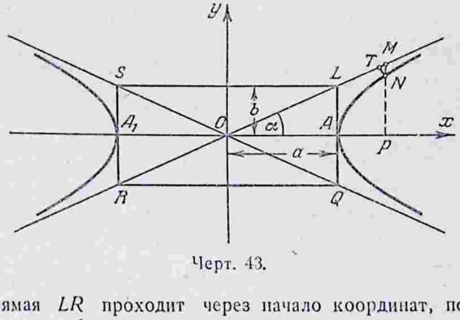
$$\frac{c}{a}>1,$$

а потому эксцентриситет гиперболы больше единицы.

§ 29. Асимптоты гиперболы. Построим на осях гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

прямоугольник $LQRS$ со сторонами, равными $2a$ и $2b$, и проведем его диагонали LR и QS, продолжив их по обе стороны (черт. 43).



Черт. 43.

Прямая LR проходит через начало координат, поэтому ее уравнение будет:

$$y=kx. \qquad (1)$$

Но угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \angle LOA = \frac{AL}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Заменив в уравнении (1) k найденным его значением, получим уравнение прямой LR в следующем виде:

$$y = \frac{b}{a} x. \tag{2}$$

Прямая QS также определяется уравнением (1), но угловой коэффициент ее будет уже другой, а именно:

$$k = \operatorname{tg} \angle AOS = \operatorname{tg}(180° - \angle SOA_1) =$$

$$= \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}.$$

Таким образом, уравнение прямой QS будет:

$$y = -\frac{b}{a} x. \tag{3}$$

Обычно уравнения (2) и (3) записывают следующим образом:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{4}$$

Между прямыми, представленными уравнениями (4), и гиперболой существует связь; выясним ее.

Решим совместно способом подстановки уравнения (4) и уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Будем иметь:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2 b^2} = 1$$

или

$$x^2 - x^2 = a^2,$$

что невозможно, так как $a \neq 0$. Таким образом, прямые (4) и гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ не имеют общих точек, т. е. прямые (4) не пересекают гиперболу.

Возьмем на прямой LR и на гиперболе точки M и N, расположенные в первом координатном углу и имеющие одну и ту же абсциссу. Ординатой точки M служит PM; обозначим ее через Y в отличие от ординаты точки N, которую обозначим буквой y. Из уравнения (2) можно написать:

$$Y = \frac{b}{a} x.$$

Из уравнения гиперболы имеем:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Составим разность

$$Y - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

и посмотрим, как она будет изменяться при возрастании абсциссы. Для этого умножим и разделим правую часть последнего равенства на выражение $x + \sqrt{x^2 - a^2}$; получим:

$$Y - y = \frac{b\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = \frac{b\left[x^2 - (x^2 - a^2)\right]}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} =$$

$$= \frac{b\left(x^2 - x^2 + a^2\right)}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = \frac{ba^2}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Итак,

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \qquad (5)$$

Пусть величина x в равенстве (5) бесконечно возрастает, тогда знаменатель дроби также бесконечно растет, а сама дробь уменьшается, приближаясь к нулю. Таким образом, гипотенуза NM и, следовательно, катет NT в прямоугольном треугольнике MNT стремится к нулю. Из сказанного делаем вывод: *при неограниченном возрастании абсциссы x гипербола приближается к прямой LR как угодно близко, нигде ее не пересекая.*

Так как прямые LR и QS, а также точки гиперболы симметричны относительно оси Ox, то можно сказать, что и часть гиперболы, расположенная в четвертом координатном углу, как угодно близко подходит к прямой QS, нигде ее не пересекая.

Вывод, сделанный для правой ветви гиперболы, справедлив и для ее левой ветви благодаря той же симметричности прямых (4) и гиперболы относительно координатных осей.

6*

Прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

называются *асимптотами гиперболы*.

Из сказанного в настоящем параграфе можно сделать заключение, что гипербола расположена всеми своими точками внутри вертикальных углов, образуемых асимптотами, и нигде не выходит за их границы. Этим обстоятельством можно воспользоваться для построения гиперболы в случае, если не требуется точного, а достаточно только приближенного ее изображения; для этого, начертив асимптоты, нужно провести плавную кривую линию, постепенно приближая ее к асимптотам.

Пример. Дана гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Узнать, лежит ли точка $A(2;\ 1{,}5)$ на какой-либо ее асимптоте.

Решение. Из данного уравнения имеем:

$$a = \sqrt{16} = 4,$$

$$b = \sqrt{9} = 3.$$

Следовательно, уравнения асимптот будут:

$$y = \pm \frac{3}{4} x.$$

Так как точка A лежит согласно условию в первом координатном углу, то она может принадлежать только асимптоте, определяемой уравнением

$$y = \frac{3}{4} x.$$

Подставив в него вместо x и y координаты точки A, получим тождество:

$$1{,}5 = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1{,}5.$$

Значит, точка A лежит на указанной асимптоте гиперболы.

§ 30. Равносторонняя гипербола. Если в уравнении гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

положим $a = b$, то это уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

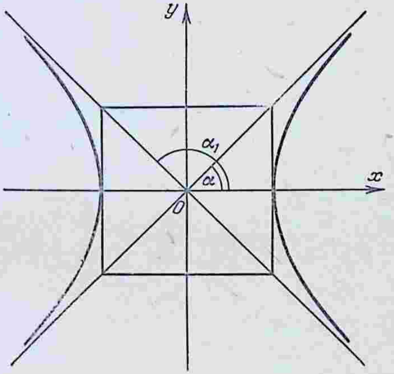
Уравнение (1) определяет гиперболу, у которой полуоси равны между собой. Такая гипербола называется *равносторонней*. Уравнения асимптот в этом случае будут:

$$y = \pm x, \qquad (2)$$

так как отношение

$$\frac{b}{a} = 1.$$

Как видно из уравнения (2), угловые коэффициенты асимптот равны $+1$ и -1. Если обозначить углы, обра-



Черт. 44.

зуемые асимптотами с положительным направлением оси Ox, соответственно через α и α_1 (черт. 44), то

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 \text{ и } \operatorname{tg}\alpha_1 = -1,$$

откуда

$$\alpha = 45° \text{ и } \alpha_1 = 135°.$$

Следовательно, угол между асимптотами будет:

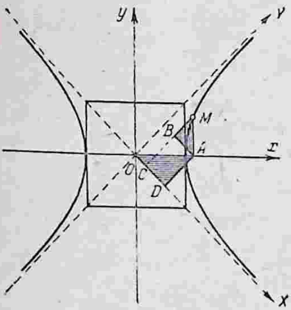
$$\alpha_1 - \alpha = 135° - 45° = 90°.$$

Отсюда заключаем: *асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны.*

§ 31. Уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к асимптотам. Так как асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны, то их можно принять за оси прямоугольной системы координат и рассматривать гиперболу по отношению к этим новым осям. Выведем уравнение равносторонней гиперболы для этого случая.

Пусть дана равносторонняя гипербола. Тогда ее уравнение по отношению к координатным осям Ox и Oy (черт. 45) выразится, как было показано в § 30, в виде

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$



Черт. 45.

Взяв на гиперболе произвольную точку $M\ (x;\ y)$ и построив ее координаты, будем иметь:

$$x = OA, \quad y = AM.$$

Примем теперь за оси координат асимптоты гиперболы: OX — за ось абсцисс, OY — за ось ординат. Опустив перпендикуляр MC на новую ось абсцисс, найдем:

$$X = OC, \quad Y = CM.$$

Выразим новые координаты X и Y точки M через старые x и y. Для этого из точки A проведем $AB \perp CM$ и $AD \perp OX$. Обратим внимание на то, что в образовавшихся прямоугольных треугольниках AMB и AOD

$$\angle AMB = \angle AOD$$

как углы, образованные взаимно перпендикулярными прямыми. Но $\angle AOD = 45°$, поэтому

$$\angle AMB = \angle AOD = 45°.$$

Из чертежа имеем:

$$X = OC = OD - CD = OD - BA = OA\cos 45^\circ - AM\sin 45^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \qquad (2)$$
$$Y = CM = CB + BM = DA + BM = OA\sin 45^\circ + AM\cos 45^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y). \qquad (3)$$

Перемножив равенства (2) и (3) и приняв во внимание равенство (1), получим:

$$XY = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}a^2. \qquad (4)$$

Положим для краткости

$$\frac{a^2}{2} = m;$$

тогда равенство (4) перепишется так:

$$XY = m, \qquad (5)$$

где m — постоянная величина.

Таково уравнение равносторонней гиперболы, если за оси координат принять ее асимптоты.

Как видно из уравнения (5), переменные X и Y — величины обратно пропорциональные, а потому можно сказать что *равносторонняя гипербола $xy = m$ представляет собой график обратно пропорциональной зависимости между переменными величинами.*

Упражнения

1. Написать уравнение гиперболы, если даны:

1) $a = 6$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $c = 5$; 3) $b = 5$, $c = 13$.

2. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Определить ее оси и расстояние между фокусами.

3. Найти координаты вершин и фокусов гиперболы $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. Написать уравнение гиперболы, у которой фокусы имеют координаты (± 4; 0) и вещественная ось равна 6.

5. Дана гипербола $24x^2 - 25y^2 = 600$. Определить координаты ее фокусов, длину осей и эксцентриситет.

6. Написать уравнение гиперболы, если даны:

$$1)\ c=7,\ e=\frac{7}{12}\sqrt{6};\quad 2)\ b=9,\quad e=1{,}25.$$

7. Написать уравнение гиперболы, у которой

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4},\qquad c=15.$$

8. Лежат ли на гиперболе

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$$

следующие точки $A(8;\ 6\sqrt{3})$, $B(6;\ 3\sqrt{5})$ и $C(3;\ 2\sqrt{6})$?

9. Написать простейший вид уравнения гиперболы, проходящей через точку $A(9;\ -4)$, если ее вещественная полуось равна 3.

10. Написать простейший вид уравнения гиперболы, проходящей через две точки $A\ (4;\ \sqrt{5})$ и $B\ (-4\ \sqrt{3};\ 5)$.

11. Написать уравнения асимптот, а также найти величину эксцентриситета гиперболы $x^2-2y^2=6$.

12. Написать уравнения асимптот гиперболы, у которой вещественная ось равна 8, а расстояние между фокусами, лежащими на оси Ox, равно 10.

13. Написать уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами, расположенными на оси Ox, равно $10\sqrt{2}$, а уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$.

14. Написать уравнение гиперболы, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\frac{3}{5}x$ и фокусы которой имеют координаты $(\pm 2;\ 0)$.

15. Точка $A(10;\ 4{,}5)$ лежит на гиперболе, а точка $B(4;\ 3)$ на одной из ее асимптот. Написать простейший вид уравнения гиперболы.

16. Найти точки пересечения гиперболы $x^2-2y^2=18$ с прямой $x=6$.

17. Найти точку пересечения гиперболы $x^2-2y^2=4$ и прямой $3x-4y=2$.

18. Найти острый угол между асимптотами гиперболы $4x^2-5y^2=100$.

19. Найти эксцентриситет гиперболы, у которой угол между асимптотами равен 60°.

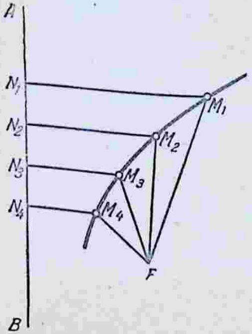
20. Определить траекторию точки $M(x;\ y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x=1$, чем к точке $(4;\ 0)$.

§ 32. Парабола и ее простейшее уравнение. *Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой (при условии, что фокус не лежит на директрисе).*

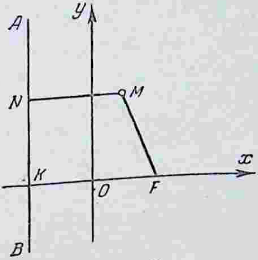
Пусть точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на параболе (черт. 46). Если точка F изображает фокус, а прямая AB — директрису, то согласно данному выше определению можем написать.

$$FM_1 = M_1N_1,$$
$$FM_2 = M_2N_2,$$
$$FM_3 = M_3N_3,$$
$$FM_4 = M_4N_4.$$

Выведем уравнение параболы, пользуясь ее определением. Для этого выберем систему координат, приняв за ось Ox прямую, проведенную через точку F (фокус) перпендикулярно к директрисе AB, а за



Черт. 46.



Черт. 47.

ось Oy — прямую, проходящую через середину отрезка KF перпендикулярно к последнему (черт. 47).

Обозначим

$$KF = p;$$

тогда координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. Возьмем на параболе произвольную точку $M(x;\ y)$; расстояния ее от фокуса F и от директрисы AB будут выражаться соответственно отрезками FM и MN. Согласно определению параболы, можем написать:

$$FM = MN. \tag{1}$$

Применяя формулу расстояния между двумя точками и приняв во внимание, что точка N имеет координаты $\left(-\frac{p}{2};\, y\right)$, найдем:

$$FM = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$MN = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Заменив FM и MN в равенстве (1) их выражениями, получим:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{2}$$

Это и есть *уравнение параболы* относительно выбранной системы координат, так как оно справедливо для любой ее точки.

Упростим уравнение (2). Для этого возведем обе части его в квадрат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Раскроем скобки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Приведя подобные члены, получим *простейшее уравнение параболы*

$$y^2 = 2px\ ^{*}). \tag{3}$$

Величина p называется *параметром параболы*.

§ 33. Исследование уравнения параболы. Из уравнения (3) § 32 найдем:

$$y = \pm\sqrt{2px}. \tag{1}$$

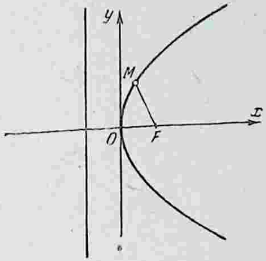
Исследуем уравнение (1) для выяснения геометрической формы нашей кривой, полагая $p > 0$.

---

*) Можно показать, что уравнение (3) равносильно уравнению (2).

I. Положим
$$x = 0;$$
тогда
$$y = \pm\sqrt{2p \cdot 0} = 0.$$
Отсюда следует: *парабола* $y^2 = 2px$ *проходит через начало координат.*

II. Если $x < 0$, то y — мнимое число. А это значит, что *парабола* $y^2 = 2px$ *не имеет точек с отрицательными абсциссами и, следовательно, расположена справа от оси* Oy.

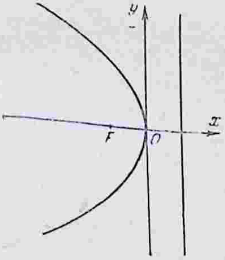


Черт. 48.

III. Если $x > 0$, то y имеет два действительных значения, равных по абсолютной величине, но с разными знаками. Это значит, что каждому положительному значению x на параболе соответствуют две точки, расположенные симметрично относительно оси Ox.

Следовательно, *парабола* $y^2 = 2px$ *симметрична относительно оси* Ox.

IV. Пусть x неограниченно возрастает, тогда и $|y|$ будет неограниченно расти, т. е. точки параболы с перемещением вправо от оси Oy неограниченно удаляются вверх и вниз от оси Ox.



Черт. 49.

Итак, *парабола* $y^2 = 2px$ *состоит из бесконечных ветвей.*

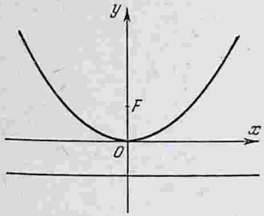
Вышеизложенное позволяет представить параболу, как показано на черт. 48.

Точка O называется *вершиной параболы*, отрезок FM — *фокальным радиусом точки* M *параболы*, а бесконечная прямая Ox является ее *осью симметрии.*

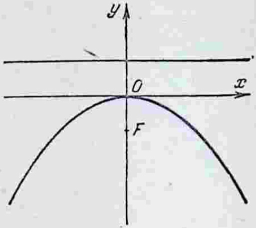
Если директрису параболы поместить справа от начала координат, то фокус и ветви ее расположатся как показано на чертеже 49. При этом абсциссы точек параболы будут удовлетворять условию $x \leqslant 0$, а потому ее уравнение примет вид:

$$y^2 = -2px.$$

Парабола может быть симметрична и относительно оси Oy; в этом случае фокус ее будет лежать на оси ординат, а директрисой будет прямая, параллельная оси Ox. Как видно,



Черт. 50.



Черт. 51.

при этом условии координатные оси поменяются ролями, и уравнение параболы примет вид

$$x^2 = 2py, \tag{2}$$

если ветви ее направлены вверх (черт. 50), и

$$x^2 = -2py, \tag{3}$$

если ветви направлены вниз (черт. 51).

Пример 1. Дана парабола

$$y^2 = 12x.$$

Найти координаты ее фокуса и написать уравнение директрисы.

Решение. Данная парабола симметрична относительно оси Ox и расположена направо от оси Oy. Из уравнения находим:

$$2p = 12,$$

откуда

$$p = 6.$$

Расстояние фокуса от начала координат равно $\frac{p}{2}$, поэтому абсцисса фокуса будет $\frac{p}{2}=\frac{6}{2}=3$. Итак, фокус находится в точке

$$F(3;\ 0).$$

Директрисой служит прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от последней на расстоянии $\frac{p}{2}=3$. Следовательно, уравнение директрисы параболы будет $x=-3$.

Пример 2. Фокус параболы с вершиной в начале координат лежит в точке $F(0;\ -4)$. Написать уравнение этой параболы..

Решение. Согласно условию данная парабола симметрична относительно оси Oy, а ветви ее направлены вниз, поэтому искомое уравнение найдется из (3). Так как

$$\frac{p}{2}=4,$$

то

$$p=8$$

и уравнение параболы будет:

$$x^2=-16y.$$

Упражнения

1. Написать уравнения четырех парабол с вершиной в начале координат, зная, что координаты их фокусов равны:

$$1)\ F(4;\ 0),\quad 2)\ F(-2;\ 0),\quad 3)\ F(0;\ 3),\quad 4)\ F(0;\ -5).$$

2. Определить координаты фокусов следующих парабол:

$$1)\ y^2=10x,\quad 2)\ y^2=-12x,\quad 3)\ x^2=8y,\quad 4)\ x^2=-10y.$$

3. Найти координаты фокуса параболы $2y^2-5x=0$.

4. Написать уравнение директрисы и найти координаты фокуса каждой из парабол:

$$1)\ y^2=4x,\quad 2)\ x^2=-8y.$$

5. Написать уравнения парабол с вершиной в начале координат, для которых директрисами служат прямые:

$$1)\ x=-2,\quad 2)\ x=3,\quad 3)\ y=2{,}5,\quad 4)\ y=-4.$$

6. Директрисой параболы с вершиной в начале координат служит прямая $2x+5=0$. Написать уравнение и определить координаты фокуса этой параболы.

7. Проверить, лежит ли

1) точка $A(2;\ -2)$ на параболе $y^2=2x$,

2) » $B(-1;\ \sqrt{5})$ » » $y^2=5x$?

8. Из отверстия бака, находящегося на поверхности земли, вытекает вода струей, представляющей ветвь параболы $x^2=-6y$. На каком расстоянии от края бака падает струя на землю, если высота отверстия равна 1,5 *м*?

9. Найти высоту арки моста длиной 24 *м*, если арка имеет вид параболы, уравнение которой $x^2=-48y$.

10. Написать уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A(4;\ -2)$.

11. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $A(-4;\ -2)$.

12. Через фокус параболы $y^2=10x$ проведена хорда перпендикулярно к ее оси. Найти длину хорды.

13. Найти точки на параболе $y^2=5x$, имеющие равные координаты.

14. Через фокус параболы $y^2=8x$ и через ее точку, абсцисса которой равна 4,5, а ордината положительна, проведена секущая. Составить уравнение этой секущей.

15. Найти точки пересечения параболы $y^2=9x$ с прямыми:

1) $y=2x+1$, 2) $2y-3x-3=0$, 3) $y=3x+1$.

16. Найти длину общей хорды двух парабол:

$$y^2=4x \quad \text{и} \quad x^2=4y.$$

17. Через фокус параболы $y^2=-4x$ проведена прямая под углом 135° к положительному направлению оси Ox. Написать уравнение прямой и найти длину образовавшейся хорды.

§ 34. Уравнение параболы со смещенной вершиной и осью, параллельной оси Oy. Возьмем уравнения параболы (2) и (3) § 33 и запишем их в следующем виде:

$$x^2=\pm 2py.$$

Отсюда

$$y=\pm\frac{1}{2p}x^2. \tag{1}$$

Положив в уравнении (1)

$$\pm\frac{1}{2p}=A,$$

получим:

$$y=Ax^2. \tag{2}$$

Уравнение (2) определяет параболу, ветви которой направлены

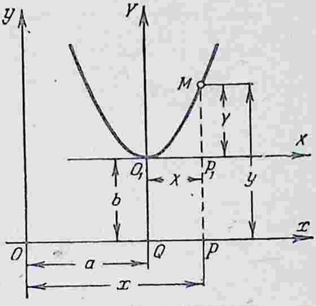
$$\text{вверх, если } A > 0,$$
$$\text{вниз, если } A < 0.$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться уравнением (2), представляющим параболу с вершиной в начале координат и с осью симметрии, совпадающей с осью ординат.

Рассмотрим параболу, у которой вершина лежит в точке $O_1(a;\ b)$, ось симметрии параллельна оси Oy, а ветви направлены вверх (черт. 52).

Возьмем на параболе произвольную точку $M(x;\ y)$. Опустив из нее перпендикуляр MP на ось Ox, будем иметь:

$$OP = x, \quad PM = y.$$



Черт. 52.

Проведем через O_1 прямые O_1X и QY, параллельные координатным осям Ox и Oy, и положим временно, что прямые O_1X и O_1Y служат осями новой системы координат. Обозначим координаты точки M в этой системе через X и Y, т. е.

$$O_1P_1 = X \quad \text{и} \quad P_1M = Y.$$

Уравнение параболы в новой системе координат напишется следующим образом:

$$Y = AX^2, \tag{3}$$

где $A > 0$.

Чтобы найти ее уравнение относительно прежних осей Ox и Oy, нужно X и Y выразить через x и y. Так как

$$OQ = a \quad \text{и} \quad QO_1 = b,$$

то

$$X = O_1P_1 = QP = OP - OQ = x - a,$$
$$Y = P_1M = PM - PP_1 = PM - QO_1 = y - b.$$

Подставив в уравнение (3) найденные значения X и Y, получим:

$$y - b = A(x-a)^2,$$

или

$$y = A(x-a)^2 + b. \tag{4}$$

Упростим уравнение (4); для этого раскроем в нем скобки. Получим:

$$y = Ax^2 - 2Aax + Aa^2 + b. \tag{5}$$

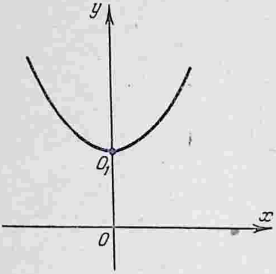
Обозначим:

$$-2Aa = B, \tag{6}$$

$$Aa^2 + b = C; \tag{7}$$

тогда уравнение (5) примет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C. \tag{8}$$



Черт. 53.

Это — уравнение параболы с вершиной, лежащей в любой точке плоскости, и с осью симметрии, параллельной оси Oy.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть абсцисса вершины параболы $a = 0$; тогда величина B в равенстве (6) также будет нулем и уравнение (8) примет следующий вид:

$$y = Ax^2 + C.$$

Полученное уравнение определяет параболу, у которой вершина лежит на оси Oy, являющейся в то же время и ее осью симметрии (черт. 53).

Положим, что одна из точек параболы (исключая ее вершину) лежит в начале координат; тогда координаты (0; 0) должны удовлетворять уравнению (8). Заменив в нем x и y нулями, найдем $C = 0$. В этом случае уравнение (8) получит вид

$$y = Ax^2 + Bx$$

и будет определять параболу, проходящую через начало координат (черт. 54).

Заметим, что и уравнение (2) можно рассматривать как частный случай уравнения (8). Действительно, положив в равенствах (6) и (7)

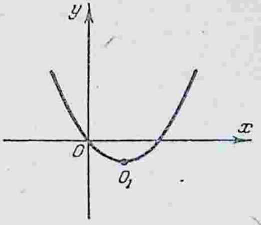
$$a=0 \quad \text{и} \quad b=0,$$

получим:

$$B=0 \quad \text{и} \quad C=0,$$

вследствие чего уравнение (8) преобразуется в следующее:

$$y=Ax^2.$$



Черт. 54.

Из сказанного следует, что *парабола, у которой ось симметрии параллельна оси Oy или совпадает с ней, определяется уравнением*

$$y=Ax^2+Bx+C$$

при любых значениях A, B и C, кроме $A=0$.

Убедимся на примере, что справедливо и обратное утверждение: всякое уравнение вида (8) определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси Oy.

Пусть дано уравнение

$$y=2x^2-4x-3. \tag{9}$$

Преобразуем его следующим образом:

$$y=2x^2-4x-3=2x^2-4x+2-5=$$
$$=2(x^2-2x+1)-5=2(x-1)^2-5.$$

Отсюда

$$y+5=2(x-1)^2. \tag{10}$$

Положим

$$y+5=Y,$$
$$x-1=X;$$

тогда уравнение (10) примет вид:

$$Y=2X^2. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет такой же вид, как и уравнение (2), поэтому оно, а следовательно, и уравнение (9) определяют параболу, у которой ось симметрии параллельна оси Oy.

Для построения параболы, определяемой уравнением вида (8), можно использовать обычный прием, применяемый для вычерчивания графиков функций, а именно: дав x ряд значений, вычислить значения y, а затем, построив точки по найденным координатам, провести через них плавную линию.

Пример 1. Построить параболу $y = x^2 - 4x$.

Решение. Прежде всего найдем абсциссы точек пересечения данной параболы с осью Ox; положив $y = 0$, получим:

$$x^2 - 4x = 0, \quad \text{откуда} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4.$$

Так как найденные точки симметричны относительно оси параболы, то вершина последней, находясь на этой оси, имеет абсциссу, равную $\frac{0+4}{2} = 2$; ордината же ее

$$y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

Этих трех точек достаточно для приближенного изображения параболы.

Для более точного ее представления нужны дополнительные точки. Составим следующую таблицу:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Построив эти точки и проведя через них плавную линию, получим искомую параболу (черт. 55).

Пример 2. Построить параболу $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

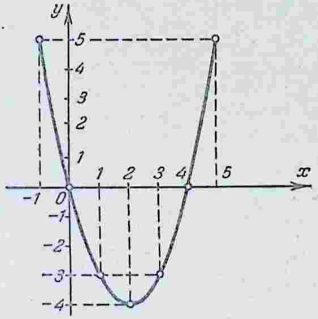
Решение. Корни уравнения

$$-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$$

мнимые, а потому ось Ox не пересекает данную параболу. В этом случае следует найти абсциссы точек пересечения параболы с прямой

$$y=-1$$

(-1 — свободный член данного уравнения параболы).



Черт. 55.

Решая для этой цели систему уравнений

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+x-1, \\ y=-1, \end{cases}$$

будем иметь:

$$-\frac{1}{2}x^2+x-1=-1,$$

или

$$x^2-2x=0,$$

откуда

$$x_1=0, \quad x_2=2.$$

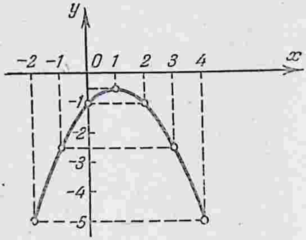
Полученные точки симметричны относительно оси параболы, поэтому абсцисса ее вершины равна $\frac{0+2}{2}=1$; ордината же ее

$$y=-\frac{1}{2}\cdot 1^2+1-1=-\frac{1}{2}.$$

Присоединим к этим точкам несколько дополнительных точек. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	$-2{,}5$	-1	$-0{,}5$	-1	$-2{,}5$	-5

График параболы представлен на черт. 56.



Черт. 56.

Упражнения

1. Найти координаты вершин парабол:

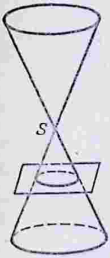
1) $y = 5x - x^2$,
2) $y = 9 - x^2$,
3) $y = x^2 - 4x - 5$,
4) $y = x^2 - 2x + 1$,
5) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

2. Построить параболы:

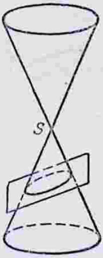
1) $y = x^2 - 4$,
2) $y = x^2 - 3x$,
3) $y = x^2 - x - 2$,
4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}$,
5) $y = x^2 + 4x + 4$,
6) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$,
7) $y = 3x - \frac{3}{2}x^2 - 2$,
8) $y = x^2 + 4$.

§ 35. Конические сечения. Окружность, эллипс, гипербола и парабола определяются, как мы установили в предыдущих параграфах, уравнениями второй степени относительно текущих координат; поэтому их называют *кривыми второго порядка*. Они были известны еще древним грекам, которые изучали эти кривые, рассматривая их как результат сечения прямого кругового конуса плоскостью в следующих четырех случаях.

I. Секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса; в сечении получается *окружность* (черт. 57).

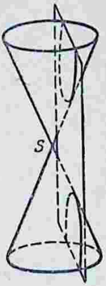


Черт. 57.



Черт. 58.

Черт. 59.



Черт. 60.

II. Секущая плоскость образует с осью конуса угол, не равный 90°, и пересекает все его образующие по одну сторону от вершины S; в сечении получается *эллипс* (черт. 58).

III. Секущая плоскость параллельна какой-либо образующей конуса; при этом получается кривая, называемая *параболой* (черт. 59).

IV. Секущая плоскость пересекает обе полости конуса; при этом получаются две бесконечные ветви, образующие *гиперболу* (черт. 60).

Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются *коническими сечениями*.

Конические сечения изучались в древности исключительно геометрическим путем, что представляло большие трудности, и только со времени Декарта, давшего метод координат, изучение их значительно упростилось.

Смешанные задачи

1. В окружности $x^2+y^2-6x+6y-50=0$ проведена хорда, параллельная оси Oy на расстоянии, равном 5, от нее. Найти длину хорды.

2. На гиперболе $5x^2-4y^2=180$ взята точка с абсциссой, равной 10. Определить расстояние ее от фокусов гиперболы.

3. Расстояния одного из фокусов эллипса до концов его большой оси равны 7 и 1. Написать простейший вид уравнения эллипса.

4. Составить уравнение окружности, концы одного из диаметров которой находятся в точках $A(-2;\ 1)$ и $B(0;\ 3)$.

5. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

6. Написать уравнения диаметров окружности $x^2+y^2+8x+4y-16=0$, перпендикулярных к осям координат.

7. Даны окружности $x^2+y^2+4x-2y-15=0$ и $x^2+y^2-6x+2y-7=0$. Как велик угол, образуемый линией центров этих окружностей с положительным направлением оси Ox?

8. Разность полуосей эллипса равна 2, координаты фокусов суть $(\pm 2\sqrt{6};\ 0)$. Найти уравнение эллипса.

9. Фокусы эллипса находятся на оси Ox и делят его большие полуоси пополам. Написать уравнение этого эллипса, если его малая ось равна $4\sqrt{3}$.

10. В эллипс вписана окружность $x^2+y^2=16$, пересекающая большую ось эллипса в фокусах, лежащих на оси абсцисс. Написать уравнение эллипса.

11. Найти величину осей гиперболы, если расстояние между ее фокусами равно 8, а угол между асимптотами прямой.

12. Написать уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $x^2+2y^2=18$ и эксцентриситет, равный 1,5.

13. Найти длину хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к действительной оси гиперболы $9x^2-16y^2=144$.

14. Найти длину хорды, проведенной через фокус перпендикулярно к большой оси эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

15. Через фокус параболы $y^2=2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси симметрии. Найти длину хорды.

16. На гиперболе $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ взята точка с абсцисс... ной 12. Найти фокальные радиусы этой точки.

17. Вычислить длину сторон правильного треугольни... ного в параболу $y^2=4x$.

18. На параболе $y^2=3x$ взята точка, ордината котор... Найти расстояние этой точки от фокуса.

19. Мнимая полуось гиперболы больше действител... дна из асимптот ее проходит через точку $A(10;\ 14)$. ...равнение гиперболы.

20. Написать уравнение гиперболы, если ее асимп... равнениями $y=\pm\dfrac{3}{5}x$ и известно, что гипербола прох... ку $A(10;\ -3\sqrt{3})$.

21. Окружность $x^2+y^2=9$ проходит через фокусы гиперболы. Написать уравнение последней, если ее асимптота образует с положительным направлением оси Ox угол, равный $\operatorname{arc\,tg} 2$.

22. В окружность $x^2+y^2=25$ вписан эллипс с фокусами, лежащими на оси Ox. Радиус окружности, проведенный в ее точку $A(4; 3)$, делится эллипсом пополам. Написать уравнение этого эллипса.

23. В эллипс $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Найти длину его сторон.

24. В эллипс $9x^2+16y^2=144$ вписан квадрат. Найти длину его сторон.

25. Под влиянием некоторой силы точка M двигалась по окружности $x^2+y^2-10x+6y+9=0$. Действие силы прервалось в тот момент, когда точка M совпала с точкой $A(2; 1)$ окружности. Определить дальнейшую траекторию точки.

26. Даны уравнения двух окружностей:

$$x^2+y^2-6x-2y-3=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2-4x-6y+3=0.$$

Показать, что линия их центров перпендикулярна к их общей хорде.

27. Камень, брошенный с крыши дома параллельно горизонту, упал на землю, описав параболу $x^2=-5y$. На каком расстоянии от вертикали упал камень на землю, если высота дома 20 *м*?

28. Парабола, симметричная относительно оси Oy, с вершиной в начале координат пересекает эллипс $x^2+4y^2=16$ в точках, лежащих на хордах, проходящих через его фокусы перпендикулярно к большой оси. Написать уравнение параболы.

29. Фокальные радиусы точки эллипса равны 2,6 и 7,4; хорда, выходящая из этой точки и перпендикулярная к большой оси его, равна 4,8 и определяется уравнением $x-3=0$. Написать уравнение эллипса.

30. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал ... параболы и упал на расстоянии 16 *м* от начального положе... аписать простейшее уравнение параболы, зная, что наиболь... ота подъема камня равна 12 *м*.

... араболическое зеркало рефлектора Симеизской обсерва... т диаметр 1,02 *м*; расстояние его фокуса от вершины ... Найти глубину параболической выемки, которую приш... ри изготовлении зеркала из плоского стекла.

... $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от

... иной в начале координат расположена сим... си Ox. Определить фокальный радиус ее

... точки M параболы $y^2=12x$ равен 6.

... ,5x взята точка M, находящаяся от ... 125. Найти расстояние этой точки от

36. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами его равно расстоянию между концами большой и малой осей.

37. Найти эксцентриситет эллипса, у которого большая ось втрое больше малой.

38. Земной меридиан приближенно представляет собой эллипс, отношение осей которого равно 299 : 300. Определить эксцентриситет земного меридиана.

39. Прямая $x - 10 = 0$ пересекает гиперболу и ее асимптоту соответственно в точках A и B. Написать уравнение этой гиперболы, если ордината точки B равна 5, а длина отрезка данной прямой, заключенного внутри гиперболы, равна 8.

40. Найти острый угол, образуемый каждой из асимптот гиперболы с ее действительной осью, если вершины гиперболы отстоят от ее центра на $\frac{2}{3}$ расстояния фокусов от центра.

41. Две вершины эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ лежат в фокусах гиперболы, вершины которой находятся в фокусах данного эллипса. Составить уравнение гиперболы.

42. К окружности $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5 = 0$ проведена секущая $x - 2y - 3 = 0$. Написать уравнения сторон прямоугольника, вписанного в данную окружность и имеющего стороной внутренний отрезок данной секущей.

43. Найти расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ до прямой $2x + y - 3 = 0$.

44. Из точки C (5; 4) окружности $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ опущен перпендикуляр на диаметр AB, конец которого лежит в точке B (3; 8). Найти длину этого перпендикуляра.

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 36. Абсолютная величина и соотношения, связанные с ней. В дальнейшем изложении курса нам встретится необходимость рассматривать соотношения между абсолютными величинами некоторых выражений. Поэтому напомним определение абсолютной величины числа и соотношения, связанные с этим понятием.

Определение. *Абсолютной величиной положительного числа называется само это число; абсолютной величиной отрицательного числа называется это число, взятое с противоположным знаком.*

Абсолютная величина числа a обозначается так: $|a|$. Таким образом,

$$|8| = 8; \qquad |-8| = 8;$$
$$|b| = b, \quad \text{если} \quad b > 0;$$
$$|b| = -b, \quad \text{если} \quad b < 0.$$

1. *Абсолютная величина алгебраической суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых.*

Например:

$$\text{а) } |2+4+6| = |12| = 12,$$
$$|2| + |4| + |6| = 2+4+6 = 12,$$

следовательно, $|2+4+6| = |2| + |4| + |6|$;

$$\text{б) } |-5-2| = |-7| = 7,$$
$$|-5| + |-2| = 5+2 = 7,$$

следовательно, $|-5-2|=|-5|+|-2|$;

$$в)\ |-5+2|=|-3|=3,$$

$$|-5|+|2|=5+2=7,$$

т. е.

$$|-5+2|<|-5|+|2|.$$

2. *Абсолютная величина разности двух чисел больше или равна разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого.*

Например:

$$а)\ |7-9|=|-2|=2,$$
$$|7|-|9|=7-9=-2,$$
$$|7-9|>|7|-|9|;$$

$$б)\ |9-7|=|2|=2,$$
$$|9|-|7|=9-7=2,$$
$$|9-7|=|9|-|7|.$$

Абсолютная величина произведения конечного числа сомножителей равна произведению их абсолютных величин.

Пример:

$$|(-3)\cdot 5\cdot(-2)|=|30|=30,$$
$$|-3|\cdot|5|\cdot|-2|=3\cdot 5\cdot 2=30,$$
$$|(-3)\cdot 5\cdot(-2)|=|-3|\cdot|5|\cdot|-2|.$$

Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя.

$$а)\ \left|\frac{-15}{3}\right|=|-5|=5,$$
$$\frac{|-15|}{|3|}=\frac{15}{3}=5,$$
$$\left|\frac{-15}{3}\right|=\frac{|-15|}{|3|};$$

$$б)\ \left|\frac{-20}{-5}\right|=|4|=4,$$
$$\frac{|-20|}{|-5|}=\frac{20}{5}=4,$$

т. е.

$$\left|\frac{-20}{-5}\right| = \frac{|-20|}{|-5|}.$$

§ 37. Последовательность. Характер изменения переменной величины. I. Пусть дано множество чисел, расположенных в определенном порядке, например,

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64;\ \ldots,\ 2^n\ \ldots; \tag{1}$$

тогда каждому числу этого множества можно приписать номер места, которое оно занимает. Так, число 8 занимает третье место, 32 — пятое, и т. д.

Определение. *Числовой последовательностью* или просто *последовательностью называется занумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров.*

Совокупность чисел (1) служит примером последовательности. Обычно последовательность записывают в общем виде так:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots\ u_n\ \ldots,$$

где u_n называется *общим членом последовательности.*

Зная формулу общего члена последовательности, можно найти любой ее член. Например, десятый член последовательности (1)

$$u_{10} = 2^{10} = 1024.$$

Пример 1. Найти восьмой член последовательности

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \ldots\ \frac{n}{n+1}\ \ldots$$

Решение.

$$u_8 = \frac{8}{8+1} = \frac{8}{9}.$$

Пример 2. Найти седьмой член последовательности

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{8};\ \ldots\ \frac{n}{2^n}\ \ldots$$

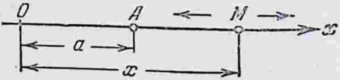
Решение.

$$u_7 = \frac{7}{2^7} = \frac{7}{128}.$$

II. Мы знаем (§ 5), что в математике и ее приложениях встречаются величины постоянные и величины переменные.

На координатной оси Ox (черт. 61) постоянной величине a соответствует неподвижная точка A, а переменной величине x — движущаяся вправо или влево точка M.

Переменная величина может изменяться весьма разнообразно: возрастать, убывать, переходить от возрастания к убыванию и т. д. Закон изменения переменной величины можно задать последовательностью числовых значений, которые она принимает. Пусть, например, переменная x принимает числовые значения последовательности (1). Закон изменения здесь состоит в том, что каждое новое значение переменной x вдвое больше предыдущего.



Черт. 61.

Как видно, переменная в этом примере изменяется скачкообразно; однако очень часто рассматриваются переменные, изменяющиеся непрерывно; например, время, путь, проходимый телом, и т. п.

Переменная величина, которая в процессе изменения постоянно возрастает или постоянно убывает, называется *монотонной*. Примером такой величины служит переменная, принимающая значения (1).

Всякая величина, меняющаяся не монотонно, называется *колеблющейся*. Например, переменная величина, изменяющаяся по закону последовательности

$$1;\ 2;\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{8}{9};\ \frac{8}{27};\ \ldots,$$

члены которой попеременно увеличиваются вдвое и уменьшаются втрое, является колеблющейся.

Переменные величины по характеру изменения еще делятся на *ограниченные* и *неограниченные*.

Определение. *Переменная величина y называется ограниченной, если, начиная с некоторого ее значения, выполняется неравенство*

$$|y| < M,$$

где M — какое-либо постоянное положительное число.

Например, $\operatorname{tg} x$ — *ограниченная* переменная в промежутке значений аргумента от $x = -45°$ до $x = 45°$, так как в этом случае $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1$.

Наряду с ограниченными переменными величинами встречаются и такие, которые не удовлетворяют вышеуказанному определению. Возьмем, например, $\operatorname{tg} x$ в промежутке значений аргумента от 0 до 90°. Какое бы большое положительное число N мы ни взяли, найдется в первой четверти дуга x, для которой $\operatorname{tg} x > N$. Такая переменная величина называется *неограниченной*.

§ 38. Бесконечно малая величина. Возьмем переменную величину α, принимающую последовательно значения:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \ldots, \tag{1}$$

или

$$-1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ -\frac{1}{6};\ \ldots \tag{2}$$

По мере увеличения номера места, занимаемого членами этих последовательностей, абсолютная величина α уменьшается, и какое бы малое положительное число ε мы ни выбрали, в каждой из указанных последовательностей найдется число, начиная с которого абсолютная величина значений α будет меньше выбранного ε. Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}001$. В соответствующем удалении от начала каждой из данных последовательностей найдем число, по абсолютной величине меньшее чем 0,001, причем абсолютное значение членов, следующих за найденным, остается меньше этой дроби. Если возьмем еще меньшую дробь, например, $\varepsilon = 0{,}0001$, то и в последовательности (1) и в последовательности (2), если достаточно удалиться от их начала, найдется число по абсолютному значению меньшее, чем 0,0001, причем последующие члены тоже будут меньше чем 0,0001.

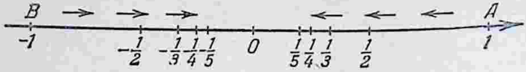
В этом случае говорят, что величина α неограниченно приближается к нулю или, иначе, *стремится к нулю*.

Этот факт записывают так: $\alpha \to 0$.

Геометрически процесс изменения величины α, принимающей значения последовательности (1), можно представить изменением абсциссы точки A, перемещающейся по координатной оси в направлении, указанном стрелками на черт. 62.

Какое бы малое положительное число мы ни взяли, наступит момент, когда абсцисса точки A станет и в дальнейшем останется меньше выбранного числа.

Процесс изменения величины α, принимающей значения последовательности (2), представится изменением абсциссы точки B, перемещающейся по координатной оси в направлении, указанном на черт. 62. И в этом случае абсцисса точки B по абсолютной величине сделается и останется меньше наперед заданного положительного числа, как бы мало оно ни было.



Черт. 62.

Определение. *Бесконечно малой величиной называется переменная α, которая при последовательном изменении по абсолютному значению становится и при дальнейшем изменении остается меньше любой наперед заданной как угодно малой положительной величины ε, т. е.* $\alpha \to 0$.

Не следует смешивать бесконечно малую величину с ничтожно малой. Так, например, при сравнении длины в 1 *см* с расстоянием Земли от Солнца (150 000 000 *км*) первую величину по отношению ко второй можно считать ничтожно малой, но назвать ее бесконечно малой нельзя, так как она не меняет своего значения, между тем как бесконечно малая величина — переменная.

Как видно, никакая постоянная величина не может быть бесконечно малой, так как она по абсолютной величине не может сделаться меньше любой наперед заданной как угодно малой величины. Однако нуль составляет исключение из всех постоянных величин; нуль всегда меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Поэтому нуль относят к бесконечно малым величинам.

Пример 1. Переменная $\alpha = \frac{1}{2^n}$

$$\text{при} \quad n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$$

получает значения:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots$$

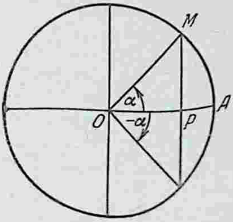
Какое бы малое положительное число мы ни взяли, в данной последовательности найдется число, меньшее взятого. Выберем, например, дробь $\frac{1}{1000}$. При $n=10$ будем иметь:

$$\alpha=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}.$$

Таким образом, переменная $\alpha=\frac{1}{2^n}$ при указанных выше значениях n есть бесконечно малая величина.

Пример 2. Возьмем окружность радиуса, равного единице (черт. 63). Обозначив угол AOM в радианной мере через α, будем иметь:

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OM}=\frac{PM}{1}=PM.$$



Черт. 63.

Но, как видно из чертежа,

$$PM<\smile AM,$$

или

$$PM<\alpha.$$

Поэтому

$$\sin\alpha<\alpha.$$

Если α неограниченно приближается к нулю, то тем более $\sin\alpha$ стремится к нулю. Следовательно, $\sin\alpha$ при $\alpha\to 0$ — бесконечно малая величина.

Тот же вывод получим, если угол имеет отрицательное значение $-\alpha$. В этом случае при $\alpha\to 0$ абсолютная величина $\sin(-\alpha)$ также стремится к нулю, а потому $\sin(-\alpha)$ при $\alpha\to 0$ — величина бесконечно малая.

Пример 3. Давление газа p и его объем v связаны функциональной зависимостью

$$p=\frac{c}{v},$$

где $c=\mathrm{const}$. Как видно, с увеличением объема v давление p уменьшается. Если объем v увеличивать неограниченно, то давление p будет неограниченно уменьшаться. Какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, можно подобрать величин[illegible] столько большой, что дробь $\frac{c}{v}$ станет меньше ε.

Следовательно, давление газа p — величина бесконечно малая, если объем его v неограниченно растет.

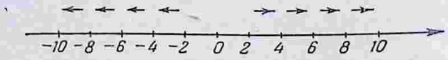
§ 39. Бесконечно большая величина. Пусть переменная величина y принимает последовательно значения:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots \tag{1}$$

или

$$-2;\ -4;\ -6;\ -8;\ -10;\ -12;\ \ldots \tag{2}$$

Как видно, с увеличением номера места, занимаемого членами написанных последовательностей, абсолютная величина y возрастает. Положим, что этот процесс возрастания идет неограниченно; тогда какое бы большое положительное число N мы ни взяли, в каждой из указанных последовательностей найдется член, начиная с которого все последующие члены по абсолютному значению больше N. Зададим, например, число $N = 1000$. В последовательностях (1) и (2) найдем число, абсолютная величина которого больше 1000, причем последующие члены также больше 1000.



Черт. 64.

Геометрически изменение величины y можно представить изменением абсциссы точки, удаляющейся в бесконечность по координатной оси:

в первом случае направо от начала O (черт. 64),
во втором » налево » » » (черт. 64).

Определение. *Бесконечно большой величиной называется переменная y, которая при последовательном изменении по абсолютной величине становится, а в дальнейшем и остается больше наперед заданной положительной величины N, как бы велико N ни было.*

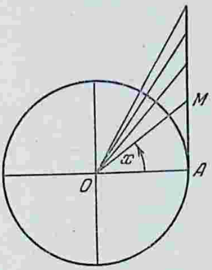
Бесконечно большую величину не следует смешивать с очень большим числом, так как последнее постоянно, бесконечно большая же величина — переменная.

Если y — бесконечно большая величина, то условились записывать

$$y \to \infty$$

и читать: «игрек стремится к бесконечности».

Необходимо помнить, что символ бесконечности не выражает определенного числа, а указывает только на характер изменения переменной величины, а именно на его неограниченный рост. Поэтому с символом бесконечности нужно обращаться осторожно, чтобы не впасть в ошибку.



Черт. 65.

Пример 1. Рассмотрим изменение переменной $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Взяв окружность радиуса $R = 1$ (черт. 65), можем написать:

$$\operatorname{tg} x = \frac{AM}{R} = \frac{AM}{1} = AM.$$

Если дуга x, находясь в первой четверти, приближается к $\frac{\pi}{2}$, то AM, а следовательно, $\operatorname{tg} x$ неограниченно растут. Действительно, какое бы большое положительное число N мы ни выбрали, найдется в первой четверти дуга, тангенс которой будет больше N, а потому $\operatorname{tg} x$ останется и подавно больше N, если дуга увеличится.

Итак, $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ — бесконечно большая величина.

Пример 2. Переменная величина $y = \frac{1}{x}$

$$\text{при } x = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$$

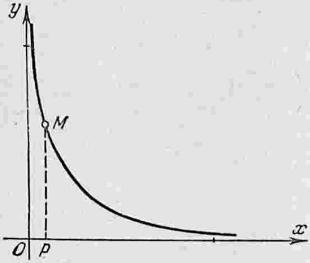
принимает соответственно значения:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots$$

Если x неограниченно уменьшается ($x \to 0$), то y неограниченно возрастает, т. е. будет бесконечно большой величиной, так как какое бы большое положительное число N мы ни взяли, найдется такое малое значение x, при котором $y > N$.

Возьмем, например, $N=1000$. Тогда, подобрав $x=\frac{1}{1001}$, получим $y=1001>N$.

Чтобы истолковать геометрически рассмотренную бесконечно большую величину, напомним, что уравнение $y=\frac{1}{x}$ при положительных значениях x определяет ветвь равносторонней гиперболы, расположенную в первом координатном



Черт. 66.

угле (черт. 66). Из чертежа видно, что с неограниченным приближением абсциссы точки M к нулю значение ординаты ее неограниченно возрастает, т. е. представляет бесконечно большую величину.

§ 40. Связь бесконечно малой величины с бесконечно большой. Между бесконечно малой и бесконечно большой величинами существует связь, а именно:

если y — бесконечно большая величина, то обратная ей величина $\frac{1}{y}$ — бесконечно малая

и

если α — бесконечно малая величина, неравная нулю, то обратная ей величина $\frac{1}{\alpha}$ — бесконечно большая.

Не доказывая этих утверждений, поясним их н[illegible]у.

1. Пусть y — бесконечно большая величина, принимающая значения:

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots \to \infty;$$

тогда $\frac{1}{y}$ получит соответственно значения:

$$1;\ 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ \ldots \to 0,$$

т. е. будет бесконечно малой величиной.

2. Пусть α — бесконечно малая величина, принимающая значения:

$$1;\ 0,1;\ 0,01;\ 0,0001;\ \ldots \to 0;$$

тогда $\frac{1}{\alpha}$ примет соответственно значения

$$1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots \to \infty,$$

т. е. будет бесконечно большой величиной.

§ 41. Понятие о пределе переменной. Пусть переменная x, изменяясь, неограниченно приближается к числу 3 и при этом принимает значения:

$$3,1;\ 3,01;\ 3,001;\ 3,0001;\ \ldots$$

или

$$2,9;\ 2,99;\ 2,999;\ 2,9999;\ \ldots$$

В этих случаях абсолютная величина разности $x-3$ стремится к нулю. В самом деле, при указанных выше значениях переменной x

$$|x-3| = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001;\ \ldots \to 0,$$

т. е. разность $x-3$ есть величина бесконечно малая.

Число 3 в нашем примере называется *пределом переменной x*.

Предел обозначается символом lim (от французского слова limite, что значит предел). Таким образом, в нашем случае можно написать:

$$\lim x = 3.$$

Употребляют также и такую запись: $x \to 3$.

Определение. *Постоянная a называется пределом переменной x, если разность между ними есть бесконечно малая величина α*, т. е. $\lim x = a$, если $x - a = \alpha$.

На основании этого определения можно записать:

$$x = a + \alpha. \tag{1}$$

Отсюда следует, что предел бесконечно малой величины равен нулю, т. е.

$$\lim \alpha = 0.$$

Если переменная x неограниченно возрастает, то говорят, что она стремится к бесконечности; в этом случае условились писать:

$$\lim x = \infty.$$

Пример 1. В треугольнике ABC (черт. 67) положим

$$\angle ACB = x, \quad \angle BCD = \alpha;$$

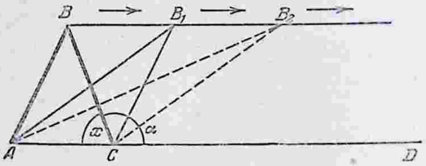
тогда

$$x + \alpha = 2d,$$

откуда

$$2d - x = \alpha. \tag{2}$$

Если вершина B движется равномерно и безостановочно по прямой, параллельной AD, то углы x и α становятся пере-



Черт. 67.

менными, причем α будет бесконечно малой. Таким образом, в равенстве (2) разность между постоянной величиной $2d$ и переменной x стремится к нулю, а потому согласно определению предела

$$\lim x = 2d.$$

Пример 2. В окружность вписан правильный n-угольник (черт. 68).

Обозначив

$$AB = a_n, \quad OA = R \quad \text{и} \quad OK = h_n,$$

имеем из треугольника AOK:

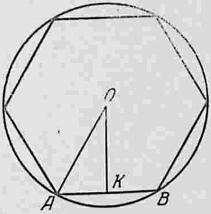
$$OA - OK < AK,$$

или

$$R - h_n < \frac{a_n}{2}. \tag{3}$$

Будем неограниченно увеличивать число n сторон этого многоугольника. Тогда h_n и $\frac{a_n}{2}$ станут переменными величинами, причем $\frac{a_n}{2}$ будет бесконечно малой. В самом деле, сторона правильного n-угольника

$$a_n < \smile AB = \frac{2\pi R}{n} = 2\pi R \cdot \frac{1}{n}.$$



Черт. 68.

При неограниченном возрастании n дробь $\frac{1}{n}$ — бесконечно малая величина (§ 38), $2\pi R$ — постоянный множитель. В § 42 будет доказано, что произведение постоянной величины на бесконечно малую — также бесконечно малая; поэтому

$$2\pi R \cdot \frac{1}{n} \to 0,$$

т. е. a_n и, следовательно, $\frac{a_n}{2}$ — бесконечно малые величины. Из неравенства (3) следует, что в таком случае разность $R - h_n$ также будет бесконечно малой величиной, а потому согласно определению предела имеем:

$$\lim_{n \to \infty} h_n = R.$$

Примечание. Всякая переменная величина, имеющая конечный предел, в частности, бесконечно малая, является ограниченной переменной.

§ 42. Свойства бесконечно малых величин.

Первое свойство. *Произведение бесконечно малой величины α на постоянную a $(a \neq 0)$ есть величина бесконечно малая.*

Для доказательства возьмем произвольное положительное число ε. Так как α — бесконечно малая величина, то $|\alpha|$ при изменении α может сделаться и остаться меньше любой положительной дроби, а следовательно, и меньше $\frac{\varepsilon}{|a|}$, т. е. с некоторого момента будет

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{|a|},$$

или

$$|a\alpha| < \varepsilon.$$

Значит, произведение $a\alpha$ — бесконечно малая величина.

Рассмотренное свойство справедливо и в случае $a = 0$, как будет показано в этом же параграфе.

Пример. Умножив бесконечно малую величину

$$\alpha = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots \to 0$$

на -8, получим:

$$-8\alpha = -8;\ -0{,}8;\ -0{,}08;\ -0{,}008;\ \ldots \qquad (1)$$

Произведение -8α также бесконечно малая величина, так как какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, в последовательности (1) найдется дробь, абсолютное значение которой меньше ε. Например, абсолютная величина -8α может сделаться меньше 0,0001; 0,00001; 0,000001 и т. д.

Следствие. *Произведение ограниченной переменной на бесконечно малую величину есть бесконечно малая.*

Так как ограниченная переменная меньше некоторой постоянной (§ 37), доказанное свойство бесконечно малых можно распространить и на случай произведения ограниченной переменной величины на бесконечно малую.

Это следствие справедливо и для произведения двух бесконечно малых величин, а также для произведения нуля на бесконечно малую, так как бесконечно малые величины относятся к ограниченным переменным (примечание § 41), а нуль есть частный случай бесконечно малой (§ 38).

Второе свойство. *Алгебраическая сумма двух бесконечно малых $\alpha + \beta$ есть величина бесконечно малая.*

Возьмем произвольное положительное число ε. Так как α и β — величины бесконечно малые, то $|\alpha|$ и $|\beta|$ каждая в отдельности с некоторого момента сделается и будет оставаться меньше любого положительного числа ε и даже $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е., начиная с некоторого момента, будет

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$|\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{или} \quad |\alpha| + |\beta| < \varepsilon.$$

Но на основании § 36, (1)

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Поэтому, начиная с некоторого момента, будет

$$|\alpha + \beta| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\alpha + \beta$ — величина бесконечно малая.

Пример. Сложим две бесконечно малые величины:

$$\alpha = -2;\ -0{,}2;\ -0{,}02;\ -0{,}002;\ \ldots \to 0,$$

и

$$\beta = -14;\ -1{,}4;\ -0{,}14;\ -0{,}014;\ \ldots \to 0;$$

получим:

$$\alpha + \beta = -16;\ -1{,}6;\ -0{,}16;\ -0{,}016;\ \ldots \qquad (2)$$

Результат сложения $\alpha + \beta$ — тоже бесконечно малая величина, так как какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, среди членов последовательности (2) найдется дробь, абсолютная величина которой меньше ε; например, $|\alpha + \beta|$ может сделаться меньше 0,0001; 0,00001; 0,000001 и т. д.

Следствие. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.*

Пусть требуется сложить бесконечно малые величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Согласно второму свойству, имеем:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \text{ — бесконечно малая}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 \text{ — бесконечно малая}$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4 \text{ — бесконечно малая}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}) + \alpha_n \text{ — бесконечно малая, ч. т. д.}$$

Нужно помнить, что это свойство доказано нами только для того случая, когда количество бесконечно малых слагаемых конечное, хотя бы и очень большое. Если же нужно сложить бесконечно большое число бесконечно малых величин, то указанное свойство может оказаться неверным. Так, например, при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного в окружность многоугольника длины этих сторон будут бесконечно малыми (см. пример 2 § 41), однако их сумма, в пределе равная длине окружности, не есть бесконечно малая величина.

§ 43. Теоремы о пределах.

Теорема I. *Переменная величина не может иметь двух различных пределов.*

Доказательство. Допустим, что переменная x имеет два разных предела A и B. В таком случае согласно определению предела (§ 41) разность между переменной и ее пределом должна быть бесконечно малой, т. е.

$$x - A = \alpha,$$
$$x - B = \beta,$$

где α и β — бесконечно малые величины.

Вычтя из первого равенства второе, получим:

$$x - A - x + B = \alpha - \beta,$$

или

$$\alpha - \beta = B - A.$$

Левая часть этого равенства как разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая; правая же часть — величина постоянная. Но бесконечно малая величина может равняться постоянной только в том случае, если эта постоянная равна нулю (§ 38); следовательно, $B - A = 0$, отсюда $A = B$, т. е. переменная величина имеет один предел.

Следствие. *Если две переменные величины, имеющие пределы, при всех своих изменениях равны между собой, то равны и их пределы.*

В самом деле, каждая из переменных по доказанному имеет по одному пределу, но так как переменные равны между собой при всех изменениях, то они и стремятся к одинаковой постоянной, т. е. имеют равные пределы.

Теорема II. *Предел суммы конечного числа переменных величин, имеющих пределы, равен сумме пределов этих переменных.*

Доказательство. Возьмем две переменные величины x и y, имеющие пределами соответственно A и B, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \lim x = A, \\ \lim y = B. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Согласно определению предела (§ 41) разности $x - A$ и $y - B$ суть бесконечно малые величины, т. е.

$$x - A = \alpha,$$
$$y - B = \beta,$$

где α и β — бесконечно малые величины.

Сложив эти равенства, получим:

$$(x + y) - (A + B) = \alpha + \beta.$$

В левой части последнего равенства имеем разность между переменной $x + y$ и постоянной $A + B$, в правой же части бесконечно малую величину (см. второе свойство в § 42). Следовательно, согласно определению предела имеем:

$$\lim (x + y) = A + B.$$

Учитывая равенства (1), можем написать:

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y.$$

Точно так же можно доказать эту теорему для трех, четырех и любого конечного числа переменных.

Теорема III. *Предел разности переменных, имеющих пределы, равен разности пределов этих переменных.*

Как известно, разность можно рассматривать как алгебраическую сумму, а потому теорему II можно распространить и на разность.

Теорема IV. *Предел произведения конечного числа переменных, имеющих пределы, равен произведению пределов этих переменных.*

Доказательство. Возьмем две переменные величины x и y, имеющих пределами соответственно A и B, т. е.

$$\lim x = A,$$
$$\lim y = B.$$

По определению предела [(1) § 41], можем написать:

$$x = A + \alpha,$$

$$y = B + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые величины.

Перемножив эти равенства, получим:

$$xy = AB + \beta A + \alpha B + \alpha\beta,$$

откуда

$$xy - AB = \beta A + \alpha B + \alpha\beta.$$

В левой части последнего равенства имеем разность между переменной xy и постоянной AB, в правой же части каждое слагаемое — бесконечно малая величина (см. первое свойство в § 42), а потому сумма их — также величина бесконечно малая (следствие второго свойства § 42). Таким образом, разность $xy - AB$ — бесконечно малая величина, а потому, по определению предела,

$$\lim xy = AB,$$

или

$$\lim xy = \lim x \lim y.$$

Эту теорему можно доказать для любого конечного числа переменных сомножителей.

Следствие 1. *Предел произведения постоянной величины на переменную, имеющую предел, равен произведению постоянной на предел переменной, т. е.*

$$\lim ax = a \lim x,$$

где a — постоянная, а x — переменная.

Если a — постоянная величина, то, очевидно,

$$\lim a = a.$$

Поэтому согласно теореме IV получим:

$$\lim ax = \lim a \lim x = a \lim x.$$

Следствие 2. *Предел степени переменной, имеющей предел, равен той же степени предела переменной, т. е.*

$$\lim x^m = (\lim x)^m.$$

В самом деле, x^m можно представить как произведение m одинаковых сомножителей; тогда

$$\lim x^m = \lim (x \cdot x \cdot x \ldots x) = \lim x \lim x \lim x \ldots \lim x = (\lim x)^m.$$

Выведенное следствие, как доказывается в подробном курсе анализа, справедливо для любого значения m.

Пользуясь этим, можно сказать, что *предел корня из переменной, имеющей предел, равен корню этой же степени из предела переменной, т. е.*

$$\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

Действительно, представив $\sqrt[m]{x}$ в виде степени $x^{\frac{1}{m}}$, получим:

$$\lim \sqrt[m]{x} = \lim x^{\frac{1}{m}} = (\lim x)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

Теорема V. *Предел частного от деления двух переменных, имеющих пределы, равен частному от деления пределов делимого и делителя при условии, что предел делителя не равен нулю.*

Доказательство. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \lim x &= A \\ \text{и} \qquad \lim y &= B \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

причем $B \neq 0$. Примем без доказательства существование предела $\frac{x}{y}$ ввиду сложности этого вопроса; докажем только, что он равен частному от деления пределов x и y.

Положим

$$\frac{x}{y} = z, \tag{3}$$

откуда

$$x = yz.$$

Приняв во внимание, что x, y и z имеют пределы, применим теорему о пределе произведения:

$$\lim x = \lim y \lim z$$

или

$$A = B \lim z,$$

откуда

$$\lim z = \frac{A}{B}.$$

Согласно равенствам (2) и (3) имеем:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

при условии

$$\lim y \neq 0.$$

§ 44. Предел функции. Пусть дана функция

$$y = x^2 - 4. \tag{1}$$

О пределе функции можно говорить только при условии задания предела, к которому стремится ее аргумент x; без этого условия вопрос о пределе функции не имеет смысла.

Положим, что $x \to 3$; посмотрим, существует ли при этом условии предел данной функции и если существует, то какой*).

Говоря о пределе переменной в § 41, мы показали, что эта переменная может стремиться к своему пределу, изменяясь разными способами.

Пусть в нашем примере x принимает такую последовательность значений:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots \to 3;$$

тогда функция (1) получит соответственно значения:

$$5{,}6;\ 5{,}06;\ 5{,}006;\ 5{,}0006;\ \ldots \to 5.$$

Мы видим, что данная функция при $x \to 3$ имеет предел, равный 5. Это записывают так:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5.$$

Если в равенстве (1) аргументу дать значения:

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \ldots \to 3,$$

то и в этом случае предел нашей функции будет тот же, в чем легко убедиться соответствующими вычислениями.

Итак, функция (1) имеет предел при $x \to 3$.

---

*) В полных курсах анализа дается определение понятия предела функции. Ввиду сложности этого определения мы не находим возможным здесь его приводить.

Показанный выше способ нахождения предела функции громоздок, поэтому на практике он не применяется. Доказанные нами теоремы о пределах (§ 43) позволяют упростить решение этой задачи.

I. Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4)$.

Решение. Применяя теорему III и следствие 2 теоремы IV о пределах, получим:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 4) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim 4 = (\lim_{x \to 3} x)^2 - \lim 4 = 3^2 - 4 = 5.$$

Этот предел равен ранее найденному нами для функции $y = x^2 - 4$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1}$.

Решение. Прежде чем применить теорему о пределе частного, нужно узнать, не будет ли предел делителя равен нулю при $x \to 2$. Пользуясь теоремой II и следствием 1 теоремы IV о пределах, найдем:

$$\lim_{x \to 2} (2x + 1) = 2 \lim_{x \to 2} x + \lim 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Предел делителя не равен нулю, поэтому теорема V о пределах может быть применена к нашей функции. Таким образом,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{\lim (x^2 + 3x)}{\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1)}.$$

Но

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x) = (\lim_{x \to 2} x)^2 + 3 \lim_{x \to 2} x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{(\lim x)^2 + 3 \lim x}{2 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim 1} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{10}{5} = 2.$$

Подставив в выражения функций в последних примерах вместо x его предельное значение, мы получим те же результаты. В полных курсах анализа доказывается законность такой подстановки при условии, что к функции, предел которой находится, применимы теоремы о пределах.

В дальнейшем мы будем пользоваться этим приемом, так как он значительно ускоряет процесс отыскания предела функции.

...азберем примеры, в которых предел делителя равен ... следовательно, теорема о пределе частного непри... при этом может представиться два случая.

...едел делимого не равен нулю.

...ер 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$.

...ние. Найдем предел делителя, заменяя x его пре...ачением:

$$\lim_{x\to 3}(2x-6)=2\cdot 3-6=0.$$

...теорему о пределе частного в данном примере ...нельзя (деление на 0 недопустимо). Мы знаем, ...$(2x-6)=0$, то $2x-6$ есть бесконечно малая ...братная ей величина $\frac{1}{2x-6}$ при $x\to 3$ есть бесконечно большая, а следовательно, и про...му $\frac{1}{2x-6}\cdot 3$ — бесконечно большая величина, т. е.

$$\lim_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}=\infty.$$

...лимого равен нулю.

...Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^2+x}$.

...редел делителя

$$\lim_{x\to 0}(x^2+x)=0^2+0=0$$

$$\ldots(x^2+2x)=0^2+2\cdot 0=0.$$

...им выражение $\frac{0}{0}$, не имеющее смысла.

...следует, что данная функция не имеет ...ждения нужно предварительно преоб...зделив числитель и знаменатель на x, ...до перехода к предельному значению

$$\frac{x^2+2x}{x^2+x}=\frac{x+2}{x+1}. \tag{2}$$

К выражению $\frac{x+2}{x+1}$ теорема о пределе частного применима, так как предел его делителя не равен нулю. Найдем предел дроби $\frac{x+2}{x+1}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2.$$

Приняв во внимание равенство (2) и следствие теоремы I § 43, будем иметь:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2.$$

Этот результат можно подтвердить и вычислением значений данной функции при значениях аргумента, близких к нулю, например при

$$x = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots$$

Следующая таблица показывает характер изменения функции

$$y = \frac{x^2+2x}{x^2+x} \text{ при } x \to 0:$$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\ldots \longrightarrow 0$
$y = \frac{x^2+2x}{x^2+x}$	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\ldots \longrightarrow 2$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

Решение. И в данном случае пределы делимого и делителя равны нулю, поэтому функцию необходимо предварительно преобразовать, сократив ее на $x-3$, что допустимо, так как до перехода к предельному значению $x-3 \neq 0$.

Итак,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 3+3 = 6.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Решение. Как и в предыдущих примерах, данная функция должна подвергнуться преобразованию. Для этой цели освободим числитель от иррациональности, умножив оба члена дроби на $\sqrt{x+3}+2$, и сделаем необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}.$$

III. Разберем примеры отыскания предела функции при $x\to\infty$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3x+2}$

Решение. Делитель $3x+2$ при $x\to\infty$ неограниченно растет, т. е. представляет бесконечно большую величину; обратная же ей величина $\frac{1}{3x+2}$ — бесконечно малая (§ 40). Следовательно, произведение $\frac{1}{3x+2}\cdot 2$ стремится к нулю, если $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x+2}=0.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}$.

Решение. Делимое и делитель данной функции при $x\to\infty$ — бесконечно большие величины, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем данное выражение, разделив делимое и делитель на x:

$$\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Но $\frac{5}{x}$ и $\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ — бесконечно малые величины, а потому пределы делимого и делителя будут соответственно равны 3 и 4, а предел функции 0,75.

Процесс нахождения предела данной функции запишется так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{4+0}=0{,}75.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}$.

Решение. Разделив оба члена дроби на x^2, получим:

$$\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

При $x\to\infty$ отношения $\frac{1}{x}$ и $\frac{4}{x^2}$ стремятся к нулю, а $2x$ неограниченно растет; следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=1,$$

а вся дробь

$$\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}\to\infty.$$

Итак,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}=\infty.$$

Упражнения

Найти:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x-3}{2x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{5}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1+2x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2+x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2+x^3}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{3x+2x^2}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{2x^3}$. 13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. 14. $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$. 16. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. 18. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$.

19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$. 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$.

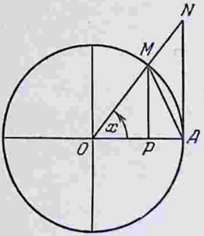
21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$. 22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$. 24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2+x}$. 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$. 27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$. 29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^4+x^5}$. 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^5}{x^2+x^3}$.

§ 45. Предел отношения $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$. Так как в данном случае $\lim x=0$, то для нахождения предела отношения $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ нельзя применить теорему о пределе частного; нельзя также сделать никаких преобразований для вычисления предела данного отношения. Поэтому используем геометрические соображения.



Черт. 69.

Возьмем окружность радиуса R и центральный угол x, выраженный в радианной мере (черт. 69). Проведем хорду AM и касательную AN, пересекающую продолжение радиуса OM в точке N. Из чертежа видно:

Площ. $\triangle AOM <$ площ. сектора $AOM <$ площ. $\triangle AON$.

Выражая площади треугольников и сектора по формулам, можем переписать:

$$\frac{OA\cdot PM}{2}<\frac{OA\cdot \smile AM}{2}<\frac{OA\cdot AN}{2};$$

после сокращения на $\frac{OA}{2}$ получим:

$$PM < \smile AM < AN.$$

Разделим все члены последних неравенств на R:

$$\frac{PM}{R} < \frac{\smile AM}{R} < \frac{AN}{R}. \qquad (1)$$

Но

$$\frac{PM}{R} = \sin x,$$

$$\frac{AN}{R} = \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{\smile AM}{R} = x,$$

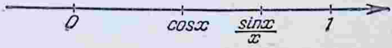
поэтому неравенства (1) принимают вид:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

или

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Так как x — острый угол, то $\sin x$ — величина положительная;



Черт. 70

разделив полученные неравенства на $\sin x$, найдем:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (2)$$

Положим теперь, что $x \to 0$; тогда

$$\cos x \to 1.$$

Но так как отношение $\frac{\sin x}{x}$ согласно неравенствам (2) заключено между единицей и $\cos x$, то оно и подавно стремится к единице.

Это стремление отношения $\frac{\sin x}{x}$ к единице хорошо выясняется, если величины, содержащиеся в неравенствах (2), представить на координатной оси (черт. 70).

Итак,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

§ 46. Эквивалентные бесконечно малые величины. *Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел отношения которых равен единице.*

В § 45 был рассмотрен предел отношения двух бесконечно малых величин $\sin x$ и x, причем этот предел оказался равным единице; поэтому $\sin x$ и x — эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$.

Можно указать и на другие эквивалентные бесконечно малые величины, например $\operatorname{tg} x$ и x при $x \to 0$. В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

В подробных курсах анализа доказывается, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых величин каждую из них можно заменить ей эквивалентной.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.

Решение. Мы уже показали, что $\sin x$ и x при $x \to 0$ — эквивалентные бесконечно малые величины; поэтому в данном выражении можно $\sin \frac{x}{2}$ заменить его аргументом $\frac{x}{2}$. Сделав это, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \lim \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

Решение. При $x\to 0$ также $ax\to 0$ и $bx\to 0$; поэтому $\sin ax$ и $\sin bx$ — бесконечно малые величины. Заменяя $\sin ax$ и $\sin bx$ эквивалентными бесконечно малыми величинами соответственно ax и bx, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\lim\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

Упражнения.

Найти:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$. 13. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x^2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{x}$. 17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3\sin x}$. 19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$. 21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

§ 47. Предел выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$. В подробных курсах анализа доказывается, что предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ существует, что он больше 2 и меньше 3 и выражается иррациональным числом. Для пояснения сказанного составим следующую таблицу значений выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при возрастающих значениях n:

n	1	2	3	4	5	10	100	1000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,705	2,717

Из таблицы видно, что по мере возрастания n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ также возрастает, замедляясь в росте.

Предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$, равный приближенно 2,718, принято обозначать буквой e.

Итак,

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718.$$

§ 48. Натуральные логарифмы. В высшей математике число e имеет очень важное значение, которое можно сравнить со значением π в геометрии. Число e принимают за основание *натуральных*, или *неперовых* *), логарифмов, имеющих большое применение в математическом анализе, так как с их помощью многие формулы можно представить в более простом виде, чем при пользовании десятичными логарифмами. Для натурального логарифма установлен символ ln.

Натуральный и десятичный логарифмы одного и того же числа связаны простым соотношением, позволяющим переходить от десятичного логарифма числа к натуральному, и наоборот.

Для вывода этого соотношения возьмем число N и представим его в виде двух степеней, приняв за основания их числа 10 и e:

$$N = 10^x$$

и

$$N = e^y,$$

где x и y, как известно, называются логарифмами числа N, причем x — *десятичным*, y — *натуральным*. Из написанных равенств следует

$$10^x = e^y.$$

Прологарифмировав обе части этого равенства по основанию 10, получим:

$$x \lg 10 = y \lg e,$$

*) Натуральные логарифмы названы неперовыми по имени шотландского математика Непера, впервые применившего логарифмические вычисления.

или

$$x = y \lg e,$$

откуда

$$y = \frac{x}{\lg e}.$$

Заменяя x и y соответственно через $\lg N$ и $\ln N$, напишем:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}.$$

В таблице логарифмов найдем:

$$\lg e = 0{,}4343.$$

Поэтому

$$\ln N = \lg N \cdot \frac{1}{\lg e} = \lg N \cdot \frac{1}{0{,}4343} = \lg N \cdot 2{,}303, \qquad (1)$$

т. е. *натуральный логарифм числа равен произведению десятичного логарифма этого числа на множитель, равный* 2,303.

Отсюда следует, что натуральный логарифм числа больше десятичного в 2,303 раза.

Из равенства (1) находим:

$$\lg N = \ln N \cdot 0{,}4343,$$

т. е. *десятичный логарифм числа равен произведению натурального логарифма этого числа на множитель, равный* 0,4343.

Пример. Найти $\ln 2$.

Решение. $\ln 2 = \lg 2 \cdot 2{,}303 = 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx 0{,}693.$

Упражнения

Найти:

1. $\ln 3$. 2. $\ln 12$. 3. $\ln 4{,}5$. 4. $\ln 10{,}5$.
5. $\ln 0{,}2$. 6. $\ln 0{,}16$. 7. $\ln 0{,}84$. 8. $\ln 0{,}1$.

ГЛАВА VI

ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

§ 49. Символика функциональной зависимости. Как указывалось (§ 6), переменная y называется функцией переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует вполне определенное значение y. Задать функцию аналитически — значит указать действия, которые нужно произвести над аргументом x, чтобы получить соответствующее значение y.

Пусть, например, функция задана уравнением

$$y = \frac{x^2 + 2\sqrt{x} - 1}{x}.$$

Этим самым нам даются и те действия, которые необходимо совершить над x, чтобы получить y.

Часто бывает, что одна и та же функция, заданная иногда сложным уравнением, не раз встречается в изложении одного и того же вопроса. Условились для краткости записи правую часть уравнения, задающего функцию, обозначать символом $f(x)$ и писать:

$$y = f(x).$$

Это равенство читается так: «игрек равен эф от икс» или «игрек есть функция от икс».

Иногда нас будет интересовать не какая-нибудь конкретная функция с известной совокупностью действий над аргументом, а только факт, что одна переменная величина зависит от другой переменной величины. В этом случае также принято писать $y = f(x)$, разумея под символом $f(x)$ неизвестную совокупность действий над аргументом x.

Если в одном и том же вопросе речь идет о нескольких различных функциях, то, чтобы не смешивать их, символы этих функций обозначают разными буквами, например: F, φ, ψ.

§ 50. Частное значение функции. Область существования функции. I. Пусть функция y задана уравнением

$$y = x^2 - x. \quad (1)$$

Дадим x ряд значений, например $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ и т. д.; тогда y получит соответствующие значения: $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 20$ и т. д.

Величины x_1, x_2, x_3 называются *частными значениями аргумента*, а y_1, y_2, y_3 — *частными значениями функции*.

Если совокупность действий над аргументом функции (1) обозначить символом $f(x)$, то можно написать:

$$f(x) = x^2 - x.$$

В этом случае найденные значения функции запишутся так:

$$f(1) = 0, \quad f(3) = 6, \quad f(5) = 20.$$

Пример. Дана функция $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Найти:

$$1)\ f(-1), \quad 2)\ f(0), \quad 3)\ f(2), \quad 4)\ f(a).$$

Решение. 1) $f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$,

2) $f(0) = 2 \cdot 0 + 0 - 1 = -1$,

3) $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 9$,

4) $f(a) = 2a^2 + a - 1$.

II. Как видно, функция в разобранном примере имеет действительные значения при любых действительных значениях x. Однако часты случаи, когда функция при некоторых значениях аргумента не имеет числовых значений или, как говорят, *не существует*. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ при $x = 0$ не существует, так как $\frac{1}{0}$ не выражается никаким числом; функция $y = \sqrt{x}$ при $x < 0$ не существует: она имеет мнимые значения при $x < 0$.

Определение. *Совокупность всех действительных значений аргумента, при которых функция имеет действительные значения, называется областью существования функции.*

Например, областью существования функции $y = x^2$ является совокупность всех действительных значений x, т. е.

$$-\infty < x < \infty;$$

для функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ область существования состоит из действительных значений x, абсолютная величина которых не меньше единицы, т. е.

$$|x| \geqslant 1.$$

Упражнения

1. Дана функция $f(x) = 2x - 1$. Определить

$$1)\ f(2),\quad 2)\ f(0),\quad 3)\ f(-1).$$

2. Дана функция $f(x) = 3x^2 + 1$. Определить

$$1)\ f(-2),\quad 2)\ f(5),\quad 3)\ f(2a),\quad 4)\ f(a-1).$$

3. Показать, что для функции $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ справедливо равенство $f(-3) = f(3)$.

4. Дана функция $f(x) = x^3 - x$. Доказать, что $f(-x) = -f(x)$.

5. Как записать, что числа 2 и -3 служат корнями уравнения $f(x) = 0$?

6. Найти область существования функций:

1) $y = \dfrac{1}{1+x}$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

3) $y = \sqrt{x-1}$;

4) $y = \sqrt{1-x}$;

5) $y = \ln x$;

6) $y = e^x$;

7) $y = \arcsin x$.

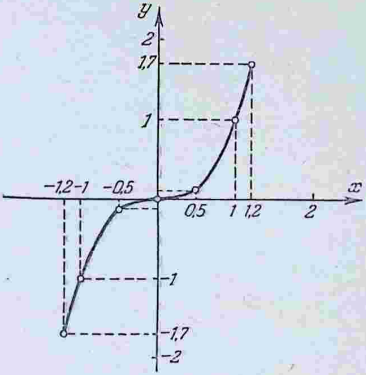
§ 51. Геометрическое изображение функций. Пусть дана функция $y = f(x)$. Из аналитической геометрии мы знаем, что уравнение $y = f(x)$, вообще говоря, определяет некоторую линию, которую называют *графиком функции*. Этот график дает нам наглядное представление о характере изменения данной функции.

Пример 1. Построить график функции $y = x^3$.

Решение. Полагая $x = -1{,}2;\ -1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}2$, найдем соответствующие значения функции y и запишем результаты вычисления в таблицу:

x	$-1{,}2$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,2
y	$-1{,}7$	-1	$-0{,}1$	0	0,1	1	1,7

Рассматривая каждую пару найденных значений x и y как координаты точек плоскости, построим эти точки и, соединив их плавной линией, получим кривую, называемую *кубической параболой* (черт. 71).



Черт. 71.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнением

$$y^2 = x^3.$$

Решение. Найдем y из данного уравнения

$$y = \pm\sqrt{x^3}.$$

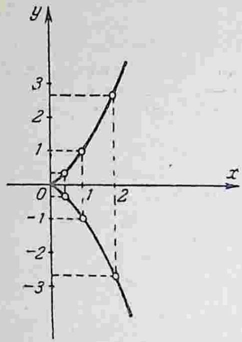
Мы видим, что уравнением $y^2 = x^3$ заданы две функции:

$$y = \sqrt{x^3} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{x^3},$$

область существования которых $x \geqslant 0$. Составим следующую таблицу значений x и y, вычисляя $\sqrt{x^3}$:

x	0	0,5	1	2
y	0	$\pm 0{,}35$	± 1	$\pm 2{,}8$

Построив точки по найденным координатам и соединив их плавной линией, получим кривую, называемую *полукубической параболой* (черт. 72).



Черт. 72.

Пример 3. Построить график функции

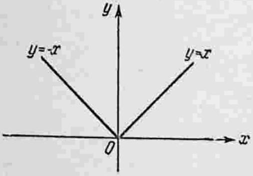
$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Решение. Здесь функция задана двумя уравнениями: $y=x$, где x имеет только положительные значения и нуль, и $y=-x$, где x имеет только отрицательные значения. Таким образом, область существования данной функции состоит из всех действительных чисел, график же ее представляет ломаную линию, состоящую из биссектрис первого и второго координатных углов (черт. 73).

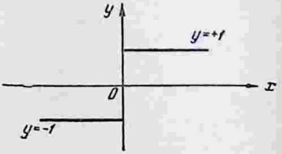
Пример 4. Построить график функции

$$y=\begin{cases} +1, & \text{если } x\geqslant 0, \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Решение. Область существования данной функции составляют все действительные числа, а график ее состоит из двух полупрямых параллельных оси Ox (черт. 74).



Черт. 73.



Черт. 74.

Примечание. Как известно из алгебры, функция может быть задана тремя способами: аналитическим, табличным и графическим. Эти три способа задания функции мы имели в первых двух разобранных примерах. Хотя каждый из этих способов имеет применение в математике, однако аналитическое задание функции играет особо важную роль.

§ 52. Приращение функции. Если переменная величина x изменила свое значение от x_1 до x_2, то разность между новым ее значением и первоначальным называется *приращением переменной* и обозначается символом Δx *) (читается: «дельта икс»).

Таким образом,

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

отсюда

$$x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Величина x_2 иначе называется *наращенным значением переменной*.

Приращение переменной может быть как положительным, так и отрицательным числом. Если, например, значение x изменяется от 5 до 5,2 то

$$\Delta x = 5{,}2 - 5 = 0{,}2,$$

а если оно изменяется от 10 до 9,7, то

$$\Delta x = 9{,}7 - 10 = -0{,}3.$$

Пусть дана функция

$$y = x^2.$$

Предположим, что аргумент ее имел первоначальное значение $x_1 = 3$, а потом изменил свое значение на $x_2 = 3{,}5$; тогда

$$\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5.$$

Найдя значения функции сначала при $x_1 = 3$, а потом при $x_2 = 3{,}5$, получим:

$$y_1 = 3^2 = 9,$$
$$y_2 = 3{,}5^2 = 12{,}25.$$

Величина y_1 называется *первоначальным значением функции*, y_2 — *новым* или *наращенным* ее *значением*, а разность

*) Заметим, что Δx нельзя рассматривать как произведение двух множителей; символ Δ неотделим от x, как, например, в выражении $\sin x$ символ $\sin$ неотделим от x.

$y_2 - y_1$ — *приращением функции*. Согласно принятому символу для приращений можем написать:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 12{,}25 - 9 = 3{,}25.$$

Найдем приращение Δy функции $y = x^2$ при любом изменении x.

Положим, что аргумент ее имеет любое первоначальное значение x; тогда первоначальное значение данной функции будет:

$$y = x^2. \tag{1}$$

Допустим теперь, что x получает приращение Δx; тогда новое (наращенное) значение аргумента будет $x + \Delta x$. Чтобы найти новое (наращенное) значение функции, нужно в данное выражение функции вместо x подставить $x + \Delta x$; получим:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2. \tag{2}$$

Вычтя из равенства (2) равенство (1), найдем:

$$\begin{array}{r@{}l} -\,y + \Delta y &= (x + \Delta x)^2 \\ y \qquad &= x^2 \\ \hline \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - x^2, \end{array}$$

или после преобразования

$$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{3}$$

Мы нашли *приращение* данной *функции в общем виде*.

Чтобы получить приращение этой функции для частного случая, который мы имели в начале параграфа, можно в равенстве (3) x и Δx заменить соответственно числами 3 и 0,5, после чего найдем:

$$\Delta y = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + (0{,}5)^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25.$$

Последний результат совпадает с ранее найденным.

Таким образом, для нахождения приращения функции нужно:

1) *в данном выражении функциональной зависимости заменить* x *на* $x + \Delta x$, *а* y *на* $y + \Delta y$;

2) *из полученного выражения вычесть почленно данное.*

Если функция задана в общем виде $y = f(x)$, то согласно высказанному правилу ее приращение можно написать по формуле

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{4}$$

Пример 1. Найти приращение функции $y=2x^2+3$.

Решение. 1. $y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2+3=$
$$=2x^2+4x\,\Delta x+2(\Delta x)^2+3.$$

2. $$\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} y+\Delta y=2x^2+4x\,\Delta x+2(\Delta x)^2+3 \\ y \qquad\quad =2x^2+3 \end{array} \\ \hline
\Delta y=4x\,\Delta x+2(\Delta x)^2
\end{array}$$

Пример 2. Найти приращение функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение 1. $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$.

2. $$-\begin{array}{l} y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x} \\ y \qquad\quad =\frac{1}{x} \end{array}$$
$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Упражнения

1. Дана функция $y=2x+1$. Найти ее приращение, если x изменяется: 1) с 4 на 4,3; 2) с 0 на 0,2; 3) с 2 на 1,5.

2. Найти приращение функции $y=2x^2$, если x изменяется: 1) с 1 на 1,3; 2) с $-0,2$ на $+0,2$; 3) с 0 на a.

3. Найти приращение функции $y=x^2-1$, если известно: 1) $x_1=2$, $\Delta x=0,5$; 2) $x_1=3$, $\Delta x=-0,6$.

4. Найти приращение функции $y=2x^2-x+1$, если даны: 1) $x_1=-3$, $\Delta x=0,5$; 2) $x_1=a$, $\Delta x=h$.

5. Дано $v=\frac{12}{p}$, $p_1=1$, $\Delta p=0,4$; найти Δv.

6. Дано $y=\sin x$, $x_1=\frac{\pi}{2}$, $\Delta x=\frac{\pi}{6}$; найти Δy.

7. Найти в общем виде приращение функций:

1) $y=3x+2$, 2) $y=2x^2-1$, 3) $y=3x^2-2x$,
4) $y=-x^2-3x$, 5) $y=x^3$, 6) $y=2x^3-2x^2$,
7) $y=x-\frac{1}{x}$.

§ 53. Геометрическое изображение приращений аргумента и функции. Пусть дана функция $y=f(x)$, график которой представлен на черт. 75.

Положим, что отрезок $OP_1=x$ изображает первоначальное значение аргумента; тогда значение функции при этом значении аргумента будет $f(x)$ и геометрически представится ординатой P_1M_1 точки M_1:

$$P_1M_1 = f(x). \tag{1}$$

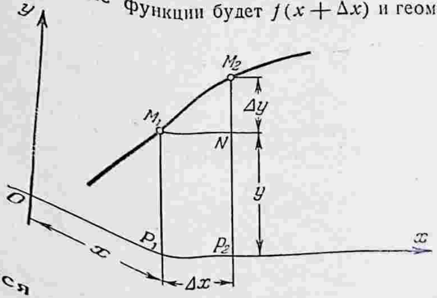
Дадим аргументу x приращение

$$P_1P_2 = \Delta x;$$

тогда новое значение x будет:

$$OP_2 = x + \Delta x;$$

новое же значение функции будет $f(x + \Delta x)$ и геометрически



Черт. 75.

представится ординатой P_2M_2 точки M_2:

$$P_2M_2 = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

Проведя из точки M_1 прямую, параллельную OP_2, до пересечения с прямой P_2M_2 в точке N, имеем:

$$NM_2 = P_2M_2 - P_2N = P_2M_2 - P_1M_1.$$

Согласно равенствам (1) и (2)

$$NM_2 = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Выделенная в правой части разность равна Δy [см. формулу (4) § 52], а потому

$$NM_2 = \Delta y.$$

Следовательно, *геометрически приращение аргумента изображается приращением абсциссы точки кривой, а приращение функции — приращением ординаты этой точки.*

§ 54. Непрерывность функции. Пусть дуга AB есть график функции $y=f(x)$ (черт. 76). Возьмем на этой дуге произвольную точку $M(x; y)$ и дадим x приращение

$$PP_1=\Delta x,$$

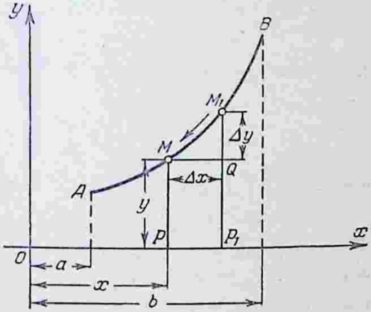
тогда y получит приращение

$$QM_1=\Delta y.$$

Положим, что $\Delta x\to 0$ и пусть при этом $\Delta y\to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Это значит, что если $\Delta x\to 0$, то ордината P_1M_1 неограниченно приближается к PM, а точка M_1 к точке M и, следова-



Черт. 76.

тельно, на дуге AB найдется точка, сколь угодно близкая к M. В этом случае говорят, что функция $y=f(x)$ *непрерывна при данном значении* x.

Определение. *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной при данном значении x, если бесконечно малому*

В рассмотренном примере разрыв заключается в том, что при переходе аргумента через $x=0$ (слева направо) функция изменяется с $-\infty$ на $+\infty$.

Подобные разрывы имеют вообще дробные функции при тех значениях x, при которых знаменатель обращается в нуль, а значения функции неограниченно возрастают ($y \to \infty$). Например, функция $y=\frac{4x}{x-3}$ имеет разрыв при $x=3$; функция $y=\frac{10}{x^2-4}$ при $x_1=2$ и $x_2=-2$ и т. п.

Существуют и другого рода разрывы, когда функция меняет одно конечное значение на другое, тоже конечное. Подобный пример представляет функция

$$y=\begin{cases} +1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } x<0, \end{cases}$$

график которой изображен на чертеже 74. Здесь при переходе аргумента через $x=0$ (слева направо) функция меняет значение с -1 на $+1$.

Пример. Исследовать непрерывность функции $y=x^2$.

Решение. Дадим x приращение Δx; тогда функция y получит приращение [формула (3), § 52]:

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Найдем предел Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\,[2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] = 2x \cdot 0 + 0^2 = 0.$$

олученное равенство справедливо при любом конечном ачении x; поэтому функция $y=x^2$ непрерывна при любом ачении x. Представление о непрерывности функции $y=x^2$ ет ее график (черт. 8).

Рассмотрим другое определение непрерывности функции, тесно занное с данным выше.

Найдем приращение функции $y=f(x)$ при изменении аргута от $x=c$ до $x=c+\Delta x$; согласно формуле (4) § 52 имеем:

$$\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c).$$

Если данная функция непрерывна при $x=c$, то, заменив в раtве (1) Δy найденным его выражением, напишем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(c+\Delta x) - f(c)] = 0.$$

По теореме о пределе разности (§ 43) будем иметь:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(c+\Delta x) - f(c)] = \lim_{\Delta x \to 0} f(c+\Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = 0$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Но $f(c)$ — постоянная величина, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c+\Delta x) = f(c). \qquad (2)$$

Если

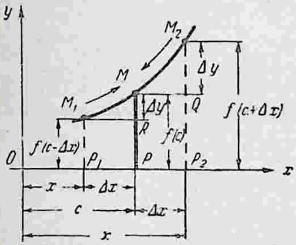
$$c + \Delta x = x,$$

то из условия $\Delta x \to 0$ следует. $x \to c$; равенство (2) примет вид:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c). \qquad (3)$$

Таким образом, из равенства (1) вытекает равенство (3). Можно показать, что, наоборот, из (3) следует (1).

Отсюда видно, что равенство (3) выражает условие непрерывности функции при данном x, равносильное рассмотренному в начале параграфа.



Черт. 78.

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной при $x = c$, если предел этой функции при $x \to c$ равен значению функции при $x = c$.*

Если равенство (3) выполняется для любого значения аргумента от $x = a$ до $x = b$, то функция называется непрерывной в указанном промежутке.

Поясним сказанное геометрически. Пусть на графике непрерывной функции $y = f(x)$ дана точка M с абсциссой $x = c$ (черт. 78) и точка M_2 с абсциссой $x = c + \Delta x$, тогда их ординаты соответственно будут:

$$PM = f(c) \quad \text{и} \quad P_2M_2 = f(c + \Delta x) = f(x).$$

Так как функция непрерывна, то при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а точка M_2 неограниченно приближается к M. Но при этом, как видно,

$$c + \Delta x = x \to c$$

и ордината $P_2M_2 = f(x)$ стремится к ординате $PM = f(c)$.

Если взять точку M_1 с абсциссой $x = c - \Delta x$, то и в этом случае при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а точка M_1 неограниченно приближается к M. Но тогда, очевидно,

$$c - \Delta x = x \to c$$

и ордината $P_1M_1 = f(x)$ стремится к ординате $PM = f(c)$.

Мы видим, что, если данная функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = c$, то равенство (3) выполняется при стремлении x к c как с правой стороны, так и с левой. Очевидно, верно и обратное утверждение: если равенство (3) выполняется при стремлении x к c как справа, так и слева, то функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = c$.

Если это условие нарушается, то функция имеет разрыв. Так, на графике 74 мы имеем при $x = 0$ разрыв функции: здесь предел ее при стремлении аргумента к нулю справа равен $+1$, а слева он имеет уже другое значение, равное -1.

Заметим, что равенство (3) подтверждает справедливость сказанного в § 44 о том, что для нахождения предела функции достаточно подставить вместо аргумента его предельное значение.

Упражнения

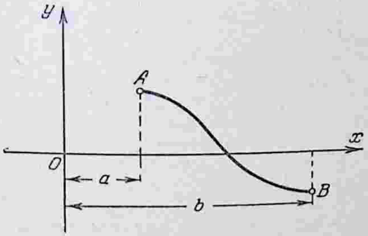
Исследовать непрерывность следующих функций:

1. $y = 2x$. **2.** $y = x^2 - 3$. **3.** $y = x - 2x^2$.
4. $y = x^3$. **5.** $y = \sin x$. **6.** $y = \cos x$.

Указать точки разрыва функций:

7. $y = \frac{1}{1-x}$. **8.** $y = \frac{x}{x-2}$. **9.** $y = \frac{2x}{x+1}$. **10.** $y = \operatorname{tg} x$.

§ 55. Свойство непрерывной функции. *Непрерывная функция может изменить знак только при переходе через*



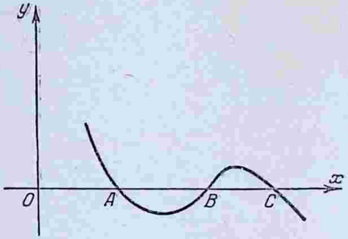
Черт. 79.

нуль. Это свойство непрерывной функции легко выясняется геометрически. В самом деле, пусть

$$f(x) > 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad (\text{черт. 79, точка } A),$$
$$f(x) < 0 \quad \text{при} \quad x = b \quad (\text{черт. 79, точка } B).$$

Если изменять непрерывно значение абсциссы от a до b, то график функции в силу его непрерывности должен пересечь ось Ox. В точке же пересечения кривой с осью абсцисс значение функции равно нулю.

Если непрерывная функция меняет знак подряд несколько раз, то график ее пересекает ось Ox столько же раз (черт. 80).



Черт. 80.

Ясно, что эта функция сохраняет один и тот же знак в промежутке между двумя соседними точками пересечения ее графика с осью Ox (между A и B отрицательный, между B и C положительный), а также для всех точек налево от A (положительный) и направо от C (отрицательный).

§ 56. Классификация функций.

Явные и неявные функции. Функции делятся на *явные* и *неявные*. *Функция называется явной, если уравнение, задающее ее, разрешено относительно этой функции.*

Например, в уравнении $y = 2x^2 - x + 3$ y есть явная функция.

Функция называется неявной, если задающее ее уравнение не разрешено относительно этой функции.

Например, в уравнении $x^2 + y^2 = 25$ функция y дается в неявном виде. Однако функцию, заданную последним уравнением, можно представить и в явном виде; действительно, решив это уравнение относительно y, получим $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Но в более сложных случаях часто бывает невозможно сделать такое преобразование.

Классификация явных функций. Явные функции делятся на два класса: *алгебраические* и *трансцендентные* функции.

Алгебраической называется такая функция, над аргументом которой производится конечное число алгебраических операций (сложение, вычитание, умножение, деление и возвышение в рациональную степень).

Например, $y = 2x^2 - 3\sqrt{x} + 1$, $y = \dfrac{4x^2 - 1}{x + 3}$ суть алгебраические функции.

Трансцендентной называется всякая неалгебраическая функция.

Например, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ суть трансцендентные функции.

Трансцендентные функции делятся на несколько видов, простейшие из которых следующие:

1. *Показательная функция* $y = a^x$, где аргумент является показателем степени.
2. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$.
3. *Тригонометрические функции*: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.
4. *Обратные тригонометрические функции*: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

Взаимно обратные функции. Пусть дано уравнение

$$y = x^3, \tag{1}$$

где y — функция x. Выразим отсюда x через y:

$$x = \sqrt[3]{y}. \tag{2}$$

Заменив в уравнении (2) x на y, а y на x, получим:

$$y = \sqrt[3]{x}. \tag{3}$$

Функция y, заданная уравнением (3), называется *обратной* по отношению к функции y, заданной уравнением (1); обе же функции (1) и (3) *взаимно обратны*.

Например, $y = \sin x$ и $y = \operatorname{Arcsin} x$; $y = a^x$ и $y = \log_a x$ суть попарно взаимно обратные функции.

ГЛАВА VII

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

§ 57. Равномерное движение и его скорость. Пусть тело движется равномерно и прямолинейно. Это значит, что в каждую единицу времени оно проходит одно и то же расстояние, называемое *скоростью* этого *движения*. Закон *равномерного движения* выражается формулой

$$s = vt + s_0,$$

представляющей собой функцию первой степени, а геометрически — прямую линию.

Обратно, всякая линейная функция вида

$$s = vt + s_0, \tag{1}$$

где v и s_0 — постоянные величины, выражает закон равномерного прямолинейного движения. Чтобы в этом убедиться, найдем расстояния, пройденные телом к моментам t_1 и t_2. Подставив в равенстве (1) вместо t значения t_1 и t_2, получим:

$$s_1 = vt_1 + s_0,$$
$$s_2 = vt_2 + s_0.$$

Отсюда

$$s_2 - s_1 = (vt_2 + s_0) - (vt_1 + s_0) = v(t_2 - t_1)$$

и

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Обозначив приращение пути $s_2 - s_1$ через Δs, а приращение времени $t_2 - t_1$ через Δt, напишем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v. \tag{2}$$

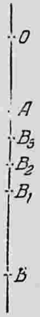
Равенство (2) показывает, что отношение пройденного телом пути к промежутку времени, в течение которого этот путь совершен, величина постоянная. Поэтому $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ представляет скорость равномерного движения.

Следовательно, *линейная функция* $s = vt + s_0$ *выражает закон равномерного прямолинейного движения, причем* v *есть скорость этого движения.*

§ 58. Неравномерное движение и его скорость. Кроме равномерного движения в природе имеет место и *неравномерное* движение. Закон его выражается уже не уравнением первой степени, а более сложным уравнением. Пусть, например, дана функция

$$s = 4{,}9t^2,$$

выражающая закон падения тела. Так как падение тела — движение неравномерное, то возникает вопрос, как определить его скорость в какой-нибудь момент времени. Поступим следующим образом.



Черт. 81.

Допустим, что в начале падения тело было в точке O (черт. 81). По истечении времени t оно пройдет путь, равный

$$s_1 = 4{,}9t^2,$$

и окажется в точке A, а по прошествии времени $t + \Delta t$ от начала движения совершит путь

$$s_2 = 4{,}9\,(t + \Delta t)^2$$

и будет в точке B. Отрезок пути, пройденный телом за время Δt, будет:

$$\begin{aligned} AB = s_2 - s_1 &= 4{,}9\,(t + \Delta t)^2 - 4{,}9t^2 = \\ &= 4{,}9t^2 + 9{,}8t\Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2 - 4{,}9t^2 = \\ &= 9{,}8t\Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Разделив пройденный путь $s_2 - s_1$, равный Δs, на время Δt, получим:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9{,}8t\Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9{,}8t + 4{,}9\Delta t. \qquad (1)$$

Результат деления $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* падения тела на участке пути $AB = \Delta s$.

Однако средняя скорость движения тела не выражает истинной скорости в любой момент времени. Так, например, когда говорят, что поезд идет со скоростью 50 *км* в час, то это не значит, что он движется с этой скоростью во всех точках своего пути; отходя от станции, поезд постепенно увеличивает скорость, доводит ее до наибольшей величины, затем замедляет движение, пока не остановится на следующей станции. Таким образом, на одном участке пути его скорость меньше 50 *км* в час, на другом — больше, в среднем же — 50 *км* в час.

Средняя скорость тем лучше характеризует движение, чем меньше участок пути, на котором она определена; поэтому положим, что промежуток времени Δt падения тела уменьшается, тогда и путь $AB = \Delta s$ будет уменьшаться, становясь равным AB_1, AB_2, AB_3 и т. д. (черт. 81), и для каждого нового значения Δt отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет определять среднюю скорость падения тела на участке пути, все более и более коротком. Положим, что $\Delta t \to 0$, тогда $t + \Delta t \to t$, а отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет стремиться к величине, называемой *скоростью в данный момент времени* t, что соответствует скорости в точке A.

Обозначив эту скорость через v, будем иметь:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Таким образом, *скорость прямолинейного движения тела в данный момент времени* t *есть предел средней скорости в промежутке времени от* t *до* $t + \Delta t$, *когда* $\Delta t \to 0$.

Приняв во внимание равенства (1) и (2), найдем скорость падения тела в момент t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (9{,}8t + 4{,}9\Delta t) = 9{,}8t.$$

Итак,

$$v = 9{,}8t.$$

Упражнения

1. Найти скорость тела, движущегося по закону

$$s = 3t - 5.$$

2. Найти среднюю скорость движения тела, совершаемого по закону

$$s = 2t^2,$$

для промежутков времени:

$$1) \text{ от } t_1 = 2 \quad \text{до} \quad t_2 = 4,$$
$$2) \text{ от } t_1 = 6 \quad \text{до} \quad t_2 = 10.$$

3. Закон движения тела выражается формулой:

$$s = t^2 + 1.$$

Найти среднюю скорость движения тела для промежутка времени $t_2 - t_1$, если:

1) $t_1 = 2, \quad t_2 = 3;$ 3) $t_1 = 2, \quad t_2 = 2{,}01;$
2) $t_1 = 2, \quad t_2 = 2{,}1;$ 4) $t_1 = 2, \quad t_2 = 2{,}001.$

Результаты вычислений записать в таблицу и проследить за изменением средней скорости.

4. Найти скорость движения тела в момент времени $t = 2$, если закон движения дан формулой:

$$s = 4t^2 - 3.$$

5. Закон движения тела дан формулой

$$s = 3t^2.$$

Найти: 1) среднюю скорость движения за промежуток времени

$$\text{от } t_1 = 2 \quad \text{до} \quad t_2 = 5;$$

2) скорость движения в моменты $t_1 = 2$ и $t_2 = 5$.

§ 59. Скорость изменения функции. Определять скорости приходится не только в случае движения, но и при изменении любой переменной величины, имеющей физическое содержание (скорость испарения жидкости, скорость реакции и т. д.).

Пусть переменная величина y, характеризующая какой-либо процесс изменения, есть линейная функция другой переменной x, т. е.

$$y = kx + b;$$

тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, как и в случае равномерного движения (§ 57), будет постоянной величиной, равной k, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k. \tag{1}$$

Величина k, показывающая, сколько единиц приращения линейной функции приходится на единицу приращения аргумента, называется *скоростью изменения линейной функции при любом* x.

Если же величина y представляет функцию иного вида, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ по аналогии с неравномерным движением (§ 58) определяет *среднюю скорость изменения* y для промежутка значений аргумента от x до $x+\Delta x$. При $\Delta x \to 0$ будем иметь: $x+\Delta x \to x$, а средняя скорость изменения функции стремится к величине, называемой *скоростью изменения функции при данном* x. Обозначив эту скорость через v, напишем:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Таким образом, *скорость изменения функции при данном* x *есть предел средней скорости ее для промежутка аргумента от* x *до* $x+\Delta x$, *когда* $\Delta x \to 0$.

Разберем несколько примеров.

Пример 1. Вес P в килограммах однородного стержня выражается формулой $P = 0{,}5l$, где l — длина стержня в метрах. Определить скорость изменения веса стержня с изменением его длины.

Решение. Так как P — функция первой степени относительно длины l, то в данном случае имеет место равномерное изменение. Следовательно, скорость изменения веса P при любом значении длины l будет согласно формуле (1)

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = 0{,}5.$$

Это значит, что при удлинении стержня на 1 *м* вес его увеличивается на 0,5 *кг*.

Пример 2. При нагревании тела температура его T изменяется в зависимости от времени нагревания t по закону

$$T = 0{,}4t^2.$$

С какой скоростью нагревается тело в момент $t = 10$ сек.?

Решение. Данная функция второй степени и выражает закон неравномерного изменения, а потому для решения задачи применим формулу (2), причем для нахождения предела поступим так же, как это мы делали при определении скорости падающего тела (§ 58).

В момент $t=10$ температура тела $T_1=0{,}4\cdot 10^2=40$.
» » $t=10+\Delta t$ » » $T_2=0{,}4(10+\Delta t)^2$.
Вычтя из T_2 значение T_1, получим приращение температуры ΔT за время Δt:

$$\Delta T=T_2-T_1=0{,}4(10+\Delta t)^2-40=$$
$$=40+8\Delta t+0{,}4(\Delta t)^2-40=8\Delta t+0{,}4(\Delta t)^2,$$

отсюда

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=8+0{,}4\,\Delta t.$$

Частное $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ есть средняя скорость нагревания тела за время от $t=10$ до $t=10+\Delta t$.

Чтобы определить скорость нагревания тела в момент $t=10$ сек., найдем предел средней скорости нагревания при условии, что $\Delta t\to 0$. Получим:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(8+0{,}4\Delta t)=8.$$

Итак, в момент $t=10$ сек. тело нагревается на 8° в единицу времени. Это значит, что если бы, начиная с момента $t=10$ сек., тело нагревалось равномерно, то в каждую единицу времени температура его увеличивалась бы на 8°.

Упражнения

1. Найти скорость изменения функции $y=2x-1$ при любом x.
2. Объем v газа при температуре t определяется формулой:

$$v=1+0{,}0075t.$$

Определить скорость изменения объема газа при любой температуре.

3. Найти скорость изменения функции $y=x^2$ при 1) $x=1$, 2) $x=3$
4. Сила тока в амперах изменяется в зависимости от времени по закону

$$i=0{,}2t^2,$$

где t — секунды. Найти скорость изменения силы тока в конце четвертой секунды.

§ 60. Производная функции. Величина $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, являющаяся основным понятием математического анализа, носит специальное название *производной функции по аргументу x*.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ *по аргументу* x *называется предел отношения приращения функции* Δy *к приращению аргумента* Δx, *когда* $\Delta x \to 0$.

Для производной функции $y = f(x)$ приняты обозначения:

y' («игрек штрих»),

$f'(x)$ («эф штрих от икс»),

$\frac{dy}{dx}$ («дэ игрек по дэ икс»),

y'_x («игрек штрих по икс»).

В целях упрощения производную функции, заданной математическим выражением, записывают в виде скобок, заключающих данную функцию, со штрихом с правой стороны. Например, производную функции $y = 2x^2 - 3x + 1$ можно записать так:

$$(2x^2 - 3x + 1)'.$$

Из определения производной следует правило:

Для отыскания производной функции $y = f(x)$ *по аргументу* x *нужно найти*:

1) *наращенное значение функции, т. е.* $y + \Delta y$;

2) *приращение функции, т. е.* Δy;

3) *отношение приращения функции к приращению аргумента, т. е.* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) *предел этого отношения при* $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием функции*. Раздел математического анализа, занимающийся вопросами, связанными с производной, называется *дифференциальным исчислением*.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2 + x$.

Решение. 1-й шаг:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x).$$

2-й шаг:

$$\begin{aligned}\Delta y = (y + \Delta y) - y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - (x^2 + x) = \\ = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x - x^2 - x = \\ = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x.\end{aligned}$$

3-й шаг:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x+1.$$

4-й шаг:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+1)=2x+1.$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y=\frac{2}{x}$.

Решение. 1-й шаг:

$$y+\Delta y=\frac{2}{x+\Delta x}.$$

2-й шаг:

$$\Delta y=(y+\Delta y)-y=\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}=$$
$$=\frac{2x-2x-2\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{2\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

3-й шаг:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\Delta x}{x(x+\Delta x)}:\Delta x=-\frac{2}{x(x+\Delta x)}.$$

4-й шаг:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{2}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{2}{x^2}.$$

Производная функции $y=f(x)$ является также функцией аргумента x.

Определение. *Значение производной функции $y=f(x)$ при данном x называется частным значением производной.*

Пример 3. Найти частное значение производной функции

$$f(x)=x^2+x \quad \text{при} \quad x=3.$$

Решение. Подставив в найденную уже производную данной функции (см. пример 1) $x=3$, получим:

$$f'(3)=2\cdot 3+1=7.$$

В связи с данным выше определением производной можно сформулировать определения рассмотренных нами скорости движения (§ 58) и скорости изменения функции (§ 59) следующим образом.

Скорость прямолинейного движения тела в данный момент равна производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

Скорость изменения функции при данном значении аргумента равна производной функции при этом значении аргумента.

Упражнения

Найти производные следующих функций:

1. $y = 4x - 5$. 2. $y = 5x^2 + 1$. 3. $y = 4x^2 - 2x$.
4. $f(x) = -2x^2 + x$. 5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. 6. $f(t) = -2t^3$.
7. $v = u^3 - u$. 8. $v = -\frac{4}{p}$.
9. Дана функция $f(x) = x^2 - 5x$. Найти:

1) $f'(3)$, 2) $f'(2{,}5)$, 3) $f'(0)$, 4) $f'(-1)$.

§ 61. Связь дифференцируемости функции с непрерывностью.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную при каком-нибудь значении x, то при этом значении x данная функция непрерывна.*

Доказательство. Пусть при каком-нибудь значении x функция $y = f(x)$ дифференцируема, т. е. имеет производную (§ 60)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

тогда по определению предела можем написать:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (y' \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha \Delta x) = 0$$

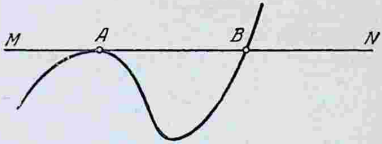
[$\lim (y' \Delta x) = 0$ как предел произведения постоянной на бесконечно малую и $\lim (\alpha \Delta x) = 0$ как предел произведения бесконечно малых]. Но мы знаем (§ 54), что если при данном значении аргумента выполняется равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

то функция при этом значении аргумента непрерывна. Теорема доказана.

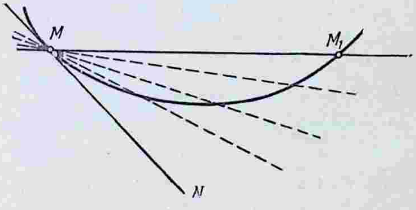
Обратное же утверждение не всегда бывает верно, так как существуют функции, всюду непрерывные, но при некоторых значениях x не имеющие производной.

§ 62. Понятие о касательной. Касательную к окружности мы определили как прямую, имеющую с ней одну общую точку.



Черт. 82.

Такое определение годится не для любой кривой линии. Например, прямая MN касается кривой в точке A (черт. 82), но имеет с этой кривой не одну, а две общие точки.



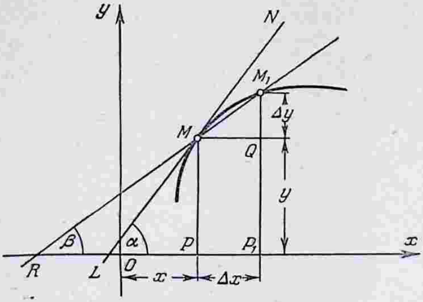
Черт. 83.

Чтобы определить касательную к данной кривой в точке M (черт. 83), возьмем на ней еще одну точку M_1 и проведем секущую MM_1. Если будем перемещать точку M_1 по кривой так, чтобы она приближалась к M, стремясь с ней слиться, то секущая MM_1 будет поворачиваться вокруг точки M, стремясь занять положение прямой MN, называемой *касательной*.

11 Зак. 215. И. Л. Зайцев

Определение. *Касательной к данной кривой в данной ее точке M называется предельное положение секущей MM_1, когда точка M_1, двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M.*

В математике и в технических дисциплинах часто приходится рассматривать прямую, проходящую через точку касания M перпендикулярно касательной; эта прямая называется *нормалью к кривой в точке M.*



Черт. 84.

§ 63. Геометрический смысл производной. Пусть дана непрерывная функция $y=f(x)$, график которой представлен на черт. 84. Возьмем на нем точку $M(x; y)$; тогда

$$OP=x \quad \text{и} \quad PM=y.$$

Дадим x приращение

$$PP_1=\Delta x;$$

в этом случае наращенному значению абсциссы

$$OP_1=x+\Delta x$$

будет соответствовать наращенное значение ординаты

$$P_1M_1=f(x+\Delta x)$$

точки M_1 кривой. Проведем из точки M прямую MQ, параллельную оси Ox, а также секущую через точки M и M_1.

В полученном прямоугольном треугольнике M_1MQ

$$MQ = \Delta x,$$
$$QM_1 = P_1M_1 - PM = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

Обозначим угол наклона секущей M_1R к положительному направлению оси Ox через β; тогда

$$\angle M_1MQ = \angle MRP = \beta.$$

Из треугольника M_1MQ имеем:

$$QM_1 = MQ \operatorname{tg} \angle M_1MQ$$

или

$$\Delta y = \Delta x \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta. \qquad (1)$$

Из равенства (1) видно, что отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей M_1R к положительному направлению оси Ox.

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $\Delta y \to 0$, так как данная функция непрерывна (§ 54). Вследствие этого точка M_1 будет неограниченно приближаться к M, а секущая M_1R — вращаться вокруг точки M, стремясь занять положение касательной NL (§ 62).

Найдем предел обеих частей равенства (1) при условии $\Delta x \to 0$; получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta. \qquad (2)$$

Так как наклон секущей к оси Ox при ее повороте изменяется, то β становится переменной величиной и в пределе стремится к величине угла, образованного касательной NL с положительным направлением оси Ox; поэтому, обозначив $\angle NLP$ буквой α, можем написать:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Равенство (2) можно теперь переписать так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (3)$$

Левая часть равенства (3) есть производная данной функции (§ 60), а правая часть — угловой коэффициент k касательной NL (§ 10):

$$y' = k. \tag{4}$$

Обозначив абсциссу точки M через a, можно равенство (4) сформулировать так: *Производная функции $y = f(x)$ при $x = a$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику данной функции в его точке с абсциссой $x = a$.*

Задача. Написать уравнение касательной, проведенной к кривой $y = x^2 + x$ в точке ее M с абсциссой, равной 2.

Решение. Найдем ординату точки M кривой:

$$y = 2^2 + 2 = 6.$$

Искомая касательная находится в пучке прямых, проходящих через точку M (2; 6) и определяемых уравнением

$$y - 6 = k(x - 2).$$

Остается определить угловой коэффициент касательной, для чего следует найти производную данной функции. Эта производная нами была уже найдена: она равна $2x + 1$ (см. § 60, пример 1) и определяет угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке данной кривой. Чтобы иметь угловой коэффициент касательной, проведенной в данной точке M (2; 6), нужно в выражение

$$y' = 2x + 1$$

вместо x подставить его значение, равное 2. Получим:

$$k = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Искомое уравнение касательной напишется в следующем виде:

$$y - 6 = 5(x - 2),$$

или

$$y = 5x - 4.$$

Упражнения

1. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3x^2$ в точке ее, абсцисса которой x равна: 1) $x = 1$, 2) $x = 0$.

2. Определить угол наклона к положительному направлению оси Ox касательной к кривой $y = 2x^2$ в точке ее с абсциссой, равной $\frac{1}{4}$.

3. Под каким углом к положительному направлению оси Ox проведена касательная к кривой $y = \frac{1}{3} x^2$ в точке ее с абсциссой, равной $-\frac{3}{2}$?

4. Написать уравнение касательной, проведенной к кривой $y = x^2 - 2$ в точке ее с абсциссой, равной 2.

5. К кривой $y = 3x^2 + x$ в точке ее с абсциссой $x = -1$ проведены касательная и нормаль. Написать их уравнения.

ГЛАВА VIII

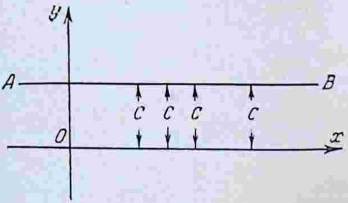
ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В § 60 было дано основное правило нахождения производной. Однако применение его занимает много времени, а во многих случаях представляет большие трудности. Поэтому выгодно иметь такие правила, которые позволяли бы находить производные проще, с минимальной затратой времени. Действительно, такие правила имеются, причем они выводятся из основного правила дифференцирования.

§ 64. Производная постоянной. Пусть C — постоянная величина; тогда равенство

$$y = C$$

можно рассматривать как выражение функции, не меняющей своего значения с изменением аргумента. В справедливости



Черт. 85.

этого можно убедиться, представив это равенство г
т. е. в виде прямой линии AB, параллельной оси Oл
Действительно, с изменением абсциссы точек эт
ординаты их остаются постоянными.

Для нахождения производной функции $y = C$ применим основное правило дифференцирования:

1-й шаг: $$y + \Delta y = C.$$

2-й шаг: $$\Delta y = (y + \Delta y) - y = C - C = 0.$$

3-й шаг: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

4-й шаг: $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 0 = 0.$$

$$(C)' = 0, \tag{I}$$

т. е. *производная постоянной равна нулю.*

Не следует производную постоянной смешивать с пределом постоянной, который, как известно, равен самой постоянной.

§ 65. Производная функции $y = x$. Применяя основное правило дифференцирования, получим:

1-й шаг: $$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

2-й шаг: $$\Delta y = (y + \Delta y) - y = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

3-й шаг: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

4-й шаг: $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 1 = 1.$$

$$(x)' = 1, \tag{II}$$

т. е. *производная функции $y = x$ равна единице*, или: *производная независимой переменной равна единице.*

§ 66. Производная алгебраической суммы функций. Возьмем функцию

$$y = u + v - w,$$

... u, v и w — функции от x и имеющие производные ... Если аргументу x дать приращение Δx, то и функции u, ... получат приращения, соответственно равные Δu, Δv и ...тому y также получит приращение Δy.

...ному правилу находим:

$$\ldots + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta u) - (w + \Delta w),$$

$$\ldots (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) -$$

$$\ldots v - w) = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w -$$

$$- u - v + w = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

3-й шаг: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

4-й шаг: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Слагаемые правой части последнего равенства являются производными функций u, v и w. Указанное равенство можно переписать:

$$y'=u'+v'-w',$$

или

$$(u+v-w)'=u'+v'-w', \tag{III}$$

т. е. *производная алгебраической суммы конечного числа функций равна алгебраической сумме производных каждой из них.*

§ 67. Производная произведения двух функций. Пусть дана функция

$$y=uv,$$

где u и v — функции от x, имеющие производные по x. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда согласно основному правилу будем иметь:

1-й шаг: $$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v).$$

2-й шаг: $$\Delta y=(y+\Delta y)-y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=$$
$$=uv+u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v-uv=u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v.$$

3-й шаг: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\,\Delta v}{\Delta x}+\frac{v\,\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u\,\Delta v}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

4-й шаг: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

Но u и v не зависят от Δx, а потому их нужно считать постоянными *) при $\Delta x \to 0$; согласно следствию 1 теоремы IV § 43 можем написать:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = v \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Приращение же функции Δu меняется с изменением Δx, поэтому согласно теореме IV § 43 имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Таким образом,

$$y' = u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Но

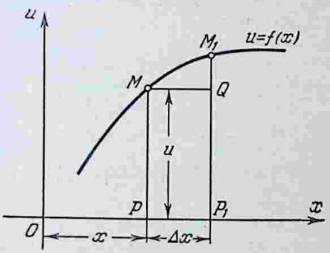
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Далее, так как u дифференцируема, то она непрерывна (§ 61), следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u = 0.$$

---

*) Это можно иллюстрировать на черт. 86. Здесь $OP = x$, $PP_1 = \Delta x$,



Черт. 86.

$PM = u$. Если $\Delta x \to 0$, то $PM = u$ не меняется.

Поэтому

$$y' = uv' + vu' + 0 \cdot v' = uv' + vu'.$$

Итак,

$$(uv)' = uv' + vu', \tag{IV}$$

т. е. *производная произведения двух функций равна сумме произведений первой функции на производную второй и второй функции на производную первой.*

§ 68. Производная произведения постоянной на функцию. Возьмем функцию

$$y = Cu,$$

где

$$C = \mathrm{const}, \quad u = f(x),$$

причем функция u имеет производную по x.

Применяя правило (IV), получим:

$$y' = (Cu)' = Cu' + uC' = Cu' + u \cdot 0 = Cu',$$

$$(Cu)' = Cu', \tag{V}$$

...е. *производная произведения постоянной на функцию ...а произведению постоянной на производную функции.*

...69. Производная степени с целым положительным ...ателем. Возьмем сначала функцию

$$y = x^2.$$

...вив ее в виде произведения и применяя правило (IV), ...:

$$(x^2)' = (xx)' = x(x)' + x(x)' = x + x = 2x.$$

...производную новой функции:

$$y = x^3.$$

...произведением x^2x и опять применяя то же пра... ...айдем:

$$(x^2x)' = x^2(x)' + x(x^2)' = x^2 \cdot 1 + x \cdot 2x = 3x^2.$$

...ю так же с функцией

$$y = x^4,$$

$$...)' = x^3(x)' + x(x^3)' = x^3 \cdot 1 + x \cdot 3x^2 = 4x^3.$$

Если продолжать дифференцирование функций x^5, x^6, x^7 и т. д. этим способом, то получим результаты, подчиняющиеся одной и той же формуле:

$$(x^m)' = mx^{m-1}. \tag{VI}$$

Таким образом, *производная степени x^m, где m — целое положительное число, равна произведению показателя степени на основание x в степени, на единицу меньшей чем данная.*

Однако выведенное правило справедливо для любого показателя m, что мы и докажем в § 78.

§ 70. Производная функции $y=\sqrt{x}$. Представив функцию $y=\sqrt{x}$ в виде степени с дробным показателем и применяя правило (VI), получим:

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таким образом,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{VII}$$

т. е. *производная функции $y=\sqrt{x}$ равна единице, деленной на удвоенную функцию.*

§ 71. Производная функции $y=\frac{1}{x}$. Заменив $\frac{1}{x}$ на x^{-1} и дифференцируя по правилу (VI), получим:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \tag{VIII}$$

т. е. *производная дроби $\frac{1}{x}$ равна отрицательной дроби, равной единице, деленной на квадрат знаменателя.*

§ 72. Производная частного. Возьмем функцию

$$y = \frac{u}{v},$$

где u и v — функции от x, имеющие производные по x, причем $v \neq 0$ при значении x, при котором находится производная. Применим основное правило дифференцирования.

1-й шаг: $$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}.$$

2-й шаг: $$\Delta y=(y+\Delta y)-y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=$$
$$=\frac{uv+v\,\Delta u-uv-u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}.$$

3-й шаг: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}:\Delta x=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}.$$

4-й шаг: применяя теоремы V, III, II и следствие 1 теоремы IV § 43, находим:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\,[v\,(v+\Delta v)]}=\frac{\lim\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)-\lim\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\,[v\,(v+\Delta v)]}=$$
$$=\frac{v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\,v+\lim\Delta v]}=\frac{vu'-uv'}{v\,(v+0)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Здесь, как и при выводе формулы (IV), нужно считать u и v не зависящими от Δx, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$.

Итак,
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2},\qquad\text{(IX)}$$

т. е. *производная частного равна дроби, знаменатель которой есть квадрат делителя, а числитель есть разность между произведением делителя на производную делимого и произведением делимого на производную делителя.*

§ 73. Применение формул дифференцирования. Рассмотрим несколько примеров на применение выведенных правил.

Пример 1. Продифференцировать функцию
$$y=2x^3-4x^2+5x-3.$$

Решение. По правилу (III) имеем:
$$y'=(2x^3)'-(4x^2)'+(5x)'-(3)'.$$

Применяя к первым трем слагаемым правило (V), а к последнему — правило (I), получим:

$$y' = 2(x^3)' - 4(x^2)' + 5 \cdot x' - 0.$$

Согласно правилам (VI) и (II) будем иметь:

$$y' = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 6x^2 - 8x + 5.$$

Пример 2. Продифференцировать функцию

$$y = (x^2 + 1)(2x + 3).$$

Решение. По правилу (IV) имеем:

$$y' = (x^2 + 1)(2x + 3)' + (2x + 3)(x^2 + 1)'.$$

По правилу (III):

$$y' = (x^2 + 1)[(2x)' + (3)'] + (2x + 3)[(x^2)' + (1)'].$$

По правилам (V), (II), (I) и (VI):

$$y' = (x^2 + 1)(2 + 0) + (2x + 3)(2x + 0) =$$
$$= 2x^2 + 2 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x + 2.$$

Этот пример можно решить иначе: сначала перемножить выражения в скобках, а затем продифференцировать полученную сумму:

$$y = (x^2 + 1)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3,$$
$$y' = (2x^3 + 3x^2 + 2x + 3)' = 6x^2 + 6x + 2.$$

Пример 3. Продифференцировать функцию $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 2xx^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{7}{6}}.$$

Применяя правила (V) и (VI), будем иметь:

$$y' = \left(2x^{\frac{7}{6}}\right)' = 2\left(x^{\frac{7}{6}}\right)' = 2 \cdot \frac{7}{6} x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3}\sqrt[6]{x}.$$

Пример 4. Продифференцировать функцию

$$y=\frac{2}{x}-3\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Представим данную функцию в следующем виде:

$$y=2\cdot\frac{1}{x}-3\sqrt{x}+4\cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Применяя правила (III) и (V), получим:

$$y'=2\left(\frac{1}{x}\right)'-3\left(\sqrt{x}\right)'+4\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'.$$

По правилам (VIII), (VII) и (VI) имеем:

$$y'=2\left(-\frac{1}{x^2}\right)-3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+4\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}\right)=$$

$$=-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3x^{\frac{4}{3}}}=-\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}\right).$$

Пример 5. Продифференцировать функцию

$$y=\frac{x^2+x-3}{2x}.$$

Решение. По правилу (IX) имеем:

$$y'=\frac{2x(x^2+x-3)'-(x^2+x-3)(2x)'}{(2x)^2}.$$

Дифференцируя сумму по правилу (III), получим:

$$y'=\frac{2x\left[(x^2)'+(x)'-(3)'\right]-(x^2+x-3)(2x)'}{4x^2}.$$

Наконец, по правилам (VI), (II), (I) и (V) найдем:

$$y'=\frac{2x(2x+1)-(x^2+x-3)\cdot 2}{4x^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2-2x+6}{4x^2}=$$

$$=\frac{2x^2+6}{4x^2}=\frac{x^2+3}{2x^2}.$$

Можно иначе продифференцировать данную функцию, разделив в правой части данного уравнения почленно числитель на знаменатель, получим:

$$y=\frac{x^2+x-3}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2x},$$

или

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x};$$

отсюда

$$y'=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{2}(x)'+\left(\frac{1}{2}\right)'-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)'=$$
$$=\frac{1}{2}+0-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=\frac{x^2+3}{2x^2}.$$

Упражнения

Найти производные функций.

1. $y=3$. 2. $f(x)=ax$. 3. $y=x^5$. 4. $f(x)=x^p$.

5. $y=5x^3$. 6. $s=-3t^4$. 7. $f(x)=\frac{3}{4}ax^8$.

8. $f(x)=\frac{2}{n+1}x^{n+1}$. 9. $y=2x^3-3x$. 10. $s=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t$ [illegible]

11. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1$. Найти $f'(3)$.

12. $f(x)=\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}-\frac{1}{2n}x^{2n}$. 13. $y=x(x+1)$. Найти [illegible]

14. $s=t^2(3t-2)$. 15. $f(x)=2x(3x^2-x+5)$.

16. $s=t(t+1)(t+2)$. 17. $f(u)=(2u^2+u)(4u^2-$ [illegible]

18. $s=2\sqrt{x}$. 19. $y=-\sqrt[3]{x^2}$. 20. $s=r\sqrt{r}$.

21. $v=u^2\sqrt[3]{u}$. 22. $v=\frac{4}{3p}$. 23. $f(r)=\frac{1}{r^2}$.

24. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. 25. $f(u)=\frac{u}{\sqrt[3]{u}}$. Найти $f'(8)$. [illegible]

27. $y=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$. 28. $y=x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$. 29. [illegible]

30. $u=\frac{6\sqrt{q}\sqrt[3]{q}}{\sqrt[4]{q}}$. 31. $y=\frac{2n}{2n+1}x^2\sqrt[n]{x}$. [illegible]

32. $y = t(\sqrt{t} + 1)$. 33. $s = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}$.

34. $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$. 35. $y = \frac{3x^3 - 2x - 4}{2x - 1}$.

36. $y = \frac{x^2}{2 - x}$. 37. $f(u) = \frac{2}{u + 1}$. 38. $f(v) = \frac{1}{v^2 + 1}$.

39. $y = -\frac{1 + 2x}{x(1 + x)}$. 40. $f(x) = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{1}{x}$. 41. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

42. Точка движется прямолинейно по закону

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{t}.$$

Найти ее скорость в момент $t = 2{,}25$.

43. Точка, двигаясь по кривой

$$y = x^2 - 8x + 15,$$

сорвалась с нее в тот момент, когда оказалась на прямой $x = 6$. Найти уравнение дальнейшего пути точки.

44. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$xy = 2$$

в точке ее $A(2; 1)$.

45. К кривой

$$y = 3x^2 - 6x + 5$$

проведена касательная, параллельная оси Ox. Найти координаты точки касания.

46. В какой точке кривой

$$y = 2x^2 - x + 1$$

надо провести касательную, чтобы она была параллельна прямой

$$y = 3x + 5.$$

47. Тело вращается вокруг оси, причем закон изменения угла φ в зависимости от времени t задан формулой

$$\varphi = 0{,}1t^2.$$

Найти угловую скорость вращения тела в момент $t =$

48. Колесо вращается так, что угол поворота пр… квадрату времени. Первый оборот был сделан колесо… 32 се… Определить угловую скорость колеса через начала вращения.

49. Написать уравнения касате…ной и нормали к

$$y \ldots$$

в точке ее $A(0; 0)$.

50. В уравнении парабол…

$$y = \ldots$$

определить b и c, если па… с абсциссой $x = 2$.

§ 74. Функция от функции (сложная функция). Пусть нам даны две функции:

$$y = u^3 \tag{1}$$

и

$$u = 2x^2 - 3x + 1. \tag{2}$$

Если в (1) заменить u его выражением из (2), то получим:

$$y = (2x^2 - 3x + 1)^3. \tag{3}$$

Из уравнений (1) и (2) видно, что y есть функция от u, но u в свою очередь функция от x; таким образом, функция y зависит от функции $u = 2x^2 - 3x + 1$. Функцию (3) называют *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Всякую сложную функцию можно представить в виде нескольких простых. Разберем примеры.

Пример 1. Представить функцию $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ в виде двух простых.

Решение. Положим

$$u = x^2 - x + 1;$$

тогда

$$y = \sqrt{u}.$$

Мы получили две функции u и y более простого вида, чем данная.

Пример 2. То же для функции $y = \sin^3 x$.

Решение. Положим

$$u = \sin x;$$

тогда

$$y = u^3.$$

Упражнения

[Пр]едставить каждую функцию двумя простыми:

[1. y] $= (x^3 - 2x + 5)^4$. 2. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$. 3. $y = \sqrt[3]{\ldots}$

[4. $y =$] $\sqrt[4]{x^3 - 2x^2 + 1}$. 5. $s = \cos^4 t$. 6. $v = \ldots$

[7. $y = s$]$\text{in}\, x$. 8. $y = \sqrt[3]{\ldots}$ 9. $y = \ldots$

11. ...

Зайцев

§ 75. Производная сложной функции. Возьмем функцию

$$y = f(u), \tag{1}$$

причем

$$u = \varphi(x). \tag{2}$$

Пусть функция (2) имеет производную при данном x; тогда при $\Delta x \to 0$ и $\Delta u \to 0$ (§ 61). Пусть также и функция (1) имеет производную при значении u, соответствующем тому же значению x.

Напишем тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Применяя к правой части тождества (3) теорему о пределе произведения (теорема IV § 43), получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4}$$

Но, как известно (§ 60),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x,$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x.$$

Поэтому равенство (4) можно переписать:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{5}$$

Формула (5) служит для дифференцирования сложной функции, составленной из двух простых.

Пример. Продифференцировать функцию

$$y = (3x^2 - 2x + 4)^5.$$

Решение. Представим данную функцию в виде следующих двух:

$$u = 3x^2 - 2x + 4,$$
$$y = u^5.$$

Найдем сначала y'_u (т. е. производную функции y по аргументу u), а затем u'_x (т. е. производную функции u по аргументу x):

$$y'_u = (u^5)' = 5u^4,$$
$$u'_x = (3x^2 - 2x + 4)' = 6x - 2.$$

Искомая производная будет:

$$y'_x = 5u^4(6x - 2),$$

или, заменяя u его значением,

$$y'_x = 5(3x^2 - 2x + 4)^4(6x - 2) =$$
$$= 10(3x^2 - 2x + 4)^4(3x - 1).$$

Как видно из формулы (5), производная сложной функции выражается произведением производных простых функций и, конечно, перестановка сомножителей не изменит результата. Однако удобней находить эти сомножители в одной определенно выбранной последовательности, которую полезно запомнить как правило. Так, например, для разобранного случая степенной функции это правило можно высказать следующим образом:

для дифференцирования сложной степенной функции *) *нужно взять производную сначала от степени по основанию* (принимая основание за аргумент), *а потом от выражения, стоящего в основании, по независимой переменной и результаты перемножить.*

Если $y = u^m$ — сложная степенная функция, то ее производная согласно этому правилу запишется так:

$$(u^m)'_x = mu^{m-1}\,u'_x. \qquad (6)$$

Пусть, например, требуется найти производную функции

$$y = (x^3 - 4x + 1)^3.$$

Положив

$$u = x^3 - 4x + 1$$

---

*) Под сложной степенной функцией будем разуметь степень, основание которой есть функция от x.

и, применяя правило (6), будем иметь:

$$y' = 3(\underbrace{x^3 - 4x + 1}_{u})^2(\underbrace{x^3 - 4x + 1}_{u})' =$$

$$= 3(x^3 - 4x + 1)^2(3x^2 - 4).$$

В дальнейшем для каждого особого случая будут даваться аналогичные правила, устанавливающие свою последовательность дифференцирования.

Разберем еще пример. Пусть требуется найти производную функции

$$y = \sqrt{x^2 + x}.$$

Разбив ее на две простые функции, получим:

$$u = x^2 + x,$$

$$y = \sqrt{u},$$

отсюда

$$u'_x = 2x + 1,$$

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$$

И здесь можно установить последовательность в нахождении производной, которая выразится следующим правилом: *для дифференцирования сложной функции* $y = \sqrt{u}$ *нужно сначала взять производную от этой функции по подкоренному выражению* u (считая u аргументом), *а потом от подкоренного выражения по независимой переменной и результаты перемножить*; таким образом, считая u функцией от x, получаем:

$$(\sqrt{u})'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x. \tag{7}$$

Так, например, производная функции

$$y = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

по вышеуказанному правилу найдется так:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\underbrace{2x^2-3x+4}_{u}}}\cdot\underbrace{(2x^2-3x+4)'}_{u} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x^2-3x+4}}\cdot(4x-3) = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+4}}.$$

Если дан корень другой степени, то его нужно предварительно преобразовать в степень с дробным показателем и применить правило для дифференцирования сложной степенной функции. Например,

$$(\sqrt[3]{x^2+1})' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\underbrace{(x^2+1)}_{u}^{-\frac{2}{3}}\underbrace{(x^2+1)'}_{u} =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\,2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y=(x+2)^4$. 2. $s=(3t-2)^3$. 3. $y=(x^2-1)^5$.
4. $f(x)=(x^2-2x)^3$. 5. $s=(t^2-t+1)^4$.
6. $f(u)=5(3u^2-u+4)^4$. 7. $s=\sqrt{t+1}$. 8. $y=\sqrt{2x+1}$.
9. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. 10. $f(x)=2\sqrt{1+2x-x^2}$.
11. $v=\sqrt{(2-x)(3+2x)}$. 12. $r=\sqrt[3]{p^3-1}$.
13. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$. 14. $y=(3x-1)^7(x+1)^3$.
15. $s=t^2\sqrt{4t-3}$. 16. $y=(x-1)\sqrt{x^2+1}$.
17. $y=(x+1)^2\sqrt{x-1}$. 18. $\theta=\frac{(2\varphi^2-1)^2}{\varphi^2}$.
19. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$. 20. $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. 21. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
22. $f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 23. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$.

§ 76. Производные тригонометрических функций.

1. $y=\sin x$.

По общему правилу дифференцирования находим:

1-й шаг:

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x).$$

2-й шаг:

$$\Delta y=(y+\Delta y)-y=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

Преобразуя разность синусов, будем иметь:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=$$

$$=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3-й шаг:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

После деления числителя и знаменателя дроби на 2 получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

4-й шаг:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Но

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1\ (\S\ 45)\quad\text{и}\quad\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x;$$

поэтому

$$y'=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Следовательно,

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{X}$$

2. $y=\cos x$.

По формуле приведения можно написать:

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

отсюда

$$y' = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]'.$$

Для дифференцирования сложной функции $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ представим ее в виде двух простых:

$$u = \frac{\pi}{2} - x,$$

$$y = \sin u.$$

Согласно формуле (5) § 75 имеем:

$$u'_x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -1,$$

$$y'_u = (\sin u)' = \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$y'_x = \sin x \cdot (-1) = -\sin x.$$

Следовательно,

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad \text{(XI)}$$

3. $y = \operatorname{tg} x$.

Заменив $\operatorname{tg} x$ отношением $\frac{\sin x}{\cos x}$ и применяя правило дифференцирования частного, получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \text{(XII)}$$

4. $y = \operatorname{ctg} x$.

Как и в случае 3, имеем:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad \text{(XIII)}$$

В п. 2 настоящего параграфа мы дифференцировали сложную функцию $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, пользуясь формулой (5) § 75. Однако эту операцию можно произвести и по следующему правилу:

*для дифференцирования сложной тригонометрической функции**) *нужно сначала взять производную от тригонометрической функции по выражению, стоящему под ее знаком* (принимая его за аргумент), *а потом от этого выражения по независимой переменной и результаты перемножить*; поэтому, считая u функцией от x, получаем:

$$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x, \tag{1}$$

$$(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x, \tag{2}$$

$$(\operatorname{tg} u)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x, \tag{3}$$

$$(\operatorname{ctg} u)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x. \tag{4}$$

Пользуясь правилом (1), процесс дифференцирования функции $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ можно записать таким образом:

$$\left[\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}-x}_{u}\right)\right]' = \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}-x}_{u}\right)\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}-x}_{u}\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1) = -\sin x.$$

Пример 1. Продифференцировать функцию

$$y = \cos\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Решение. Согласно правилу (2) настоящего параграфа найдем:

$$y' = \left[\cos\left(\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{u}\right)\right]' = -\sin\left(\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{u}\right)\left(\underbrace{1+\frac{1}{x}}_{u}\right)' =$$

$$= -\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

---

*) Под сложной тригонометрической функцией будем понимать тригонометрическую функцию сложного аргумента.

Пример 2. Продифференцировать функцию $y=\sin^2\sqrt{x}$.

Решение. Переписав функцию в виде $y=(\sin\sqrt{x})^2$, найдем по правилу (6) § 75

$$y'=[(\underbrace{\sin\sqrt{x}}_{u})^2]'=2\underbrace{\sin\sqrt{x}}_{u}\cdot(\underbrace{\sin\sqrt{x}}_{u})'.$$

Но $\sin\sqrt{x}$ — сложная тригонометрическая функция, а потому согласно правилу (1) настоящего параграфа имеем:

$$(\sin\underbrace{\sqrt{x}}_{u})'=\cos\underbrace{\sqrt{x}}_{u}(\underbrace{\sqrt{x}}_{u})'=\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Следовательно,

$$y'=2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Процесс дифференцирования данной функции можно записать следующим образом:

$$y'=(\sin^2\sqrt{x})'=2\sin\sqrt{x}(\sin\sqrt{x})'=2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}(\sqrt{x})'=$$
$$=2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y=x-\sin x$. **2.** $\theta=\varphi\cos\varphi$. **3.** $v=\sec u$.
4. $f(t)=\sin t\cos t$. **5.** $f(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **6.** $s=\operatorname{tg}\theta-\theta$.
7. $\theta=\varphi+\operatorname{ctg}\varphi$. **8.** $s=a(1-\cos t)$. **9.** $f(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$.
10. $v=\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}$. **11.** $f(\theta)=\dfrac{1+\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta}$. **12.** $y=\dfrac{1}{2}\sin^2 x$.
13. $v=-\dfrac{1}{4}\cos^4\omega$. **14.** $f(\varphi)=-\operatorname{ctg}^5\varphi$. Найти $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. **15.** $f(\varphi)=\sin 2\varphi$
16. $f(\omega)=\dfrac{1}{2}\cos 2\omega$. **17.** $y=\sin\left(\dfrac{2\pi}{q}x\right)$. **18.** $y=-a\cos\left(\dfrac{\pi}{a}t\right)$.
19. $s=\cos(1-2\varphi)$. **20.** $f(\omega)=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\omega^2$. **21.** $t=2\sin(\varphi^2-\varphi)$.
22. $f(\theta)=\sin\sqrt{\theta}$. **23.** $s=-\sqrt{\cos t}$. **24.** $y=4\operatorname{tg}2\sqrt{x}$.
25. $y=\sqrt[3]{\sin x}$. **26.** $s=\cos\dfrac{1}{t}$. **27.** $s=\sin\dfrac{a}{t}$.
28. $y=\dfrac{1}{2}\sec^2\omega$. **29.** $y=\sqrt{\sec x}$. **30.** $y=\sin^3 x\cos x$.

31. $f(t) = 2\sin 2t\cos^2 t$. 32. $f(\theta) = 2\sin^2\theta\cos^2\theta$.

33. $y = \sin(x+a)\cos(x-a)$. 34. $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

35. $\theta = \sin^2 2\varphi$, 36. $y = \frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}$. 37. $s = \sqrt{\sin 2\varphi}$.

38. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{x}$. 39. $y = \sqrt[3]{\sin 2x}$. 40. $\theta = \sqrt[3]{\sin^2 2\omega}$.

41. $r = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$. 42. $y = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$.

§ 77. Производная логарифмической функции. Пусть дана функция

$$y = \ln x.$$

Для ее дифференцирования применим общее правило.

1-й шаг:

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x).$$

2-й шаг:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \ln(x + \Delta x) - \ln x,$$

или

$$\Delta y = \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

3-й шаг:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right). \qquad (1)$$

Положим

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n},$$

отсюда

$$\Delta x = \frac{x}{n}. \qquad (2)$$

Подставив значения $\frac{\Delta x}{x}$ и Δx в равенство (1), получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

или, после потенцирования,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Из равенства (2) следует, что

$$\Delta x \to 0, \quad \text{если} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

4-й шаг. Принимая во внимание условие (3), напишем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Множитель $\frac{1}{x}$ не зависит от n, поэтому его можно считать постоянным при $n \to \infty$; следовательно,

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{4}$$

В подробных курсах анализа доказывается теорема: *предел логарифма переменной величины равен логарифму предела этой же переменной величины*; поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln\left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Но, согласно § 47,

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Равенство (4) будет иметь вид

$$y' = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{XIV}$$

т. е. *производная натурального логарифма равна единице, деленной на аргумент.*

Если дан десятичный логарифм, то его нужно предварительно выразить через натуральный. Мы знаем (§ 48), что

$$\lg x = 0{,}4343 \ln x.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим:

$$(\lg x)' = 0{,}4343\,(\ln x)' = 0{,}4343 \cdot \frac{1}{x},$$

или

$$(\lg x)' = \frac{0{,}4343}{x}, \tag{XV}$$

т. е. *производная десятичного логарифма равна произведению производной натурального логарифма на постоянный множитель* 0,4343.

Пример 1. Продифференцировать функцию

$$y = \ln(2x + 1).$$

Решение. Данная функция сложная; положим

$$u = 2x + 1;$$

тогда

$$y = \ln u.$$

Отсюда согласно формуле (5) § 75 имеем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}.$$

Производную сложной логарифмической функции *) можно найти и по следующему правилу:

для дифференцирования сложной логарифмической функции нужно сначала взять производную от логарифма по выражению, стоящему под знаком логарифма (принимая его за аргумент), *а потом от выражения, стоящего под знаком логарифма, по независимой переменной и результаты перемножить*; поэтому, считая u функцией x, получаем:

$$(\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x. \qquad (5)$$

Пример 2. Продифференцировать функцию

$$y = \ln\cos(1 - x).$$

Решение. Согласно правилу (5) найдем:

$$y' = [\ln\cos\underbrace{(1 - x)}_{u}]' = \frac{1}{\underbrace{\cos(1 - x)}_{u}} \underbrace{[\cos(1 - x)]'}_{u}.$$

Но $\cos(1 - x)$ — сложная тригонометрическая функция; применяя к ней правило (2) § 76, получим:

$$[\cos(\underbrace{1 - x}_{u})]' = -\sin(\underbrace{1 - x}_{u})(\underbrace{1 - x}_{u})' =$$

$$= -\sin(1 - x)(-1) = \sin(1 - x),$$

*) То-есть логарифмической функции сложного аргумента.

или

$$[\ln\cos(1-x)]' = \frac{1}{\cos(1-x)}[\cos(1-x)]' = \frac{1}{\cos(1-x)}[-\sin(1-x)](1-x)' = \frac{1}{\cos(1-x)}\sin(1-x) = \operatorname{tg}(1-x).$$

Пример 3. Продифференцировать функцию $y=\ln\sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

Решение. Преобразуем сначала данную функцию, применив правила логарифмирования корня и дроби:

$$y = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(1+x)].$$

Продифференцировав полученную функцию [$\ln x$ по правилу (XIV), а $\ln(1+x)$ по правилу (5)], найдем:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}(1+x)'\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x-x}{x(1+x)} = \frac{1}{2x(1+x)}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y = x\ln x$. 2. $\theta = t(\ln t - 1)$. 3. $f(u) = \frac{\ln u}{u}$.

4. $y = \lg 2x$. 5. $f(x) = 2\lg(x+1)$. Найти $f'(1)$.

6. $s = \ln(t^2-1)$. 7. $u = \ln\frac{1}{v}$. 8. $t = \ln\sin\alpha$.

9. $y = -\ln\cos t$. 10. $f(t) = \ln(2\cos t)$.

11. $f(\theta) = \ln\operatorname{tg}\theta$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. 12. $y = \ln^2 x$.

13. $u = 10\ln\frac{4}{4+t}$. 14. $f(x) = \ln\frac{a+x}{a-x}$. 15. $y = \ln^3\sin x$.

16. $f(u) = \ln\sin\frac{u}{3}$. 17. $s = \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$. 18. $y = \ln^2\sqrt{x}$.

19. $y = \sqrt{\ln\operatorname{tg}x}$. 20. $s = \ln\cos^2(1-t)$. 21. $y = \ln\sec^2 x$.

22. $f(x) = \ln\sqrt{a^2+x^2}$. 23. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

24. $y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 25. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

§ 78. Производная степени при любом показателе. В § 69 мы вывели формулу

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

для m целого положительного. Докажем теперь справедливость этой формулы для любого показателя.

Положим, что в равенстве

$$y = x^m$$

m имеет любое постоянное значение; логарифмируя это равенство по основанию e, получим:

$$\ln y = m \ln x. \tag{1}$$

Приняв во внимание, что $\ln y$ — сложная функция ($\ln y$ зависит от y, а y зависит от x), дифференцируем обе части равенства (1) по x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = m \cdot \frac{1}{x},$$

отсюда

$$y' = m \cdot \frac{y}{x} = m \cdot \frac{x^m}{x} = mx^{m-1}.$$

Следовательно,

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

§ 79. Производная показательной функции. Дана показательная функция

$$y = a^x. \tag{1}$$

Прологарифмировав равенство (1) по основанию e, получим:

$$\ln y = x \ln a.$$

Дифференцируем это равенство по x, считая $\ln y$ сложной функцией:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a,$$

отсюда

$$y' = y \ln a = a^x \ln a.$$

Следовательно,

$$(a^x)' = a^x \ln a, \tag{XVI}$$

т. е. *производная показательной функции* a^x *равна произведению самой функции на натуральный логарифм основания.*

Если дана показательная функция

$$y = e^x,$$

где e — основание натурального логарифма, то производная ее найдется по формуле (XVI):

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x,$$

или

$$(e^x)' = e^x, \tag{XVII}$$

т. е. *производная показательной функции* e^x *равна самой функции.*

Пример 1. Продифференцировать функцию $y = e^{\sin x}$.

Решение. Заменив данную сложную функцию двумя простыми, получим:

$$u = \sin x,$$
$$y = e^u.$$

Согласно формуле (5) § 75 имеем:

$$y'_x = y'_u u'_x = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

Данную функцию можно дифференцировать и по следующему правилу:

для дифференцирования сложной показательной функции *) *нужно сначала взять производную от показательной функции по выражению, стоящему в показателе* (считая его аргументом), *а потом от выражения, стоящего в показателе, по независимой переменной и результаты перемножить*; поэтому, считая u функцией от x, получаем:

$$(a^u)'_x = a^u \ln a u'_x, \tag{2}$$

$$(e^u)'_x = e^u \cdot u'_x. \tag{3}$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. По правилу (3) настоящего параграфа

$$y' = \Big(e^{\overbrace{\operatorname{tg} 2x}^{u}}\Big)' = e^{\overbrace{\operatorname{tg} 2x}^{u}} (\underbrace{\operatorname{tg} 2x}_{u})'.$$

---

*) То-есть показательной функции сложного аргумента.

Но согласно правилу (3) § 76

$$(\operatorname{tg} \underbrace{2x}_{u})' = \frac{1}{\cos^2 \underbrace{2x}_{u}} (\underbrace{2x}_{u})' = \frac{2}{\cos^2 2x}.$$

Следовательно,

$$(e^{\operatorname{tg} 2x})' = e^{\operatorname{tg} 2x} (\operatorname{tg} 2x)' = e^{\operatorname{tg} 2x} \frac{1}{\cos^2 2x} (2x)' = \frac{2e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y = xe^x - e^x$.
2. $s = e^t \ln t$.
3. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$.
4. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
5. $P = e^{2h}$.
6. $f(x) = a^{-x}$.
7. $y = xe^{2x}$.
8. $\theta = e^{-\varphi^2}$.
9. $u = a^{\frac{1}{p}}$.
10. $y = x^n n^x$.
11. $s = \ln e^t$.
12. $s = e^{\ln t}$.
13. $f(t) = \sin e^t$.
14. $f(t) = e^{2 \sin t}$.
15. $y = e^{x \ln x}$.
16. $f(\omega) = \ln \frac{e^\omega}{1 + e^\omega}$.
17. $\theta = \sin^2 e^t$.
18. $r = \cos \sqrt{e^\omega}$.
19. $f(x) = \sqrt{\cos e^x}$.
20. $f(t) = \ln e^{\cos t}$.
21. $f(x) = \cos e^{\sqrt{x}}$.
22. $v = \operatorname{tg} e^{-2\varphi}$.
23. $R = e^{\ln \frac{1}{x}}$.
24. $y = e^{\cos x} \sin x$.
25. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.
26. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
27. $\theta = e^{2\varphi} \cos 2\varphi$.
28. $y = e^{ax} (\sin ax - \cos ax)$.
29. $y = \ln \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

§ 80. Производные обратных тригонометрических функций.

1. $y = \arcsin x$.

В силу определения арксинуса получаем:

$$\sin y = x. \tag{1}$$

Здесь $\sin y$ представляет сложную функцию ($\sin y$ зависит от y, а y зависит от x); дифференцируя обе части этого равенства по x, напишем:

$$(\sin y)' = (x)',$$

или

$$\cos y \cdot y' = 1,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Приняв во внимание, что

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}\ ^{*)},$$

а также равенство (1), получим:

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

или

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad \text{(XVIII)}$$

2. $y = \arccos x$.

Согласно определению арккосинуса имеем:

$$\cos y = x.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, считая $\cos y$ сложной функцией, найдем:

$$(\cos y)' = (x)',$$

или

$$-\sin y \cdot y' = 1,$$

отсюда

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Но

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}\ ^{**)} = \sqrt{1 - x^2};$$

поэтому

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

или

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad \text{(XIX)}$$

---

*) Здесь радикал берется с плюсом, так как значения $\arcsin x$ заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, а в этом промежутке $\cos y$ имеет положительные значения.

**) И здесь радикал берется с плюсом, так как значения $\arccos x$ заключены между 0 и π; в этом же промежутке $\sin y$ имеет положительные значения.

3. $y = \operatorname{arctg} x$.

Согласно определению арктангенса имеем:

$$\operatorname{tg} y = x. \tag{2}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, как и в предыдущих случаях, получим:

$$(\operatorname{tg} y)' = (x)',$$

или

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1,$$

отсюда

$$y' = \cos^2 y.$$

Но

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

Приняв во внимание равенство (2), получим:

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{XX}$$

4. $y = \operatorname{arcctg} x$.

Для данной функции имеем:

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

После дифференцирования этого равенства получим:

$$(\operatorname{ctg} y)' = (x)',$$

или

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1,$$

отсюда

$$y' = -\sin^2 y.$$

Но

$$\sin^2 y = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно,

$$y' = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{XXI}$$

Пример 1. Продифференцировать функцию $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Решение. Заменим данную сложную функцию двумя простыми:

$$u = \frac{1}{x},$$
$$y = \operatorname{arctg} u.$$

Согласно формуле (5) § 75 имеем:

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{1+u^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Для дифференцирования этой функции можно воспользоваться и следующим правилом:

для дифференцирования сложной обратной тригонометрической функции *) *нужно сначала взять производную от обратной тригонометрической функции по выражению, стоящему под ее знаком* (принимая его за аргумент), *а потом от этого же выражения по независимой переменной и результаты перемножить*; таким образом, считая u функцией от x, получаем:

$$(\arcsin u)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x; \qquad (\operatorname{arctg} u)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x;$$
$$(\arccos u)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x; \qquad (\operatorname{arcctg} u)'_x = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x.$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y = \arcsin\sqrt{2x}$.

Решение. Данная функция — обратная тригонометрическая и притом сложная; применяя вышеуказанное правило для производной $\arcsin u$, найдем:

$$y' = (\arcsin\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})^2}}(\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x}}(\sqrt{2x})'.$$

*) То-есть обратной тригонометрической функции сложного аргумента.

Но $\sqrt{2x}$ — тоже сложная функция; согласно правилу (7) § 75 имеем:

$$(\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})' = \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{2x}}_{u}}(\underbrace{2x}_{u})' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Следовательно,

$$y' = \left(\arcsin\sqrt{2x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}(\sqrt{2x})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $y = \arcsin 2x$. 2. $y = \arccos\frac{x}{2}$. 3. $y = \operatorname{arctg} 3x$.

4. $f(t) = \operatorname{arctg}\frac{t}{2}$. 5. $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$. 6. $u = \operatorname{arctg}\sqrt{v}$.

7. $s = \arcsin t^2$. 8. $\theta = \operatorname{arctg} e^{\varphi}$. 9. $s = \arcsin\frac{1}{t}$.

10. $\varphi = (\arcsin x)^2$. 11. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. 12. $y = \arcsin\sqrt{e^x}$.

13. $f(x) = (\arccos 3x)^2$. 14. $y = \ln e^{\arcsin x}$.

15. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$. 16. $s = \ln\cos e^{\arccos t}$.

17. $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. Вычислить $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

18. $u = a\arcsin\frac{t}{a} + \sqrt{a^2-t^2}$. 19. $s = t\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+t^2)$.

20. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{a+x}{1-ax}$. 21. $\theta = \operatorname{arctg}\frac{2\varphi}{1-\varphi^2}$.

§ 81. Производная неявной функции. Пусть неявная функция y задана уравнением

$$xy - x - 1 = 0. \tag{1}$$

Найдем производную y', полагая, что она существует. Для этого дифференцируем обе части уравнения (1), применяя правило для производной алгебраической суммы, получим:

$$(xy)' - (x)' - (1)' = 0. \tag{2}$$

Так как xy — произведение переменных величин, то:

$$(xy)' = x(y)' + y(x)'.$$

Таким образом, равенство (2) примет вид

$$x(y)' + y(x)' - (x)' - (1)' = 0,$$

или

$$xy' + y - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно y', найдем:

$$y' = \frac{1-y}{x}. \qquad (3)$$

Для дифференцирования данной функции можно было бы сначала выразить y через x, а потом уже найти производную от явной функции. В самом деле, из уравнения (1) имеем:

$$y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

откуда

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

По внешнему виду этот результат отличается от найденного ранее, но если мы в равенстве (3) подставим значение y, то получим:

$$y' = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, результаты дифференцирования в обоих случаях оказались одинаковыми. Однако переход от неявной к явной функции можно делать только в простейших случаях. Встречаются неявные функции, которые обратить в явные очень трудно и даже невозможно. Например, функцию y, заданную уравнением $xy + x = \sin y$, явно выразить нельзя. Поэтому приходится дифференцировать такие функции как неявные.

Разберем другой пример. Пусть требуется найти производную неявной функции y, заданной уравнением

$$y^2 - 8x = 0.$$

Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы, имеем:

$$(y^2)' - (8x)' = 0. \qquad (4)$$

Но y^2 — сложная функция (y^2 зависит от y, а y зависит от x). По правилу дифференцирования сложной степенной функции [(6) § 75] имеем:

$$(y^2)' = 2yy'.$$

Следовательно, равенство (4) примет вид

$$2yy' - (8x)' = 0,$$

или

$$2yy' - 8 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}.$$

Упражнения

Найти производные функций:

1. $2y-3x^2+3=0$. 2. $y^2-4x=0$. 3. $2y^2-6x+1=0$.
4. $x-y+y^2=0$. 5. $x^2+y^2=r^2$. 6. $2x^2+3y^2-4ay=0$.
7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 8. $xy=4$. 9. $x^2-2xy-6=0$.
10. $x^2y+xy^2=4$. 11. $(1-y)^2=ax$. 12. $\sin y=1-x$.
13. $xy=\sin y$. 14. $x^2=e^y$. 15. $xy=e^{x+y}$.
16. $\arcsin y=x^2$.

§ 82. Производная второго порядка. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $y'=f'(x)$. Производная от $f'(x)$ по x, если она существует, называется *второй производной* или *производной второго порядка.*

Вторую производную функции $y=f(x)$ принято обозначать так:

$$y'',\ y''_x,\ f''(x).$$

Пример. Найти вторую производную функции $y=\frac{1}{x^2}$.

Решение. $y'=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$,

$$y''=(-2x^{-3})'=-2(-3x^{-4})=\frac{6}{x^4}.$$

Упражнения

Найти вторые производные от функций:

1. $y=4x+1$. 2. $y=x^3$. 3. $s=3t^2+2t-1$.
4. $Q=2\sqrt{u}$. 5. $f(t)=\frac{2t-1}{t}$. 6. $y=(x^2-1)^2$.
7. $f(\alpha)=\frac{1}{2}\cos 2\alpha$. 8. $f(t)=e^{\sin t}$. 9. $s=2\ln\frac{2}{2+t}$.

§ 83. Механический смысл второй производной. Пусть тело движется прямолинейно по закону

$$s=f(t).$$

В § 60 мы установили, что скорость v движения тела в данный момент t определяется как производная пути по времени, т. е.

$$v=s'.$$

Если тело движется неравномерно, то скорость v с течением времени изменяется и за промежуток времени Δt получает приращение Δv. В этом случае величина отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, показывающая изменение скорости в единицу времени, называется *средним ускорением* в промежутке времени от t до $t+\Delta t$.

Положим, что $\Delta t \to 0$, тогда $t+\Delta t \to t$, а среднее ускорение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ стремится к величине, которая называется *ускорением в данный момент времени* t. Обозначив это ускорение через j, будем иметь:

$$j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (s')' = s''.$$

Таким образом, *ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.*

Пример. Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^2 - 3t + 5$. Найти скорость и ускорение точки в момент $t = 5$.

Решение. Для определения скорости нужно найти первую производную данной функции при $t = 5$. Таким образом:

$$v = s' = (2t^2 - 3t + 5)' = 4t - 3$$

и

$$v_{t=5} = 4 \cdot 5 - 3 = 17.$$

Ускорение j равно второй производной функции при $t = 5$, т. е.

$$j = s'' = (s')' = (4t - 3)' = 4.$$

Величина ускорения оказалась постоянной для любого значения t, значит, движение точки по заданному закону происходит с постоянным ускорением.

Упражнения

Определить ускорение точки в указанные моменты времени t, если скорость точки, движущейся прямолинейно, задается нижеследующими уравнениями.

1. $v = t^2 + 2t$, $t = 3$. 2. $v = 3t - t^3$, $t = 2$.

3. $v = 4\sin\frac{t}{2}$, $t = \frac{\pi}{3}$. 4. $v = 2\cos 3t$, $t = \frac{\pi}{6}$.

Найти в указанные моменты времени t скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону, заданному следующими уравнениями:

5. $s = t^3 + 2t^2, \quad t = 2.$ 6. $s = 2t - t^2, \quad t = 1.$

7. $s = 2\sin t, \quad t = \frac{\pi}{4},$ 8. $s = 3\cos\frac{\pi t}{3}, \quad t = 1.$

9. Путь, пройденный клетью подъемной машины, определяется из уравнения $h = 4 + 5t$. Найти скорость и ускорение в любой момент времени.

10. Определить момент t, когда ускорение прямолинейного движения, совершаемого по закону $s = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$, равно нулю. Какова при этом скорость?

Таблица формул дифференцирования

I. $(c)' = 0.$

II. $(x)' = 1.$

III. $(u + v - w)' = u' + v' - w'.$

IV. $(uv)' = uv' + vu'.$

V. $(cu)' = cu'.$

VI. $(x^m)' = mx^{m-1}.$

VII. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

VIII. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

IX. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$

X. $(\sin x)' = \cos x.$

XI. $(\cos x)' = -\sin x.$

XII. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

XIII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

XIV. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

XV. $(\lg x)' = \frac{0{,}4343}{x}.$

XVI. $(a^x)' = a^x \ln a.$

XVII. $(e^x)' = e^x.$

XVIII. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

XIX. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

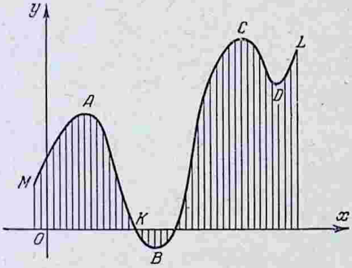
XX. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$

XXI. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$

ГЛАВА IX

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 84. Возрастание и убывание функции. Пусть нам дана функция $y=f(x)$, графически представленная на черт. 87. Проследим за ходом изменения величины ординат точек изображенной кривой при возрастании их абсцисс.



Черт. 87.

Мы видим, что при возрастании аргумента x ординаты соответствующих точек на участке MA кривой растут, на участке AK убывают. При дальнейшем возрастании аргумента ординаты, принимая отрицательные значения, продолжают убывать *) во всех точках дуги KB, ординаты же точек дуги BC возрастают и т. д. Данную функцию для участков MA, BC и DL называют *возрастающей*, а для участков AB и CD — *убывающей*.

---

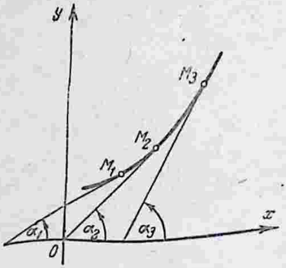
*) Известно, что то отрицательное число меньше, у которого абсолютная величина больше, и наоборот.

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в данном промежутке значений x, если при увеличении аргумента x в этом промежутке соответствующие значения y возрастают, и убывающей, если при увеличении x значения y убывают.*

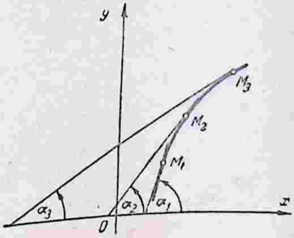
В дальнейшем изложении данной главы изменения аргумента будут рассматриваться только возрастающие, а функция и ее первая и вторая производные — только непрерывные при всех рассматриваемых значениях аргумента.

§ 85. Признаки возрастания и убывания функции.

Теорема. *Если производная функции $y = f(x)$ в данном промежутке значений x положительна, то функция возрастает в этом промежутке, а если производная отрицательна, то функция убывает.*



Черт. 88а.



...т. 88б.

...етрически.

Не доказывая этой теоремы, г...

I. Пусть в данном промежутке ...

... изво...

... цие...

Приняв во внима... ...$(x$

ной (§ 63), можно ... о...

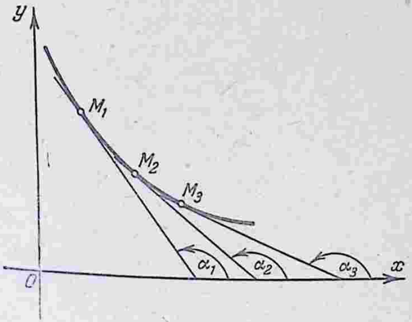
касательных, провед...

в рассматриваемом пр...

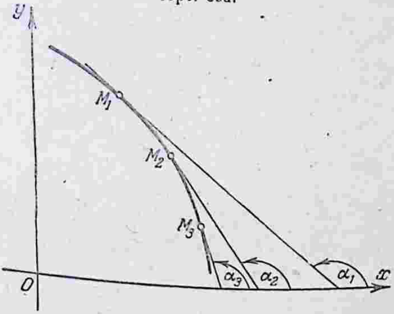
касательные образую...

острый угол (черт.

случае, когда график в данном промежутке поднимается, т. е. функция возрастает.



Черт. 89а.



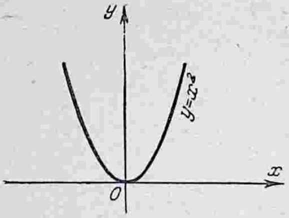
Черт. 89б.

II. Положим, что в данном промежутке значений x

$$f'(x) < 0.$$

то значит, что угловой коэффициент касательных, прове-нных к графику функции $y=f(x)$, отрицателен. Иначе воря, касательные образуют тупой угол с положительным равлением оси Ox (черт. 89а и 89б), а это бывает в случае, когда график в рассматриваемом промежутке опускается, т. е. функция убывает.

Пример. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2$.



Черт. 90.

Решение. Найдем производную данной функции

$$y' = (x^2)' = 2x.$$

Величина $2x$ имеет положительное значение при всяком положительном x и отрицательное — при любом отрицательном его значении. Отсюда следует, что данная функция убывающая при $x < 0$ и возрастающая при $x > 0$ (черт. 90).

§ 86. Максимум и минимум функции. Рассматривая ход изменения функции на черт. 87, мы можем отметить, что ординаты точек на участках MA и BC возрастают, достигая в точках A и C кривой наибольшей величины сравнительно со значениями ординат ближайших к ним точек, и убывают на участках AB и CD до наименьшей величины в точках B и D сравнительно со значениями ординат соседних к ним точек.

Те значения аргумента, при которых функция имеет наибольшую или наименьшую величину, называются соответственно *точками максимума* или *минимума функции*, а значение функции при этих значениях аргумента — *максимумом* или *минимумом* ее.

Как видно, точка максимума служит границей перехода от возрастания функции к ее убыванию, а точка минимума — границей перехода от убывания функции к ее возрастанию.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ имеет максимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство*

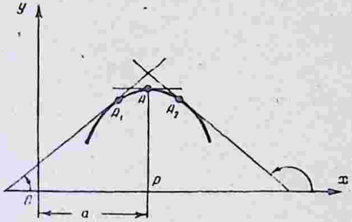
$$f(a) > f(x).$$

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ имеет минимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a*

выполняется неравенство

$$f(a) < f(x).$$

§ 87. Признаки максимума и минимума функции. I. Пусть точке A графика функции $y = f(x)$ соответствует максимум при $x = a$ (черт. 91). Как видно из чертежа, во всех точках, расположенных левее A, касательные образуют с положительным направлением оси Ox острые углы. Поэтому



Черт. 91.

тангенс этих углов, а согласно геометрическому смыслу производной (§ 63) и $f'(x)$ в указанных точках имеет положительное значение.

В точках же, лежащих правее A, касательные образуют с положительным направлением оси Ox тупые углы, а потому тангенс этих углов, а также первая производная имеет отрицательное значение.

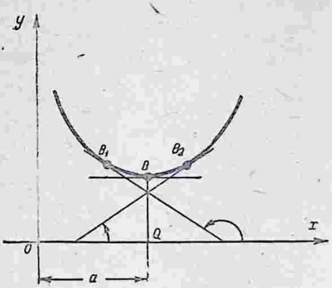
Так как производная функции непрерывна, то ее значение должно меняться без скачков, и, следовательно, при переходе от положительных значений к отрицательным пройдет при $x = a$ через нуль (§ 55), т. е. в точке A

$$f'(a) = 0.$$

Если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет максимум, то

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(a) = 0 \text{ и} \\ 2)\ f'(x) \textit{ при переходе аргумента через} \\ \quad x = a \textit{ меняет знак с } + \text{ на } -. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

II. Положим, что точке B графика функции $y=f(x)$ соответствует минимум при $x=a$ (черт. 92). Рассуждая так же, придем к выводу, что в этом случае первая производная



Черт. 92.

при возрастании x меняет отрицательные значения на положительные и, будучи непрерывной, обращается при $x=a$ в нуль, т. е. в точке B

$$f'(a)=0.$$

Таким образом, *если функция* $y=f(x)$ *при* $x=a$ *имеет минимум, то*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(a)=0 \text{ и} \\ 2)\ f'(x) \textit{ при переходе аргумента через} \\ \quad x=a \textit{ меняет знак с } - \text{ на } +. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Справедливы обратные утверждения.

Функция $y=f(x)$ при $x=a$ имеет максимум, если

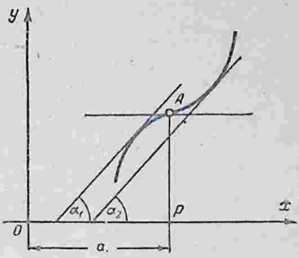
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(a)=0 \text{ и} \\ 2)\ f'(x) \text{ при переходе аргумента через} \\ \quad x=a \text{ меняет знак с } + \text{ на } -. \end{array}\right\} \qquad (1^*)$$

Функция $y=f(x)$ при $x=a$ имеет минимум, если

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f'(a)=0 \text{ и} \\ 2)\ f'(x) \text{ при переходе аргумента через} \\ \quad x=a \text{ меняет знак с } - \text{ на } +. \end{array}\right\} \qquad (2^*)$$

Признаки (1^*) и (2^*) являются *достаточными* признаками максимума и минимума функции, т. е. такими признаками, наличие которых влечет за собой или максимум или минимум функции.

Как видно из равенства $f'(a)=0$, касательная, проведенная в точках A и B графиков, параллельна оси Ox *).



Черт. 93.

III. Может, однако, случиться, что первая производная функции, обращаясь в нуль при $x=a$, не меняет знака при переходе аргумента через $x=a$. В этом случае функция не имеет ни максимума ни минимума. На черт. 93 показано, что касательная в точке A кривой $y=f(x)$ параллельна оси Ox, т. е. $f'(a)=0$, но $\operatorname{tg}\alpha_1>0$ и $\operatorname{tg}\alpha_2>0$. Следовательно, первая производная функции $y=f(x)$ при переходе аргумента через $x=a$ не меняет знака. Функция, как показывает чертеж, не имеет при $x=a$ ни максимума ни минимума.

Значения аргумента, обращающие первую производную в нуль, будем называть *критическими значениями аргумента*.

§ 88. Правило нахождения максимума и минимума функции. Пусть дана функция $y=f(x)$. Для исследования ее на максимум и минимум прежде всего нужно решить уравнение $f'(x)=0$ для нахождения критических значений аргумента. Пусть действительными корнями этого уравнения будут x_1, x_2, x_3 и т. д. **).

---

*) Бывают случаи, когда в точках кривой, соответствующих максимуму или минимуму функции, касательная параллельна не оси Ox, а оси Oy. Такие функции исключаются нами из рассмотрения.

**) Этих корней будет ограниченное число, если мы исключим из рассмотрения бесконечно колеблющиеся функции.

Затем нужно исследовать знак $f'(x)$ для найденных критических значений x, начиная с x_1 (наименьшего); с этой целью определяют знак производной сначала для $x < x_1$, подставляя какое-либо число, меньшее x_1 (производная при всех значениях $x < x_1$ не обращается в нуль, а потому ее знак в силу непрерывности сохраняется неизменным при $x < x_1$ как это следует из выводов § 55).

После этого определяют знак производной при каком-либо значении x в промежутке между x_1 и x_2 (в промежутке между x_1 и x_2 производная сохраняет один и тот же знак по тому же свойству непрерывной функции).

Найдя таким образом знаки производной для значений x, сначала меньшего, а потом большего чем x_1, устанавливают, существует ли при этом значении $x = x_1$ максимум или минимум функции или нет ни того ни другого (см. § 87).

Точно так же исследуют знак $f'(x)$ для остальных критических значений x.

П е р в о е   п р а в и л о. Таким образом, для исследования функции $y = f(x)$ на максимум и минимум нужно:

I. *Найти производную функции* $y' = f'(x)$.

II. *Приравняв ее нулю, найти действительные корни полученного уравнения; пусть они будут* x_1, x_2, x_3 *и т. д.*

III. *Расположив значения* x_1, x_2, x_3, ... *в порядке их возрастания, подставить в производную сначала какое-либо число, меньшее* x_1, *затем подставить число, заключенное в промежутке между* x_1 *и* x_2;

если при этом знак производной меняется с $+$ *на* $-$, *то при* $x = x_1$ *имеет место максимум;*

если с $-$ *на* $+$, *то при* $x = x_1$ *имеет место минимум;*

если же знак производной не меняется, функция при $x = x_1$ *не имеет ни максимума ни минимума;*

таким же образом определить знак производной до x_2 *и после* x_2 *и т. д.*

IV. *Найти максимальные и минимальные значения функции, т. е. вычислить* $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ *и т. д.*

Четвертый пункт этого правила нужен только в том случае, если есть необходимость знать положение точек на кривой, соответствующих максимуму и минимуму функции.

Рассмотрим несколько пример[illegible]

П р и м е р 1. Исследовать н[illegible] и минимум ф[illegible]к-цию $y = x^2 - 1$.

Решение I. Находим производную функции:

$$y' = (x^2 - 1)' = 2x.$$

II. Приравниваем ее нулю:

$$2x = 0,$$

откуда

$$x = 0.$$

III. Определяем знак производной для значения $x < 0$, например для $x = -1$:

$$y'_{x=-1} = 2(-1) = -2.$$

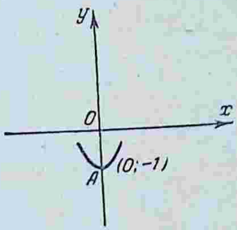
Теперь находим знак производной для $x > 0$, например для $x = 1$:

$$y'_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Изменение знака производной с минуса на плюс показывает, что данная функция при $x = 0$ имеет минимум.

IV. Находим минимальное значение функции, т. е. $f(0)$:

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1.$$



Черт. 94.

Теперь мы можем представить на чертеже положение найденной точки $A(0; -1)$ и вид кривой вблизи нее (черт. 94).

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6.$$

Решение. Согласно правилу имеем:

I. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6\right)' = x^2 - 3x - 4.$

II. $x^2 - 3x - 4 = 0,$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

III. 1) Исследуем критическое значение $x_1 = -1$. Берем значение $x < -1$, например $x = -2$; тогда

$$y'_{x=-2} = (-2)^2 - 3(-2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6.$$

Возьмем значение $x > -1$, например $x = 0$; тогда

$$y'_{x=0} = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4.$$

Перемена знака производной с плюса на минус показывает, что функция при $x = -1$ имеет максимум.

2) Исследуем критическое значение $x_2 = 4$. Беря для $x < 4$ значение $x = 0$, а для $x > 4$ значение $x = 5$, имеем:

$$y'_{x=0} = -4, \quad y'_{x=5} = 25 - 15 - 4 = 6.$$

Следовательно, при $x = 4$ функция имеет минимум.

IV. Максимальное и минимальное значения функции будут:

$$y_{x=-1} = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 - 4(-1) + 6 = 8\frac{1}{6},$$

$$y_{x=4} = \frac{1}{3}4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 6 = -12\frac{2}{3}.$$

Результат вычисления запишем в таблицу:

Критические значения аргумента	Знак производной		Поведение функции	Значения функции при критическом значении аргумента
	до критического значения аргумента	после критического значения аргумента		
-1	$+$	$-$	макс.	$8\frac{1}{6}$
4	$-$	$+$	мин.	$-12\frac{2}{3}$

Обозначив точки графика функции, соответствующие максимуму и минимуму ее через A и B, напишем:

$$A\left(-1;\ 8\frac{1}{6}\right) \text{ и } B\left(4;\ -12\frac{2}{3}\right).$$

Положение точек A и B и вид кривой вблизи них представлены на черт. 95.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию $y = x^3$.

Решение I. $y' = (x^3)' = 3x^2$.

II. $3x^2 = 0$, откуда $x_{1,2} = 0$;

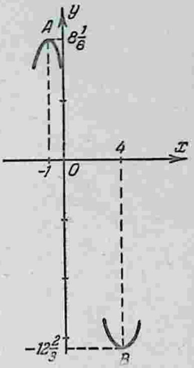
III. Для $x < 0$, например для $x = -1$,

$$y'_{x=-1} = 3(-1)^2 = 3;$$

для $x > 0$, например для $x = 1$,

$$y'_{x=1} = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Знаки производной оказались одинаковыми при переходе через критическое значение $x = 0$; следовательно, данная функция при $x = 0$ не имеет ни максимума ни минимума (черт. 71).



Черт. 95.

Упражнения

1. Дана функция $y = 2x^2$. Узнать, будет ли она возрастать или убывать при значении аргумента: 1) $x = 1$, 2) $x = -1$. Проверить результат на графике.

2. То же для функции $y = -x^2 + x - 1$ при значении аргумента: 1) $x = -2$, 2) $x = 0$, 3) $x = 2$.

3. Найти значения аргумента, при которых возрастают или убывают функции: 1) $y = 5x + 1$, 2) $y = 4 - 3x$.

4. Найти промежутки возрастания или убывания функций:

1) $y = x^2 - 3x + 1$, 2) $y = -2x^2 + 8x - 1$.

Найти максимум и минимум функций:

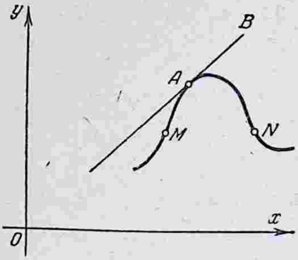
5. $y = x^2 - 2x$. 6. $y = -x^2 + 4x$. 7. $y = 2x^2 + 3x + 4$.
8. $y = -5x^2 - 2x + 2$. 9. $v = 6t - t^2 - 7$. 10. $y = x^4$.
11. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x$. 12. $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5$.
13. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. 14. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 6t - 7$.
15. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. 16. $y = x^3 + x^2 - 5x - 6$.
17. $s = 2t^3 - t^2 - 4t + 5$. 18. $v = p^3 - 3p^2 - 9p + 4$.
19. $y = \frac{x}{1 + x^2}$. 20. $y = 3x - \frac{27}{2 - x}$.

21. Показать, что следующие функции не имеют ни максимума ни минимума:

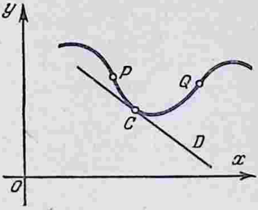
1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$,

2) $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

§ 89. Выпуклость и вогнутость кривой. Рассмотрим кривую, изображенную на черт. 96. Проведя касательную, например AB, мы видим, что точки кривой, смежные с точкой касания A и лежащие по обе стороны от нее, располагаются ниже касательной. В таком случае говорят, что кри-



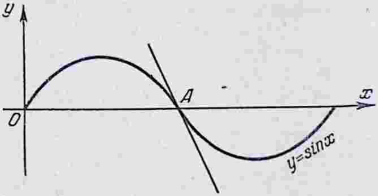
Черт. 96.



Черт. 97.

вая *выпукла вверх в точке* A; если часть кривой между точками M и N удовлетворяет этому условию, то эту часть кривой называют *выпуклой вверх* или просто *выпуклой*.

Возьмем кривую, изображенную на черт. 97. Здесь мы наблюдаем другое явление, а именно: точки кривой, близкие



Черт. 98.

к точке касания C и расположенные по разным сторонам от нее, лежат выше касательной CD. В этом случае говорят, что кривая *в точке* C *вогнута вверх* и часть кривой между точками P и Q, удовлетворяющей этому условию, называют *вогнутой вверх* или просто *вогнутой*.

Бывают случаи, когда кривая в одной своей части выпукла, а в другой вогнута; так, например, синусоида (черт. 98) имеет и выпуклость (выше оси Ox) и вогнутость (ниже оси Ox), причем точка A служит границей между ними. Касательная, проведенная к кривой в этой точке, является общей для выпуклой и вогнутой части ее; эта касательная в то же время пересекает кривую в точке касания; поэтому синусоида в точке A ни выпукла ни вогнута. Эта точка носит название *точки перегиба*.

§ 90. Признаки выпуклости и вогнутости кривой.

Т е о р е м а. *Если вторая производная функции $y=f(x)$ в данном промежутке значений x положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна, — то выпукла.*

Поясним эту теорему геометрически.

I. Пусть в данном промежутке значений x

$$f''(x)>0. \tag{1}$$

Так как $f''(x)$ является производной функции $f'(x)$, то, применяя признак возрастания и убывания к функции $f'(x)$ (§ 85), скажем, что при условии (1) $f'(x)$ возрастает с возрастанием x в данном промежутке. Но тогда согласно геометрическому смыслу первой производной (§ 63) возрастает и угловой коэффициент касательных, проведенных к графику функции $y=f(x)$ в точках данного промежутка, т. е. растет тангенс угла наклона этих касательных, а следовательно, и угол их наклона к положительному направлению оси Ox.

Итак, при условии (1) с в о з р а с т а н и е м x угол, образованный касательными к кривой $y=f(x)$ с положительным направлением оси Ox, р а с т е т, а это наблюдается только в случае, когда касательные проведены в точках, лежащих на вогнутом участке кривой (черт. 99).

II. Пусть в данном промежутке значений x

$$f''(x)<0 \tag{2}$$

При этом условии с возрастанием x функция $f'(x)$ убывает, а потому убывает и угловой коэффициент касательных, проведенных к графику функции $y=f(x)$ в точках данного промежутка, т. е. убывает тангенс угла наклона этих касательных, а следовательно, и угол их наклона к положительному направлению оси Ox.

Легко показать, что справедливо и
*если при данном x вторая производн
равна нулю и при переходе аргумент
ение x меняет знак, то при этом град
чку перегиба.*

Это является *достаточным* признако
ода имеем следующее правило.

Чтобы найти точку перегиба кривой у
Отыскать вторую производную фу
Приравняв ее нулю, решить получен
действительными корнями его буд
**).*

Расположив значения x_1, x_2, x_3, ...
ния, подставить во вторую производ
сло, меньшее x_1, затем — любое чи
жду x_1 и x_2; если в обоих случаях
ки, то при $x = x_1$ имеется точка
динаковые, то точки перегиба нет; т
еделить знак второй производной до и

ординаты точек перегиба, т. е. выч
тех значений аргумента, для ко
перегиб.

Найти точку перегиба кривой $y = x^3$.

Согласно правилу находим:

$= 3x^2$, $y'' = (3x^2)' = 6x$.

куда $x = 0$.

знак:

$$_{=-1} = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$_{=1} = 6 \cdot 1 = +6.$$

имеет место точка перегиба.

точку перегиба в начале координат
ть на вогнутость, как это видно из
й производной (черт. 71).

равнение имеет ограниченное число

Упражнения

1. Узнать, выпукла или вогнута кривая $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ в точках, абсциссы которых: 1) $x = 1$, 2) $x = 2$.

2. Выпукла или вогнута кривая $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 2$ в точках, абсциссы которых: 1) $x = \frac{1}{2}$, 2) $x = -2$.

3. В каких точках выпуклы или вогнуты кривые:

$$1)\ y = x^2 - 3x + 6, \qquad 2)\ y = 2 - 3x - x^2?$$

Найти точки перегиба следующих кривых:

4. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.
5. $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.
6. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9$.
7. $y = -x^3 + 6x^2 - 15x + 10$.
8. $y = x^4$.
9. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.
10. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
11. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$.
12. $y = 12x^4 - 12x^2$.
13. $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Найти промежутки выпуклости и вогнутости кривых:

14. $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.
15. $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

§ 92. Второе правило нахождения максимума и минимума функции.

Теорема. *Если для некоторой функции $y = f(x)$*

$$f'(a) = 0,$$

то данная функция при $x = a$ имеет

максимум, если $f''(a) < 0$

и минимум, если $f''(a) > 0$.

Покажем справедливость теоремы следующими соображениями.

При условии $f'(a) = 0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум или минимум или точку перегиба (§ 87). Но согласно теореме $f''(a) \neq 0$, поэтому точка перегиба исключается.

При $f''(a) < 0$ точка с абсциссой $x = a$ лежит на выпуклой части графика функции, а при $f''(a) > 0$ — на вогнутой его части (§ 90). Следовательно, в первом случае имеет место максимум, во втором — минимум, что и требовалось показать.

Может однако случиться, что при $f'(a) = 0$ также и $f''(a) = 0$, тогда при помощи второй производной нельзя установить, что имеет функция: максимум или минимум. В этом случае для решения вопроса нужно прибегнуть к первому правилу (§ 88).

Таким образом, имеем второе правило для нахождения максимума и минимума функции:

Найти вторую производную функции и подставить в нее каждое из критических значений аргумента; если в результате подстановки одного из них вторая производная будет отрицательной, то при этом значении аргумента функция имеет максимум, если положительной, — то минимум, а если же вторая производная обращается в нуль, то для решения вопроса нужно обратиться к первому правилу.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^2 - 4x + 9.$$

Решение. Согласно правилу имеем:

I. $y' = (x^2 - 4x + 9)' = 2x - 4.$

II. $2x - 4 = 0$, откуда $x = 2$.

III. $y'' = (2x - 4)' = 2.$

Вторая производная оказалась положительной; следовательно, при $x = 2$ имеет место минимум.

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15.$$

Решение. I. $y' = \left(x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15\right)' =$

$$= 3x^2 - 21x + 30.$$

II. $3x^2 - 21x + 30 = 0$ или $x^2 - 7x + 10 = 0$, откуда

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = 5.$$

III. $y'' = (3x^2 - 21x + 30)' = 6x - 21.$

Подставим во вторую производную вместо x поочередно значения 2 и 5:

$$y''_{x=2} = 6 \cdot 2 - 21 = -9,$$

$$y''_{x=5} = 6 \cdot 5 - 21 = +9.$$

Как видно, при $x=2$ функция имеет максимум, при $x=5$ — минимум.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=x^4.$$

Решение. I. $y'=(x^4)'=4x^3$.

II. $4x^3=0$, откуда $x=0$.

III. $y''=(4x^3)'=12x^2$.

Подставив значение $x=0$, получим:

$$y''_{x=0}=12\cdot 0^2=0.$$

Вторая производная оказалась равной нулю, поэтому указанным способом установить максимум и минимум нельзя. Обратившись к первому правилу, будем иметь:

$$y'_{x=-1}=4(-1)^3=-4,$$
$$y'_{x=1}=4\cdot 1^3=+4.$$

Перемена знака первой производной показывает, что при $x=0$ функция имеет минимум.

Упражнения

Исследовать на максимум и минимум функции:

1. $y=3x^2$. **2.** $y=4x^2-12$. **3.** $y=x^2-6x+3$.
4. $y=-2x^2+8x-5$. **5.** $y=x^3-12x^2+36x-10$.
6. $y=x^3-2x^2-4x+3$. **7.** $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+1$.
8. $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x+2$. **9.** $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-4$.
10. $y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$. **11.** $y=x^5$.

Найти промежутки возрастания и убывания функций:

12. $y=x^3-12x+4$. **13.** $y=-x^3+x^2+5x-6$.

Имеют ли максимум и минимум следующие функции:

14. $y=\frac{e^x}{x}$. **15.** $y=\frac{4x^2+25}{10x}$.

§ 93. Задачи на максимум и минимум функции. Теория максимума и минимума функции имеет большое применение как в самой математике, так и в технических дисциплинах. Решим несколько задач.

Задача 1. Разбить число 20 на два слагаемых, произведение которых имело бы наибольшее значение.

Решение. Будем искать эти слагаемые. Обозначим одно из них буквой x; тогда другое слагаемое выразится в виде $20-x$. Произведение этих слагаемых есть переменная величина, меняющаяся с изменением слагаемого x. Обозначая произведение буквой y, запишем:

$$y = x(20-x).$$

Мы получили функцию, выражающую зависимость произведения y от величины слагаемого x. В задаче требуется найти такое x, при котором y принимает наибольшее значение, т. е. задача свелась к нахождению максимума функции. Поступим по правилу, изложенному в § 92.

I. $y' = [x(20-x)]' = (20x - x^2)' = 20 - 2x$.

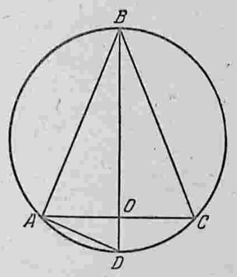
II. $20 - 2x = 0$, откуда $x = 10$.

III. $y'' = (20-2x)' = -2$.

Следовательно, при $x = 10$ функция имеет максимум.

Число 20 нужно разбить на два равных слагаемых, тогда их произведение будет наибольшим.

Задача 2. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса, равного R.



Черт. 101.

Решение. Обозначив радиус основания, высоту и объем конуса соответственно буквами r, h и v, запишем:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Это равенство выражает зависимость v от двух переменных r и h; исключим одну из этих величин, а именно r. Для этого из прямоугольного треугольника ABD (черт. 101) выводим (по теореме о квадрате перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу):

$$AO^2 = BO \cdot DO,$$

или

$$r^2 = h(2R-h).$$

Подставив значение r^2 в формулу объема конуса, получим:

$$v=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h).$$

Мы видим, что объем v конуса, вписанного в шар радиуса R, есть функция от высоты этого конуса h. Найти высоту, при которой вписанный конус имеет наибольший объем, это значит найти такое h, при котором функция v имеет максимум.

Ищем максимум функции v:

I. $v'=\left(\frac{2}{3}\pi Rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3\right)'=\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2.$

II. $\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2=0$, откуда $h_1=0$ и $h_2=\frac{4}{3}R$.

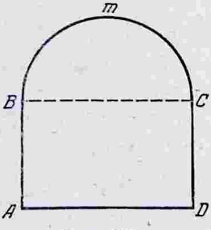
III. $v''=\left(\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2\right)'=\frac{4}{3}\pi R-2\pi h.$

Подставив вместо h сначала $h_1=0$, а потом $h_2=\frac{4}{3}R$, получим:

$$v''_{h=0}=\frac{4}{3}\pi R,$$

$$v''_{h=\frac{4}{3}R}=\frac{4}{3}\pi R-2\pi\cdot\frac{4}{3}R=-\frac{4}{3}\pi R.$$

В первом случае имеем минимум, во втором — искомый максимум.



Черт. 102.

Следовательно, при $h=\frac{4}{3}R$ конус, вписанный в шар радиуса R, имеет наибольший объем.

Задача 3. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом; периметр фигуры окна равен 6 *м*. Каковы должны быть его размеры, чтобы оно пропускало максимум света (черт. 102)?

Решение. Как известно, количество света, проходящего через окно, тем больше, чем больше площадь окна. Обозначим:

$$AD=x;$$

тогда длина полуокружности BmC будет равна $\frac{\pi x}{2}$, а высота окна $AB = \frac{6 - AD - BmC}{2} = \frac{6 - x - \frac{\pi x}{2}}{2} = \frac{12 - 2x - \pi x}{4}$. Площадь всего окна состоит из площадей прямоугольника $ABCD$ и полукруга BmC. По соответствующим формулам найдем:

$$S_{ABCD} = \frac{12 - 2x - \pi x}{4} \cdot x = \frac{12x - 2x^2 - \pi x^2}{4}$$

и

$$S_{BmC} = \frac{\pi x^2}{8}.$$

Обозначив площадь окна буквой y, получим:

$$y = \frac{12x - 2x^2 - \pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} =$$

$$= \frac{24x - 4x^2 - 2\pi x^2 + \pi x^2}{8} = \frac{24x - 4x^2 - \pi x^2}{8}.$$

Мы видим, что площадь окна y в условиях нашей задачи является функцией его основания x, и задача свелась к нахождению максимума функции y.

Исследуем полученную функцию на максимум:

I. $y' = \left(\frac{24x - 4x^2 - \pi x^2}{8}\right)' = \frac{24 - 8x - 2\pi x}{8} = \frac{12 - 4x - \pi x}{4}$.

II. $\frac{12 - 4x - \pi x}{4} = 0$, откуда $x = \frac{12}{4 + \pi}$.

III. $y'' = \left(\frac{12 - 4x - \pi x}{4}\right)' = \frac{-4 - \pi}{4} = -\frac{4 + \pi}{4}$.

Вторая производная оказалась отрицательной, значит, при $x = \frac{12}{4 + \pi}$ площадь окна наибольшая.

Для прохождения наибольшего количества света через окно с контуром в 6 *м* нужно, чтобы ширина его была равна

$$\frac{12}{4 + \pi} \approx 1{,}68 \text{ м}.$$

Упражнения

1. Разбить число 12 на два слагаемых, произведение которых имело бы максимальное значение.

2. Разбить число 10 на два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшая.

3. Число 8 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшая.

4. Для какого числа разность между этим числом и его квадратом наибольшая?

5. Какой из прямоугольников с периметром, равным 50 *см*, имеет наибольшую площадь?

6. Прямоугольный участок земли в 10 000 $м^2$ нужно окопать вдоль всей границы рвом. Как выбрать размеры участка, чтобы длина рва была наименьшая?

7. Сумма основания и высоты треугольника равна 10 *см*. Каковы должны быть размеры основания, чтобы площадь треугольника была наибольшая?

8. Из квадратного листа железа, сторона которого равна 30 *см*, нужно вырезать по углам четыре квадратика так, чтобы из оставшейся части после сгибания получить коробку наибольшей емкости. Каковы при этом размеры вырезанных квадратиков?

9. Из листа картона прямоугольной формы размером 30×50 $см^2$ нужно вырезать по углам квадратики так, чтобы из оставшейся части после сгибания получить коробку наибольшей боковой поверхности. Подсчитать размеры вырезанных квадратиков.

10. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается правильным треугольником. Периметр окна равен 3 *м*. Каково должно быть основание прямоугольника, чтобы окно имело наибольшую площадь?

11. Сечение шлюзового канала имеет вид прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения равен 4,5 *м*. При каком радиусе полукруга сечение будет иметь наибольшую площадь?

12. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого равен 72 $дм^3$, а стороны основания относятся как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон его, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

13. Объем правильной четырехугольной призмы равен 8 $дм^3$. Какова должна быть сторона основания призмы, чтобы полная поверхность ее была наименьшей?

14. Резервуар емкостью в 4 $м^3$ с квадратным основанием, открытый сверху, нужно выложить оловом. Каковы должны быть его размеры, чтобы олова пошло для этого минимальное количество?

15. Найти величину радиуса основания и высоту цилиндра, имеющего объем 27π $см^3$, у которого полная поверхность наименьшая.

16. Какими нужно взять размеры цилиндрического сосуда емкостью в 1 *л*, открытого сверху, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество материала.

17. В равнобедренный треугольник с основанием 20 *см* и высотой 8 *см* вписан прямоугольник. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

18. Из проволоки длиной 120 *см* нужно сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность параллелепипеда была наибольшей?

19. Из проволоки длиной 90 *см* нужно сделать модель призмы с правильным треугольником в основании. Какова должна быть сторона основания призмы, чтобы боковая поверхность ее была наибольшей?

20. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 *см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольший?

21. Найти высоту цилиндра с наибольшим объемом, вписанного в шар радиуса R.

22. В конус, радиус основания которого 6 *см* и высота 15 *см*, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Определить радиус цилиндра.

23. На параболе $y^2 = 2x$ найти точку, ближайшую к точке $A(3;\ 0)$.

24. Электрическая лампочка висит над центром круглого стола. На какую высоту нужно ее поднять, чтобы она наиболее ярко освещала предмет, лежащий на столе на расстоянии 1 *м* от центра? (Яркость освещения прямо пропорциональна синусу угла, образованного лучом, падающим на предмет, с крышкой стола, и обратно пропорциональна квадрату расстояния предмета от источника света, т. е. $I = F\frac{\sin\varphi}{r^2}$.)

25. Картина в 1,4 *м* высотой висит на стене так, что ее нижний край на 1,8 *м* выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения был наибольший)?

§ 94. Графики функций. В настоящей главе мы познакомились с тем, как изучаются свойства функции с помощью ее производных. Знание этих свойств позволяет нам получить представление о функции, а также построить ее график.

Пример. Построить график функции $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$.

Решение. Исследуем данную функцию на максимум и минимум.

I. $y' = \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$

II. $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$, или $x^2 - 4x = 0$,

откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

III. $y'' = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)' = x - 2,$

$y''_{x=0} = 0 - 2 = -2,$

$y''_{x=4} = 4 - 2 = +2.$

При $x = 0$ функция имеет максимум, при $x = 4$ — минимум.

IV. Найдем ординаты точек, соответствующих максимуму и минимуму функции:

$$y_{x=0}=\frac{1}{6}\cdot 0^3-0^2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3},$$

$$y_{x=4}=\frac{1}{6}\cdot 4^3-4^2+\frac{2}{3}=\frac{32}{3}-16+\frac{2}{3}=-4\frac{2}{3}.$$

Координаты искомых точек суть $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$ и $\left(4;\ -4\frac{2}{3}\right)$.

Исследуем теперь данную функцию на точку перегиба; для этого найденную вторую производную приравняем нулю:

$$x-2=0,$$

откуда

$$x=2.$$

Чтобы убедиться, что при $x=2$ имеет место перегиб, определим знаки второй производной для $x<2$ и для $x>2$; в результате получим:

$$y''_{x=1}=1-2=-1,$$

$$y''_{x=3}=3-2=+1.$$

Смена знаков второй производной показывает, что аргументу $x=2$ соответствует точка перегиба. Найдя ее ординату, будем иметь:

$$y=\frac{1}{6}\cdot 2^3-2^2+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-4+\frac{2}{3}=-2,$$

и координаты точки перегиба $(2;\ -2)$.

Чтобы яснее представить график данной функции, вычислим координаты еще нескольких точек *). Положив, например, $x=-2$ и $x=6$, получим:

$$y_{x=-2}=\frac{1}{6}\cdot(-2)^3-(-2)^2+\frac{2}{3}=$$

$$=-\frac{4}{3}-4+\frac{2}{3}=-4\frac{2}{3},$$

$$y_{x=6}=\frac{1}{6}\cdot 6^3-6^2+\frac{2}{3}=36-36+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

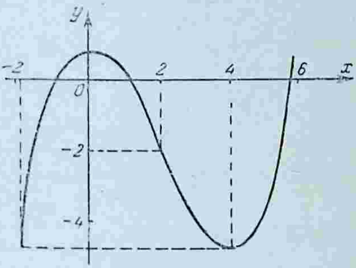
---

*) Часто бывает полезно найти точки пересечения кривой с осями координат, однако это нередко связано с большими трудностями при решении уравнений высших степеней.

Координаты дополнительных точек суть $\left(-2; -4\frac{2}{3}\right)$; $\left(6; \frac{2}{3}\right)$. Составим таблицу найденных значений координат точек:

x	-2	0	2	4	6
y	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-2	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Построим все эти точки и проведем через них плавную линию (черт. 103).



Черт. 103.

Для построения графика функции следует придерживаться такой схемы.

1. Найти значения x, при которых данная функция имеет максимум или минимум.

2. Найти значения x, при которых график функции имеет точки перегиба.

3. Вычислить значения ординат точек, соответствующие найденным значениям абсцисс; присоединив к этим точкам еще несколько дополнительных, записать найденные значения x и y в таблицу.

4. Построить найденные точки и провести через них плавную линию.

Упражнения

Построить графики функций:

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.
2. $y = 2x^2 + 6x$.
3. $y = -2x^2 + 4x$.
4. $y = x^2 - 6x + 5$.
5. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3{,}5$.
6. $y = x^4$.
7. $y = x^5$.
8. $y = x^3 + x$.
9. $y = x^3 - 3x$.
10. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4$.
11. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 1$.
12. $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 2$.
13. $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$.
14. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.
15. $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x$.
16. $y = x^4 - 2x^3 + 3$.

ГЛАВА X

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 95. Сравнение бесконечно малых величин между собой. Понятие о дифференциале. I. В § 42 мы рассмотрели действия над бесконечно малыми величинами и показали, что в результате сложения, вычитания и умножения их получаются также бесконечно малые величины. Однако частное от деления двух бесконечно малых друг на друга может быть не только бесконечно малой величиной, но и бесконечно большой и конечной.

В самом деле, пусть, например, α — бесконечно малая, тогда α^2 и 2α будут также бесконечно малыми. При делении их друг на друга возможны следующие случаи:

1) отношение

$$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha \text{ — бесконечно малая величина,}$$

2) отношение

$$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \text{ — бесконечно большая величина,}$$

3) отношение

$$\frac{2\alpha}{\alpha} = 2 \text{ — конечная величина.}$$

Первое отношение показывает, что бесконечно малая α^2 составляет ничтожно малую часть от α и, следовательно, стремится к нулю значительно быстрее, чем α.

Второе отношение указывает на то, что α, неограниченно уменьшаясь, остается значительно больше, чем α^2, т. е. стремится к нулю медленнее величины α^2.

Сказанное можно иллюстрировать следующей таблицей:

α	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\ldots \longrightarrow 0$
α^2	1	0,01	0,0001	0,000001	0,00000001	$\ldots \longrightarrow 0$
$\dfrac{\alpha^2}{\alpha}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\ldots \longrightarrow 0$
$\dfrac{\alpha}{\alpha^2}$	1	10	100	1000	10000	$\ldots \longrightarrow \infty$

Принято бесконечно малую α^2 по отношению к α называть бесконечно малой *высшего порядка*, а α по отношению к α^2 — бесконечно малой *низшего порядка*.

Что касается третьего отношения, то из него следует, что бесконечно малые 2α и α стремятся к нулю с одинаковой скоростью, так как при их изменении отношение $\frac{2\alpha}{\alpha}$ остается постоянным. Такие бесконечно малые имеют, как говорят, *одинаковый порядок малости*.

Таким образом, частное от деления двух бесконечно малых величин позволяет сравнивать их между собой. Это сравнение особенно полезно в приближенных вычислениях, где отбрасывание бесконечно малых высшего порядка приводит к значительному упрощению вычислений.

II. Возьмем функцию $y = x^2$; ее приращение

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 \quad [(3)\ \S\ 52].$$

Множитель при Δx есть производная данной функции, а потому последнее равенство можно переписать так:

$$\Delta y = y'\,\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{1}$$

Сравним изменение величины обоих слагаемых правой части равенства (1) с уменьшением Δx. Положив, например,

$x=2$ и, следовательно, $y'=4$, составим следующую таблицу значений этих слагаемых:

Δx	1	0,1	0,01	0,001
$y'\Delta x$	4	0,4	0,04	0,004
$(\Delta x)^2$	1	0,01	0,0001	0,000001

Как видно из таблицы, слагаемые $y'\Delta x$ и $(\Delta x)^2$ уменьшаются с уменьшением Δx, причем первое пропорционально Δx, второе же значительно быстрее.

Покажем, что то же самое справедливо для любой дифференцируемой функции $f(x)$.

Пусть дана функция $y=f(x)$. Ее производная

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Согласно определению предела переменной (§ 41) имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha,$$

где α — бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$. Отсюда

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x. \tag{2}$$

И здесь при уменьшении Δx первое слагаемое $y'\Delta x$ уменьшается пропорционально Δx, второе же слагаемое $\alpha\Delta x$ уменьшается быстрее, так как отношение $\frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x}=\frac{\alpha}{y'}$ — бесконечно малая величина при $y'\neq 0$, т. е. по отношению к $y'\Delta x$ величина $\alpha\Delta x$ — бесконечно малая высшего порядка. Поэтому выражение $y'\Delta x$ называют *главной частью приращения* функции $y=f(x)$.

Определение. *Главная часть $y'\Delta x$ приращения функции $y=f(x)$ называется дифференциалом функции.*

Дифференциал функции $y=f(x)$ принято обозначать символом dy. Таким образом

$$dy=y'\Delta x. \tag{3}$$

Дифференциал аргумента dx принимают равным приращению аргумента Δx, т. е.

$$dx=\Delta x.$$

Поэтому равенство (3) можно переписать в следующем виде:

$$dy = y'\,dx, \tag{4}$$

т. е. *дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.*

Из формулы (4) следует:

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

Равенство (5) показывает, что *производная функции есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.* На этом основании производную функции часто выражают в виде $\frac{dy}{dx}$ и читают: «дэ игрек по дэ икс».

III. Заменив в равенстве (2) $y'\Delta x$ символом dy, напишем:

$$\Delta y = dy + \alpha\,\Delta x. \tag{6}$$

Как было показано выше, $\alpha\Delta x$ — бесконечно малая высшего порядка по отношению к $y'\Delta x = dy$, а потому, отбросив в равенстве (6) слагаемое $\alpha\,\Delta x$, получим:

$$\Delta y \approx dy. \tag{7}$$

В практических вопросах часто используют формулу (7), т. е. берут дифференциал функции вместо ее приращения, делая при этом незначительную ошибку и тем меньшую, чем меньше Δx.

Примечание. В случае линейной функции $\Delta y = dy$. В самом деле, для функции $y = kx + b$ приращение будет:

$$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) =$$
$$= kx + k\,\Delta x + b - kx - b = k\,\Delta x.$$

Множитель k есть производная линейной функции; поэтому правая часть последнего равенства выражает дифференциал данной функции, т. е.

$$k\,\Delta x = dy.$$

Итак, в случае линейной функции

$$\Delta y = dy.$$

§ 96. Геометрическое изображение дифференциала. Возьмем функцию $y=f(x)$, график которой изображен на черт. 104. Пусть абсцисса точки M

$$OP=x;$$

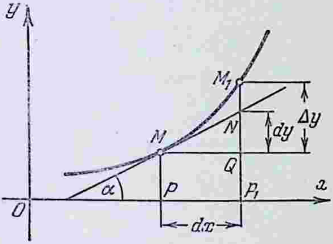
тогда ордината ее

$$PM=y=f(x).$$

Дадим аргументу x приращение $PP_1=dx$ и восставим в точке P_1 перпендикуляр P_1M_1 к оси Ox, а из точки M проведем $MQ \| Ox$. Тогда, как известно (§ 53),

$$QM_1=\Delta y.$$

Проведем в точке M касательную к кривой; полученный при этом отрезок QN, равный приращению ординаты точки M,



Черт. 104.

движущейся по касательной, называется *приращением ординаты касательной.* Из прямоугольного треугольника MNQ имеем:

$$QN=MQ \operatorname{tg} \angle NMQ.$$

Но

$$MQ=PP_1=dx,$$

а, согласно геометрическому смыслу производной (§ 63),

$$\operatorname{tg} \angle NMQ=\operatorname{tg} \alpha=y'.$$

Поэтому

$$QN=y'\,dx.$$

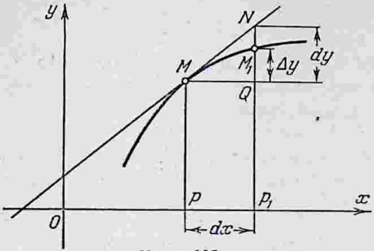
Но

$$y'\,dx=dy \quad [(4)\ §\ 95].$$

Следовательно,

$$QN = dy.$$

Таким образом, если в точке M кривой $y = f(x)$ провести касательную, то *дифференциал функции* $y = f(x)$ *в этой*



Черт. 105.

точке изобразится приращением ординаты касательной, соответствующим приращению ее абсциссы на dx.

Дифференциал функции в данной точке может быть как меньше приращения ее (черт. 104), так и больше (черт. 105).

§ 97. Дифференциал второго порядка. Дифференциал dy функции $y = f(x)$, называемый *первым дифференциалом* или *дифференциалом первого порядка*, представляет собой также функцию x, а потому и от него можно найти дифференциал, который называют *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка*. В этом случае пишут $d(dy)$ или короче d^2y и читают: «дэ два игрек».

Найдем выражение дифференциала второго порядка от функции через ее производную. Для этого продифференцируем по x равенство

$$dy = y'\,dx,$$

считая dx постоянным множителем (так как dx не зависит от x):

$$d^2y = d(y'\,dx) = d(y')\,dx.$$

Но согласно формуле (4) § 95

$$d(y') = (y')'\,dx = y''dx.$$

Поэтому

$$d^2y = y''\,dx \cdot dx = y''\,dx^2, \tag{1}$$

т. е. *дифференциал второго порядка равен произведению второй производной функции на квадрат дифференциала аргумента.*

Из равенства (1) следует

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Это дает основание для выражения второй производной функции в виде отношения $\frac{d^2y}{dx^2}$, которое читают так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат».

§ 98. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Рассмотрим несколько примеров использования дифференциала в приближенных вычислениях.

а) Определение приращения функции.

Пример 1. Найти приближенно приращение функции $y = 2x^2 + 3$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение. Так как приращение аргумента — величина малая, то согласно формуле (7) § 95 можем приращение функции заменить ее дифференциалом.

Дифференциал же данной функции

$$dy = (2x^2 + 3)'\, dx = 4x\, dx. \qquad (1)$$

Заменив в равенстве (1) x и dx их значениями, получим:

$$dy = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}008.$$

Следовательно,

$$\Delta y \approx 0{,}008.$$

Посмотрим, какую ошибку мы делаем, беря дифференциал вместо приращения. Для этого найдем точное значение приращения функции (см. пример 1, § 52):

$$\Delta y = 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 =$$
$$= 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 2(0{,}001)^2 = 0{,}008 + 0{,}000002 = 0{,}008002.$$

Сравнивая полученное точное значение Δy с приближенным, видим, что допущенная ошибка равна 0,000002. Выражая ее в процентах, найдем:

$$\frac{0{,}000002}{0{,}008002} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%.$$

Ошибка оказалась очень малой.

Пример 2. Шар радиуса $R=20$ *см* был нагрет, отчего радиус его удлинился на 0,01 *см*. Насколько увеличился при этом объем шара?

Решение. Объем шара определяется по формуле

$$v=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Каждому значению R по закону, заданному этой формулой, отвечает одно определенное значение v, т. е. v есть функция от R. Следовательно, наша задача сводится к определению приращения функции v при заданном приращении аргумента R. Так как приращение аргумента мало ($\Delta R = dR = 0{,}01$), то мы можем приращение функции заменить ее дифференциалом [(7) § 95].

Находим дифференциал функции v:

$$dv=\frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2\,dR=4\pi R^2\,dR.$$

Но

$$R=20 \text{ и } dR=0{,}01.$$

Поэтому

$$dv=4\pi\cdot 20^2\cdot 0{,}01=16\pi \text{ см}^3.$$

б) Нахождение числового значения функции. Пусть требуется найти приближенное значение функции

$$f(x)=2x^2+3$$

при $x_1=2{,}001$, т. е. найти величину $f(2{,}001)$.

Представим x_1 в виде суммы

$$x_1=2+0{,}001,$$

где 0,001 будем рассматривать как приращение аргумента.

Из формулы для приращения функций

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

найдем:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y.$$

Полагая Δx малой велич[illegible] можем Δy замен[illegible] величиной dy; тогда последнее [illegible] перепишетс[illegible]

$$f(x+\Delta x \ [illegible] \ y.$$

Применив равенство (2) к данному примеру, можем написать:

$$f(2+0{,}001)\approx f(2)+dy.$$

Но

$$dy=4x\,dx=4\cdot 2\cdot 0{,}001=0{,}008,$$

$$f(2)=2\cdot 2^2+3=11.$$

Поэтому

$$f(2+0{,}001)=f(2{,}001)\approx 11+0{,}008=11{,}008.$$

Равенство (2) может служить формулой для приближенного вычисления значения функции.

в) Вычисление по приближенным формулам. Пользуясь формулой (2), выведем приближенные формулы для вычисления некоторых выражений.

1) Возьмем функцию

$$y=\sin x$$

и положим, что угол x, равный нулю, получает весьма малое приращение α. Применим формулу (2), полагая в ней $x=0$ и $dx=\alpha$. Получим:

$$f(0+\alpha)\approx f(0)+dy.$$

Но

$$dy=(\sin x)'\,dx=\cos x\cdot dx=\cos 0\cdot\alpha=\alpha$$

и

$$f(0)=\sin 0=0.$$

Поэтому

$$f(0+\alpha)\approx 0+\alpha,$$

или

$$\sin\alpha\approx\alpha.$$

Отсюда следует, что синус очень малого угла приближенно равен самому углу; при этом нужно помнить, что угол должен быть выражен в радианной мере. Так, например, $\sin 0{,}003\approx 0{,}003$. В самом деле, выразив данный угол в градусной мере, найдем:

$$\frac{180^\circ\cdot 0{,}003}{3{,}14}\approx 0{,}17^\circ\approx 10',$$

а

$$\sin 10'\approx 0{,}003.$$

2) Возьмем функцию $y = x^n$ и положим, что x, равный 1, получает весьма малое по сравнению с единицей приращение $\Delta x = \alpha$. Тогда согласно формуле (2) имеем:

$$f(1+\alpha) = f(1) + dy.$$

Но

$$dy = (x^n)' \, dx = nx^{n-1} \, dx = n \cdot 1^{n-1} \cdot \alpha = n\alpha$$

и

$$f(1) = 1^n = 1.$$

Поэтому

$$f(1+\alpha) \approx 1 + n\alpha,$$

или

$$(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha. \tag{3}$$

Точно так же можно вывести равенство

$$(1-\alpha)^n \approx 1 - n\alpha. \tag{4}$$

По формулам (3) и (4) можно быстро найти приближенную степень числа, близкого к единице; например:

$$1{,}015^2 = (1 + 0{,}015)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}015 = 1{,}03,$$

$$0{,}988^3 = (1 - 0{,}012)^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}012 = 0{,}964.$$

3) Выведем формулу для приближенного вычисления выражения $\sqrt[n]{1+\alpha}$, где α имеет малое значение по сравнению с единицей. Для этого представим $\sqrt[n]{1+\alpha}$ в виде степени

$$\sqrt[n]{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Но по формуле (3)

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha,$$

или

$$\sqrt[n]{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{n}\alpha. \tag{5}$$

Аналогично выводится формула

$$\sqrt[n]{1-\alpha} =$$

По формулам (5) и (6) можно легко найти приближенное значение корня из числа, близкого к единице; например:

$$\sqrt{1,03}=\sqrt{1+0,03}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0,03=1,015,$$

$$\sqrt[3]{0,964}=\sqrt[3]{1-0,036}\approx 1-\frac{1}{3}\cdot 0,036=0,988.$$

Упражнения

Найти первый дифференциал функции:

1. $y=x\sqrt{x}$. 2. $s=\frac{1-t}{1+t}$. 3. $v=\frac{1}{2}\cos\frac{2}{\omega}$.

4. $y=\sin^2\sqrt{x}$. 5. $u=\ln^2\frac{1}{t}$. 6. $y=\ln\sqrt{\frac{1}{x}}$.

7. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x}$.

8. Найти дифференциал пути, выраженного уравнением $s=5t^3$, если $t=4$ и $\Delta t=0,01$.

9. Вычислить приближенно приращение функции $y=x^3-5x^2+80$ при переходе аргумента от $x=4$ к $x=4,001$.

10. Сторона квадрата равна 5 *см*. Найти приближенное приращение площади его при увеличении его стороны на 0,01 *см*.

11. Найти приближенное приращение площади круга, если радиус его изменяется с 50 *см* на 50,1 *см*.

12. Сторона куба, равная 1 *м*, удлинилась на 10 *см*. Насколько при этом увеличился объем куба?

13. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием сторона основания равна 20 *см*, а высота равна 10 *см*. Насколько увеличится его объем, если сторону основания удлинить на 0,02 *см*?

14. В конусе радиус основания равен 15 *см*, а высота содержит 20 *см*. Насколько увеличится его объем, если радиус основания удлинить на 0,04 *см*?

15. Шар радиуса $R=9$ *см* был нагрет, вследствие чего объем его увеличился на $32,4\pi$ *см*^{3}. Узнать удлинение радиуса шара.

16. Куб со стороной $a=10$ *см* при нагревании увеличился на 0,06 своего объема. Узнать удлинение ребра куба.

17. Объем шара при нагревании увеличился на 0,0024 своей величины. На сколько процентов увеличилась длина его радиуса?

18. Какой процент будет составлять ошибка, полученная при вычислении площади круга, если при измерении радиуса его сделана ошибка в 1%?

19. Объем куба увеличился на 6% своей величины. На сколько процентов увеличилось при этом его ребро?

Найти приближенное значение следующих функций:

20. $y=x^2+x$ при $x=3,01$.

21. $y=3x^2+2x-1$ при $x=2,03$.

22. $y=x^3+x^2-2x$ при $x=2,01$.

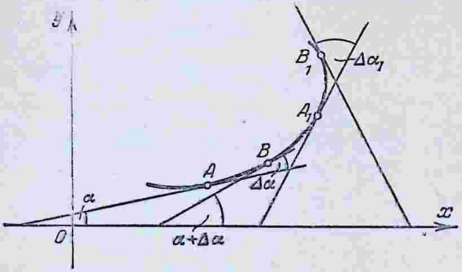
23. $y=\frac{1}{2}x^3-5x^2+x-1$ при $x=2{,}1$.

24. $y=x^3-2x+1$ при $x=0{,}02$.

25. $y=x^3-4x^2+1$ при $x=-2{,}03$.

26. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ при $x=4{,}2$.

§ 99. **Кривизна кривой.** Пусть дана кривая, определяемая уравнением $y=f(x)$ (черт. 106). Возьмем на ней две точки A и B и проведем в них касательные к кривой. При переходе от точки A к точке B касательная меняет угол наклона к положительному направлению оси абсцисс на некоторую величину. Если обозначим



Черт. 106.

угол наклона касательной в точке A к оси Ox через α, то угол наклона касательной в точке B к той же оси, получив приращение $\Delta\alpha$, будет равен $\alpha+\Delta\alpha$, а угол между самими касательными, как видно из чертежа, будет $\Delta\alpha$. Величину $\Delta\alpha$ можно рассматривать как угол отклонения касательной от первоначального ее положения.

Разделив $\Delta\alpha$ на длину дуги $AB=\Delta s$, получим среднюю величину угла отклонения, приходящегося на единицу длины дуги. Отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ называется *средней кривизной кривой* на ее участке AB. Средняя кривизна кривой на разных ее участках может быть различной.

Допустим теперь, что точка B, двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке A и Δs уменьшается, стремясь к нулю; тогда предел отношения $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ будет определять *кривизну кривой в точке* A. Обозначив кривизну кривой в точке буквой K, будем иметь:

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Определение. *Кривизной кривой в данной ее точке A называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги AB при неограниченном приближении точки B к A.*

Согласно определению производной (§ 60)

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds};$$

поэтому

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{1}$$

Преобразуем правую часть этого равенства, выразив $d\alpha$ и ds через производные данной функции $y = f(x)$.

Согласно геометрическому смыслу производной (§ 63) имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = y',$$

где α — угол наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке A к положительному направлению оси абсцисс (черт. 106); отсюда

$$\alpha = \operatorname{arctg} y'.$$

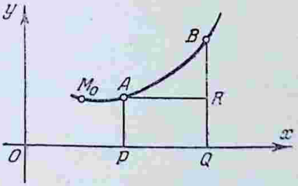
В этом равенстве $\operatorname{arctg} y'$ — функция от функции, так как $\operatorname{arctg} y'$ зависит от y', а y' зависит от x. Продифференцируем последнее равенство по аргументу x; получим:

$$\frac{d\alpha}{dx} = (\operatorname{arctg} y')' = \frac{1}{1 + (y')^2} (y')' = \frac{y''}{1 + (y')^2},$$

отсюда

$$d\alpha = \frac{y''\, dx}{1 + (y')^2}. \tag{2}$$

Найдем выражение ds через производную функции $y = f(x)$. Для этого возьмем снова тот же участок AB кривой (черт. 107). Будем



Черт. 107.

рассматривать длину AB как приращение дуги M_0A, соответствующее приращениям $PQ = \Delta x$ и $RB = \Delta y$. Если Δx достаточно мало, то отрезок дуги AB можно считать прямолинейным; в этом случае, применяя теорему Пифагора, получим:

$$AB^2 = AR^2 + RB^2,$$

или

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Разделив обе части равенства на $(\Delta x)^2$, найдем:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2,$$

отсюда

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Положим, что $\Delta x \to 0$; тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Применяя теоремы о пределе корня, суммы и степени (§ 43), получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{\lim_{\Delta x \to 0}\left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]} = \sqrt{\lim_{\Delta x \to 0} 1 + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}. \qquad (3)$$

Но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y';$$

поэтому равенство (3) примет вид

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2},$$

откуда

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad (4)$$

Подставив значение $d\alpha$ и ds в выражение (1), получим:

$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''\, dx}{1 + (y')^2} : \sqrt{1 + (y')^2}\, dx =$$

$$= \frac{y''}{[1 + (y')^2]\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}},$$

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \qquad (5)$$

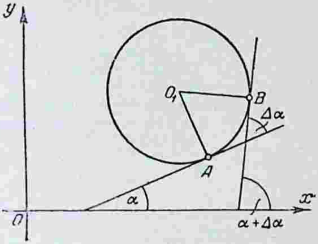
Формула (5) позволяет найти кривизну кривой, определяемой уравнением $y = f(x)$, в любой ее точке.

§ 100. Кривизна окружности. Кривизну окружности можно определить по формуле (5) § 99, но гораздо проще ее найти из следующих рассуждений.

Проведем касательные в двух точках A и B окружности (черт. 108). Обозначив дугу AB через Δs, найдем среднюю кривизну на этом участке; она выразится дробью $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Проведя радиусы в точки касания, получим:

$$\angle AO_1B = \Delta\alpha,$$

так как углы AO_1B и $\Delta\alpha$ образованы взаимно перпендикулярными



Черт. 108.

прямыми. Но, как известно, угол в радианной мере измеряется отношением длины дуги к радиусу; следовательно,

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R},$$

откуда

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}.$$

Ясно, что такой же вывод мы получим, взяв другой какой-либо участок окружности. Следовательно,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

для любой точки окружности, т. е. *кривизна окружности постоянна во всех ее точках и равна обратной величине ее радиуса.*

§ 101. Радиус кривизны кривой. При изучении кривизны кривой подбирают такую окружность, кривизна которой равна кривизне кривой в той или иной ее точке. Центр этой окружности называется *центром кривизны кривой в соответствующей точке*, радиус — *радиусом кривизны кривой в этой точке*, а сама окружность — *окружностью кривизны* (черт. 109).

Определение. *Окружностью кривизны в точке M кривой называется окружность, проходящая через точку M и имеющая с кривой одинаковую кривизну и общую касательную.*

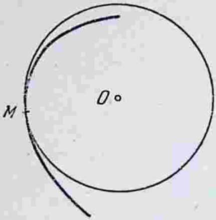
Заметим, что центр окружности кривизны всегда располагается со стороны вогнутости кривой.

Кривизна окружности, как мы знаем (§ 100),

$$K=\frac{1}{R},$$

отсюда

$$R=\frac{1}{K}.$$



Черт. 109.

Следовательно, и радиус кривизны кривой в точке ее определяется тем же равенством.

Заменив K его значением, взятым из равенства (5) § 99, получим формулу для определения радиуса кривизны кривой в любой ее точке:

$$R=\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}. \qquad (1)$$

Применяя эту формулу к прямой линии, заданной, например уравнением $y=kx+b$, получим:

$$R=\frac{(1+k^2)^{3/2}}{0}=\infty,$$

так как $y'=k$ и $y''=0$.

Это значит, что прямую линию можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса.

Пример. Найти радиус кривизны кривой $y=2x^2$ в точке, абсцисса которой равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Решение. Найдем сначала первую и вторую производные функции $y=2x^2$ для точки с абсциссой $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$y'=(2x^2)'=4x, \quad \text{и} \quad y'\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2},$$

$$y''=(4x)'=4 \text{ для всех } x.$$

Подставив значения y' и y'' в формулу (1), получим:

$$R=\frac{[1+(2\sqrt{2})^2]^{3/2}}{4}=\frac{(1+8)^{3/2}}{4}=\frac{\sqrt{9^3}}{4}=\frac{27}{4}=6{,}75.$$

Упражнения

Найти радиус кривизны следующих кривых:

1. $y = x^2 + x$ в точке 0 (0; 0).
2. $y = x^2 - x + 1$ в точке, абсцисса которой $x = \frac{1}{2}$.
3. $xy = 4$ в точке $A(2; 2)$.
4. $y^2 = 4x^3$ в точке $A(1; 2)$.
5. $y^2 = x^3 + x$ в точке, абсцисса которой $x = 1$.
6. $y = e^x$ в точке $A(0; 1)$.
7. $y = \sin x$ в точке, абсцисса которой $x = \frac{\pi}{4}$.
8. $y = \cos x$ в точке $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

9. Найти точку на кривой $y = \frac{1}{2}x^2$, в которой радиус кривизны наименьший.

ГЛАВА XI

ИНТЕГРАЛ

§ 102. Понятие о неопределенном интеграле. Имея функцию, можно по известным нам правилам найти ее производную, что, как мы знаем, имеет большое практическое значение. Так, по данному закону движения тела мы находим скорость его, как производную пути по времени (§ 58 и § 60); по данному уравнению кривой определяем при помощи производной угловой коэффициент касательной, проведенной к этой кривой (§ 63), и т. п.

Однако часто приходится решать и обратную задачу: по известной скорости движения тела устанавливать закон его движения, по данному угловому коэффициенту касательной к кривой находить уравнение этой кривой и т. п., иначе говоря, по данной производной отыскивать функцию, от которой произошла эта производная. Поэтому нам необходимо познакомиться с правилами решения указанной задачи.

Заметим, что находить функцию можно не только по данной ее производной, но и по ее дифференциалу, так как производная функции и ее дифференциал связаны простым соотношением [(4) § 95]. Практически же отыскивать функцию удобнее по ее дифференциалу, поэтому в дальнейшем изложении мы и будем пользоваться дифференциалом для решения обратной задачи.

Пусть функция

$$y = F(x) \tag{1}$$

имеет производную $f(x)$, тогда ее дифференциал

$$dy = f(x)\,dx. \tag{2}$$

Функция (1) по отношению к ее дифференциалу (2) называется *первообразной*.

Определение. *Первообразной функцией для выражения $f(x)\,dx$ называется функция $F(x)$, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$.*

Однако дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым. Действительно, взяв, например, несколько функций

$$y = x^2,$$
$$y = x^2 + 2,$$
$$y = x^2 - 5,$$
$$y = x^2 + C,$$

где $C = \text{const}$, мы замечаем, что дифференциал каждой из них один и тот же:

$$dy = 2x\,dx.$$

Но, как видно, этому дифференциалу соответствует множество первообразных функций вида $x^2 + C$, где C — любая постоянная.

Выражение $x^2 + C$ называется *неопределенным интегралом* для дифференциала $2x\,dx$ и обозначается символом $\int 2x\,dx$, т. е.

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Определение. *Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для дифференциала $f(x)\,dx$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)\,dx$.*

Таким образом, можно записать

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, а C — *произвольной постоянной интегрирования*.

Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*, а раздел математики, занимающийся вопросами, связанными с интегрированием, — *интегральным исчислением*.

Из сказанного видно, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

103. Основные свойства неопределенного интеграла. Первое свойство. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*, т. е.

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Это свойство следует из определения неопределенного интеграла.

Второе свойство. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной.*

Пусть

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Если возьмем интеграл от обеих частей этого равенства, то получим:

$$\int dF(x) = \int f(x)\,dx.$$

Но по определению

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

следовательно,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Примем без доказательства еще следующие свойства неопределенного интеграла.

Третье свойство. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т. е.

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$$

где a — постоянный множитель.

Четвертое свойство. *Интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов каждой из них*, т. е.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx.$$

104. Основные формулы интегрирования. Для нахождения неопределенного интеграла необходимо знать основные формулы интегрирования.

Выведем сначала формулу для интегрирования степени. Для этого возьмем функцию x^{n+1} и найдем ее дифференциал:

$$d(x^{n+1}) = (n+1)\,x^n\,dx.$$

Взяв интеграл от обеих частей этого равенства, получим:

$$\int d(x^{n+1}) = \int (n+1)\,x^n\,dx.$$

Применяя второе свойство интеграла к левой части последнего равенства и третье свойство к правой, найдем:

$$x^{n+1} + C_1 = (n+1)\int x^n\,dx,$$

отсюда при $n+1 \neq 0$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{C_1}{n+1}.$$

Обозначив постоянное слагаемое $\frac{C_1}{n+1}$ буквой C, будем иметь окончательно:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Выведенная формула справедлива для любого значения n, кроме $n = -1$. В последнем случае эта формула теряет смысл.

Аналогично можно вывести другие простейшие формулы. Но они могут быть получены и проще.

Пусть, например, нам нужно найти $\int \frac{dx}{x}$. Зададимся вопросом, какая функция имеет своим дифференциалом выражение $\frac{dx}{x}$. Такой является функция $\ln x + C$, так как

$$d(\ln x + C) = \frac{dx}{x},$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Приводим следующую таблицу основных формул, легко получаемых из соответствующих формул дифференцирования путем их обращения, как это было сделано для вывода $\int \frac{dx}{x}$:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{(I)}$$
при $n \neq -1$.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad \text{(II)}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \quad \text{(III)}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad \text{(IV)}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C. \quad \text{(V)}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \quad \text{(VI)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad \text{(VII)}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad \text{(VIII)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \quad \text{(IX)}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \quad \text{(X)}$$

Разберем несколько примеров.

Пример 1. Найти $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\,dx$.

Решение. Применяя четвертое и третье свойства интеграла, а затем формулу (1) и второе свойство, получим:

$$\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\,dx =$$
$$= \int 5x^4\,dx - \int 4x^3\,dx + \int 3x^2\,dx - \int dx =$$
$$= 5\int x^4\,dx - 4\int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx - \int dx =$$
$$= 5\,\frac{x^5}{5} - 4\,\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3} - x + C = x^5 - x^4 + x^3 - x + C.$$

Здесь C является алгебраической суммой четырех произвольных постоянных слагаемых, входящих составной частью в каждый интеграл.

Легко проверить правильность интегрирования; для этого найдем дифференциал от полученной в ответе функции:

$$d(x^5 - x^4 + x^3 - x + C) = (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\,dx.$$

В результате получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден верно.

Пример 2. Найти $\int \frac{2x\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Данный интеграл не подходит ни под одну из табличных формул, поэтому подынтегральное выражение преобразуем следующим образом:

$$\int \frac{2x\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}} = 2\int x x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 2\int x^{\frac{7}{6}}\,dx.$$

Применяя формулу (I), получим:

$$2\int x^{\frac{7}{6}}\,dx = 2\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx.$

Решение. Представим подынтегральное выражение в виде суммы двух дробей, разделив числитель почленно на x:

$$\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx.$$

Разбив последний интеграл на сумму интегралов и применяя формулы (I) и (II), получим:

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln x + C.$$

Мы разобрали простейшие примеры, в которых функции могли быть выражены путем несложных преобразований в виде, позволяющем применить для нахождения интеграла табличные формулы. Очень часты случаи, когда таких простых преобразований сделать нельзя и для интегрирования приходится применять особые приемы, иногда довольно сложные.

Таким образом, для интегрирования недостаточно простого знания формул, нужен еще опыт, который накапливается постепенно в процессе решения примеров. Интегрирование в отличие от дифференцирования требует от нас известной изобретательности и смекалки.

Упражнения

1. $\int x\,dx.$ 2. $\int x^4\,dx.$ 3. $\int x^{n-1}\,dx.$ 4. $\int 5\,dx.$

5. $\int a\,d\varphi.$ 6. $\int 2x\,dx.$ 7. $\int \frac{1}{2}t^2\,dt.$ 8. $\int (2-x)\,dx.$

9. $\int (3x-x^2)\,dx.$ 10. $\int (a+\varphi^2)\,d\varphi.$ 11. $\int 3(x-2)\,dx.$

12. $\int (4x^3+4x-3)\,dx.$ 13. $\int x^2(1+2x)\,dx.$

14. $\int (x+3)^2\,dx$. 15. $\int 4(2x-1)^2\,dx$.

16. $\int x(1-x)^2\,dx$. 17. $\int \sqrt{x}\,dx$. 18. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$.

19. $\int \frac{d\omega}{\omega^2}$. 20. $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$. 21. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 22. $\int \frac{3\,dx}{4\sqrt[4]{x}}$.

23. $\int \frac{x\,dx}{2\sqrt{x}}$. 24. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}\,dx$. 25. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

26. $\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. 27. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}\,dx$.

28. $\int \frac{v-\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{v}}\,dv$. 29. $\int 4\sin x\,dx$.

30. $\int 2a\cos\varphi\,d\varphi$. 31. $\int \frac{2d\theta}{\cos^2\theta}$. 32. $\int \frac{3a\,du}{\sin^2 u}$.

33. $\int (1+\cos t)\,dt$. 34. $\int (2-3\sin x)\,dx$.

35. $\int (3x^2-2\cos x)\,dx$. 36. $\int \left(\frac{2}{\cos^2\varphi}-\frac{3}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi$.

37. $\int 3e^u\,du$. 38. $\int 2a^\varphi\,d\varphi$. 39. $\int (x-5e^x)\,dx$.

40. $\int (2e^t-3\cos t)\,dt$. 41. $\int \frac{3\,dt}{2t}$. 42. $\int \left(\frac{2}{x}-x\right)dx$.

43. $\int \frac{6\,dx}{1+x^2}$. 44. $\int \frac{3\,dx}{4\sqrt{1-x^2}}$. 45. $\int \frac{2\cos^2 v+1}{\cos^2 v}\,dv$.

46. $\int \frac{\sin^2 t-2}{\sin^2 t}\,dt$. 47. $\int \frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}\,dx$.

48. $\int \sec^2 x\,dx$. 49. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. 50. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$.

§ 105. Определение постоянной интегрирования. В § 102 было установлено, что в равенстве

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

постоянное слагаемое C имеет произвольное значение, а потому неопределенный интеграл представляет собой множество первообразных функций, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым. Чтобы из совокупности первообразных функций найти одну, отвечающую задаче, нужно иметь дополнительное условие.

Пусть, например, требуется найти уравнение кривой, проходящей через точку M (1; 3), если известно, что угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен $2x$.

Согласно геометрическому смыслу производной (§ 63) напишем:

$$\frac{dy}{dx}=2x,$$

откуда

$$dy=2x\,dx.$$

Взяв интеграл от обеих частей последнего равенства, получим:

$$\int dy=\int 2x\,dx$$

или

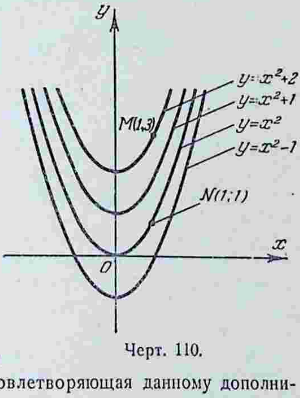
$$y=x^2+C. \qquad (1)$$

Равенство (1) не может служить ответом на вопрос задачи, так как оно содержит неопределенное постоянное C. Чтобы получить определенный ответ (т. е. единственную первообразную функцию для данного дифференциала), воспользуемся дополнительными данными задачи, а именно координатами точки, лежащей на кривой, уравнение которой ищется. Положив в уравнении (1) $x=1$ и $y=3$, будем иметь:

$$3=1+C,$$

откуда

$$C=2.$$



Черт. 110.

Итак, искомое уравнение кривой (т. е. искомая первообразная функция, удовлетворяющая данному дополнительному условию), будет

$$y=x^2+2. \qquad (2)$$

Построив графики первообразных функций, определяемых уравнением (1), мы получим множество (семейство) парабол (черт. 110), каждая из которых имеет вершину на оси Oy. Задав дополнительное условие (при $x=1$ и $y=3$), мы тем самым из множества парабол выделили одну параболу (2), на которой лежит точка с координатами $x=1$ и $y=3$. В самом деле, подставив в уравнение (2) вместо x и y соответственно 1 и 3, получим тождество.

Если изменить дополнительное условие, то и C изменится, а соответственно с этим мы получим другую первообразную функцию, графиком которой будет другая парабола того же семейства. Например, если кривая проходит через точку $N(1;\ 1)$, то $C=0$ и $y=x^2$ (черт. 110).

Упражнения

1. Найти $\int (x-3)\,dx$, если при $x=2$ первообразная функция равна 9.

2. Найти $\int (\sin x+\cos x)\,dx$, если при $x=\frac{\pi}{2}$ первообразная функция равна 2.

3. Найти $\int \left(\frac{2}{x}-1\right) dx$, если при $x=1$ первообразная функция равна 2.

4. Найти $\int \left(\frac{1}{2}e^x-\cos x\right) dx$, если при $x=0$ первообразная функция равна $\frac{1}{2}$.

5. Найти $\int \left(\frac{5}{1+x^2}+1\right) dx$, если при $x=0$ первообразная функция равна 0.

§ 106. Определенный интеграл. Пусть в интеграле

$$\int 2x\,dx = x^2+C$$

аргумент изменяется от $x=2$ до $x=4$, тогда приращение первообразных функций x^2+C в указанном промежутке значений x будет:

$$4^2+C-(2^2+C)=16-4=12.$$

Полученное приращение первообразных функций называется *определенным интегралом* и обозначается символом $\int\limits_2^4 2x\,dx$.

Определение. *Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется определенным интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке значений аргумента от a до b.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{1}$$

Левая часть этого равенства читается так: «определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс».

Значение a называется *нижним пределом определенного интеграла*, значение b — *верхним* его *пределом*.

Из равенства (1) вытекает следующее правило:

Для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо x сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

Чтобы подчеркнуть два действия при отыскании определенного интеграла — нахождение неопределенного интеграла и подстановку пределов, — пишут форму следующем виде:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b)$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{-1}^{+1}(x^2+1)$

Решение. Согласно правилу имеем:

$$\int_{-1}^{+1}(x^2+1)\,dx = \Big|_{-1}^{+1}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)=\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}+1=2\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos x\,dx$.

Решение:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos x\,dx = \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin x = 4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 4\,(1-0{,}865)=4\cdot 0{,}135=0{,}54.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение:

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\Big|_{1}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1=$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\approx 0{,}262.$$

§ 107. Основные свойства определенного интеграла. В § 103 мы рассмотрели четыре основных свойства неопределенного интеграла. В подробных курсах высшей математики доказывается, что третьим и четвертым из них обладает и определенный интеграл. Кроме этих свойств, для определенного интеграла справедливо и следующее:

Если переставить пределы определенного интеграла, то его знак изменится на противоположный.

В самом деле, вынеся за скобку множитель -1 в правой части равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -[F(a) - F(b)].$$

Но разность в квадратных скобках есть тот же определенный интеграл, только с переставленными пределами, т. е. $\int_b^a f(x)\,dx$.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Упражнения

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^2 x\,dx$. 2. $\int_0^3 x^2\,dx$. 3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^3\,dx$. 4. $\int_0^1 (2x+1)\,dx$.

5. $\int_{-1}^0 (3x^2+1)\,dx$. 6. $\int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2}t + 4t^2\right) dt$.

7. $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 3(u^2+1)\,du$. 8. $\int_1^2 2\pi(1+x^2)\,dx$.

9. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$. 10. $\int_1^8 \frac{\theta - \sqrt[3]{\theta}}{\theta}\,d\theta$. 11. $\int_{-1}^{+1} (1 - \sqrt[3]{x^2})\,dx$.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi$. 13. $\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi$. 14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{\cos^2 t}$.

15. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\theta}{\sin^2\theta}$. 16. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\cos t\,dt$. 17. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{3}{4}\sin\theta\,d\theta$.

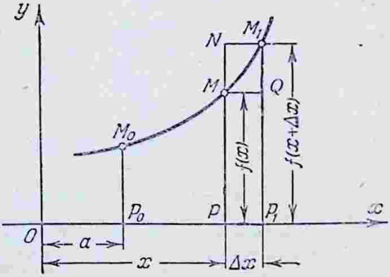
18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi$. 19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x\right) dx$.

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$. 21. $\int\limits_{0}^{\pi} (e^x - \cos x)\,dx$.

22. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2\,dx}{5x}$. 23. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\cos x + 1}{x}\,dx$.

24. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 25. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{3\,dx}{1+x^2}$. 26. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$.

§ 108. Геометрический смысл определенного интеграла. Пусть дана кривая, определяемая уравнением $y = f(x)$, причем



Черт. 111.

$f(x)$ — функция непрерывная и положительная при рассматриваемых значениях x (черт. 111). Возьмем на кривой точку M_0 с постоянной абсциссой $OP_0 = a$ и точку M, меняющую свое положение в зависимости от изменения абсциссы $OP = x$. Тогда площадь фигуры M_0MPP_0, называемой криволинейной трапецией, будет переменной величиной, зависящей от x. Обозначим ее через S. Дадим аргументу x приращение $PP_1 = \Delta x$; тогда площадь S получит приращение ΔS, равное криволинейной площади MM_1P_1P. Проведя прямую $MQ \| Ox$, а также $M_1N \| Ox$ до пересечения с продолженной ординатой PM, будем иметь:

$$\text{площ. } MQP_1P < \Delta S < \text{площ. } NM_1P_1P,$$

или, выражая площади прямоугольников по формулам:

$$PM \cdot PP_1 < \Delta S < P_1M_1 \cdot PP_1. \qquad (1)$$

Но

$$PP_1 = \Delta x,$$
$$PM = f(x),$$
$$P_1M_1 = f(x + \Delta x);$$

поэтому неравенства (1) перепишутся так:

$$f(x)\,\Delta x < \Delta S < f(x + \Delta x)\,\Delta x.$$

Разделив полученные неравенства на положительную величину Δx, получим:

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $f(x + \Delta x) \to f(x)$. Так как величина $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ заключена между $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$, как видно из неравенств (2), то и подавно

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$ — производная функции s; следовательно,

$$\frac{dS}{dx} = f(x),$$

откуда

$$dS = f(x)\,dx. \qquad (3)$$

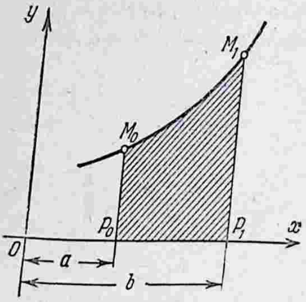
Взяв интеграл от обеих частей равенства (3), получим:

$$\int dS=\int f(x)\,dx,$$

или

$$S+C_1=\int f(x)\,dx. \tag{4}$$

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для дифференциала $f(x)\,dx$, тогда



Черт. 112.

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C_2. \tag{5}$$

Сравнив равенства (4) и (5), получаем:

$$S+C_1=F(x)+C_2,$$

или

$$S=F(x)+C, \tag{6}$$

где

$$C=C_2-C_1.$$

Для определения C положим в равенстве (6) $x=a$, тогда, как видно из чертежа 111,

$$\text{площ. } M_0MPP_0=S=0;$$

будем иметь:

$$0=F(a)+C.$$

к:

Отсюда $C=-F(a)$ и равенство (6) пе[

$$S=F(x)-F(a).$$

Но по определению (§ 106)

$$F(x)-F(a)=\int^{x} f(\ldots)$$

[С]ледовательно,

$$S=\int_a^x f$$

[Эт]а формула определяет переме

Чтобы получить постоянную площадь $M_0M_1P_1P_0$ в промежутке значений x от a до b (черт. 112), нужно в равенстве (7) положить $x=b$; тогда площадь

$$M_0M_1P_1P_0=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

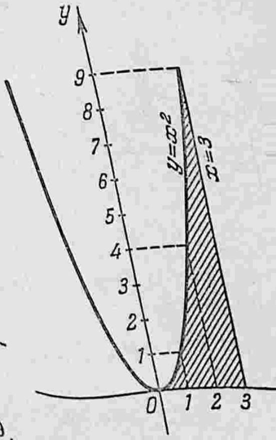
Итак, *площадь фигуры, ограниченной кривой* $y=f(x)$, *где* $f(x)>0$, *осью* Ox *и двумя прямыми* $x=a$ *и* $x=b$, *выражается определенным интегралом* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Таков геометрический смысл определенного интеграла.

Пример. Определить площадь фигуры, заключенной между ветвью кривой $y=x^2$, осью Ox и прямыми $x=0$ и $x=3$.

Решение. Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла искомая площадь (черт. 113)

$$S=\int_0^3 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=9.$$



Черт. 113.

§ 109. Интегрирование способом подстанов…

…интеграл простейшими преобразованиям… …или совсем нельзя привести) к табличн… …применяются особые приемы. Расс… …мый интегрированием способом п…

Найти $\int (1+x)^5\,dx$.

…жим

$$1+x=z,$$

Перейдя к прежнему переменному x, получим:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \sin(a+bx)\,dx$.

Решение. Положим

$$a + bx = z,$$

откуда

$$b\,dx = dz \quad \text{и} \quad dx = \frac{dz}{b}.$$

Сделав подстановку, как в предыдущем примере, и применяя формулу (V) § 104, получим:

$$\int \sin(a+bx)\,dx = \int \sin z \cdot \frac{dz}{b} = -\frac{1}{b}\cos z + C = -\frac{1}{b}\cos(a+bx) + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3}$.

Решение. Положим

$$1 + x^3 = z,$$

откуда

$$3x^2\,dx = dz \quad \text{и} \quad x^2\,dx = \frac{dz}{3}.$$

Сделав необходимую замену и применив формулу будем иметь:

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3} = \int \frac{\frac{dz}{3}}{z} = \frac{1}{3}\ln z + C = \frac{1}{3}\ln(1+$$

Пример 5. Найти $\int \sin^2 x \cos x\,dx$.

Решение. Положим

$$\sin x = z;$$

$$\cos x\,dx = dz$$

$$\cos x\,dx = \int z^2\,dz = \frac{z^3}{3} + C =$$

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Решение. Положим

$$1-\cos x = z;$$

тогда

$$\sin x\,dx = dz$$

и

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-\cos x}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1-\cos x} + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{2e^x\,dx}{(1-e^x)^2}$.

Решение. Положим

$$1-e^x = z;$$

тогда

$$e^x\,dx = -dz$$

и

$$\int \frac{2e^x\,dx}{(1-e^x)^2} = \int \frac{-2\,dz}{z^2} = -2\int z^{-2}\,dz =$$

$$= -2\cdot\frac{z^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Решение. Так как искомый интеграл напоминает табличный [(X) § 104], нужно соответствующими преобразованиями привести его к виду, позволяющему применить указанную формулу. Для этого вынесем за знак интеграла множитель $\frac{1}{9}$.

Получим:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

Положим теперь

$$\frac{x}{3}=z;$$

тогда

$$dx=3\,dz$$

и

$$\int\frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{3\,dz}{1+z^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} z+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

Пример 9. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

Решение. Этот интеграл приводится к табличному [(IX) § 104] следующими преобразованиями:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(1-\frac{5}{3}x^2\right)}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}}.$$

Положим

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x=z;$$

тогда

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}dx=dz,$$

отсюда

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz}{\sqrt{1-z^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin z+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x+C,$$

или
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} x + C.$$

Пример 10. Найти $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Решение.
$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x}.$$

Положим
$$\cos x = z;$$

тогда
$$\sin x\, dx = -dz$$

и
$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int -\frac{dz}{z} = -\ln z + C = -\ln \cos x + C.$$

Пример 11. Найти $\int \cos^2 x\, dx$.

Решение. Заменим $\cos^2 x$ по формуле
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

тогда
$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx =$$
$$= \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx.$$

Для нахождения $\int \cos 2x\, dx$ положим:
$$2x = z,$$
$$dx = \frac{1}{2}\, dz$$

тогда
$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos z \cdot \frac{1}{2}\, dz = \frac{1}{4}\int \cos z\, dz =$$
$$= \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Следовательно,
$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 12. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Решение. Положим:

$$x = a \sin z, \tag{2}$$

тогда

$$dx = a \cos z\, dz$$

и

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos z\, a \cos z\, dz = a^2 \int \cos^2 z\, dz.$$

Взяв $\int \cos^2 z\, dz$ из примера 11, напишем:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2\left(\frac{1}{2} z + \frac{1}{4} \sin 2z\right) + C. \tag{3}$$

Из равенства (2) находим:

$$\sin z = \frac{x}{a},$$

откуда

$$z = \arcsin \frac{x}{a}.$$

Кроме того,

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z = 2 \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} =$$
$$= 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Подставив значения z и $\sin 2z$ в равенство (3), получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Итак,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Упражнения

1. $\int (3+5x)^4\,dx.$ 2. $\int (a+bx)^m\,dx.$ 3. $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}.$

4. $\int \sqrt{x+2}\,dx.$ 5. $\int 2\sqrt[3]{4x-3}\,dx.$ 6. $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx.$

7. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt[4]{3x+5}}.$ 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^2}}.$ 9. $\int \frac{dx}{1+2x}.$

10. $\int \frac{2\,dx}{3-4x}.$ 11. $\int \sin 2x\,dx.$ 12. $\int \cos 4x\,dx.$

13. $\int \sin(1-t)\,dt.$ 14. $\int \cos\left(\frac{1}{2}\varphi+2\right)d\varphi.$

15. $\int \left(\cos\frac{x}{3}-\sin 3x\right)dx.$ 16. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}.$ 17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$

18. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}.$ 19. $\int e^{2\varphi}\,d\varphi.$ 20. $\int e^{-3\theta}\,d\theta.$

21. $\int 2e^{-\frac{1}{2}\omega+1}\,d\omega.$ 22. $\int \frac{dx}{2e^x}.$ 23. $\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx.$

24. $\int 3^{-t+2}\,dt.$ 25. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$ 26. $\int \frac{2t\,dt}{(2t^2-1)^2}.$

27. $\int \frac{3v^2\,dv}{(2-v^3)^4}.$ 28. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$ 29. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x^3-1}}.$

30. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx.$ 31. $\int t^2\sqrt{1+2t^3}\,dt.$

32. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}.$ 33. $\int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2-3\cos\varphi}.$ 34. $\int \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}.$

35. $\int \frac{\cos\omega\,d\omega}{\sin^4\omega}.$ 36. $\int \frac{\cos x\,dx}{(2-\sin x)^2}.$ 37. $\int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt[3]{1+\sin t}}.$

38. $\int \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha.$ 39. $\int \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$

40. $\int \sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,d\theta.$ 41. $\int \cos\alpha(1+\sin\alpha)^2\,d\alpha.$

42. $\int x^2\sin 3x^3\,dx.$ 43. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx.$

44. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$ 45. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}.$ 46. $\int \frac{2e^x\,dx}{(2+e^x)^2}$

47. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx.$ 48. $\int \frac{e^u\,du}{\sqrt{2+e^u}}.$ 49. $\int xe^{x^2}$

50. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin 2x}$. 51. $\int \sin^2 x\,dx$. 52. $\int \frac{dx}{4+x^2}$.

53. $\int \frac{dx}{2+x^2}$. 54. $\int \frac{dt}{5+4t^2}$. 55. $\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}$.

56. $\int \frac{d\alpha}{\sqrt{9-\alpha^2}}$. 57. $\int \frac{du}{\sqrt{9-4u^2}}$. 58. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{3-4\theta^2}}$.

59. $\int \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}$. 60. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x}\,dx$. 61. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

62. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$. 63. $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. 64. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

65. $\int \frac{\ln x\,dx}{x}$. 66. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$. 67. $\int \sin^3 x\,dx$.

68. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 69. $\int \frac{x\,dx}{1+x}$. 70. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$.

71. $\int \sqrt{1+\cos x}\,dx$. 72. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

§ 110. Вычисление определенного интеграла с по[…]мощью подстановки. Для вычисления определенного инте[…]грала с применением подстановки поступают так же, ка[…] указано в разобранных примерах § 109. Но в этом случ[…] есть одна особенность, на которую нужно обратить вним[…]ние. Как мы уже выяснили, метод подстановки заключает[…] в том, что для приведения заданного неопределенного ин-[…]грала к табличному выражают аргумент через новое пе[…]менное, затем находят неопределенный интеграл и получ[…]ный результат снова выражают через первоначально задан[…] переменное (аргумент). В случае же определенного интег[…] нет необходимости возвращаться к первоначально заданн[…] пе[…]ному.

[…]рем несколько примеров.

1. На[…] $\int^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3}$.

[…] $= z$;

[…] dz,

откуда

$$x\,dx = -\frac{dz}{2}.$$

Так как мы ввели новое переменное, связанное с прежним равенством (1), то границы изменения переменного z, т. е. пределы интегрирования по переменному z, будут уже другие. Они найдутся из равенства (1) заменой аргумента x его значениями 0 и $\frac{1}{2}$. Сделав эту замену, получим:

$$z_н = 1 - 0 = 1 \qquad \text{(нижний предел)},$$

$$z_в = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad \text{(верхний предел)}.$$

Таким образом, мы нашли, что пределам изменения x от 0 до $\frac{1}{2}$ соответствуют пределы изменения нового переменного z от 1 до $\frac{3}{4}$. Заменив в заданном интеграле $1 - x^2$ и $x\,dx$ их выражениями через новое переменное и изменив соответственно пределы интегрирования, можем записать решение данного примера следующим образом:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3} = \int\limits_1^{\frac{3}{4}} \frac{5\left(-\frac{dz}{2}\right)}{z^3} = -\frac{5}{2}\int\limits_1^{\frac{3}{4}} \frac{dz}{z^3} = -\frac{5}{2}\int\limits_1^{\frac{3}{4}} z^{-3}\,dz =$$

$$= -\frac{5}{2}\left|\frac{z^{-2}}{-2}\right|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\left|\frac{1}{z^2}\right|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\frac{9}{16}} - 1\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{16}{9} - 1\right) = \frac{35}{36}.$$

Пример 2. Найти $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2}$.

Решение. Вынесем множитель $\frac{3}{9}$ за знак интеграла:

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2} = \frac{3}{9}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\frac{16}{9}x^2} = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\left(\frac{4}{3}x\right)^2}.$$

Положим

$$\frac{4}{3}x = z; \tag{2}$$

тогда

$$\frac{4}{3}dx = dz,$$

откуда

$$dx = \frac{3}{4}dz.$$

Находим новые пределы:

$$z_н = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$z_в = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2} = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{\frac{3}{4}dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\operatorname{arctg} z =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{48}.$$

Упражнения

1. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\,dx.$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}.$ 3. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3}.$

4. $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}.$ 5. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx.$ 6. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{2\,dx}{3\cos^2 3x}.$

7. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}.$ 8. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}.$ 9. $\int\limits_0^3 \frac{2x\,dx}{\sqrt{16+x^2}}.$

10. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{x^2\,dx}{3+2x^3}.$ 11. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2}.$ 12. $\int\limits_0^1 \frac{6x^2\,dx}{1+2x^3}.$

13. $\int\limits_{2}^{4} \frac{15x\,dx}{(x^2-1)^3}$. 14. $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}\,dx$.

15. $\int\limits_{1}^{2} (x^2-1)^3 x\,dx$. 16. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

17. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$. 18. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$. 19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$.

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^3 x\cos x\,dx$. 21. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$.

22. $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{5\,dx}{4+25x^2}$. 23. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 24. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$.

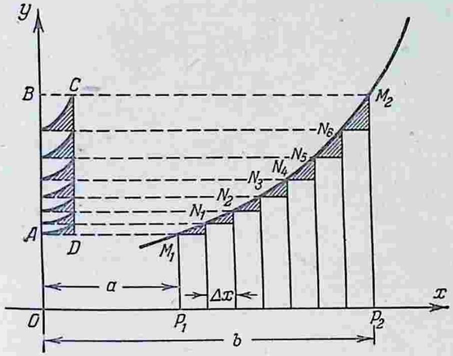
25. $\int\limits_{-R}^{+R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

§ 111. Определенный интеграл как предел суммы. Возьмем функцию $y=f(x)$, непрерывную в промежутке значений x от a до b. Положим для простоты, что эта функция в указанном промежутке положительная и возрастающая. Рассмотрим площадь фигуры $M_1M_2P_2P_1$ ограниченной дугой M_1M_2 графика данной функции, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox (черт. 114). Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла (§ 108) эта площадь

$$S=\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Разделим отрезок P_1P_2 на n р... , каждую из которых обозначим через Δx, и в ... ных отре... восставим перпендикуляры ... с крив...

Проведя из концов этих перпендикуляров прямые, параллельные оси Ox, мы можем представить площадь фигуры $M_1M_2P_2P_1$ в виде суммы площадей прямоугольников и суммы



Черт. 114.

площадей криволинейных треугольников. Обозначив первую сумму через S_1, а вторую — через S_2, напишем:

$$S = S_1 + S_2,$$

откуда

$$S - S_1 = S_2. \tag{2}$$

Если

$$OP_1 = a \quad \text{и} \quad OP_2 = b,$$

то

$$P_1M_1 = f(a) \quad \text{и} \quad P_2M_2 = f(b).$$

Пусть абсциссы точек $N_1, N_2, N_3, \ldots N_{n-1}$ будут соответственно

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},$$

тогда ординаты этих точек будут

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_{n-1}).$$

Сумма площадей всех прямоугольников

$$S_1 = f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x,$$

или

$$S_1 = \sum_a^b f(x)\,\Delta x. \tag{3}$$

В равенстве (3) $\sum$ (сигма) — символ суммы; $f(x)\,\Delta x$ указывает, какого вида выражения складываются; буквы a и b, стоящие внизу и вверху символа $\sum$, говорят о том, что значения аргумента при этом берут в границах от $x=a$ до $x=b$.

Если число делений n отрезка P_1P_2 неограниченно увеличивать, то $\Delta x \to 0$ и величины S_1 и S_2 станут переменными. Покажем, что S_2 при этом условии — величина бесконечно малая. Для этого передвинем криволинейные треугольники параллельно оси Ox, расположив их в прямоугольнике $ABCD$, основание которого

$$AD = \Delta x$$

и высота

$$AB = P_2M_2 - P_1M_1 = f(b) - f(a).$$

Площадь прямоугольника $ABCD$ будет равна

$$[f(b) - f(a)]\,\Delta x.$$

Как видно из черт. 114

$$S_2 < [f(b) - f(a)]\,\Delta x. \tag{4}$$

Если $\Delta x \to 0$, то $[f(b) - f(a)]\,\Delta x$ как произведение постоянной на бесконечно малую есть величина бесконечно малая, а потому согласно неравенству (4) S_2 — также бесконечно малая величина.

Таким образом, в левой части равенства (2) мы имеем разность между постоянной S и переменной S_1, а в правой — бесконечно малую. Следовательно, по определению предела (§ 41),

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} S_1,$$

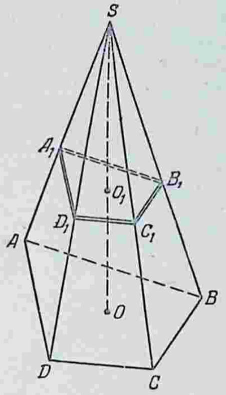
или согласно равенствам (1) и (3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x. \tag{5}$$

Сумма, стоящая под знаком предела в равенстве (5), называется *интегральной суммой.*

Таким образом, *определенный интеграл с конечными пределами равен пределу интегральной суммы, число слагаемых которой неограниченно растет, а каждое слагаемое стремится к нулю.*

Можно показать, что к тому же результату мы придем, если возьмем функцию положительную и убывающую в рассматриваемом промежутке значений x, или положительную, но на одних участках возрастающую, а на других убывающую, или, наконец, отрицательную функцию, т. е. такую, график которой расположен ниже оси Ox.



Черт. 115.

Полученный вывод показывает, что интегрирование можно рассматривать как процесс суммирования, т. е. нахождения целого сложением его частей. В связи с этим интеграл и получил свое название от латинского слова integer (целый), да и символ его (удлиненная буква S, которой обычно обозначается сумма) связан с вышеуказанным свойством определенного интеграла.

В главе XII мы подробно остановимся на приложении формулы (5); здесь же разберем только одну задачу вычисления объема пирамиды с помощью интеграла.

Возьмем пирамиду с площадью основания Q и высотой H и разобьем ее на n пластинок плоскостями, параллельными основанию ее (черт. 115). Если количество этих пластинок неограниченно увеличивать, то толщина каждой из них будет бесконечно малой величиной; в этом случае пластинки можно принять за призмы. Выделив одну из них, например $A_1B_1C_1D_1$, обозначим площадь ее основания, высоту и объем соответственно через q, Δy и Δv; тогда

$$\Delta v = q\,\Delta y. \tag{6}$$

Так как площадь основания пластинки зависит от расстояния $OO_1 = y$, выразим q через y. По известной теореме о свойстве сечения, параллельного основанию пирамиды, можем написать:

$$\frac{q}{Q} = \frac{(H-y)^2}{H^2},$$

откуда

$$q = \frac{Q}{H^2}(H-y)^2.$$

Теперь равенство (6) перепишется так:

$$\Delta v = \frac{Q}{H^2}(H-y)^2 \Delta y.$$

Величина Δv бесконечно малая, так как $\Delta y \to 0$ при $n \to \infty$; таким образом, объем v пирамиды представится как предел суммы бесконечно малых величин вида $\frac{Q}{H^2}(H-y)^2 \Delta y$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^H \frac{Q}{H^2}(H-y)^2 \Delta y,$$

или согласно формуле (5) настоящего параграфа

$$v = \int_0^H \frac{Q}{H^2}(H-y)^2 \, dy.$$

Вычисляя этот интеграл по известным правилам, находим:

$$v = \frac{Q}{H^2}\int_0^H (H^2 - 2Hy + y^2)\, dy = \frac{Q}{H^2}\Big|_0^H \left(H^2 y - Hy^2 + \frac{y^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{Q}{H^2}\left(H^3 - H^3 + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{1}{3} QH.$$

Итак,

$$v = \frac{1}{3} QH,$$

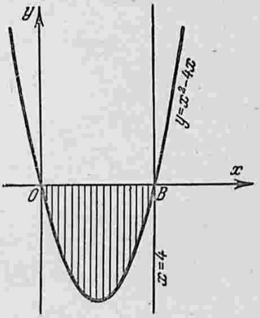
т. е. *объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.*

ГЛАВА XII

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

§ 112. Площади фигур. В § 108 мы доказали, что если $f(x) > 0$ в промежутке значений x от a до b, то площадь фигуры, заключенной между графиком кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, определяется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$



Черт. 116.

Можно показать, что в случае $f(x) < 0$ формула (1) дает отрицательное число, равное по абсолютной величине искомой площади, т. е.

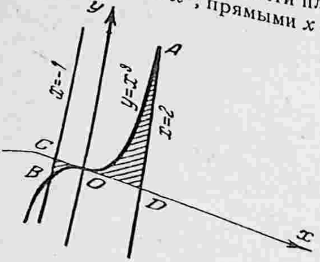
$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, заключенной между осью Ox и кривой $y=x^2-4x$ (черт. 116).

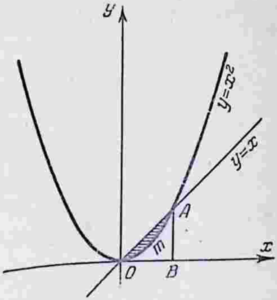
Решение. Точки O и B пересечения параболы $y=x^2-4x$ с осью Ox имеют абсциссы, равные 0 и 4. Как видно из чертежа, искомая площадь (она заштрихована) ограничена сверху осью Ox, снизу параболой, слева и справа прямыми $x=0$ и $x=4$, от которых парабола и ось Ox отсекают отрезки нулевой длины. Заданная функция отрицательна в промежутке значений x от 0 до 4: поэтому, применяя формулу (2), получим:

$$S=\left|\int_0^4 (x^2-4x)\,dx\right| = \left|\Big|_0^4\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\right| = \left|\frac{64}{3}-32\right| =$$
$$=\left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y=x^3$, прямыми $x=-1$, $x=2$ и осью Ox (черт. 117).



Черт. 117.



Черт. 118.

Решение. Искомая площадь, как видно из чертежа, состоит из двух площадей AOD и BOC, расположенных по разные стороны оси Ox.

В промежутке значений x от 0 до 2 функция $y=x^3$ положительна, поэтому площадь AOD вычисляем по формуле (1)

$$S_{AOD}=\int_0^2 x^3\,dx=\Big|_0^2\frac{x^4}{4} \quad \frac{2^4}{} = 4.$$

В промежутке значений x о ... ция $y=$ ... цательна, поэтому по форм...

$$S_{BOC}=\left|\int_{-1}^0 x^3\,dx\right|=\Big|_{-}^0$$

Таким образом, вся искомая площадь

$$S = S_{AOD} + S_{BOC} = 4\frac{1}{4}.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x^2$ и $y = x$ (черт. 118).

Решение. Заданные линии пересекаются в начале координат и в точке A (1; 1) (координаты точек пересечения находим, решив совместно уравнения обеих линий). Опустим из точки A на ось Ox перпендикуляр AB. Он является отрезком прямой $x = 1$. Искомая площадь (черт. 118) равна разности между площадями треугольника OAB и фигуры $OmAB$, т. е.

$$S_{OmA} = S_{OAB} - S_{OmAB}. \tag{3}$$

Площадь OAB заключена между графиком функции $y = x$, прямыми $x = 0$ и $x = 1$ и осью Ox.

Площадь $OmAB$ заключена между кривой $y = x^2$, прямыми $x = 0$ и $x = 1$ и осью Ox. Функции $y = x$ и $y = x^2$ положительны в промежутке значений x от 0 до 1.

Следовательно, по формуле (1), учитывая равенство (3), имеем:

$$S_{OmA} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Упражнения

1. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 5x$, $x = 2$ и осью Ox.
2. Найти площадь фигуры, заключенной между прямыми $y = 4x - 5$, $x = -3$, $x = -2$ и осью Ox.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 2x^2$, осью Ox и прямыми $x = 2$ и $x = 4$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 9x$ и прямыми $x = 1$ и $x = 9$.
5. На кривой $y^2 = 4x$ дана точка, ордината которой равна 6. Найти площадь фигуры, заключенной между данной кривой, осью Oy и прямой $y = 6$.
6. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = x^2 - x$, осью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = 2$.
7. Дана кривая $y = 2x^2 - x + 2$. Найти площадь фигуры, заключенной между данной кривой, осями координат и прямой $x = 3$.
8. Определить площадь параболического сегмента, основание которого $a = 6$, а высота $h = 8$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и линиями:

1) $y = 2x - x^2$, 2) $y = 9 - x^2$, 3) $y = x^2 - 5x + 4$.

10. Найти площадь, ограниченную одной волной синусоиды и осью Ox.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат и кривой $y = 4(1 - x^3)$.

12. Найти площадь, заключённую между линиями:

1) $y = 2x - x^2$ и $y = x$,

2) $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 4 - x$,

3) $x^2 - 9y = 0$ и $x - 3y + 6 = 0$,

4) $4y - x^3 = 0$ и $y - x = 0$.

13. Найти площадь, заключенную между следующими кривыми:

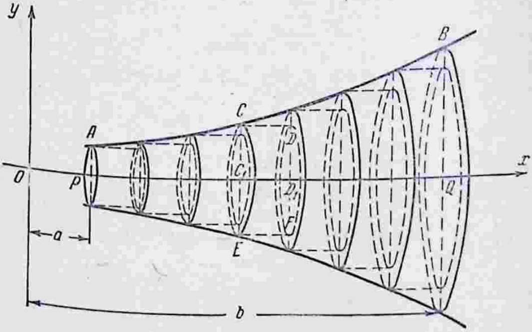
1) $y^2 = x$ и $y = x^2$,

2) $y = x^2$ и $y = 1 - x^2$,

3) $4x^2 - 9y + 18 = 0$ и $2x^2 - 9y + 36 = 0$,

4) $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

§ 113. Объем тела вращения. Пусть дана кривая, определяемая уравнением $y = f(x)$, и на ней две точки A и B



Черт. 119.

с абсциссами $OP = a$ и $OQ = b$ (черт. 119). Если вращать фигуру $ABQP$ вокруг оси Ox, то образу[illegible]которое тело вращения.

Разделим отрезок PQ на n равных частей, каждую из которых обозначим через Δx, и в точках деления восставим перпендикуляры к оси Ox до пересечения с кривой. Проведя из этих точек пересечения прямые, параллельные оси Ox, до встречи с соседними перпендикулярами, мы разобьем фигуру $ABQP$ на n прямоугольников и криволинейных треугольников. При вращении фигуры $ABQP$ вокруг оси Ox каждый из прямоугольников образует цилиндр, а сумма объемов этих цилиндров даст приближенную величину объема рассматриваемого тела вращения. Подсчитаем эту сумму объемов цилиндров. Для этого возьмем один из них, например $CDFE$. Как видно из чертежа, радиусом основания этого цилиндра будет:

$$C_1C = y = f(x),$$

а высотой

$$C_1D_1 = \Delta x.$$

Следовательно, объем указанного цилиндра равен

$$\pi y^2 \Delta x,$$

а сумма объемов всех цилиндров будет

$$\sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Это выражение и представляет собой приближенную величину объема тела вращения, т. е.

$$v \approx \sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Положим теперь, что число делений отрезка PQ неограниченно возрастает; тогда Δx, а следовательно, и произведение $\pi y^2 \Delta x$ будут бесконечно малыми величинами.

Перейдя к пределу, получим:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x,$$

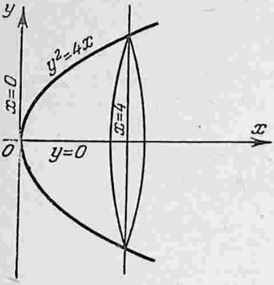
или согласно формуле (5) § 111

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

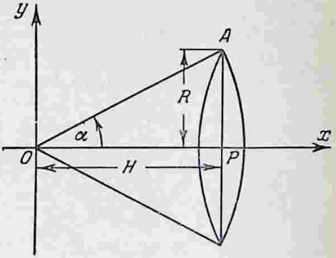
Поэтому

$$v = \pi \int_a^b y^2\,dx. \tag{1}$$

Пример. Фигура, ограниченная линиями $y^2 = 4x$, $x = 0$, $x = 4$ и $y = 0$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем полученного тела (черт. 120).



Черт 120.



Черт. 121.

Решение. Полученное тело называется параболоидом вращения. Согласно формуле (1) имеем:

$$v = \pi \int_0^4 y^2\,dx = \pi \int_0^4 4x\,dx = \pi \Big|_0^4 2x^2 = \pi \cdot 2 \cdot 4^2 = 32\pi.$$

Пользуясь формулой (1), можно вывести формулы объема конуса, шара и его частей.

Объем прямого кругового конуса. Прямой круговой конус получается от вращения прямоугольного треугольника OAP вокруг оси Ox (черт. 121). Составим уравнение прямой OA, образующей при своем вращении коническую поверхность.

Обозначив

$$OP = H, \quad PA = R,$$

напишем искомое уравнение прямой OA:

$$y = kx = \operatorname{tg}\alpha \cdot x = \frac{PA}{OP}\,x = \frac{R}{H}\,x.$$

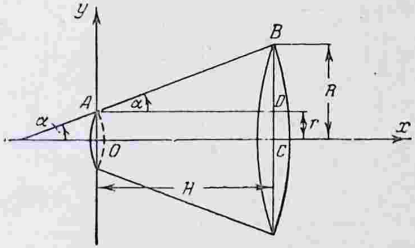
Применяя формулу (1), будем иметь:

$$v = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2\,dx =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^H = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \qquad (2)$$

Объем усеченного конуса. Усеченный конус можно получить, вращая прямоугольную трапецию $ABCO$



Черт. 122.

вокруг оси Ox (черт. 122). Найдем уравнение прямой AB, образующей коническую поверхность. Для этого положим:

$$OA = r, \quad CB = R, \quad OC = H$$

и напишем уравнение AB в виде $y = kx + b$.

Как видно из чертежа,

$$b = r, \quad k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{R - r}{H}.$$

Таким образом, искомое уравнение будет:

$$y = \frac{R - r}{H}x + r.$$

Согласно формуле (1) найдем:

$$v=\pi\int_{0}^{H}\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^{2}dx.$$

Вычислим определенный интеграл способом подстановки. Положим

$$z=\frac{R-r}{H}x+r,$$

тогда

$$dz=\frac{R-r}{H}dx,$$

отсюда

$$dx=\frac{Hdz}{R-r}.$$

Новые пределы интеграла будут:

$$z_{н}=\frac{R-r}{H}\cdot 0+r=r,\quad z_{в}=\frac{R-r}{H}H+r=R.$$

Следовательно,

$$\pi\int_{0}^{H}\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^{2}dx=\pi\int_{r}^{R}z^{2}\frac{Hdz}{R-r}=$$

$$=\frac{\pi H}{R-r}\left|_{r}^{R}\frac{z^{3}}{3}=\frac{\pi H}{3(R-r)}\cdot(R^{3}-r^{3})=\right.$$

$$=\frac{\pi H}{3(R-r)}\cdot(R-r)(R^{2}+Rr+r^{2})=\frac{\pi H}{3}(R^{2}+Rr+r^{2}).$$

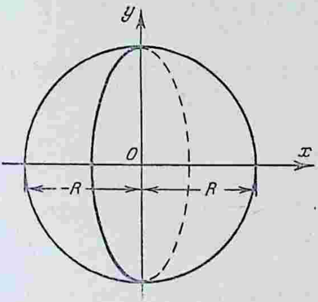
$$v=\frac{\pi H}{3}(R^{2}+Rr+r^{2}). \qquad (3)$$

Объем шара. Шар получается от вращения полукруга с центром в начале координат вокруг оси Ox (черт. 123). Уравнение окружности радиуса R, представленной на чертеже, имеет вид

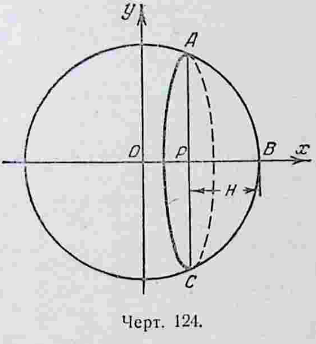
$$x^{2}+y^{2}=R^{2},$$

откуда

$$y^{2}=R^{2}-x^{2}.$$



Черт. 123.



Черт. 124.

Согласно формуле (1) найдем:

$$v=\pi\int_{-R}^{+R} y^2\,dx=\pi\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)\,dx=2\pi\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=2\pi\Big|_0^R\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$v=\frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (4)$$

Объем шарового сегмента. Шаровой сегмент можно получить, вращая половину кругового сегмента ABC вокруг оси Ox (черт. 124). Обозначив высоту PB шарового сегмента через H, а радиус круга через R, будем иметь:

$$v=\pi\int_{R-H}^{R} y^2\,dx=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\Big|_{R-H}^{R}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\left\{\left(R^2\cdot R-\frac{R^3}{3}\right)-\left[R^2(R-H)-\frac{(R-H)^3}{3}\right]\right\}=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^3+R^2H+\frac{R^3-3R^2H+3RH^2-H^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}(2R^3-3R^3+3R^2H+R^3-3R^2H+3RH^2-H^3)=$$

$$=\frac{\pi}{3}(3RH^2-H^3)=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right).$$

$$v=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right). \qquad (5)$$

Объем шарового сектора. Шаровой сектор можно представить как тело, полученное от вращения кругового сектора OAB вокруг оси Ox (черт. 125). Как видно из чертежа, объем шарового сектора равен сумме объемов конуса OAC и шарового сегмента ABC. Применяя формулы (2) и (5), найдем объем шарового сектора:

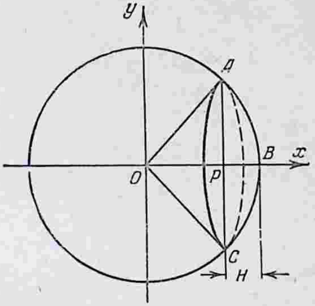
$$v=\frac{1}{3}\pi PA^2\cdot OP+\pi\cdot PB^2\left(OB-\frac{PB}{3}\right).$$

Обозначим

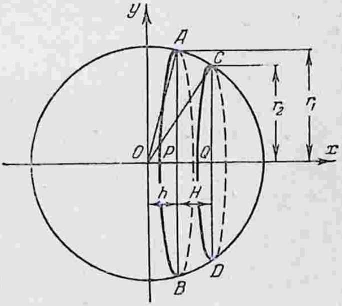
$$PB=H,\quad OB=R;$$

тогда

$$OP=R-H$$



Черт. 125.



Черт. 126.

и из треугольника OAP

$$PA^2 = R^2 - (R-H)^2 = 2RH - H^2.$$

Подставив значения PB, OB, OP, PA^2 в выражение объема шарового сектора, получим:

$$v = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R-H) + \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) =$$
$$= \pi\left(\frac{2}{3}R^2H - \frac{2}{3}RH^2 - \frac{1}{3}RH^2 + \frac{1}{3}H^3 + RH^2 - \frac{1}{3}H^3\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^2 H. \qquad (6)$$

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Объем шарового слоя. Шаровой слой получается в результате вращения фигуры $ACQP$ вокруг оси Ox, где AC — дуга окружности с центром в начале координат (черт. 126).

Положим:

$$OA = OC = R, \quad OP = h,$$
$$PA = r_1, \quad PQ = H;$$
$$QC = r_2,$$

Тогда согласно формуле (1) объем шарового слоя

$$v = \pi\int_{OP}^{OQ} y^2\,dx = \pi\int_h^{H+h}(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left|_h^{H+h}\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\right. =$$
$$= \pi\left\{\left[R^2(H+h) - \frac{(H+h)^3}{3}\right] - \left(R^2h - \frac{h^3}{3}\right)\right\} =$$
$$= \pi\left(R^2H + R^2h - \frac{H^3 + 3H^2h + 3Hh^2 + h^3}{3} - R^2h + \frac{h^3}{3}\right) =$$
$$= \pi\,\frac{3R^2H - H^3 - 3H^2h - 3Hh^2 - h^3 + h^3}{3} =$$
$$= \pi H\left(R^2 - h^2 - Hh - \frac{1}{3}H^2\right).$$

Так как $R^2 = r_1^2 + h^2$ (из треугольника OAP) и $R^2 = r_2^2 + (H+h)^2$ (из треугольника OCQ), то

$$r_1^2 + h^2 = r_2^2 + (H+h)^2,$$
$$r_1^2 + h^2 = r_2^2 + H^2 + 2Hh + h^2,$$

отсюда

$$Hh=\frac{r_1^2-r_2^2-H^2}{2}.$$

Подставив найденные значения R^2, Hh в выражение объема шарового слоя, получим:

$$v=\pi H\left(r_1^2+h^2-h^2-\frac{r_1^2-r_2^2-H^2}{2}-\frac{1}{3}H^2\right)=$$

$$=\pi H\left(\frac{2r_1^2-r_1^2+r_2^2}{2}+\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{3}H^2\right)=\pi H\frac{r_1^2+r_2^2}{2}+\pi\frac{H^3}{6}.$$

$$v=\pi H\frac{r_1^2+r_2^2}{2}+\pi\frac{H^3}{6}. \qquad (7)$$

Упражнения

1. Фигура, ограниченная прямыми $y=-x+3$, $x=0$, $x=3$ и $y=0$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем полученного тела вращения.

2. Фигура ограничена кривой $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $x=2$, $x=3$ и $y=0$. Найти объем тела, полученного от вращения ее вокруг оси Ox.

3. От шара радиуса $R=5$ *см* отсечен сегмент с высотой $h=2$ *см*. Найти объем этого сегмента.

4. Найти объем сферического сектора, у которого радиус основания $r=3$ *см*, а радиус шара $R=5$ *см*.

5. Найти объем сферического слоя с радиусами оснований $r_1=5$ *см* и $r_2=8$ *см* и высотой $h=3$ *см*.

6. Вывести формулу объема эллипсоида вращения вокруг оси Ox.

7. Найти объем параболоида вращения, у которого диаметр основания равен 60 *см*, а высота равна 50 *см*.

8. Найти объем тела, образуемого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$ и прямыми $x=0$ и $x=\pi$.

9. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой:

$$1)\ y=2x-x^2,\quad 2)\ y=x^2-4.$$

10. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^2+1 \quad \text{и} \quad y=2.$$

§ 114. Путь, пройденный телом. Путь s, пройденный телом за время t в прямолинейном движении с постоянной скоростью v, определяется по формуле

$$s=vt. \qquad (1)$$

Если тело движется неравномерно, то скорость его меняется в зависимости от времени t, т. е.

$$v=f(t).$$

Чтобы найти в этом случае путь тела за время от $t=t_1$ до $t=t_2$, разделим промежуток времени t_2-t_1 на n равных и очень малых частей Δt. Положим, что в течение каждого из промежутков времени Δt скорость тела остается постоянной, меняясь скачком в конце каждого промежутка Δt. Пусть, например, t_2-t_1 мы разбили на промежутки $\Delta t=1$ сек. Согласно сделанному допущению в первую секунду тело движется равномерно и в конце ее меняет скорость, продолжая в течение второй секунды двигаться равномерно с полученной скоростью; затем в конце второй секунды приобретает новую скорость, с которой и движется равномерно в течение третьей секунды и т. д.

Поэтому путь тела за время Δt найдется по формуле (1) и будет приближенно равен $f(t)\Delta t$, а за время t_2-t_1 путь его

$$s\approx\sum_{t_1}^{t_2}f(t)\,\Delta t.$$

Будем увеличивать число делений n, тогда Δt, а также и скачки в изменении скорости в конце каждого промежутка Δt будут все меньше и меньше. Если $n\to\infty$, то $\Delta t\to 0$, а, следовательно, и $f(t)\Delta t\to 0$. При этом условии скорость тела меняется уже не скачкообразно, а непрерывно, и путь его будет равен:

$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{t_1}^{t_2}f(t)\,\Delta t,$$

или согласно формуле (5) § 111

$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{t_1}^{t_2}f(t)\,\Delta t=\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt,$$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt. \tag{2}$$

П р и м е р. Скорость движения тела задана уравнением

$$v=(2t^2+t)\, см/сек.$$

Найти путь, пройденный им за 6 сек. от начала движения.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (2) имеем:

$$s=\int_0^6 (2t^2+t)\,dt=\Big|_0^6\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 6^3+\frac{1}{2}\cdot 6^2=162\ см.$$

Упражнения

1. Скорость падающего в пустоте тела определяется по формуле

$$v=9{,}8\,t\ м/сек.$$

Какой путь пройдет тело за первые 10 сек. падения?

2. Найти формулу пути падающего тела в пустоте, если скорость его падения

$$v=gt\ м/сек.$$

3. Скорость движения тела определяется по формуле

$$v=(3t^2-2t)\ см/сек.$$

Какой путь тело пройдет за 5 сек. от начала движения?

4. Скорость движения тела

$$v=\left(4t-\frac{6}{t^2}\right)\ см/сек.$$

Определить путь его за третью секунду.

5. Два тела начинают движение одновременно из одной и той же точки: одно со скоростью

$$v=3t^2\ м/мин,$$

другое со скоростью

$$v=2t\ м/мин.$$

На каком расстоянии друг от друга они будут через 10 мин., если они движутся по прямой линии в одном направлении?

6. Два тела движутся по одной и той же прямой линии: одно со скоростью

$$v=(3t^2+2t)\ м/сек,$$

второе со скоростью

$$v=(8t+10)\ м/сек.$$

Если в начале движения они были вместе, то когда и на каком расстоянии от начала движения они опять будут вместе?

7. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки, если скорость его определяется по формуле

$$v = (6t - 2t^2)\ см/сек.$$

8. Камень брошен с земли вертикально вверх. Найти наибольшую высоту подъема камня, если скорость его

$$v = (19{,}6 - 9{,}8t)\ м/сек.$$

9. Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью 20 *м/сек*. На какую наибольшую высоту он поднимется?

§ 115. Работа силы. Пусть тело движется по прямой линии под действием постоянной силы F; тогда работа P, совершаемая этой силой на пройденном пути, равном x, найдется по формуле

$$P = Fx, \tag{1}$$

где x выражается в метрах, F — в килограммах, а P — в килограммометрах.

Но если движение тела происходит под действием переменной силы, то ее работа определяется сложнее. Выведем формулу для этого случая.

Допустим, что тело, находящееся в точке O в состоянии покоя, начинает двигаться по прямой линии (черт. 127) под

Черт. 127.

действием переменной силы F, изменяющейся в зависимости от пройденного пути x, т. е.

$$F = f(x).$$

Пусть в некоторые моменты времени тело оказалось в точках A и B, причем

$$OA = a \quad \text{и} \quad OB = b.$$

Покажем, как определить работу, совершаемую данной силой на отрезке пути $AB = b - a$.

Для этого разобьем его на n равных и очень малых отрезков Δx. Положим, как и в задаче § 114, что на каждом отрезке Δx сила остается постоянной, изменяясь скачком в конце каждого отрезка Δx. Тогда по формуле (1) работа силы на отрезке пути Δx будет приближенно равна $f(x)\Delta x$; работа же силы на всем пути $AB = b - a$

$$P \approx \sum_a^b f(x)\Delta x.$$

Если число делений n неограниченно увеличивать, то Δx а, следовательно, и $f(x)\Delta x$ станут бесконечно малыми величинами. При этом условии сила будет меняться не скачками, а непрерывно, и искомая работа ее будет равна

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x,$$

или согласно формуле (5) § 111

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$P = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Пример. Сила в 1 *кг* растягивает пружину на 3 *см*. Какую работу она при этом производит?

Решение. По закону Гука сила пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е.

$$F = kx,$$

где x — величина растяжения или сжатия ее, а k — коэффициент пропорциональности.

Чтобы найти значение k для нашей задачи, подставим данные величины в уравнение, выражающее закон Гука; получим:

$$1 = k \cdot 0{,}03,$$

откуда

$$k = \frac{1}{0{,}03}.$$

Следовательно, сила, растягивающая нашу пружину, выразится в следующем виде:

$$F = \frac{1}{0{,}03}x.$$

Так как сила начинает действовать на пружину, находящуюся в состоянии покоя, то нижний предел интеграла в формуле (2) $a=0$, верхний же предел $b=0{,}03$. Следовательно, искомая работа будет:

$$P=\int\limits_0^{0,03}\frac{1}{0{,}03}x\,dx=\frac{1}{0{,}03}\left|\begin{matrix}0,03\\ \\ 0\end{matrix}\right.\frac{x^2}{2}=\frac{1}{0{,}03}\cdot\frac{0{,}03^2}{2}=\frac{0{,}03}{2}=0{,}015\ \text{кгм}.$$

Упражнения

1. Сила в 6 *кг* растягивает пружину на 8 *см*. Какую работу она производит?

2. Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 *см*, если для сжатия ее на 1 *см* нужна сила в 1 *кг*.

3. Пружина растягивается на 6 *см* под действием силы в 3 *кг*. Какую работу она производит, растягивая ее на 10 *см*?

4. Найти работу, производимую при сжатии пружины на 3 *см*, если известно, что для сжатия ее на 0,5 *см* нужно приложить силу в 1 *кг*.

5. Сила в 6 *кг* достаточна, чтобы растянуть пружину на 2 *см*. Первоначальная длина пружины 14 *см*. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 *см*?

6. Растягивая пружину на 4 *см*, произвели работу в 10 *кгм*. Какая работа будет произведена при растяжении пружины на 10 *см*?

7. Чтобы растянуть некоторую пружину на 2 *см*, нужно произвести работу в 20 *кгм*. Насколько можно растянуть пружину, затратив работу в 80 *кгм*?

8. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 *см*. Груз в 10 *кг* растягивает ее на 2,5 *см*. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от длины в 25 *см* до длины в 35 *см*?

§ 116. Работа, совершаемая при поднятии груза. Из физики известно, что при поднятии груза на некоторую высоту совершается работа, равная произведению веса, выраженного в килограммах, на высоту подъема, выраженную в метрах. При этом сама работа измеряется в килограммометрах. Решим несколько задач.

Задача 1. Из цилиндрического бака нужно выкачать воду, наполняющую бак до края. Какая работа при этом совершается, если радиус основания бака $R=0{,}6$ *м*, а высота его $H=3$ *м*?

Решение. Если бы мы подняли на некоторую высоту бак вместе с водой, то работу, необходимую для этого, нашли бы легко простым умножением веса груза на высоту подъема. Но работа, совершаемая при выкачивании жидкости, определяется сложней, так как жидкость в этом случае поднимается не вся сразу, а по частям, слоями, причем высота подъема у разных слоев жидкости разная.

Для решения задачи разобьем цилиндр плоскостями, параллельными его основанию, на тонкие слои (черт. 128). Выделив один из них на глубине

$$OO_1 = y$$

и обозначив его толщину и объем соответственно через Δy и Δv, будем иметь:

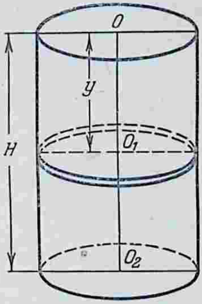
$$\Delta v = \pi R^2 \Delta y \ \text{м}^3.$$

Вес воды ΔQ в найденном объеме будет:

$$\Delta Q = \pi R^2 \Delta y \ \text{т},$$

так как 1 м^3 воды весит 1 т. Выразив ΔQ в килограммах, получим:

$$\Delta Q = 1000\pi R^2 \Delta y \ \text{кг}.$$



Черт. 128.

Чтобы выкачать воду, находящуюся в рассматриваемом слое, его нужно поднять до края бака, т. е. на высоту

$$O_1O = y.$$

Работа ΔP, совершаемая при этом, выразится так:

$$\Delta P = \Delta Q \cdot O_1O = 1000\pi R^2 y \, \Delta y \ \text{кгм}. \qquad (1)$$

При последовательном поднятии до края бака каждого слоя, начиная с первого и кончая последним, совершается в каждом случае работа, определяемая равенством (1); при этом величина y имеет для каждого слоя свое значение в границах от 0 до H. Работа же, необходимая для поднятия всей воды, выразится в виде

$$\sum_0^H 1000\pi R^2 y \, \Delta y.$$

Но полученная величина работы — только приближенная. Чтобы найти искомую работу, будем неограниченно увеличивать число делений цилиндра плоскостями; тогда вся работа

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{0}^{H} 1000\pi R^2 y \,\Delta y,$$

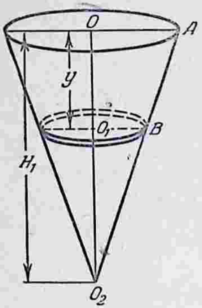
или согласно формуле (5) § 111

$$P = \int_0^H 1000\pi R^2 y\, dy = 1000\pi R^2 \Big|_0^H \frac{y^2}{2} =$$

$$= 1000\pi R^2 \cdot \frac{H^2}{2} = 500\pi R^2 H^2.$$

Заменив R и H их значениями, найдем:

$$P = 500\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 3^2 = 1620\pi \text{ кгм}.$$



Черт. 129.

Задача 2. Резервуар конической формы, расположенный вершиной на поверхности земли и имеющий высоту $H = 3$ *м* и радиус основания $R = 90$ *см*, наполнен водой. Какую работу нужно произвести, чтобы выкачать из него всю воду?

Решение. Как и в первой задаче, разобьем конус на тонкие слои и каждый из них примем за цилиндр. Выделим один из них на глубине $OO_1 = y$ (черт. 129). Обозначив толщину выделенного слоя и его объем соответственно через Δy и Δv, напишем:

$$\Delta v = \pi \cdot O_1B^2 \,\Delta y \text{ м}^3. \qquad (2)$$

Выразим O_1B через y; из подобия треугольников O_2O_1B и O_2OA имеем:

$$\frac{O_1B}{OA} = \frac{O_2O_1}{O_2O},$$

откуда

$$O_1B = \frac{OA}{O_2O} \cdot O_2O_1 = \frac{OA}{O_2O}(O_2O - OO_1) = \frac{R}{H}(H - y).$$

Заменив в равенстве (2) O_1B найденным значением, получим:

$$\Delta v = \pi \frac{R^2}{H^2}(H - y)^2 \,\Delta y \text{ м}^3.$$

Вес воды ΔQ в объеме Δv будет:

$$\Delta Q = \frac{\pi R^2}{H^2}(H-y)^2\Delta y\, m = 1000\,\frac{\pi R^2}{H^2}(H-y)^2\Delta y\ \text{кг}.$$

Работа ΔP, совершаемая при поднятии воды весом в ΔQ *кг* на высоту

$$O_1O = y,$$

выразится так:

$$\Delta P = \Delta Q\cdot O_1O = 1000\pi\frac{R^2}{H^2}y(H-y)^2\Delta y\ \text{кгм}.$$

Работа же, необходимая для поднятия всей воды, будет приближенно равна

$$\sum_0^H 1000\pi\frac{R^2}{H^2}y(H-y)^2\Delta y.$$

Если неограниченно увеличивать число делений конуса, то искомая работа

$$P = \lim_{\Delta y\to 0}\sum_0^H 1000\pi\frac{R^2}{H^2}y(H-y)^2\Delta y$$

или согласно формуле (5) § 111

$$P = \int_0^H 1000\pi\frac{R^2}{H^2}y(H-y)^2\,dy =$$

$$= 1000\pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H (H^2y-2Hy^2+y^3)\,dy =$$

$$= 1000\pi\frac{R^2}{H^2}\Big|_0^H\left(\frac{H^2y^2}{2}-\frac{2Hy^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right) =$$

$$= \frac{1000\pi R^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2}-\frac{2H^4}{3}+\frac{H^4}{4}\right) = \frac{1000\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^4}{12} = \frac{250\pi R^2H^2}{3},$$

или после замены R и H их значениями

$$P = \frac{250\pi\cdot 0{,}9^2\cdot 3^2}{3} = 607{,}5\pi\ \text{кгм}.$$

Упражнения

1. Бак с прямоугольным основанием 50 *см* $\times$ 80 *см* и высотой, равной 60 *см*, наполнен водой. Какую работу нужно совершить, чтобы выкачать всю воду из бака?

2. Цилиндрический сосуд с диаметром основания $D = 50$ *см* и высотой $H = 70$ *см* наполнен водой. Какую работу нужно произвести, чтобы выкачать всю воду из сосуда?

3. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать керосин, наполняющий цистерну с радиусом основания $R = 2$ *м* и высотой $H = 3$ *м*. (Удельный вес керосина $d = 0{,}8$.)

4. Какую работу нужно затратить, чтобы поднять всю воду из цилиндрической цистерны с диаметром 2 *м* и глубиной 4 *м* на высоту 15 *м* над верхним краем цистерны?

5. Канат длиной 50 *м*, площадью поперечного сечения 2 *см*^{2}, изготовленный из материала, плотность которого 6,4 *г/см*^{3}, извлекается из шахты на поверхность земли. Определить работу, которая при этом совершается.

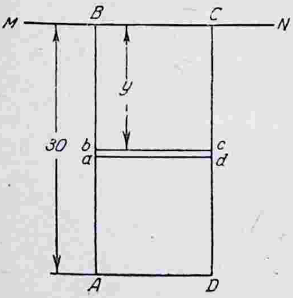
6. Резервуар конической формы с вершиной, обращенной книзу, наполнен водой. Какую работу нужно совершить, чтобы выкачать из него всю воду, если радиус основания конуса $R = 50$ *см*, а высота $H = 1$ *м*?

7. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песку конической формы, радиус основания которой 1,2 *м*, а высота 1 *м*? (Удельный вес песка 2 *г/см*^{3}; песок поднимается с поверхности земли.)

8. Резервуар, имеющий форму усеченного конуса, наполнен водой. Какую работу нужно произвести, чтобы выкачать из резервуара всю воду, если радиусы его оснований $R = 2$ *м* и $r = 1$ *м*, а высота $H = 3$ *м*?

§ 117. Давление жидкости.

Задача 1. Прямоугольная пластинка с размерами 20 *см* $\times$ 30 *см* погружена в воду так, что меньшая сторона ее лежит на поверхности воды, а бóльшая занимает вертикальное положение. Найти давление воды на пластинку.



Черт. 130.

Решение. Пусть данная пластинка $ABCD$ расположена, как указано на черт. 130, где MN — поверхность воды. Если бы эта пластинка находилась в горизонтальном положении, то давление воды на нее было бы равно весу столба жидкости, имеющего основанием данную пластинку, а высотой — глубину ее расположения от поверхности жидкости. Но по такому закону нельзя рассчитать давление воды на вертикальную площадку, так как давление на единицу площади изменяется с глубиной.

Для решения задачи разобьем пластинку на большое число полосок, параллельных AD. Выделив одну из них, например $abcd$, на глубине

$$Bb = y$$

и обозначив ширину ее через Δy, а площадь через Δs, найдем

$$\Delta s = ad \cdot ab = 20\,\Delta y \text{ см}^2. \qquad (1)$$

Горизонтальная площадка 1 $см^2$ на глубине Bb испытывает давление, равное весу столба воды, имеющего основание в 1 $см^2$ и высоту $Bb = y$, т. е. давление, равное y *г*.

По закону Паскаля давление жидкости передается во все стороны с одинаковой силой; поэтому давление ее на 1 $см^2$ вертикально расположенной полоски $abcd$ будет приближенно тоже y *г*. На всю же полоску $abcd$ давление ΔP выразится так:

$$\Delta P = y\,\Delta s \text{ г},$$

или после замены Δs согласно равенству (1)

$$\Delta P = 20y\,\Delta y \text{ г}. \qquad (2)$$

Находя таким же образом давление воды на каждую из полосок, составляющих пластинку $ABCD$, мы получим в каждом случае величину этого давления, определяемую равенством (2), в котором y имеет значение, соответствующее глубине расположения той или иной полоски. Давление же воды на всю пластинку $ABCD$ будет приближенно равно

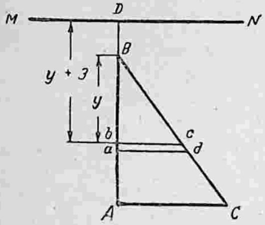
$$\sum_0^{30} 20y\,\Delta y.$$

Будем неограниченно увеличивать число делений пластинки $ABCD$; тогда искомая величина давления

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^{30} 20y\,\Delta y = \int_0^{30} 20y\,dy = 20 \left| \begin{matrix} 30 \\ \\ 0 \end{matrix} \right. \frac{y^2}{2} =$$

$$= 10 \cdot 30^2 = 9000 \text{ г} = 9 \text{ кг}.$$

Задача 2. Пластинка в виде прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 12$ *см* и $AC = 9$ *см* опущена в ртуть так, что катет AB занимает вертикальное положение, а вершина B находится на 3 *см* ниже уровня ртути. Найти давление ртути на эту пластинку. (Удельный вес ртути 13,6 *г/см*³).



Черт. 131.

Решение. Расположение пластинки указано на черт. 131, где MN — уровень ртути. Как и в задаче 1, разобьем пластинку ABC на большое число полосок, параллельных AC, каждую из которых примем за прямоугольник. Выделим одну из этих полосок, например $abcd$, на глубине Db.

Обозначив Bb через y, а ширину и площадь полоски $abcd$ соответственно через Δy и ΔS, найдем:

$$\Delta S = bc \cdot \Delta y \text{ см}^2. \tag{3}$$

Согласно закону Паскаля давление ртути на площадку 1 *см*², расположенную на глубине

$$Db = Bb + DB = y + 3,$$

равно приближенно

$$13{,}6\, Db = 13{,}6\,(y+3) \text{ г},$$

а на всю полоску $abcd$ давление ΔP выразится так:

$$\Delta P = 13{,}6\,(y+3)\,\Delta S \text{ г},$$

или согласно равенству (3):

$$\Delta P = 13{,}6\,(y+3) \cdot bc \cdot \Delta y = 13{,}6 \cdot bc\,(y+3)\,\Delta y \text{ г}. \tag{4}$$

Выразим длину полоски bc через y; для этого рассмотрим треугольники ABC и bBc; из их подобия следует

$$\frac{bc}{AC} = \frac{Bb}{AB},$$

или

$$\frac{bc}{9} = \frac{y}{12},$$

откуда

$$bc = \frac{9}{12}y = \frac{3}{4}y.$$

Теперь равенство (4) перепишется:

$$\Delta P = 13{,}6 \cdot \frac{3}{4} y(y+3)\,\Delta y = 10{,}2\,(y^2+3y)\,\Delta y \text{ г}. \qquad (5)$$

Давление на каждую из остальных полосок будет определяться равенством (5), в котором y принимает значения в границах от 0 до 12. Суммируя все эти давления, мы получим величину давления на пластинку ABC, приближенно равную

$$\sum_{0}^{12} 10{,}2\,(y^2+3y)\,\Delta y.$$

При неограниченном увеличении числа делений пластинки ABC искомая величина давления на нее будет равна

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{0}^{12} 10{,}2\,(y^2+3y)\,\Delta y =$$

$$= \int_{0}^{12} 10{,}2\,(y^2+3y)\,dy = 10{,}2 \left.\left(\frac{y^3}{3}+\frac{3y^2}{2}\right)\right|_{0}^{12} =$$

$$= 10{,}2\left(\frac{12^3}{3}+\frac{3\cdot 12^2}{2}\right) = 10{,}2\,(576+216) =$$

$$= 10{,}2 \cdot 792 = 8078{,}4 \text{ г} \approx 8{,}08 \text{ кг}.$$

Упражнения

1. Найти давление воды, наполняющей аквариум, на одну из его стенок, имеющую длину 60 *см* и высоту 20 *см*.

2. Найти давление воды на боковые стенки аквариума, наполненного водой до высоты 0,5 *м*, если дно имеет размеры 1,2 *м* $\times$ 1,3 *м*.

3. Найти давление воды на вертикально стоящий прямоугольник с размерами 3 *м* $\times$ 2 *м*, если его бóльшая сторона вертикальна, а верхняя на 1,5 *м* ниже поверхности воды.

4. В боковой стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие с размерами 60 *см* $\times$ 40 *см*. С какой силой вода прижимает клапан, закрывающий отверстие, если бóльшая сторона прямоугольника горизонтальна и расположена на 2 *м* ниже поверхности воды?

5. Пластинка в виде ромба со стороной 5 *см* и одной из диагоналей 8 *см* погружена вертикально в воду. Найти давление воды на эту пластинку, если:

1) сторона ее лежит на поверхности воды;

2) верхняя сторона ее лежит на 2 *см* ниже поверхности воды.

6. Пластинка в виде треугольника, основание которого 2 *см*, а высота 1,5 *см*, погружена вертикально в воду. Найти давление, испытываемое этой пластинкой, если:

1) вершина ее лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей;

2) вершина лежит на 0,5 *см* ниже поверхности воды, а основание параллельно ей.

7. Вычислить давление воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно 6,4 *м*, нижнее 4,2 *м*, а высота 3 *м*, если вода доходит до верха плотины.

8. Передняя часть дамбы имеет форму параболы с вершиной внизу; основание дамбы $a = 3{,}2$ *м*, высота ее $h = 1{,}6$ *м*. Определить давление воды на дамбу, если вода доходит до верхнего края дамбы.

9. На какой глубине нужно провести горизонтальную линию на стенке аквариума, имеющего длину 60 *см*, а высоту 25 *см*, чтобы давления на нижележащую и вышележащую части стенки были равны?

ДОПОЛНЕНИЯ

ГЛАВА XIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 118. Общие понятия. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее производные от искомой функции или ее дифференциалы. Так, например, $x\,dy = 2y\,dx$ или $y' = 4x$ — дифференциальные уравнения.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию от x, которая удовлетворяет данному уравнению, т. е. обращает это уравнение в тождество при подстановке ее в уравнение вместо y.

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы не выше первого порядка, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Дифференциальные уравнения имеют большое применение в геометрии, механике, физике и других дисциплинах, а также в технике.

Пример решения дифференциального уравнения мы имели в § 105, отыскивая уравнение кривой по заданному угловому коэффициенту касательной. В результате решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

мы получили уравнение

$$y = x^2 + C, \tag{2}$$

которое носит название *общего решения дифференциального уравнения*. Подставив вместо x и y соответственно 1 и 3, мы нашли уравнение

$$y = x^2 + 2,$$

называемое *частным решением дифференциального уравнения* *).

---

*) Общее решение дифференциального уравнения всегда содержит произвольное постоянное C, в частном же решении это постоянное заменено определенным числом.

Данные значения $x = 1$ и $y = 3$ называются *начальными условиями*. Начальные условия задаются для того, чтобы из общего решения дифференциального уравнения получить его частное решение.

Правильность решения дифференциального уравнения легко проверить, подставив выражение (2) в уравнение (1). В результате получим:

$$\frac{d(x^2 + C)}{dx} = 2x,$$

или

$$\frac{2x\,dx}{dx} = 2x,$$

т. е.

$$2x = 2x,$$

что говорит о правильности решения уравнения (1).

§ 119. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Если каждая часть дифференциального уравнения представляет собою произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной, то говорят, что *переменные* в уравнении разделены; например, $x\,dx = y\,dy$. В этом случае уравнение можно интегрировать почленно.

Уравнения, в которых переменные разделяются, называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*.

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, нужно произвести разделение переменных, а затем взять интеграл от обеих частей уравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $x\,dy = y\,dx$, если при $x = 5$ $y = 10$.

Решение. Для разделения переменных обе части уравнения поделим на произведение xy, получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, найдем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$\ln y = \ln x + \ln C.$$

В правой части прибавлено постоянное в виде $\ln C$ для облегчения потенцирования. Освобождаясь от символа логарифма, т. е. потенцируя, получим общее решение:

$$y = Cx.$$

Для определения постоянного C подставим в полученное решение начальные условия $x = 5$ и $y = 10$:

$$10 = 5C,$$

откуда

$$C = 2.$$

Следовательно, искомое частное решение будет:

$$y = 2x.$$

Таким образом, из всех прямых (семейства прямых), проходящих через начало координат, мы выделили одну, на которой лежит точка с координатами (5; 10).

Пример 2. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = 2(y-3)$, если при

$$x = 0 \quad y = 4.$$

Решение. После разделения переменных получим:

$$\frac{dy}{y-3} = 2\,dx,$$

отсюда

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2\,dx$$

или

$$\ln(y-3) = 2x + C.$$

Находим значение C из условия $x = 0$ и $y = 4$; сделав подстановку, получим:

$$\ln(4-3) = 2 \cdot O + C,$$

откуда

$$C = \ln 1 = 0.$$

Итак,

$$\ln(y-3) = 2x. \tag{1}$$

Для потенцирования нужно и правую часть последнего равенства написать со знаком логарифма. Пользуясь определением логарифма, будем иметь:

$$2x = \ln e^{2x};$$

следовательно, решение (1) можно переписать:

$$\ln(y - 3) = \ln e^{2x},$$

отсюда, потенцируя, получаем: $y - 3 = e^{2x}$, или

$$y = e^{2x} + 3.$$

Упражнения

Найти частные решения уравнения:

1. $ds = (4t - 3)\,dt$, если при $t = 0$ $s = 0$.
2. $dx = (2t^2 - 5)\,dt$, если при $t = 1$ $x = -4$.
3. $x\,dx = dy$, если при $x = 1$ $y = 0$.
4. $x\,dx = y\,dy$, если при $x = 2$ $y = 1$.
5. $x^2\,dx + y\,dy = 0$, если при $x = 0$ $y = 1$.
6. $(t - 1)\,dt + s\,ds = 0$, если при $t = 2$ $s = 0$.
7. $\frac{2\,dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$, если при $x = 1$ $y = \sqrt{2}$.
8. $\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0$, если при $x = 0$ $y = 2$.
9. $2s\,dt = t\,ds$, если при $t = 1$ $s = 2$.
10. $x^2\,dy - y^2\,dx = 0$, если при $x = 0{,}2$ $y = 1$.
11. $x^3\,dy = y^3\,dx$, если при $x = \sqrt{3}$ $y = \sqrt{2}$.
12. $\frac{2\,dy}{dx} = 1 + x^2$, если при $x = 0$ $y = 0$.
13. $dy + x\,dx = 2dx$, если при $x = 1$ $y = 1{,}5$.
14. $x^2\,dy - \frac{1}{2}y^3\,dx = 0$, если при $x = -1$ $y = 1$
15. $(t + 1)\,dx = 2x\,dt$, если при $t = 1$ $x = 4$.
16. $\sqrt{x}\,dy - \sqrt{y}\,dx = 0$, если при $x = 0$ $y = 0$.
17. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, если при $x = 0$ $y = 1$.
18. $\frac{dy}{2y} - dx = 0$, если при $x = 0$ $y = 3$.
19. $(1 + y)\,dx - (1 - x)\,dy = 0$, если при $x = 0$ $y = 1$.
20. $2y' = y$, если при $x = 0$ $y = 1$.

21. $\frac{2x-1}{y+1}=\frac{dx}{dy}$, если при $x=5$ $y=0$.

22. $\operatorname{tg} x \cdot y' = 1+y$, если при $x=\frac{\pi}{6}$ $y=-\frac{1}{2}$.

23. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=0$, если при $x=0$ $y=4$.

24. $dy+y\operatorname{tg} x\,dx=0$, если при $x=0$ $y=1$.

25. $\cos x \sin y\,dy - \cos y \sin x\,dx=0$, если при $x=\pi$ $y=\pi$.

Найти общие решения уравнений:

26. $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$. 27. $(xy^2+x)\,dx+(x^2y-y)\,dy=0$.

28. $(y-x^2y)\,dy+(x+xy^2)\,dx=0$.

29. $(1+x^2)\,dy-(xy+x)\,dx=0$. 30. $y\,dx+(1-y)\,x\,dy=0$.

31. $x^2\,dy+(y-1)\,dx=0$. 32. $2(xy+y)\,dx=x\,dy$.

33. $(x^2+1)\,dy=y\,dx$. 34. $x^2y'-2xy=3y$.

35. Тело движется по оси абсцисс, начиная движение от точки $A(10;\ 0)$ со скоростью

$$v=2t-t^2.$$

Найти уравнение движения тела.

36. Написать уравнение линии, проходящей через точку $A(-1;\ 0)$ и всюду имеющей касательную с угловым коэффициентом, равным 2.

37. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(3;\ 1)$ и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x-1$.

38. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(4;\ 4)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k=\frac{2}{y}$.

39. Написать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(-1;\ \frac{1}{e}\right)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k=y$.

40. Координаты точек некоторой кривой связаны уравнением

$$xy'=(x+1)\,y.$$

Написать уравнение этой кривой, если она проходит через точку $(1;\ e)$.

41. Тело движется по кривой, имеющей касательную с угловым коэффициентом $k=x^2$. Найти изменение ординаты точки при изменении абсциссы с 2 до 5.

§ 120. Дифференциальные уравнения вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$.

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. Простейшее из этих уравнений имеет вид $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$; оно решается двукратным интегрированием.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$.

Решение. Согласно определению второй производной можно написать

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Положим теперь

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dp}{dx},$$

и данное уравнение перепишется следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = 1 - 2x,$$

или

$$dp = (1 - 2x)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем:

$$\int dp = \int (1 - 2x)\,dx$$

и

$$p = x - x^2 + C_1.$$

Но

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

поэтому

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + C_1,$$

или

$$dy = (x - x^2 + C_1)\,dx.$$

Снова интегрируем и получаем:

$$y = \int (x - x^2 + C_1)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2. \qquad (1)$$

Мы нашли общее решение данного уравнения.

Чтобы получить частное решение его, необходимо найти числовые значения постоянных C_1 и C_2; для этого нужно иметь начальные условия. Пусть кривая, определяемая частным решением, проходит, например, через точки с координатами (0; 1) и $\left(1;\ \frac{1}{6}\right)$; тогда, подставив значения x и y в уравнение (1), получим следующую систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1=\frac{0}{2}-\frac{0}{3}+C_1\cdot 0+C_2, \\ \frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+C_1+C_2, \end{cases}$$

откуда

$$C_1=-1 \text{ и } C_2=1.$$

Следовательно, частное решение данного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях будет:

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-x+1.$$

Для проверки правильности решения найдем вторую производную этой функции:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=x-x^2-1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(x-x^2-1)'=1-2x.$$

Мы пришли к исходному уравнению, что говорит о том, что оно решено правильно.

В разобранном примере начальные условия были даны в виде координат двух точек кривой, уравнение которой является частным решением дифференциального уравнения. Однако начальные условия могут быть даны и в иной форме, например, при $x=x_0$, $y=y_0$ и $y'=y'_0$. Это значит, что мы задаем точку кривой и направление касательной в этой точке.

Пример 2. Ускорение прямолинейного движения тела равно 2 *см/сек*^{2}. Выразить путь s тела как функцию времени t.

Решение. Согласно механическому смыслу второй производной функции (§ 83) имеем:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=2.$$

Обозначив

$$\frac{ds}{dt} = p,$$

напишем:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{dp}{dt} = 2,$$

откуда

$$dp = 2\,dt$$

и

$$p = 2t + C_1.$$

Заменив p его выражением, получим:

$$\frac{ds}{dt} = 2t + C_1, \tag{2}$$

или

$$ds = (2t + C_1)\,dt,$$

отсюда

$$s = \int (2t + C_1)\,dt = t^2 + C_1 t + C_2. \tag{3}$$

Для получения частного решения нужны начальные условия. Пусть при $t = 0$, $s = 0$ и $\frac{ds}{dt} = 0$ (предполагаем, что в начальный момент движения путь s и скорость $\frac{ds}{dt}$ равны нулю). Заменив t, s и $\frac{ds}{dt}$ в уравнениях (2) и (3) нулями, получим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, искомая зависимость будет $s = t^2$.

Упражнения

Найти частные решения уравнений:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, если при $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}$ и при $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0. \end{matrix}$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$, если при $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 5 \end{matrix}$ и при $\begin{matrix} x = 4 \\ y = 11. \end{matrix}$
3. $y''_x = x$, если при $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix}$ и при $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2. \end{matrix}$
4. $\frac{d^2s}{dt^2} = t + 1$, если при $\begin{matrix} t = 0 \\ s = 2 \end{matrix}$ и $\frac{ds}{dt} = -\frac{11}{6}$.

5. $\frac{d^2\theta}{d\omega^2} = \omega^2$, если при $\begin{matrix} \omega = 0 \\ \theta = 0 \end{matrix}$ и $\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{3}{4}$.

Найти общие решения уравнений:

6. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 2$. 7. $\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} = e^{\varphi}$. 8. $y''_x = \cos x$.

9. $\frac{d^2s}{dt^2} = 1 - \sin t$. 10. $e^x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}$.

11. Поезд, выйдя со станции, спустя t часов имеет ускорение

$$j = (3t^2 - 42t + 80) \text{ км/час}^2.$$

Найти скорость в конце 2-го часа и расстояние, пройденное за это время.

12. Ускорение прямолинейного движения пропорционально времени. Найти зависимость между пройденным расстоянием и временем, если при $t = 0$ $v = 0$ и $s = 0$, а также при $t = 1$ $s = \frac{1}{3}$.

13. Ускорение прямолинейного движения пропорционально квадрату времени. Найти зависимость между s и t, если при $t = 0$ $v = 0$, $s = 1$ и при $t = 1$ $s = 2$.

ГЛАВА XIV

РЯДЫ

§ 121. Понятие о рядах. *Выражение вида*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

где u_1, u_2, u_3, ... — члены некоторой бесконечной последовательности, называется бесконечным рядом или просто рядом.

Член u_n называется *общим членом* ряда.

Обозначим сумму n первых членов ряда (1) через S_n, т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n.$$

Сумма S_n называется *частичной суммой ряда*. При изменении n меняется и S_n; при этом возможны два случая:

1) величина S_n при $n \to \infty$ имеет предел S, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S;$$

2) величина S_n при $n \to \infty$ предела не имеет или предел ее равен ∞.

В первом случае ряд называется *сходящимся*, а число $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ — его *суммой*. Во втором случае ряд называется *расходящимся*; такой ряд суммы не имеет. Например, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

представляющий собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, есть ряд сходящийся, так как по известной формуле для такой прогрессии

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Ряд же

$$2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n+\ldots,$$

представляющий собой бесконечно возрастающую геометрическую прогрессию, — расходящийся. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n-a}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n-2}{2-1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (2^{n+1}-2) = \infty.$$

§ 122. Необходимый признак сходимости ряда. Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

Найдем сумму $n-1$ и n его членов:

$$S_{n-1} = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1},$$
$$S_n \; = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n.$$

Вычтя из второго равенства первое, получим:

$$S_n - S_{n-1} = u_n. \tag{2}$$

Возьмем предел от обеих частей равенства (2) при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} u_n. \tag{3}$$

Так как ряд (1), по условию, сходящийся, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Равенство (3) можно переписать так:

$$S-S = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$

Это дает *необходимое условие сходимости ряда*, т. е. такое условие, без наличия которого ряд не может сходиться. Однако оно не является *достаточным*. Покажем это на примере.

Возьмем так называемый гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Для него условие (4) выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

между тем этот ряд расходится.

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся равенством (§ 47)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

где

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e. \tag{5}$$

Прологарифмировав обе части неравенства (5) по основанию e, напишем:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e=1,$$

отсюда

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}. \tag{6}$$

Но

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n,$$

поэтому неравенство (6) примет вид:

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}. \tag{7}$$

Положив в неравенстве (7) $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\ln 2-\ln 1<1\\
&\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}\\
&\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3}\\
&\ln 5-\ln 4<\frac{1}{4}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, найдем:

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Пусть $n \to \infty$, тогда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) \to \infty.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

§ 123. Достаточные признаки сходимости ряда.

1. Сравнение рядов. Будем сравнивать два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

1) Пусть ряд (2) сходится и каждый член ряда (1) меньше соответствующего члена ряда (2); тогда и ряд (1) сходится.

2) Пусть ряд (2) расходится и каждый член ряда (1) больше соответствующего члена ряда (2); тогда и ряд (1) расходится.

Примем указанные признаки без доказательства.

Пример 1. Для установления сходимости ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots \text{*)} \tag{3}$$

сравним его с убывающей геометрической прогрессией

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \tag{4}$$

Каждый член ряда (3), начиная со второго, меньше соответствующего члена ряда (4); кроме того, как мы знаем, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — сходящийся ряд. Следовательно, и ряд (3) — сходящийся.

Пример 2. Возьмем ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \tag{5}$$

*) Принято произведение $1\cdot 2\cdot 3\ldots m$ записывать символом $m!$ и читать «эм факториал» (по определению $0! = 1$).

и сравним его с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{6}$$

Так как каждый член ряда (5), начиная со второго, больше соответствующего члена ряда (6), а ряд (6) — расходящийся (§ 122), то и ряд (5) тоже расходящийся.

2. Признак Даламбера. *Если в ряде с положительными членами*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

то данный ряд сходится при $l<1$ *и расходится при* $l>1$.

Примем этот признак без доказательства.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

Решение.

$$u_n=\frac{2n-1}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}:\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n+1}{2(2n-1)}.$$

Применяя признак Даламбера, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1.$$

Данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots$$

Решение.

$$u_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{10^n};\quad u_{n+1} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}{10^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}{10^{n+1}} : \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{10^n} = \frac{n+1}{10};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty.$$

Данный ряд расходится, так как найденный предел оказался больше единицы.

При исследовании ряда на сходимость может оказаться

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

В этом случае признак Даламбера ответа не дает, а потому для исследования ряда нужно применить другие приемы.

Упражнения

Исследовать сходимость рядов

1. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n2^n} + \ldots$

2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\,2^n} + \ldots$

3. $\frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{2}{3\cdot 2^3} + \frac{3}{4\cdot 2^4} + \ldots + \frac{n}{(n+1)\,2^{n+1}} + \ldots$

4. $0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \ldots + \sqrt[n]{0{,}001} + \ldots$

5. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$

6. $\frac{10}{1} + \frac{10^2}{1\cdot 2} + \frac{10^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{10^n}{n!} + \ldots$

7. $\frac{3}{1} + \frac{3^2}{1\cdot 2} + \frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots$

8. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots$

9. $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 2}{2^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^4} + \ldots + \frac{n!}{2^n} + \ldots$

10. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$

11. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

12. $\frac{2}{1000}+\frac{2^2}{2000}+\frac{2^3}{3000}+\ldots+\frac{2^n}{1000n}+\ldots$

§ 124. Признак сходимости знакочередующихся рядов. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots, \quad (1)$$

где $u_1, u_2, u_3\ldots$ — числа положительные. Докажем следующую теорему:

Если в знакочередующемся ряде каждый член по абсолютной величине меньше предшествующего и если

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0,$$

то ряд сходится.

Доказательство. Обозначив буквой m четное число членов ряда (1), напишем сумму m его членов:

$$S_m=u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots+u_{m-1}-u_m.$$

Эту сумму можно представить в следующем виде:

$$S_m=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\ldots+(u_{m-1}-u_m) \quad (2)$$

или

$$S_m=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{m-2}-u_{m-1})-u_m. \quad (3)$$

Согласно условию, разности в скобках равенства (2) положительны; следовательно, сумма S_m с возрастанием m возрастает. Разности в скобках равенства (3) также положительны; поэтому

$$S_m<u_1.$$

S_m, возрастая при $m\to\infty$, остается меньше u_1; значит, S_m имеет предел, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} S_m=S. \quad (4)$$

Мы доказали, что сумма четного числа членов S_m имеет предел при $m\to\infty$.

Докажем, что сумма нечетного числа членов S_{m+1} тоже имеет предел при $m\to\infty$ и притом тот же самый. Отсюда будет следовать, что сумма любого числа n членов ряда (1) S_n имеет предел при $n \to \infty$.

Возьмем сумму нечетного числа $m+1$ членов ряда (1); тогда

$$S_{m+1} = S_m + u_{m+1}.$$

Перейдя к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$\lim_{m \to \infty} S_{m+1} = \lim_{m \to \infty} S_m + \lim_{m \to \infty} u_{m+1}.$$

Приняв во внимание равенство (4) и условие теоремы, напишем:

$$\lim_{m \to \infty} S_{m+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, при всяком n, как четном, так и нечетном, предел суммы членов ряда (1) при $n \to \infty$ один и тот же, т. е. существует

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Следовательно, ряд (1) сходится.

Доказанная теорема служит *достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.*

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

Решение. Так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то согласно доказанной теореме данный ряд сходится

Упражнения

Исследовать сходимость рядов:

1. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \ldots$
2. $1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \ldots$
3. $\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1} + \ldots$

§ 125. Абсолютно сходящиеся ряды. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

членами которого служат как положительные числа, так и отрицательные. Напишем новый ряд, состоящий из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2}$$

Можно доказать, что *если ряд* (2) *сходится, то сходится и ряд* (1).

Определение. *Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин всех его членов.*

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots \tag{3}$$

абсолютно сходящийся, так как ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots,$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (3), сходится.

Однако не всякий сходящийся ряд есть ряд абсолютно сходящийся. Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots \tag{4}$$

сходится (см. пример § 124); но ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

есть гармонический, а потому расходится (§ 122).

Ряд (4) называется *не абсолютно или условно сходящимся.*

Определение. *Сходящийся ряд называется не абсолютно или условно сходящимся, если расходится ряд, составленный из абсолютных величин всех его членов.*

Упражнения

Выяснить, абсолютно или не абсолютно сходятся ряды:

1. $\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}-\frac{4}{16}+\ldots+\frac{n(-1)^{n+1}}{2^n}+\ldots$

2. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

§ 126. Функциональные ряды. Пусть дан ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

членами которого служат не числа, а функции аргумента x. Такой ряд называется *функциональным*. Примером функционального ряда может служить ряд

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots, \qquad (2)$$

представляющий собой геометрическую прогрессию. Если дать аргументу x какое-либо численное значение, то функциональный ряд обратится в числовой.

Может оказаться, что функциональный ряд при одних значениях x сходится, при других расходится. Совокупность всех значений x, при которых ряд (1) сходится, называется *областью сходимости ряда*.

В пределах сходимости ряда, сумма его членов будет функцией x.

Обозначив эту сумму через $f(x)$, можем записать:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

Написанное равенство справедливо только для значений x в области сходимости ряда; в этом случае оно представляет собой разложение функции $f(x)$ в ряд функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... Разберем пример.

Ряд (2) при $|x|<1$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, а потому сходится; при $|x|>1$ этот ряд, представляющий собой бесконечно возрастающую геометрическую прогрессию, расходится. Данный ряд расходится и при $|x|=1$. Таким образом, областью сходимости ряда (2) является $|x|<1$ или иначе $-1<x<1$. Найдя сумму членов ряда (2), как бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-x}.$$

Теперь мы можем написать равенство

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$$

справедливое только при значениях аргумента $|x| < 1$. Это равенство представляет собой разложение функции $\frac{1}{1-x}$ в ряд по степеням x.

§ 127. Степенные ряды. *Степенным рядом называется функциональный ряд вида*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — постоянные коэффициенты.

Если в ряде (1) дать аргументу x какое-нибудь значение, то получим числовой ряд, который будет сходиться или расходиться в зависимости от значения x. В полных курсах анализа доказывается, что для любого степенного ряда существует непрерывная область значений x, при которых этот ряд сходится. Эта область значений x обычно называется *промежутком сходимости степенного ряда* *). Применяя известные нам признаки, можно найти этот промежуток сходимости.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (2)$$

Решение. Применим признак Даламбера к ряду

$$\frac{|x|}{1} + \frac{|x^2|}{2} + \frac{|x^3|}{3} + \frac{|x^4|}{4} + \ldots + \frac{|x^n|}{n} + \ldots \quad (3)$$

Для этого ряда имеем:

$$u_n = \frac{|x^n|}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{|x^{n+1}|}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{n+1}|}{n+1} : \frac{|x^n|}{n} = \frac{n\,|x|}{n+1}.$$

---

*) Иногда промежуток сходимости состоит из одной точки ($x = 0$), в этом случае ряд сходится только при $x = 0$.

Отсюда находим:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} =$$

$$= |x| \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x|.$$

Для сходимости ряда (3) достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \text{ т. е. } |x| < 1,$$

или иначе

$$-1 < x < 1.$$

Отсюда следует, что ряд (2) сходится абсолютно при значениях x, удовлетворяющих последним неравенствам, т. е. при всех значениях x между -1 и $+1$, исключая крайние значения

$$x = -1 \text{ и } x = +1.$$

Вопрос о том, будет ли ряд (2) сходиться при $x = -1$ и $x = +1$, нужно исследовать особо.

Положив в исследуемом ряде $x = -1$ и $x = +1$, получим два ряда:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

и

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Первый ряд знакочередующийся, он удовлетворяет теореме § 124, а потому сходится, второй же ряд гармонический, а потому расходится. Итак, исследуемый ряд сходится при $-1 \leqslant x < 1$, причем при $-1 < x < 1$ сходится абсолютно.

Дифференцируя ряд (1), получим также степенной ряд:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

В полных курсах анализа доказывается следующая теорема: *степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, при этом полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и первоначальный.*

Примем эту теорему без доказательства.

Упражнения

Исследовать сходимость рядов:

1. $\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$
2. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$
3. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$
4. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$
5. $x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n+\ldots$

§ 128. Ряд Маклорена. Возьмем функцию $f(x)$, разлагающуюся в степенной ряд:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

Согласно теореме § 127 ряд (1) можно почленно дифференцировать любое число раз, при этом полученные ряды будут иметь тот же промежуток сходимости, что и ряд (1). Продифференцируем ряд (1) n раз, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x)&=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots\\
&\qquad\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,\\
f''(x)&=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots\\
&\qquad\ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots,\\
f'''(x)&=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots\\
&\qquad\ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}+\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и т. д.

Положив в равенствах (1) и (2) $x=0$, получим:

$$\begin{aligned}
f(0)&=a_0, &&\text{отсюда}\quad a_0=f(0),\\
f'(0)&=a_1, &&\text{отсюда}\quad a_1=f'(0),\\
f''(0)&=2a_2, &&\text{отсюда}\quad a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2},\\
f'''(0)&=2\cdot 3a_3, &&\text{отсюда}\quad a_3=\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}
\end{aligned}$$

и т. д.

Подставив найденные значения коэффициентов в равенство (1), будем иметь:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{1\cdot 2}\,x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n+\ldots \tag{3}$$

Равенство (3) представляет собой ряд Маклорена, позволяющий разложить функцию $y=f(x)$ в ряд по степеням x.

§ 129. Примеры разложения функций в ряд.

Пример 1. Разложить в степенной ряд Маклорена $f(x)=e^x$.

Решение. Для этого находим:

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ f'''(x)=e^x \text{ и т. д.}$$

Положив $x=0$, получим:

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=1 \text{ и т. д.}$$

Таким образом,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{1}$$

Ряд (1) сходится при любом значении x (см. упражнение 3 § 127).

Пример 2. Разложить в степенной ряд Маклорена $f(x)=\sin x$.

Решение. Находим:

$$\begin{array}{lcl}
f(x)=\sin x & \text{и} & f(0)=0,\\
f'(x)=\cos x & \text{и} & f'(0)=1,\\
f''(x)=-\sin x & \text{и} & f''(0)=0,\\
f'''(x)=-\cos x & \text{и} & f'''(0)=-1,\\
f^{(IV)}(x)=\sin x & \text{и} & f^{(IV)}(0)=0,\\
f^{(V)}(x)=\cos x & \text{и} & f^{(V)}(0)=1,\\
f^{(VI)}(x)=-\sin x & \text{и} & f^{(VI)}(0)=0,\\
f^{(VII)}(x)=-\cos x & \text{и} & f^{(VII)}(0)=-1
\end{array}$$

и т. д.

Таким образом,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \tag{2}$$

Составив ряд из абсолютных величин членов ряда (2): исследуем его на сходимость. Применим признак Даламбера,

$$u_n = \frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!} : \frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!} = \frac{x^2}{2n(2n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0.$$

Последнее равенство справедливо при любом x; следовательно, ряд (2) сходится абсолютно при всяком значении x.

Пример 3. Разложить в степенной ряд Маклорена $f(x) = \cos x$.

Решение. Данная функция разлагается в ряд таким же приемом, как и $\sin x$. Однако ряд для $\cos x$ можно получить проще. Так как степенной ряд (2) сходится при всех значениях x, то, дифференцируя его, получим степенной ряд, сходящийся при том же условии (теорема § 127). Взяв производную от обеих частей равенства (2), найдем:

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\,x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

или

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{3}$$

Пример 4. Разложить в степенной ряд Маклорена $f(x) = (1+x)^m$.

Решение. Имеем:

$$f(x) = (1+x)^m,$$
$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$$
$$f(0) = 1;$$
$$f'(0) = m;$$
$$f''(0) = m(m-1);$$
$$f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

и т. д.

Таким образом,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots \qquad (4)$$

Если m — натуральное число, то ряд (4) обрывается на $(m+1)$-м члене, так как последующие коэффициенты обращаются в нуль; при m дробном или отрицательном этот ряд бесконечный. Применяя признак Даламбера, можно показать, что бесконечный ряд (4) сходится при $|x| < 1$.

Пример 5. Разложить $f(x) = \arcsin x$ в степенной ряд.

Решение. Применим формулу (4) к функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) +$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}(-x^2)^2 +$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^2)^3 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \ldots \qquad (5)$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до x, будем иметь:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx + \frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx + \frac{3}{8}\int_0^x x^4\,dx + \frac{5}{16}\int_0^x x^6\,dx + \ldots,$$
$$\Big|_0^x \arcsin x = \Big|_0^x x + \frac{1}{6}\Big|_0^x x^3 + \frac{3}{40}\Big|_0^x x^5 + \frac{5}{112}\Big|_0^x x^7 + \ldots,$$
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots \qquad (6)$$

Так как ряд (5) сходится при $|x| < 1$, то и ряд (6) согласно теореме § 127 также сходится при $|x| < 1$.

Пример 6. Разложить в степенной ряд $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Согласно формуле (4) имеем:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 + (-1)x^2 + \frac{-1(-1-1)}{1\cdot 2}x^4 + $$
$$+ \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad (7)$$

Умножив равенство (7) на dx и интегрируя в пределах от 0 до x, получим:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \int_0^x x^4\,dx - \int_0^x x^6\,dx + \ldots,$$

отсюда

$$\Big|_0^x \operatorname{arctg} x = \Big|_0^x x - \frac{1}{3}\Big|_0^x x^3 + \frac{1}{5}\Big|_0^x x^5 - \frac{1}{7}\Big|_0^x x^7 + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (8)$$

Ряд (8) сходится при $|x| < 1$, так как ряд (7) сходится при $|x| < 1$ (теорема § 127).

§ 130. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям. Степенные ряды имеют большое приложение к приближенным вычислениям. Покажем это на примерах.

Пример 1. Вычислить $\sin 18°$.

Решение. Угол $18°$ в радианной мере равен $0,3142$. Подставив значение $x = 0,3142$ в формулу (2) § 129, получим:

$$\sin 18° = \sin 0,3142 \approx 0,3142 - \frac{0,3142^3}{1\cdot 2\cdot 3} \approx$$
$$\approx 0,3142 - 0,0052 = 0,3090.$$

Пример 2. Вычислить π.

Решение. Положив в равенстве (6) § 129 $x = \frac{1}{2}$ и учитывая, что $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, получим $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3\cdot 6} + \frac{3}{2^5\cdot 40}$, отсюда

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{32\cdot 20} \approx 3 + 0,125 + 0,0141 \approx 3,14.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение. Неопределенный интеграл данного вида не может быть выражен в элементарных функциях. Однако его можно в указанных пределах вычислить приближенно с помощью рядов. Разделим обе части равенства (2) § 129 на x:

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!},$$

отсюда

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int\limits_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int\limits_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{5!}\int\limits_0^1 x^4\,dx =$$

$$= \Big|_0^1 x - \frac{1}{3!3}\Big|_0^1 x^3 + \frac{1}{5!5}\Big|_0^1 x^5 =$$

$$= 1 - \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot3} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5} \approx 1 - 0{,}0556 + 0{,}0017 = 0{,}9461.$$

§ 131. Ряды с комплексными членами. Возьмем ряд

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots, \tag{1}$$

состоящий из комплексных чисел вида $a_n + b_n i$, где a и b — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. Ряд (1) называется сходящимся, если ряды

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

и

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{3}$$

состоящие из действительных частей и коэффициентов при мнимых членах ряда (1), сходятся. Пусть суммы рядов (2) и (3) соответственно равны A и B; тогда сумма ряда (1) будет равна $A + Bi$. Например, сумма членов ряда

$$\left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2^n}i\right) + \ldots$$

равна

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)i=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}i=\frac{3}{2}+i=1,5+i.$$

Докажем теорему:

Ряд с комплексными членами сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Доказательство. Пусть сходится ряд

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\ldots, \tag{4}$$

составленный из модулей членов ряда (1). Как видно,

$$|a_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{и} \quad |b_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Поэтому члены рядов (2) и (3) не превышают соответствующие члены ряда (4). Следовательно, ряды (2) и (3) сходятся и притом абсолютно (§ 125), а потому сходится и ряд (1). Теорема доказана.

В некоторых случаях рассматриваются степенные ряды

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 ... — действительные или комплексные числа, а z — комплексное переменное вида $x+iy$. Пользуясь доказанной теоремой и известными нам признаками сходимости, можно исследовать сходимость и таких рядов.

§ 132. Формулы Эйлера. В § 129 мы представили показательную функцию e^x в виде ряда (1) для действительных значений показателя. В полных курсах высшей математики доказывается, что ряд (1) не теряет смысла и в случае комплексного показателя. Таким образом, можно написать:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{1}$$ *)

где z — комплексное переменное вида $x+iy$.

*) Можно показать, что этот ряд абсолютно сходящийся для всех значений z.

В частном случае, положив в равенстве (1) $z = iy$, получим:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots,$$

или

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \ldots + \frac{i^ny^n}{n!} + \ldots$$

Но

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \text{ и т. д.,}$$

поэтому

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots$$

Выделив действительные и мнимые члены, напишем:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) + \\ + \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) i.$$

Приняв во внимание формулы (3) и (2) § 129, получим:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \qquad (2)$$

Заменив в равенстве (2) y на $-y$, напишем:

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y),$$

или

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \qquad (3)$$

Равенства (2) и (3) выражают связь между показательной и тригонометрическими функциями. Эти равенства были даны Эйлером.

Решив равенства (2) и (3) относительно $\cos y$ и $\sin y$, будем иметь:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{и} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Заметим, что из равенства (2) легко получить новый вид записи комплексного числа, имеющего модуль r и аргумент y, а именно:

$$r(\cos y + i \sin y) = re^{iy}.$$

Таким образом, комплексное число может быть записано в трех формах: *в алгебраической*, *тригонометрической* и *показательной*. Например,

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Формулы Эйлера позволяют установить периодичность показательной функции. Действительно, заменив в равенстве (2) y на $y+2\pi$, найдем:

$$e^{(y+2\pi)i}=\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)=\cos y+i\sin y=e^{iy}.$$

Таким образом,

$$e^{(y+2\pi)i}=e^{iy},$$

или

$$e^{iy+2\pi i}=e^{iy}. \qquad (4)$$

Равенство (4) показывает, что e^{iy} — периодическая функция с мнимым периодом $2\pi i$.

ГЛАВА XV

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 133. Графики функций вида $y = A \sin \omega x$. В дальнейшем изложении нам придется использовать функции вида $y = A \sin \omega x$, а также их графики. Покажем на примерах, как строятся графики таких функций.

Пример 1. Построить график функции $y = \sin 3x$.

Решение. Данная функция — периодическая; областью ее существования служат все действительные числа. Построим график этой функции для значений аргумента от $x = 0$ до $x = 2\pi$, составив предварительно следующую таблицу значений x и y.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0

Рассматривая каждую пару значений x и y как координаты точек графика данной функции, построим эти точки и, проведя через них плавную линию, получим график функции $y = \sin 3x$, представленный на чертеже 132 в виде сплошной линии — синусоиды с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{3}$.

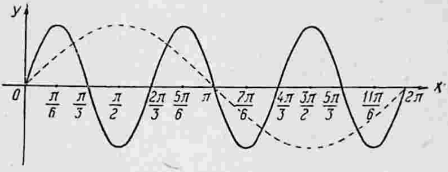
Как видно из чертежа, этот график можно получить из графика функции $y = \sin x$, изображенного на том же чертеже пунктирной линией, уменьшив масштаб по оси Ox в три раза.

Пример 2. Построить график функции $y = 3 \sin 2x$.

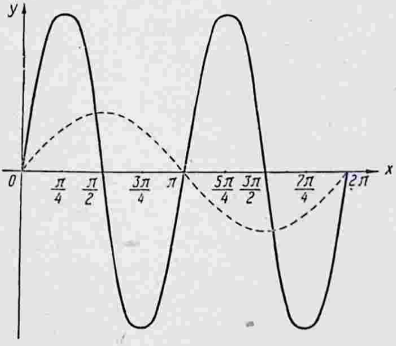
Решение. Составим таблицу значений x и y.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

График, построенный по точкам с вычисленными координатами, представляет синусоиду с наименьшим периодом



Черт. 132.



Черт. 133.

$\frac{2\pi}{2} = \pi$ (на чертеже 133 эта синусоида изображена сплошной линией).

График функции $y = 3\sin 2x$ можно получить и из графика функции $y = \sin x$, представленного на том же чертеже пунктирной линией, уменьшив масштаб по оси Ox вдвое и увеличив его по оси Oy втрое.

§ 134. Гармонические колебания. 1. Простые гармонические колебания. В естествознании и технике часто наблюдаются периодические процессы, т. е. такие явления, которые повторяются через определенный промежуток времени. Например, колебания маятника, явления переменного тока и др.

Простейшее периодическое явление — гармоническое колебание, совершаемое по закону

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

В равенстве (1) постоянный множитель A, представляющий наибольшую величину, которую может иметь y, называется *амплитудой* колебания, $(\omega t + \varphi_0)$ — *фазой колебания*, а ω — *частотой колебания*.

Функция (1) — периодическая с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, от прибавления которого к аргументу t функция не меняет своего значения. В самом деле,

$$y = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0\right] = A\sin(\omega t + 2\pi + \varphi_0) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Величина $\frac{2\pi}{\omega}$ определяет время, в течение которого происходит одно колебательное движение, поэтому ее называют *периодом колебания*. Обозначив ее буквой T, можно записать:

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

откуда

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Так как T — время одного колебания, то $\frac{2\pi}{T}$ — число колебаний за время 2π. Таким образом, величина ω определяет частоту колебаний. Преобразуем равенство (1), применив формулу для синуса суммы двух углов:

$$A\sin(\omega t + \varphi_0) = A(\sin\omega t\cos\varphi_0 + \cos\omega t\sin\varphi_0) =$$
$$= A\cos\varphi_0\sin\omega t + A\sin\varphi_0\cos\omega t.$$

Обозначив

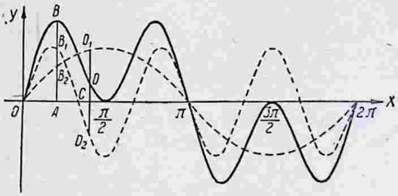
$$a = A\cos\varphi_0 \text{ и } b = A\sin\varphi_0,$$

получим:

$$y = a\sin\omega t + b\cos\omega t. \qquad (2)$$

Колебательное движение, происходящее по закону функции (1) или, что то же, по закону функции (2), называется *простым гармоническим колебанием*, а график его — *простой гармоникой*.

II. Сложные гармонические колебания. Не всякий периодический процесс можно рассматривать как простое гармоническое колебание. Очень часты случаи,



Черт. 134.

когда периодическое явление есть результат сложения нескольких простых гармонических колебаний. Полученное результирующее движение называется *сложным гармоническим колебанием*, а график его — *сложной гармоникой*.

Итак, *сложная гармоника есть результат сложения нескольких простых гармоник* или иначе — *результат наложения простых гармоник друг на друга*.

Рассмотрим пример. Пусть даны две простые гармоники, определяемые уравнениями:

$$y = \sin t$$

и

$$y = \sin 3t.$$

На чертеже 134 эти гармоники изображены пунктирными линиями, сложная же гармоника, являющаяся графиком функции

$$y = \sin t + \sin 3t,$$

представлена сплошной линией. Любая точка сложной гармоники имеет ординату, равную сумме ординат точек, лежащих на простых гармониках и имеющих одну и ту же абсциссу. Так, например,

$$AB = AB_1 + B_1B = AB_1 + AB_2,$$
$$CD = CD_1 - DD_1 = CD_1 - CD_2 = CD_1 + (-CD_2).$$

Как видно из чертежа, результирующая гармоника будет повторяться через каждый промежуток $t = 2\pi$, т. е. будет периодической, но по своей форме она уже теряет характер синусоиды.

Можно доказать, что вообще при сложении простых гармоник с разными частотами получается сложная гармоника не синусоидального вида, а при сложении гармоник с одинаковыми частотами — гармоника того же вида, что и простые.

§ 135. Тригонометрические ряды. Как было указано в § 134, наблюдаются периодические процессы, которые нельзя рассматривать как простые колебательные явления. Положим, что какое-либо периодическое движение задано при помощи некоторой периодической функции, отличной от (1) § 134. Чтобы иметь представление о характере этого движения, данную функцию разлагают в ряд простых гармоник, имеющий следующий вид:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) + \ldots \quad (1)$$

Ряд (1) называется *тригонометрическим рядом*, а числа a_0, a_1, $a_2 \ldots b_1$, b_2, ... — *коэффициентами ряда*.

Положим для простоты

$$x = \omega t$$

и будем считать, что ряд (1) сходится при всех действительных значениях x к данной функции [т. е. сумма ряда равна функции $f(x)$], тогда можно написать:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

или короче

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

Как видно, функция $f(x)$ — периодическая с периодом 2π, так как прибавляя к x (или вычитая из x) 2π целое число раз, мы не изменим величины каждого члена ряда (2), а, следовательно, не изменим и величины суммы (2).

Отсюда следует, что тригонометрический ряд достаточно рассматривать только для значений x от 0 до 2π (или от $-\pi$ до $+\pi$), так как за пределами указанного промежутка значений аргумента величина каждого члена ряда будет периодически повторяться.

Чем больше простых гармоник ряда (2) мы сложим, тем точнее результирующая гармоника будет представлять периодическое движение, заданное функцией $f(x)$. Поэтому вопрос о разложении функции в тригонометрический ряд приобретает очень важное значение в прикладных науках.

Процесс разложения функции, представляющей сложное периодическое движение, в тригонометрический ряд называется *гармоническим анализом*.

§ 136. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье. Чтобы разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π в тригонометрический ряд, нужно найти коэффициенты этого ряда. Мы приводим здесь без вывода формулы, по которым производится вычисление этих коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx,\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $n=1, 2, 3, 4, \ldots$

Числа, полученные по формулам (1), называются *коэффициентами Фурье* *), а тригонометрический ряд с этими коэффициентами — *рядом Фурье*.

Определение. *Ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx,$$

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\}n=1,\,2,\,3,\,4\,\ldots,$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Если ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, то можно записать:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (2)$$

Следует заметить, что величина интегралов в формулах (1) не изменится, если пределами их взять 0 и 2π. В этом случае формулы для определения коэффициентов Фурье можно написать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx,\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $n=1,\,2,\,3,\,4\,\ldots$

*) Формулы (1) были даны еще Эйлером (1707—1783), но широко использовал их французский математик Ж. Фурье (1768—1830).

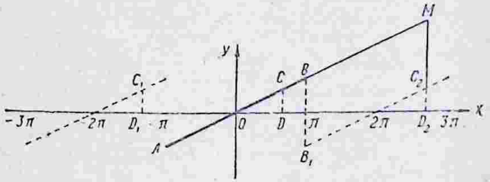
Формулы (3) представляют иногда бо́льшие удобства, чем формулы (1).

§ 137. Возможность разложения непериодической функции в ряд Фурье. Периодическая функция, как мы уже знаем, определяет колебательное движение. Однако бывают колебательные явления, которые совершаются по закону *непериодической* функции. Поэтому для изучения колебательного движения, подчиняющегося непериодической функции, выгодно разложить эту функцию в ряд Фурье, что оказывается возможным при некоторых условиях, о которых скажем в § 138.

Пусть, например, задана функция

$$f(x)=\frac{1}{2}x \text{ при } -\pi\leqslant x\leqslant\pi, \tag{1}$$

график которой изображен на чертеже 135 отрезком прямой AB. Покажем, что для разложения данной функции в ряд Фурье



Черт. 135.

можно и к ней применить правила § 136. Для этого введем вспомогательную периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом 2π при условии:

$$\varphi(x)=f(x) \text{ в промежутке значений } x \text{ от } -\pi \text{ до } +\pi, \tag{2}$$

за пределами же указанного промежутка $\varphi(x)\neq f(x)$.

К функции $\varphi(x)$, как к периодической, можно применить формулы § 136. Но мы знаем, что тригонометрический ряд достаточно рассматривать для промежутка значений аргумента от $-\pi$ до $+\pi$ (§ 135), поэтому формулы § 136 имеем право применить не только к функции $\varphi(x)$, но, согласно условию (2), и к заданной.

Величина суммы ряда Фурье, полученного для функции (1), вследствие периодичности его членов будет повторяться через каждый промежуток, равный 2π, и принимать значения данной функции (1). Поясним это геометрически. С этой целью перенесем отрезок AB (черт. 135), сохраняя его направление, вдоль оси Ox на расстояния, равные 2π, 4π и т. д., вправо и влево от начала координат или, как говорят, продолжим периодически график функции (1). Возьмем значение x внутри промежутка от $-\pi$ до $+\pi$, например,

$$x = OD = 2,$$

тогда ордината

$$DC = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

даст величину суммы ряда Фурье функции (1) при $x = 2$. Ясно, что при

$$x = OD_2 = 2 + 2\pi$$

или

$$x = OD_1 = 2 - 2\pi$$

величина ординат D_2C_2 и D_1C_1, а следовательно, и сумма ряда при тех же значениях x не изменится и будет равна по-прежнему единице.

Обратим внимание, что для значений x вне промежутка от $-\pi$ до $+\pi$ сумма ряда Фурье функции (1) и значения этой функции не равны между собой. Действительно, сумма этого ряда при $x = 2 + 2\pi$, как мы узнали, равна 1, а значение функции

$$f(2 + 2\pi) = D_2M = \frac{1}{2}(2 + 2\pi) = 1 + \pi.$$

Все сказанное выше подтверждает мысль, что ряд Фурье функции имеет смысл рассматривать только в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

§ 138. Условия Дирихле. Теорема Дирихле. Как было уже сказано, функция $f(x)$ с областью существования $-\pi \leqslant \leqslant x \leqslant \pi$ может быть разложена в ряд Фурье, сходящийся к данной функции $f(x)$ при определенных условиях. Эти условия, называемые *условиями Дирихле*, заключаются в следующем:

1) *функция должна быть непрерывной в промежутке значений x от $-\pi$ до $+\pi$ или может иметь в указанном промежутке разрывы первого рода, но только в конечном числе;*

2) *функция должна иметь конечное число максимумов и минимумов или не иметь их совсем.*

Одной из основных теорем, применяемых при исследовании рядов Фурье, является теорема Дирихле.

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$ с областью существования $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ удовлетворяет условиям Дирихле, то*

1) *ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в указанном промежутке значений x;*

2) *сумма этого ряда сходится к функции $f(x)$ во всех точках ее непрерывности;*

3) *в каждой точке разрыва функции сумма ряда равна половине скачка функции;*

4) *при $x=\pi$ и $x=-\pi$ сумма ряда одинакова и равна*

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Примем указанную теорему без доказательства.

Заметим, что в дальнейшем изложении мы будем пользоваться только функциями, удовлетворяющими условиям Дирихле, а потому в каждом разбираемом примере не будем останавливаться на этих условиях.

Прежде чем перейти к разложению функций в ряды Фурье мы должны познакомиться с методом интегрирования по частям, без которого нельзя определять коэффициенты Фурье.

§ 139. Интегрирование по частям. Пусть u и v — дифференцируемые функции x, тогда по правилу IV § 67 имеем:

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

или

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

откуда

$$u\,dv=d(uv)-v\,du. \qquad (1)$$

Взяв интеграл от обеих частей равенства (1), получим:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Равенство (2) служит *формулой интегрирования по частям*.

Пример 1. Найти $\int x\cos x\,dx$.

Решение. Положим

$$\left.\begin{aligned} u &= x, \\ dv &= \cos x\,dx, \\ \text{тогда}\quad du &= dx, \\ v &= \int \cos x\,dx = \sin x \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(произвольное постоянное интегрирования напишем в окончательном результате).

Подставив (3) во (2), получим:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

Пример 2. Найти $\int x\cos nx\,dx$.

Решение. Положим

$$\begin{aligned} u &= x, \\ dv &= \cos nx\,dx, \\ \text{тогда}\quad du &= dx, \\ v &= \int \cos nx\,dx. \end{aligned}$$

Применяя метод подстановки $\left(nx = z,\ dx = \frac{dz}{n}\right)$, получим:

$$v = \int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin z = \frac{1}{n}\sin nx.$$

Согласно формуле (2) имеем:

$$\int x\cos nx\,dx = \frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int \sin nx\,dx\,^{*)} =$$

$$= \frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\cdot\frac{-\cos nx}{n} + c = \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + c. \quad (4)$$

Аналогично можно найти:

$$\int x\sin nx\,dx = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + c. \quad (5)$$

Пример 3. Найти $\int x^2\cos nx\,dx$.

Решение. Положим

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2, \\ dv &= \cos nx\,dx, \\ \text{откуда} \qquad du &= 2x\,dx, \\ v = \int \cos nx\,dx &= \frac{\sin nx}{n} \text{ (см. пример 2).} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Подставив (6) во (2), получим:

$$\int x^2\cos nx\,dx = \frac{x^2\sin nx}{n} - \int \frac{2x\sin nx}{n}\,dx =$$

$$= \frac{x^2\sin nx}{n} - \frac{2}{n}\int x\sin nx\,dx.$$

Приняв во внимание равенство (5), будем иметь:

$$\int x^2\cos nx\,dx = \frac{x^2\sin nx}{n} - \frac{2}{n}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + c_1\right) =$$

$$= \frac{x^2\sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3} + c. \quad (7)$$

Таким же образом найдем:

$$\int x^2\sin nx\,dx = -\frac{x^2\cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3} + c. \quad (8)$$

---

*) Применяется подстановка $nx = z$ и $dx = \frac{dz}{n}$.

§ 140. Примеры разложения функций в ряд Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ при } -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ 0 \text{ при } \quad 0< x\leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. По формулам (1) § 136 найдем коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot dx.$$

Но

$$\int 0\,dx=c, \text{ так как } dc=0\cdot dx,$$

кроме того,

$$\int_{0}^{\pi} 0\cdot dx=c-c=0.$$

Поэтому

$$a_0=\frac{1}{\pi}\Big|_{-\pi}^{0}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot 0=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{\pi^2}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot dx.$$

Приняв во внимание равенство (4) § 139, получим:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\Big|_{-\pi}^{0}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)+\frac{1}{\pi}\cdot 0=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{0\cdot\sin 0}{n}+\frac{\cos 0}{n^2}-\left[\frac{-\pi\sin(-n\pi)}{n}+\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}-\frac{\pi\sin n\pi}{n}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{\pi\cdot 0}{n}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi).$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{\pi \cdot 1^2}(1 - \cos\pi) = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi},$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi \cdot 2^2}(1 - \cos 2\pi) = \frac{1}{2^2\pi}(1-1) = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi \cdot 3^2}(1 - \cos 3\pi) = \frac{1}{3^2\pi}(1 - \cos\pi) = \frac{1}{3^2\pi}(1+1) = \frac{2}{3^2\pi},$$

$$a_4 = \frac{1}{\pi \cdot 4^2}(1 - \cos 4\pi) = \frac{1}{4^2\pi}(1 - \cos 0) = \frac{1}{4^2\pi}(1-1) = 0.$$

и т. д.

Как видно, при четном значении n коэффициенты a_n равны нулю.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0 \cdot dx.$$

Согласно равенству (5) § 139 получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big|_{-\pi}^{0}\left(\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right) + \frac{1}{\pi}\cdot 0 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-0\cdot\cos 0}{n} + \frac{\sin 0}{n^2} - \left[\frac{\pi\cos(-n\pi)}{n} + \frac{\sin(-n\pi)}{n^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + 0 - \frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{0}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) = -\frac{\cos n\pi}{n}.$$

Отсюда

$$b_1 = -\frac{\cos\pi}{1} = 1,$$

$$b_2 = -\frac{\cos 2\pi}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$b_3 = -\frac{\cos 3\pi}{3} = -\frac{\cos\pi}{3} = \frac{1}{3},$$

$$b_4 = -\frac{\cos 4\pi}{4} = -\frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{4} \quad \text{и т. д.}$$

Искомый ряд напишется так:

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \ldots$$

$$\ldots + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

Согласно теореме Дирихле этот ряд сходится к данной функции во всех точках промежутка значений x от $-\pi$ до $+\pi$, кроме $x=-\pi$ и $x=\pi$. В самом деле, при $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда равна $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2}$, между тем как значения функции при $x=-\pi$ и $x=\pi$ соответственно равны $-\pi$ и 0, т. е. не совпадают с суммой ряда.

Таким образом, можно написать:

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right) \text{ при } -\pi<x<\pi.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2} \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

Решение. Здесь для определения коэффициентов Фурье используем формулы (3) § 136.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{\pi}\Big|_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{4}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\pi-\frac{4\pi^2}{4}\right)=\frac{1}{\pi}(\pi^2-\pi^2)=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx^{*)}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\Big|_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx\right).$$

---

*) $\int\cos nx\,dx$ находится подстановкой: $nx=z$ и $dx=\frac{dz}{n}$.

Приняв во внимание равенство (4) § 139, будем иметь:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\Big|_0^{2\pi} \sin nx - \frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}(\sin 2\pi n - \sin 0) - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\sin 2\pi n}{n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos 2\pi n}{n^2} - \frac{0\cdot\sin 0}{n} - \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin 2\pi n - \frac{\pi\sin 2\pi n}{n} - \frac{\cos 2\pi n}{2n^2} + 0 + \frac{1}{2n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot 0 - \frac{\pi\cdot 0}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = 0.$$

Таким образом, все коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 ... равны нулю.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx\right].$$

Применяя к $\int x\sin nx\,dx$ формулу (5) § 139, получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos 2\pi n}{n} + \frac{\cos 0}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi\cos 2\pi n}{n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sin 2\pi n}{n^2} + \frac{0\cdot\cos 0}{n} - \frac{\sin 0}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{0}{n^2} + \frac{0}{n} - \frac{0}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}.$$

Итак,

$$b_n = \frac{1}{n},$$

откуда

$$b_1 = 1,$$

$$b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \quad \text{и т. д.}$$

Искомое разложение будет:

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$$

Полученный ряд сходится к функции $y=\frac{\pi-x}{2}$ при всех значениях x в промежутке от 0 до 2π, кроме $x=0$ и $x=2\pi$, как это и следует из теоремы Дирихле.

Таким образом,

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots \quad \text{при} \quad 0<x<2\pi.$$

§ 141. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. *Функция $f(x)$ называется четной, если при подстановке вместо x величины $-x$ знак функции не меняется*, т. е. $f(-x)=f(x)$. Например, x^2, $\cos x$ — четные функции, так как $(-x)^2=x^2$, $\cos(-x)=\cos x$.

Функция $f(x)$ называется нечетной, если при подстановке вместо x величины $-x$ знак функции меняется на противоположный, т. е. $f(-x)=-f(x)$. Например, x^3, $\sin x$ — нечетные функции, так как $(-x)^3=-x^3$, $\sin(-x)=-\sin x$.

Заметим, что *произведение двух четных или двух нечетных функций есть четная функция, а произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.* В самом деле,

$(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x$ — произведение двух четных функций,

$(-x)^3\sin(-x)=x^3\sin x$ — » » нечетных » ,

$\cos(-x)\sin(-x)=-\cos x\sin x$ — произведение четной функции на нечетную.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примеры таких графиков даны на чертеже 136 для четной функции, на чертеже 137 — для нечетной.

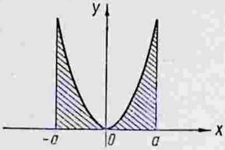
Если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

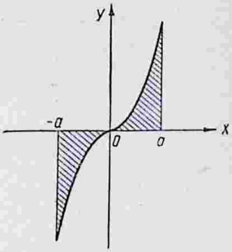
если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Эти равенства можно подтвердить геометрическими соображениями. Пусть $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ выражает площадь фигуры, заключенной между графиком функции $f(x)$, двумя прямыми $x=-a$ и $x=a$ и осью Ox, тогда в случае четной функции $f(x)$ эта площадь равна удвоенной площади фигуры,



Черт. 136.



Черт. 137.

образованной тем же графиком, осью Ox и прямыми $x=0$ и $x=a$ (черт. 136); в случае нечетной функции площадь равна нулю, так как она состоит из двух равных площадей с противоположными знаками (черт. 137).

Приняв во внимание сказанное, можно упростить формулы (1) § 136, написав их в следующем виде: для случая четной функции

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

для случая нечетной функции

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = 0 \text{ и } a_n = 0, \\ &b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Как видно, ряд Фурье (2) § 136 для четной функции будет состоять только из косинусов, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

а для нечетной функции — только из синусов, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = |x| \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Решение. Функция $y = |x|$ — четная (см. черт. 73), а потому согласно формулам (1) имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big|_0^{\pi}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0) = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

Приняв во внимание равенство (4) § 139, найдем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\Big|_0^{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\sin n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \left(\frac{0\cdot\sin 0}{n} + \frac{\cos 0}{n^2}\right)\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\cdot 0}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{0}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1).$$

Отсюда

$$a_1=\frac{2}{\pi\cdot 1^2}(\cos\pi-1)=\frac{2}{\pi}(-1-1)=-\frac{4}{\pi},$$

$$a_2=\frac{2}{\pi\cdot 2^2}(\cos 2\pi-1)=\frac{2}{\pi\cdot 2^2}(1-1)=0,$$

$$a_3=\frac{2}{\pi\cdot 3^2}(\cos 3\pi-1)=\frac{2}{\pi\cdot 3^2}(\cos\pi-1)=$$

$$=\frac{2}{\pi\cdot 3^2}(-1-1)=-\frac{4}{\pi\cdot 3^2},$$

$$a_4=\frac{2}{\pi\cdot 4^2}(\cos 4\pi-1)=\frac{2}{\pi\cdot 4^2}(\cos 0-1)=$$

$$=\frac{2}{\pi\cdot 4^2}(1-1)=0 \quad \text{и т. д.}$$

Искомое разложение будет:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x-\frac{4}{\pi\cdot 5^2}\cos 5x-\ldots=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$$

Применяя теорему Дирихле, можно показать, что полученный ряд сходится к данной функции при всех значениях x от $-\pi$ до $+\pi$.

Следовательно, можно написать:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)$$

$$\text{при } -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=|\sin x| \quad \text{при} \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Решение. Данная функция четная; применяя формулы (1), получим:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\Big|_0^{\pi}-\cos x=$$

$$=-\frac{2}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{2}{\pi}(-1-1)=\frac{4}{\pi}.$$

Положив $n=1$ в формуле для a_n, будем иметь:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin x\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big|_0^\pi-\frac{\cos 2x}{2}=-\frac{1}{2\pi}\Big|_0^\pi\cos 2x=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi-\cos 0)=-\frac{1}{2\pi}(1-1)=0.$$

Для $n=2, 3, 4\ldots$ получим:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin x\cos nx\,dx.$$

Представим произведение $2\sin x\cos nx$ в следующем виде:

$$2\sin x\cos nx=\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\,^{*)}$$

тогда

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big|_0^\pi\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]^{**)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}-\left(-\frac{\cos 0}{n+1}+\frac{\cos 0}{n-1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}-\frac{2}{n^2-1}\right].$$

---

*) Это равенство легко проверить, применив к правой части его формулу для разности синусов двух углов.

**) $\int\sin(n+1)x\,dx$ находится подстановкой: $(n+1)x=z$ и $dx=\frac{dz}{n+1}$. Аналогичную подстановку применяем и к $\int\sin(n-1)x\,dx$.

Отсюда

$$a_2=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 3\pi}{3}+\frac{\cos\pi}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\pi}{3}+\frac{\cos\pi}{1}-\frac{2}{3}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}-1-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3\pi},$$

$$a_3=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 4\pi}{4}+\frac{\cos 2\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 0}{4}+\frac{\cos 0}{2}-\frac{1}{4}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=0,$$

$$a_4=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 5\pi}{5}+\frac{\cos 3\pi}{3}-\frac{2}{15}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\pi}{5}+\frac{\cos\pi}{3}-\frac{2}{15}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{2}{15}\right)=-\frac{4}{15\pi},$$

$$a_5=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 6\pi}{6}+\frac{\cos 4\pi}{4}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 0}{6}+\frac{\cos 0}{4}-\frac{1}{12}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=0,$$

$$a_6=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 7\pi}{7}+\frac{\cos 5\pi}{5}-\frac{2}{35}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\pi}{7}+\frac{\cos\pi}{5}-\frac{2}{35}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}-\frac{2}{35}\right)=-\frac{4}{35\pi} \text{ и т. д.}$$

Искомое разложение напишется так:

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{3\pi}\cos 2x-\frac{4}{15\pi}\cos 4x-\frac{4}{35\pi}\cos 6x-\ldots=$$
$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right).$$

Согласно теореме Дирихле полученный ряд сходится к данной функции при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, поэтому

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$$

при всех значениях x указанного промежутка.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x \quad \text{при} \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Решение. Применим формулы (2), так как функция $f(x)=x$ нечетная.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx.$$

Согласно равенству (5) § 139 найдем:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big|_0^\pi \left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(-\frac{0\cdot\cos 0}{n} + \frac{\sin 0}{n^2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) = -\frac{2\cos n\pi}{n}.$$

Отсюда

$$b_1 = -\frac{2\cos\pi}{1} = -2(-1) = 2,$$

$$b_2 = -\frac{2\cos 2\pi}{2} = -\frac{2\cdot 1}{2} = -1,$$

$$b_3 = -\frac{2\cos 3\pi}{3} = -\frac{2\cos\pi}{3} = \frac{2}{3},$$

$$b_4 = -\frac{2\cos 4\pi}{4} = -\frac{2\cos 0}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Искомое разложение таково:

$$2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \ldots =$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

Этот ряд представляет функцию $f(x) = x$ при всех значениях x промежутка от $-\pi$ до $+\pi$, кроме $x = \pm\pi$. Действительно, по теореме Дирихле при $x = \pm\pi$ сумма ряда равна $\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$; значения же функции при $x = -\pi$ и $x = \pi$ соответственно равны $-\pi$ и π, т. е. не совпадают с суммой ряда.

Таким образом,

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right) \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Данная функция — нечетная, а потому, применяя формулу (2), получим:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\Big|_0^\pi -\frac{\cos nx}{n} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\Big|_0^\pi \cos nx = -\frac{1}{2n}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2n}(\cos n\pi - 1).$$

Отсюда

$$b_1 = -\frac{1}{2\cdot 1}(\cos\pi - 1) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1,$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\cdot 2}(\cos 2\pi - 1) = -\frac{1}{4}(1-1) = 0,$$

$$b_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}(\cos 3\pi - 1) = -\frac{1}{6}(\cos\pi - 1) =$$

$$= -\frac{1}{6}(-1-1) = \frac{1}{3},$$

$$b_4 = -\frac{1}{2\cdot 4}(\cos 4\pi - 1) = -\frac{1}{8}(\cos 0 - 1) =$$

$$= -\frac{1}{8}(1-1) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Разложение напишется следующим образом:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots .$$

При $x = -\pi$, $x = 0$ и $x = \pi$ сумма полученного ряда не совпадает со значениями данной функции, поэтому указанный ряд сходится к функции $f(x)$ при $-\pi < x < 0$ и $0 < x < \pi$.

Следовательно,

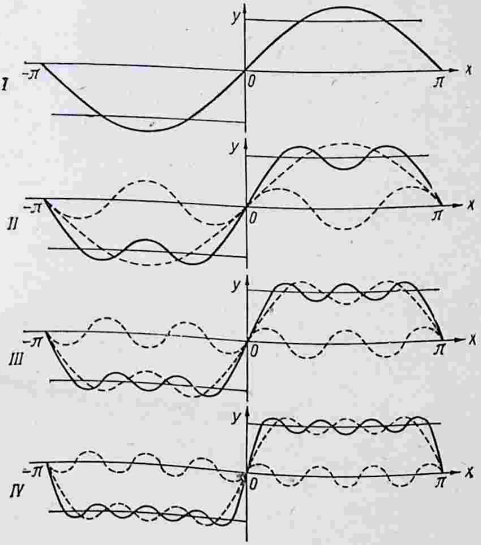
$$-\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \quad \text{при} \quad -\pi < x < 0,$$

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi.$$

Покажем на примере разложения в ряд этой функции, что по мере увеличения числа слагаемых (простых гармоник) частичная сумма ряда (результирующая гармоника) все лучше и лучше представляет данную функцию.

На чертеже 138 I показана первая гармоника ($\sin x$) ряда.

На чертеже 138 II изображены первые две гармоники ряда ($\sin x$ и $\frac{\sin 3x}{3}$ — пунктирные линии) и их сумма ($\sin x + \frac{\sin 3x}{3}$ — сплошная линия).



Черт. 138.

На чертеже 138 III показаны найденная сумма двух первых гармоник ($\sin x + \frac{\sin 3x}{3}$ — пунктирная линия) и третья гармоника ($\frac{\sin 5x}{5}$ — пунктирная линия), а также сумма трех первых гармоник ($\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}$ — сплошная линия).

На чертеже 138 IV — найденная сумма трех первых гармоник ($\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}$ — пунктирная линия), четвертая гармоника ($\frac{\sin 7x}{7}$ — пунктирная линия) и сумма первых четырех гармоник ($\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}$ — сплошная линия).

Продолжая операцию сложения простых гармоник и дальше, мы будем получать результирующую гармонику (частичную сумму ряда), все больше и больше приближающуюся к двум параллельным отрезкам, изображающим данную функцию.

Вследствие периодичности ряда Фурье данной функции результирующая гармоника будет точно повторяться через каждый промежуток значений x, равный 2π.

Упражнения

Разложить в ряд Фурье следующие функции:

1. $f(x) = x^2$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$,

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

§ 2

3. (5; 3), (— 5; 3), (— 5; — 3), (5; — 3); или (3; 5), (— 3; 5), (—3; —5), (3; — 5). **4.** $(4\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ -4\sqrt{2})$.

§ 3

1. 10. **2.** 1) 10, 2) 5, 3) 5. **3.** 15. **4.** 5; 13 и $8\sqrt{2}$. **7.** $A_1(-4;\ 0)$, $A_2(12;\ 0)$. **8.** $(\sqrt{3};\ \pm 3)$. **9.** $(-2;\ 4)$. **10.** $(0;\ 14)$. **11.** $(1;\ 10)$ и $(-11;\ 10)$. **12.** $(1;\ 1)$ и $(5;\ 5)$.

§ 4

1. 1) $(5;\ 7)$, 2) $(4;\ -6)$. **2.** 3 и $\sqrt{17}$; $\left(\frac{1}{2};\ -1\right)$. **3.** 5. **4.** $(-9;\ 10)$. **5.** $(-3;\ 4)$ и $(-4;\ -1)$. **6.** $(4;\ 6)$. **7.** $\left(1\frac{1}{3};\ -4\right)$ и $\left(5\frac{2}{3};\ -1\right)$. **8.** $(-8;\ -1)$. **9.** $(8;\ 2)$. **10.** $(-2;\ 1)$. **11.** $(1;\ 1)$. **12.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **13.** $(-2;\ 1)$.

§ 7

1. A и C лежат, B не лежит. **2.** $y=0$, $x=7$. **3.** $y=x$ и $y=-x$. **4.** $y=4x$. **5.** $x^2+y^2=4$. **6.** $x^2+y^2-4x+6y-3=0$. **7.** $2x-8y-5=0$. **8.** $x^2+4y+4=0$. **9.** $x^2+y^2=4$.

§ 9

2. $y=-5$. **3.** $x=-2$. **4.** $y=2$. **5.** $x=-3$. **6.** $x=6$, $x=-6$, $y=6$, $y=-6$. **7.** $x=0$, $x=8$, $y=0$, $y=6$ или $x=0$, $x=6$, $y=0$, $y=8$.

§ 10

1. 1) $y=x$, 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 3) $y=-x$, 4) $y=0$, 5) $y=0$. **2.** 1) совпадает с осью Ox, 2) делит первый координатный угол пополам, 3) делит второй координатный угол пополам. **3.** 1) 60°, 2) 33°42′, 3) 116°34′. **5.** A и C лежат, B не лежит. **6.** На прямой $y=2x$. **7.** $x=4$, $y=-3$. **8.** $k=-5$. **9.** $y=-2x$. **10.** $x=10$, $y=0$, $y=x$ или $x=10$, $y=0$, $y=-x$. **11.** $x=0$, $y=0$, $x=-6$, $y=3$; уравнение диагонали $y=-\frac{1}{2}x$. **12.** $y=-0{,}4x$.

§ 11

2. На прямой $y = -8x - 10$. **3.** $y = 3$. **4.** $x = -2$. **5.** 1) $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ и $(0;\ -2)$, 2) $(-2;\ 0)$ и $(0;\ -6)$. **6.** $y = -x - 5$. **7.** 1) $y = x + 2$, 2) $y = -x - 3$, 3) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$. **8.** 1) $60°$, 2) $135°$, 3) $26°34'$. **9.** 1) $y = 5$, 2) $x = 2$, 3) $y = 5$. **10.** $y = -2x - 1$. **11.** 1) 2, 2) 0. **12.** $y = x$ и $y = -x + 12$. **13.** $y = x + 2\sqrt{2}$, $y = -x + 2\sqrt{2}$, $y = x - 2\sqrt{2}$, $y = -x - 2\sqrt{2}$. **14.** Уравнения сторон: $y = x$, $y = -x + 8$, $y = x + 8$, $y = -x$. Уравнения диагоналей: $y = 4$, $x = 0$.

§ 12

2. $4x + 5y = 0$. **3.** 1) $y = 2x + \frac{10}{3}$, 2) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{15}{8}$. **4.** 1) $3x + 4y = 0$, 2) $2x - 3y - 12 = 0$. **5.** 1) $\frac{2}{3}$, 2) $-\frac{1}{2}$. **6.** 1) $-\frac{2}{3}$, 2) 0. **7.** $b = 2{,}5$; $\alpha = 140°12'$.

§ 13

2. 1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, 2) $-\frac{x}{2} - y = 1$, 3) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. **3.** 10. **4.** 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, 2) $-\frac{x}{6} + y = 1$, 3) $\frac{x}{0{,}5} - y = 1$. **5.** 9. **6.** 50. **7.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$, $-\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$, $-\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$, $\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$. **8.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, $-\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$.

§ 14

1. $(6;\ -2)$. **2.** Проходит. **3.** $y + 9 = k(x + 6)$. **4.** 1) $\sqrt{3}x - y - 7 - 2\sqrt{3} = 0$, 2) $\sqrt{3}x + 3y + 21 - 2\sqrt{3} = 0$. **5.** $x - y + 9 = 0$; $\sqrt{3}x - 3y + 24 + \sqrt{3} = 0$; $x + y - 7 = 0$; $y = 8$. **6.** 1) $3x - y - 32 = 0$, 2) $2x + y - 18 = 0$. **7.** $x + y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$. **8.** $\sqrt{3}x + y - 6\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 6\sqrt{3} = 0$. **9.** 1) $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$; 2) $y = 0$, $y = -2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$.

§ 15

1. 1) $x - 3y + 5 = 0$, 2) $6x + 7y - 9 = 0$, 3) $x + 4y = 0$, 4) $x + 2 = 0$. **2.** $3x - y - 10 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$, $x + 5y + 2 = 0$. **3.** $\operatorname{arctg} 2$. **4.** 5 и 5. **5.** $3x + 7y + 2 = 0$. **6.** $x - y - 2 = 0$. **7.** $2x + 3y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$. **8.** $x - y - 5 = 0$. **9.** $(2;\ 0)$.

§ 16

1. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, 3) $\operatorname{arctg} 12$, 4) $\operatorname{arctg} 3$. **2.** $\operatorname{arctg} 5$ или $\operatorname{arctg}(-5)$. **3.** 1) 0°, 2) 90°. **4.** $\operatorname{arctg} 1{,}75$.

§ 17

1. 1) Да, 2) да, 3) нет. **2.** 1,5. **3.** $2x - y - 1 = 0$. **4.** $2x - y + 3 = 0$. **5.** $2x + y - 6 = 0$. **6.** $x - 6y + 8 = 0$. **7.** $x = 2$. **8.** $4x - 5y + 15 = 0$. **9.** $4x + 3y - 20 = 0$.

§ 18

1. 1) Да, 2) нет. **2.** $2x + 3y - 25 = 0$. **3.** $2x + y + 7 = 0$. **4.** $2x + 3y + 7 = 0$. **5.** $3x - 4y + 20 = 0$. **6.** $2x + y - 9 = 0$. **7.** $3x - y + 1 = 0$. **8.** $2x - y - 3 = 0$, $x + 2y - 14 = 0$.

§ 19

1. 1) (2,5; 0), 2) $\left(0; -\frac{10}{3}\right)$. **2.** 1) (2; 1), 2) нет пересечения. **3.** Точка пересечения $\left(0; \frac{5}{3}\right)$. **4.** $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$, (1; 1), $\left(\frac{1}{7}; \frac{11}{7}\right)$. **5.** (3; 0). **6.** $2x - y + 1 = 0$. **7.** $x + y = 0$. **8.** $3x - 2y + 18 = 0$. **9.** $5x + 2y - 9 = 0$. **10.** $2x - 3y + 1 = 0$. **11.** (1; −3), (7; −1), (9; 5), (3; 3).

Смешанные задачи

1. $\left(2\frac{2}{3}; 0\right)$ и (0,2). **2.** Общая точка (−1; 3). **3.** $\left(3\frac{2}{3}; 4\right)$. **4.** Уравнение прямой $y = -2x$. **5.** $x + y + 2 = 0$. **6.** Лежат на прямой $x - y + 2 = 0$. **7.** 5. **8.** 7. **9.** $x - y + 7 = 0$. **10.** (6; 6) и (−8; −8). **11.** 1,5. **12.** Длина диагонали 5; уравнения диагоналей: $8x + 6y - 39 = 0$, $3x - 4y + 26 = 0$. **13.** (−3; 6) и (−1; 4). **14.** $\sim 5{,}6$. **15.** 21 и 23. **16.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$, $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg}(-0{,}4)$. **17.** 45°. **18.** $3\sqrt{2}$. **19.** $3x - 5y + 30 = 0$. **20.** $x + y + 7 = 0$ или $x - y + 1 = 0$. У к а з а н и е. Через данную точку можно провести две прямые, отсекающие на осях координат равные отрезки. **21.** 1) $y = 0$, $x - y + 2 = 0$, $3x + 2y - 24 = 0$; 2) $y = 0$, $x - y + 2 = 0$, $3x - 8y + 36 = 0$. **22.** $3x - y - 4 = 0$; $\sqrt{10}$. **23.** $3x + 3y + 11 = 0$. **24.** (5; 8). **25.** (1; −1). **26.** (−3,8; −1,6). **27.** $2x + y - 14 = 0$, (6; 2), $3\sqrt{5}$. **28.** $5x - y - 15 = 0$. **29.** $\operatorname{arctg} 2{,}5$. **30.** (0; −2) и (0; −7). **31.** $x - y = 0$, $x + y + 2 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. **32.** (9; 1). **33.** $\sqrt{2}$. **34.** 24. У к а з а н и е. Площадь параллелограмма можно определить двумя способами: по основанию и высоте (т. е. $s = ah$) и по двум сторонам и углу между ними (т. е. $s = ab\sin\alpha$). **35.** 20. **36.** 1) $y = x$, $y = 8$, $x = 14$; 2) $y = x$, $y = 8$, $x = 2$. **37.** $2x + y - 5 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$. **38.** 1) $y = 12$, $y = x + 12$, $y = -x + 28$, 2) $y = 28$, $y = -x + 28$, $y = x + 12$. **39.** $y = 0$, $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$. **40.** (−8; −3), (1; 6), (2,8; 2,4). **41.** $x - y - 10 = 0$, $y = -5$. **42.** B (2,4; 6,4), D (3,6; 5,6). **43.** 6.

44. $4x-3y-80=0$, $y=-8$, $4x-3y=0$. **45.** $\left(3\frac{1}{3};\ 5\frac{2}{3}\right)$.
46. $x+y+5=0$. **47.** $x-y+3=0$, $x+y+3=0$. Указание. Угол падения луча равен углу его отражения. **48.** $y=-\frac{2}{3}x+4$.
49. $11x+3y=31$, $11x-3y=31$. Указание. Провести из точки A перпендикуляр к оси Ox до пересечения его с продолженным в обратную сторону отраженным лучом и рассмотреть полученные прямоугольные треугольники. **50.** $7x-3y-9=0$, $3x-7y-1=0$.

§ 21

1. 1) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y+3)^2=5$; 3) $x^2+(y-5)^2=36$. **3.** A и B лежат, C не лежит. **4.** $x_1=0$, $x_2=-4$. **5.** 1) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; 2) $(x+3)^2+(y-2)^2=5$. **6.** $(x+2)^2+(y-4)^2=10$. **7.** $(x-2)^2+y^2=16$. **8.** $x^2+(y+4)^2=16$. **9.** (3; 4), $r=5$. **11.** $5x+2y-7=0$. **12.** 6. **13.** $x+3=0$. **14.** $x-y-2=0$. **15.** $x+2y+5=0$. **16.** (5; 0) и (1; 0). **17.** $2x-y+2=0$. **18.** $3x+4y-39=0$. **19.** (7; 6) и (0; -1). **20.** Касательная в точке (3; 3). **21.** Вне окружности. **22.** $x+y-4=0$.

§ 25

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **2.** $2a=26$, $2b=24$, $2c=10$. **3.** $2a=4\sqrt{6}$, $2b=14$, $F(0;\pm 5)$. **4.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$. **5.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

6. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **7.** $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **8.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.
9. $36x^2+20y^2=1125$. **10.** $4x^2+9y^2=144$ или $9x^2+4y^2=144$. **11.** A и B лежат, C не лежит. **12.** ± 3. **13.** $x^2+3y^2=15$. **14.** 1) $2x^2+5y^2=40$, 2) $3x^2+5y^2=120$. **15.** 4. **16.** 1) (3; 0) и (0; 2); 2) касательная в точке $\left(\frac{3}{2};\ \sqrt{3}\right)$, 3) нет пересечения. **17.** $\sqrt{5}$.
18. $8x^2+9y^2=72$. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 31

1. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$, 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, 3) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.
2. $2a=6$, $2b=10$, $2c=2\sqrt{34}$. **3.** $A(\pm 12;\ 0)$, $F(\pm 13;\ 0)$. **4.** $7x^2-9y^2=63$. **5.** $F(\pm 7;\ 0)$, $2a=10$, $2b=4\sqrt{6}$, $e=1{,}4$. **6.** 1) $25x^2-24y^2=600$, 2) $9x^2-16y^2=1296$. **7.** $16x^2-9y^2=1296$. **8.** A и B лежат, C не лежит. **9.** $2x^2-9y^2=18$. **10.** $5x^2-8y^2=40$.
11. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **12.** $y=\pm\frac{3}{4}x$. **13.** $9x^2-16y^2=288$.
14. $153x^2-425y^2=450$. **15.** $9x^2-16y^2=576$. **16.** (6; ± 3).

17. Точка касания (6; 4). **18.** $\operatorname{tg}\varphi = 4\sqrt{5}$. **19.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **20.** $3x^2 - y^2 = 12$.

§ 33

1. 1) $y^2 = 16x$, 2) $y^2 = -8x$, 3) $x^2 = 12y$, 4) $x^2 = -20y$. **2.** 1) $\left(2\frac{1}{2};\ 0\right)$, 2) $(-3;\ 0)$, 3) $(0;\ 2)$, 4) $\left(0;\ -2\frac{1}{2}\right)$. **3.** $\left(\frac{5}{8};\ 0\right)$. **4.** 1) $x = -1$, $F(1; 0)$; 2) $y = 2$, $F(0; -2)$. **5.** 1) $y^2 = 8x$, 2) $y^2 = -12x$, 3) $x^2 = -10y$, 4) $x^2 = 16y$. **6.** $y^2 = 10x$, $F\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$. **7.** 1) Лежит, 2) нет. **8.** 3 *м*. **9.** 3 *м*. **10.** $y^2 = x$. **11.** $x^2 = -8y$. **12.** 10. **13.** (0; 0) и (5; 5). **14.** $12x - 5y - 24 = 0$. **15.** 1) (1; 3) и $\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right)$, 2) (1; 3) — точка касания, 3) нет пересечения. **16.** $4\sqrt{2}$. **17.** $x + y + 1 = 0$; 8.

§ 34

1. 1) (2,5; 6,25), 2) (0; 9), 3) (2; —9), 4) (1; 0), 5) (—1; 0,5).

§ 35

1. 16. **2.** 9 и 21. **3.** $7x^2 + 16y^2 = 112$ или $16x^2 + 7y^2 = 112$. **4.** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $x + 4 = 0$ и $y + 2 = 0$. **7.** $\operatorname{arctg}(-0,4)$. **8.** $25x^2 + 49y^2 = 1225$. **9.** $3x^2 + 4y^2 = 48$. **10.** $x^2 + 2y^2 = 32$. **11.** $4\sqrt{2}$. **12.** $5x^2 - 4y^2 = 20$. **13.** 4,5. **14.** $\frac{2b^2}{a}$. **15.** $2p$. **16.** 7 и 23. **17.** $8\sqrt{3}$. **18.** $2\frac{1}{12}$. **19.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$. **20.** $9x^2 - 25y^2 = 225$. **21.** $20x^2 - 5y^2 = 36$. **22.** $3x^2 + 28y^2 = 75$. **23.** 10 и 15. **24.** 4,8. **25.** $3x - 4y - 2 = 0$. **26.** $y = -2x + 7$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **27.** 10 *м*. **28.** $x^2 = 12y$ и $x^2 = -12y$. **29.** $9x^2 + 25y^2 = 225$. **30.** $x^2 = -\frac{16}{3}y$. **31.** 13 *мм*. **32.** (18; 12) и (18; —12). **33.** 4. **34.** $(3; \pm 6)$. **35.** 10. **36.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **37.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **38.** $e \approx 0,08$ **39.** $x^2 - 4y^2 = 36$. **40.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **41.** $9x^2 - 7y^2 = 63$. **42.** $x - 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$. **43.** $\sqrt{5}$. **44.** 4.

§ 44

1. 6. **2.** 1. **3.** 0. **4.** 1. **5.** 0. **6.** 0. **7.** ∞. **8.** ∞. **9.** ∞. **10.** $\frac{1}{3}$. **11.** 0. **12.** ∞. **13.** 2. **14.** $-4a$. **15.** 5. **16.** —6. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** 27. **19.** ∞. **20.** $\frac{\sqrt{a}}{2a}$. **21.** $\frac{\sqrt{a}}{a}$. **22.** 4. **23.** $\frac{1}{4}$. **24.** 4. **25.** 0. **26.** 1. **27.** 2. **28.** —0,5. **29.** 0. **30.** ∞.

§ 46

1. 1. **2.** 0. **3.** 2. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **6.** $\frac{a}{b}$. **7.** 1. **8.** 4. **9.** $\frac{1}{8}$. **10.** ∞. **11.** 5. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 2. **17.** 2. **18.** 1. **19.** 1,5. **20.** 2. **21.** 0,5.

§ 48

1. 1,098. **2.** 2,485. **3.** 1,504. **4.** 2,352. **5.** $-1{,}610$. **6.** $-1{,}833$. **7.** $-0{,}174$. **8.** $-2{,}303$.

§ 50

1. 1) 3; 2) -1; 3) -3. **2.** 1) 13; 2) 76; 3) $12a^2+1$; 4) $3a^2-6a+4$. **5.** $f(2)=0$, $f(-3)=0$. **6.** 1) Все значения x, кроме $x=-1$; 2) все значения x, кроме $x=\pm 1$; 3) $x\geqslant 1$; 4) $x\leqslant 1$; 5) $x>0$; 6) $-\infty<x+\infty$; 7) $-1\leqslant x\leqslant +1$.

§ 52

1. 1) 0,6; 2) 0,4; 3) -1. **2.** 1) 1,38; 2) 0; 3) $2a^2$. **3.** 1) 2,25; 2) $-3{,}24$. **4.** 1) -6; 2) $2h^2+4ah-h$. **5.** $-3\frac{3}{7}$. **6.** $\sim -0{,}13$. **7.** 1) $3\Delta x$; 2) $4x\,\Delta x+2(\Delta x)^2$; 3) $6x\,\Delta x-2\Delta x+3(\Delta x)^2$; 4) $-2x\,\Delta x-3\Delta x-(\Delta x)^2$; 5) $3x^2\,\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; 6) $6x^2\,\Delta x+6x(\Delta x)^2-2(\Delta x)^2-4x\,\Delta x+2(\Delta x)^3$; 7) $\frac{x^2\,\Delta x+x(\Delta x)^2+\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

§ 54

7. $x=1$. **8.** $x=2$. **9.** $x=-1$. **10.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

§ 58

1. 3. **2.** 1) 12; 2) 32. **3.** 1) 5; 2) 4,1; 3) 4,01; 4) 4,001. **4.** 16. **5.** 1) 21; 2) 12 и 30.

§ 59

1. 2. **2.** 0,0075. **3.** 1) 2; 2) 6. **4.** 1,6.

§ 60

1. 4. **2.** $10x$. **3.** $8x-2$. **4.** $-4x+1$. **5.** $6x-2$. **6.** $-6t^2$. **7.** $3u^2-1$. **8.** $\frac{4}{p^2}$. **9.** 1) 1; 2) 0; 3) -5; 4) -7.

§ 63

1. 1) 6; 2) 0. **2.** 45°. **3.** 135°. **4.** $4x-y-6=0$. **5.** $5x+y+3=0$, $x-5y+11=0$.

§ 73

1. 0. **2.** a. **3.** $5x^4$. **4.** px^{p-1}. **5.** $15x^2$. **6.** $-12t^3$. **7.** $6ax^7$. **8.** $2x^n$. **9.** $6x^2-3$. **10.** $3t^3-t+2$. **11.** -2. **12.** $2x^{2n}-x^{2n-1}$. **13.** $2x+1$. **14.** $9t^2-4t$. **15.** 90. **16.** $3t^2+6t+2$. **17.** $32u^3+12u^2-4u-1$. **18.** $\frac{\sqrt{x}}{x}$. **19.** $-\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$. **20.** $1{,}5\sqrt{r}$. **21.** $\frac{7}{3}u\sqrt[3]{u}$.

22. $-\frac{4}{3p^2}$. **23.** 0,25. **24.** $-\frac{2\sqrt[3]{x}}{3x^2}$. **25.** $\frac{1}{3}$. **26.** $-\frac{5\sqrt[3]{x}}{3x^2}$.

27. $\frac{\sqrt[6]{x^5}}{6x^2}$. **28.** $\frac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}$. **29.** $\frac{5\sqrt[6]{t^5}}{t}$. **30.** $\frac{7\sqrt[12]{\varphi^7}}{2\varphi}$. **31.** $2x\sqrt[3]{x}$.

32. $\frac{3\sqrt{t}+2}{2}$. **33.** $\frac{t-2}{t^3}$. **34.** 2. **35.** $\frac{6x^2-6x+10}{(2x-1)^2}$.

36. $\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$. **37.** $-\frac{2}{(u+1)^2}$. **38.** $-\frac{2t}{(t^2+1)^2}$.

39. $\frac{2x^2+2x+1}{x^2(1+x)^2}$. **40.** $\frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$. **41.** $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

42. $\frac{1}{6}$. **43.** $y=4x-21$. **44.** $x+2y-4=0$, $2x-y-3=0$.

45. (1; 2). **46.** (1; 2). **47.** 1. **48.** 2π. **49.** $y=x$, $y=-x$.

50. $b=-3$, $c=4$.

§ 74

1. $u=x^3-2x+5$, $y=u^4$. **2.** $u=x^2+2x$, $y=\sqrt{u}$.

3. $u=4x+5$, $y=\sqrt[3]{u}$. **4.** $u=x^3-2x^2+1$, $y=2\sqrt[4]{u}$.

5. $u=\cos t$, $s=u^4$. **6.** $u=\sin\omega$, $v=4u^3$. **7.** $u=\sin x$, $y=\sqrt{u}$.

8. $u=3\cos x$, $y=\sqrt{u}$. **9.** $u=\operatorname{ctg} x$, $y=4\sqrt[3]{u}$. **10.** $u=\omega t$, $s=\sin u$. **11.** $u=3t$, $s=2\operatorname{tg} u$. **12.** $z=\frac{x}{2}$, $u=3\cos z$.

§ 75

1. $4(x+2)^3$. **2.** $9(3t-2)^2$. **3.** $10x(x^2-1)^4$. **4.** $6(x^2-2x)^2(x-1)$.

5. $4(t^2-t+1)^3(2t-1)$. **6.** $20(3u^2-u+4)^3(6u-1)$. **7.** $\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$.

8. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. **9.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **10.** $\frac{2(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. **11.** $\frac{1-4x}{2\sqrt{(2-x)(3+2x)}}$.

12. $\frac{p^2}{\sqrt[3]{(p^3-1)^2}}$. **13.** $\frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+1)^2}}$. **14.** $3(3x-1)(5x+1)(x+1)^2$.

15. $\frac{2t(5t-3)}{\sqrt{4t-3}}$. **16.** $\frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **17.** $\frac{5x^2+2x-3}{2\sqrt{x-1}}$. **18.** $\frac{2(4\varphi^4-1)}{\varphi^3}$.

19. $\frac{x-2}{\sqrt{(x-1)^3}}$. **20.** $\frac{x+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **21.** $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **22.** $-\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

23. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

§ 76

1. $1-\cos x$. **2.** $\cos\varphi-\varphi\sin\varphi$. **3.** $\frac{\sin u}{\cos^2 u}$. **4.** $\cos 2t$. **5.** $4\operatorname{cosec}^2 2x$.
6. $\operatorname{tg}^2\theta$. **7.** $-\operatorname{ctg}^2\varphi$. **8.** $a\sin t$. **9.** $\cos\theta+\cos 2\theta$. **10.** $\frac{2\sin t}{(1+\cos t)^2}$.
11. $-\frac{1}{\sin^2\theta}$. **12.** $\frac{1}{2}\sin 2x$. **13.** $\cos^3\omega\sin\omega$. **14.** 10. **15.** $2\cos 2\varphi$.
16. $-\sin 2\omega$. **17.** $\frac{2\pi}{q}\cos\left(\frac{2\pi}{q}x\right)$. **18.** $\pi\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)$. **19.** $2\sin(1-2\varphi)$.
20. $\omega\sec^2\omega^2$. **21.** $2(2\varphi-1)\cos(\varphi^2-\varphi)$. **22.** $\frac{\cos\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}$.
23. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} t\sqrt{\cos t}$. **24.** $\frac{4}{\sqrt{x}\cos^2 2\sqrt{x}}$. **25.** $\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x\sqrt[3]{\sin x}$.
26. $\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}$. **27.** $-\frac{a}{t^2}\cos\frac{a}{t}$. **28.** $\operatorname{tg}\omega\sec^2\omega$. **29.** $\frac{\sin x\sqrt{\cos x}}{2\cos^2 x}$.
30. $\sin^2 x(3\cos^2 x-\sin^2 x)$. **31.** $4\cos t\cos 3t$. **32.** $\sin 4\theta$. **33.** $\cos 2x$.
34. $\frac{1}{\cos x-1}$. **35.** $2\sin 4\varphi$. **36.** $-\frac{1}{4}\sin x$. **37.** $\operatorname{ctg} 2\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}$.
38. $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$. **39.** $\frac{2}{3}\operatorname{ctg} 2x\sqrt[3]{\sin 2x}$. **40.** $\frac{4}{3}\operatorname{ctg} 2\omega\sqrt[3]{\sin^2 2\omega}$.
41. $-\frac{\cos\omega}{2\cos^4\frac{\omega}{2}}$. **42.** $\sec^6 x$.

§ 77

1. $1+\ln x$. **2.** $\ln t$. **3.** $\frac{1-\ln u}{u^2}$. **4.** $\frac{0{,}4343}{x}$. **5.** 0,4343.
6. $\frac{2t}{t^2-1}$. **7.** $-\frac{1}{v}$. **8.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **9.** $\operatorname{tg} t$. **10.** $-\operatorname{tg} t$. **11.** 2. **12.** $\frac{2\ln x}{x}$.
13. $-\frac{10}{4+t}$. **14.** $\frac{2a}{a^2-x^2}$. **15.** $3\operatorname{ctg} x\ln^2\sin x$. **16.** $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{u}{3}$.
17. $\operatorname{cosec} t$. **18.** $\frac{\ln\sqrt{x}}{x}$. **19.** $\frac{\operatorname{cosec} 2x}{\sqrt{\ln\operatorname{tg} x}}$. **20.** $2\operatorname{tg}(1-t)$.
21. $2\operatorname{tg} x$. **22.** $\frac{x}{a^2+x^2}$. **23.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **24.** $\frac{1}{1-x^2}$.
25. $-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$.

§ 79

1. xe^x. **2.** $\frac{e^t(1+t\ln t)}{t}$. **3.** e^{-x}. **4.** $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. **5.** $2e^{2h}$.
6. $-a^{-x}\ln a$. **7.** $e^{2x}(1+2x)$. **8.** $-2\varphi e^{-\varphi^2}$. **9.** $-\frac{1}{p^2}a^{\frac{1}{p}}\ln a$.

10. $n^x x^{n-1}(n + x\ln n)$. **11.** 1. **12.** $\frac{1}{t}e^{\ln t}$. **13.** $e^t \cos e^t$. **14.** $2e^{2\sin t}\cos t$.

15. $e^{x\ln x}(1+\ln x)$. **16.** $\frac{1}{1+e^{\omega}}$. **17.** $e^t \sin 2e^t$. **18.** $-\frac{1}{2}\sqrt{e^{\omega}}\sin\sqrt{e^{\omega}}$.

19. $-\frac{1}{2}e^x \operatorname{tg} e^x \sqrt{\cos e^x}$. **20.** $-\sin t$. **21.** $-\frac{e^{\sqrt{x}}\sin e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

22. $-\frac{2e^{-2\varphi}}{\cos^2 e^{-2\varphi}}$. **23.** $-\frac{1}{x}e^{\ln\frac{1}{x}}$. **24.** $e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$.

25. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **26.** $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. **27.** $2e^{2\varphi}(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)$ или $2\sqrt{2}e^{2\varphi}\sin(45^\circ - 2\varphi)$. **28.** $2ae^{ax}\sin ax$. **29.** $\frac{1}{1+e^{2x}}$.

§ 80

1. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **2.** $-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **3.** $\frac{3}{1+9x^2}$. **4.** $\frac{2}{4+t^2}$.

5. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **6.** $\frac{\sqrt{v}}{2v(1+v)}$. **7.** $\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}$. **8.** $\frac{e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}$.

9. $-\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$. **10.** $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.** $\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$. **12.** $\frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{1-e^x}}$.

13. $-\frac{6\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. **14.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **15.** $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $\frac{e^{\arccos t}\operatorname{tg} e^{\arccos t}}{\sqrt{1-t^2}}$. **17.** $\frac{\pi}{6}$. **18.** $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$. **19.** $\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$.

20. $\frac{1}{1+x^2}$. **21.** $\frac{2}{1+\varphi^2}$.

§ 81

1. $3x$. **2.** $\frac{2}{y}$. **3.** $\frac{3}{2y}$. **4.** $\frac{1}{1-2y}$. **5.** $-\frac{x}{y}$. **6.** $\frac{2x}{2a-3y}$.

7. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **8.** $-\frac{y}{x}$. **9.** $\frac{x-y}{x}$. **10.** $-\frac{2xy+y^2}{2xy+x^2}$. **11.** $\frac{a}{2(y-1)}$.

12. $-\sec y$. **13.** $\frac{y}{\cos y - x}$. **14.** $\frac{2}{x}$. **15.** $\frac{xy-y}{x-xy}$. **16.** $2x\sqrt{1-y^2}$.

§ 82

1. 0. **2.** $6x$. **3.** 6. **4.** $-\frac{\sqrt{u}}{2u^2}$. **5.** $-\frac{2}{t^3}$. **6.** $12x^2-4$. **7.** $-2\cos 2\alpha$,

8. $e^{\sin t}(\cos^2 t - \sin t)$. **9.** $\frac{2}{(2+t)^2}$.

§ 83

1. 8. **2.** —9. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** —6. **5.** $v=20$, $j=16$. **6.** $v=0$, $j=-2$. **7.** $v=\sqrt{2}$, $j=-\sqrt{2}$. **8.** $v=-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$, $j=-\frac{1}{6}\pi^2$. **9.** $v=5$, $j=0$, **10.** $t=6$, $v=18$.

§ 88

1. 1) Возрастает, 2) убывает. **2.** 1) Возрастает, 2) возрастает, 3) убывает. **3.** 1) Возрастает при всех x, 2) убывает при всех x. **4.** 1) Убывает при $x<\frac{3}{2}$, возрастает при $x>\frac{3}{2}$; 2) убывает при $x>2$, возрастает при $x<2$. **5.** Мин. $(1; -1)$. **6.** Макс. $(2; 4)$. **7.** Мин. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{23}{8}\right)$. **8.** Макс. $(-0{,}2; 2{,}2)$. **9.** Макс. $(3; 2)$. **10.** Мин. $(0; 0)$. **11.** Мин. $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$. **12.** Мин. $(0; -5)$, макс. $\left(-3; 8\frac{1}{2}\right)$. **13.** Макс. $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$, мин. $\left(1; -\frac{2}{3}\right)$. **14.** Макс. $\left(2; -\frac{7}{3}\right)$, мин. $\left(3; -\frac{5}{2}\right)$. **15.** Макс. $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, мин. $(3; -1)$; **16.** Макс. $\left(-\frac{5}{3}; \frac{13}{27}\right)$, мин. $(1; -9)$. **17.** Макс. $\left(-\frac{2}{3}; 6\frac{17}{27}\right)$, мин. $(1; 2)$. **18.** Макс. $(-1; 9)$, мин. $(3; -23)$. **19.** Мин. $(-1; -0{,}5)$, макс. $(1; 0{,}5)$. **20.** Макс. $(-1; -12)$, мин. $(5; 24)$.

§ 91

1. 1) Выпукла, 2) вогнута. **2.** 1) Выпукла, 2) вогнута. **3.** 1) Вогнута во всех точках, 2) выпукла во всех точках. **4.** Точка перегиба $(0;0)$. **5.** Точка перегиба $(-1; 1)$. **6.** Точка перегиба $\left(\frac{1}{2}; 6\frac{1}{2}\right)$. **7.** Точка перегиба $(2; -4)$. **8.** Точки перегиба нет. **9.** Точки перегиба $(2; 62)$ и $(4; 206)$. **10.** Точки перегиба $(-3; 294)$ и $(2; 114)$. **11.** Точки перегиба нет. **12.** Точки перегиба $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{5}{3}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{5}{3}\right)$. **13.** Точки перегиба $(-0{,}7; 2{,}2)$, $(0; 1)$ и $(0{,}7; -0{,}2)$. **14.** Выпуклость при $x<\frac{4}{3}$, вогнутость при $x>\frac{4}{3}$. **15.** Вогнутость при $x<-\frac{1}{2}$, выпуклость при $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, вогнутость при $x>\frac{1}{2}$.

§ 92

1. Мин. $(0; 0)$. **2.** Мин. $(0; -12)$. **3.** Мин. $(3; -6)$. **4.** Макс. $(2; 3)$. **5.** Макс. $(2; 22)$, мин. $(6; -10)$. **6.** Макс. $\left(-\frac{2}{3}; 4\frac{13}{27}\right)$, мин. $(2; -5)$. **7.** Макс. $(-3; 14{,}5)$, мин. $\left(2; -6\frac{1}{3}\right)$. **8.** Мин. $\left(1; -\frac{5}{6}\right)$, макс. (6; 20). **9.** Мин. $\left(-1; -5\frac{2}{3}\right)$, макс. (3; 5). **10.** Мин. (1; 3), макс. (2; 4), мин. (3; 3). **11.** Нет ни максимума, ни минимума. **12.** Возрастает при $x < -2$, убывает при $-2 < x < 2$, возрастает при $x > 2$. **13.** Убывает при $x < -1$, возрастает при $-1 < x < \frac{5}{3}$, убывает при $x > \frac{5}{3}$. **14.** Мин. (1; e). **15.** Мин. (2,5; 2), макс. ($-2{,}5$; -2).

§ 93

1. 6 и 6. **2.** 5 и 5. **3.** 4 и 4. **4.** 0,5. **5.** Квадрат. **6.** 100×100 *м*². **7.** 5 *см*. **8.** 5×5 *см*². **9.** 10×10 *см*². **10.** $\sim 0{,}7$ *м*. **11.** $\sim 0{,}63$ *м*. **12.** $3 \times 6 \times 4$ *дм*³. **13.** 2 *дм*. **14.** $2 \times 2 \times 1$ *м*³. **15.** $2R = H = 3\sqrt[3]{4}$ *см*. **16.** $R = H = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\pi^2}$ *дм*. **17.** 4 *см*. **18.** 10 *см*. **19.** 7,5 *см*. **20.** $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ *см*. **21.** $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$. **22.** 5 *см*. **23.** $(2; \pm 2)$. **24.** $\sim 0{,}71$ *м*. **25.** 2,4 *м*.

§ 98

1. $\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$. **2.** $-\frac{2dt}{(1+t)^2}$. **3.** $\frac{1}{\omega^2}\sin\frac{2}{\omega}\,d\omega$. **4.** $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$. **5.** $-\frac{2}{t}\ln\frac{1}{t}\,dt$. **6.** $-\frac{dx}{2x}$. **7.** $\frac{dx}{1+2x+2x^2}$. **8.** 0,4. **9.** $\sim 0{,}008$. **10.** $\sim 0{,}1$ *см*². **11.** $\sim 10\pi$ *см*². **12.** $\sim 0{,}3$ *м*³. **13.** ~ 8 *см*³. **14.** $\sim 8\pi$ *см*³. **15.** $\sim 0{,}1$ *см*. **16.** $\sim 0{,}2$ *см*. **17.** $\sim 0{,}08\%$. **18.** $\sim 2\%$. **19.** $\sim 2\%$. **20.** $\sim 12{,}07$. **21.** $\sim 15{,}42$. **22.** $\sim 8{,}14$. **23.** $\sim -16{,}3$. **24.** $\sim 0{,}96$. **25.** $\sim -23{,}84$. **26.** $\sim 0{,}814$.

§ 101

1. $\sqrt{2}$. **2.** 0,5. **3.** $2\sqrt{2}$. **4.** $\frac{20}{3}\sqrt{10}$. **5.** $3\sqrt{6}$. **6.** $2\sqrt{2}$. **7.** $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$. **8.** ∞. **9.** (0; 0).

§ 104

1. $\frac{1}{2}x^2 + C$. **2.** $\frac{1}{5}x^5 + C$. **3.** $\frac{1}{n}x^n + C$. **4.** $5x + C$. **5.** $a\varphi + C$. **6.** $x^2 + C$. **7.** $\frac{1}{6}t^3 + C$. **8.** $2x - \frac{1}{2}x^2 + C$. **9.** $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$. **10.** $a\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + C$. **11.** $\frac{3}{2}x^2 - 6x + C$. **12.** $x^4 + 2x^2 - 3x + C$. **13.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + C$. **14.** $\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C$. **15.** $\frac{16}{3}x^3 - 8x^2 + 4x + C$. **16.** $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$. **17.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$. **18.** $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$. **19.** $-\frac{1}{\omega} + C$. **20.** $2\sqrt{u} + C$. **21.** $3\sqrt[3]{x} + C$.

22. $\sqrt[4]{x^3}+C$. **23.** $\frac{1}{3}x\sqrt{x}+C$. **24.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+C$. **25.** $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+$ $+C$. **26.** $\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}-8\sqrt{x}-\frac{2}{x}+C$. **27.** $-\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}-3x+C$. **28.** $\frac{2}{3}v\sqrt{v}-\frac{6}{7}v\sqrt[6]{v}+C$. **29.** $-4\cos x+C$. **30.** $2a\sin\varphi+C$. **31.** $2\operatorname{tg}\theta+C$. **32.** $-3a\operatorname{ctg}u+C$. **33.** $t+\sin t+C$. **34.** $2x+$ $+3\cos x+C$. **35.** $x^3-2\sin x+C$. **36.** $2\operatorname{tg}\varphi+3\operatorname{ctg}\varphi+C$. **37.** $3e^u+C$. **38.** $\frac{2a^\varphi}{\ln a}+C$. **39.** $\frac{1}{2}x^2-5e^x+C$. **40.** $2e^t-3\sin t+C$ **41.** $\frac{3}{2}\ln t+C$. **42.** $2\ln x-\frac{1}{2}x^2+C$. **43.** $6\operatorname{arctg}x+C$. **44.** $\frac{3}{4}\arcsin x+C$. **45.** $2v+\operatorname{tg}v+C$. **46.** $t+2\operatorname{ctg}t+C$. **47.** $e^x-\cos x+C$. **48.** $\operatorname{tg}x+C$. **49.** $\operatorname{tg}x-x+C$. **50.** $x-$ $-\operatorname{arctg}x+C$. Указание. Представить $x^2\,dx$ в виде $(x^2+1-1)\,dx$.

§ 105

1. $\frac{1}{2}x^2-3x+13$. **2.** $\sin x-\cos x+1$. **3.** $2\ln x-x+3$. **4.** $\frac{1}{2}e^x-\sin x$. **5.** $5\operatorname{arctg}x+x$.

§ 107

1. 1,5. **2.** 9. **3.** $\frac{15}{64}$. **4.** 2. **5.** 2. **6.** $2\frac{2}{3}$. **7.** 3,25. **8.** $\frac{20}{3}\pi$. **9.** $6\frac{2}{3}$. **10.** 4. **11.** 0,8. **12.** 1. **13.** 2. **14.** 2. **15.** 2. **16.** $1\frac{1}{3}$. **17.** 0,75. **18.** 2. **19.** $\sim 3{,}96$. **20.** $\sim -0{,}68$. **21.** $e^\pi-1$. **22.** $\sim 0{,}277$. **23.** $\sim -0{,}31$. **24.** $\frac{\pi}{3}$. **25.** $\frac{\pi}{4}$. **26.** $\frac{\pi}{24}$.

§ 109

1. $\frac{1}{25}(3+5x)^5+C$. **2.** $\frac{1}{b(m+1)}(a+bx)^{m+1}+C$. **3.** $-\frac{1}{3(3x+1)}+C$. **4.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+C$. **5.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x-3)^4}+C$. **6.** $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+C$. **7.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(3x+5)^3}+C$. **8.** $\sqrt[3]{3x-2}+C$. **9.** $\frac{1}{2}\ln(1+2x)+C$. **10.** $-\frac{1}{2}\ln(3-4x)+C$. **11.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **12.** $\frac{1}{4}\sin 4x+C$. **13.** $\cos(1-t)+C$. **14.** $2\sin\left(\frac{1}{2}\varphi+2\right)+C$. **15.** $3\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **16.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+C$. **17.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+C$.

18. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x-1)+C$. **19.** $\frac{1}{2}e^{2\varphi}+C$. **20.** $-\frac{1}{3}e^{-3\theta}+C$.

21. $-4e^{-\frac{1}{2}\omega+1}+C$. **22.** $-\frac{1}{2e^x}+C$. **23.** $x-e^{-x}+C$.

24. $-\frac{1}{\ln 3}3^{-t+2}+C$. **25.** $\ln(1+x^2)+C$. **26.** $\frac{1}{2(1-2t^2)}+C$.

27. $\frac{1}{3(2-v^3)^3}+C$. **28.** $-\sqrt{1-t^2}+C$. **29.** $\frac{1}{3}\sqrt{2x^3-1}+C$.

30. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. **31.** $\frac{1}{9}\sqrt{(1+2t^3)^3}+C$. **32.** $\ln(1+\sin x)+C$.

33. $\frac{1}{3}\ln(2-3\cos\varphi)+C$. **34.** $\frac{1}{\cos t}+C$. **35.** $-\frac{1}{3\sin^3\omega}+C$.

36. $\frac{1}{2-\sin x}+C$. **37.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\sin t)^2}+C$. **38.** $\frac{1}{2}\sin^2\alpha+C$, или $-\frac{1}{2}\cos^2\alpha+C$, или $-\frac{1}{4}\cos 2\alpha+C$. **39.** $\frac{1}{4}\sin^4\varphi+C$.

40. $-\frac{2}{3}\cos\theta\sqrt{\cos\theta}+C$. **41.** $\frac{1}{3}(1+\sin\alpha)^3+C$.

42. $-\frac{1}{9}\cos 3x^3+C$. **43.** $-e^{\cos x}+C$. **44.** $\ln\sin x+C$.

45. $\ln(1+e^x)+C$. **46.** $-\frac{2}{2+e^x}+C$. **47.** $\frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}+C$.

48. $2\sqrt{2+e^u}+C$. **49.** $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$. **50.** $\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)+C$.

51. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **52.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **53.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

54. $\frac{\sqrt{5}}{10}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C$. **55.** $\frac{1}{2}\arcsin 2t+C$. **56.** $\arcsin\frac{\alpha}{3}+C$.

57. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2u}{3}+C$. **58.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\theta}{\sqrt{3}}+C$. **59.** $\sqrt{1+\sin^2\varphi}+C$.

60. $\ln(x^3-3x)+C$. **61.** $\operatorname{arctg}(\sin x)+C$. **62.** $-\frac{1}{2}\ln\cos 2x+C$.

63. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$. **64.** $3\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C$.

65. $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$. **66.** $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$. **67.** $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. Указание. Заменить: $\sin^3 x=\sin x\cdot\sin^2 x=\sin x(1-\cos^2 x)$. **68.** $2(\sqrt{x}+1)-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. Указание. $1+\sqrt{x}=z$. Показать, что полученный ответ можно представить в виде: $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C_1$. **69.** $x-\ln(1+x)+C$. Указание.

Представить $x\,dx$ в виде: $(x+1-1)\,dx$. **70.** $2(\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})+C$. Указание. $\sqrt{x}=z$. **71.** $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+C$. Указание. Заменить: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$. **72.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

§ 110

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** 0,24. **4.** 3. **5.** 3. **6.** $\sim 0{,}16$. **7.** $\sim 0{,}46$. **8.** 0,5. **9.** 2. **10.** $\sim 0{,}27$. **11.** $\frac{1}{9}$. **12.** $\sim 1{,}1$. **13.** 0,4. **14.** $8\frac{2}{3}$. **15.** $10\frac{1}{8}$. **16.** 0,5. **17.** $\sim 0{,}29$. **18.** 0,5. **19.** $2\frac{1}{3}$. **20.** $\frac{5}{16}$. **21.** $\frac{1}{3}$. **22.** $\sim 0{,}39$. **23.** $\sim 0{,}78$. **24.** $\sim 0{,}45$. **25.** $\frac{1}{2}\pi R^2$.

§ 112

1. 10. **2.** 15. **3.** $37\frac{1}{3}$. **4.** 104. **5.** 18. **6.** 1. **7.** 19,5. **8.** 32. **9.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 36; 3) 4,5. **10.** 4. **11.** 3. **12.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 18; 3) 13,5; 4) 2. **13.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 3) 8; 4) $\sim 7{,}61$.

§ 113

1. 9π. **2.** $\frac{1}{6}\pi$. **3.** $\frac{52}{3}\pi$ *см*³. **4.** $\frac{50}{3}\pi$ *см*³. **5.** 138π *см*³. **6.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **7.** $22\,500\pi$ *см*³. **8.** $\frac{1}{2}\pi^2$. **9.** 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) $\frac{512}{15}\pi$. **10.** $\frac{64}{15}\pi$.

§ 114

1. 490 *м*. **2.** $S=\frac{1}{2}gt^2$. **3.** 1 *м*. **4.** 9 *см*. **5.** 900 *м*. **6.** $t=5$ сек., $S=150$ *м*. **7.** 9 *см*. **8.** 19,6 *м*. **9.** $\sim 20{,}4$ *м*.

§ 115

1. 0,24 *кгм*. **2.** 0,08 *кгм*. **3.** 0,25 *кгм*. **4.** 0,09 *кгм*. **5.** 0,54 *кгм*. **6.** 62,5 *кгм*. **7.** 4 *см*. **8.** 4 *кгм*.

§ 116

1. 72 *кгм*. **2.** $\sim 48{,}1$ *кгм*. **3.** $\sim 45\,216$ *кгм*. **4.** $\sim 213\,500$ *кгм*. **5.** 1600 *кгм*. **6.** $\sim 65{,}4$ *кгм*. **7.** $\sim 753{,}6$ *кгм*. **8.** $12\,750\,\pi$ *кгм*.

§ 117

1. 12 *кг*. **2.** 625 *кг*. **3.** 18 *т*. **4.** 528 *кг*. **5.** 1) 57,6 *г*, 2) 105,6 *г*. **6.** 1) 1,5 *г*, 2) 2,25 *г*. **7.** 22,2 *т*. **8.** 2185 *кг*. **9.** $\sim 17{,}7$ *см*.

§ 119

1. $s = 2t^2 - 3t$. **2.** $x = \frac{2}{3}t^3 - 5t + \frac{1}{3}$. **3.** $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. **4.** $x^2 - y^2 = 3$. **5.** $2x^3 + 3y^2 = 3$. **6.** $s^2 - 2t + t^2 = 0$. **7.** $y^2 = 2x$. **8.** $y^2 = 4 - 2x^2$. **9.** $s = 2t^2$. **10.** $y = \frac{x}{1 - 4x}$. **11.** $y^2 = \frac{6x^2}{6 + x^2}$. **12.** $y = \frac{3x + x^3}{6}$. **13.** $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$. **14.** $y^2 = \frac{x}{1 + 2x}$. **15.** $x = (1 + t)^2$. **16.** $y = x$. **17.** $2\sqrt{y} - 2\sqrt{x} + x = 2$. **18.** $y = 3e^{2x}$. **19.** $y = \frac{1 + x}{1 - x}$. **20.** $y^3 = e^x$. **21.** $3(y + 1) = \sqrt{2x - 1}$. **22.** $y = \sin x - 1$. **23.** $y = 4\sqrt{1 - x^2}$. **24.** $y = \cos x$. **25.** $y = x$ и $y = 2\pi - x$. **26.** $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$. **27.** $(x^2 - 1)(y^2 + 1) = C$. **28.** $y^2 = C(1 - x^2) - 1$. **29.** $y = C\sqrt{1 + x^2} - 1$. **30.** $xy = Ce^y$. **31.** $y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1$. **32.** $y = Cx^2e^{2x}$. **33.** $y = Ce^{\operatorname{arctg} x}$. **34.** $y = Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$. **35.** $x = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 10$. **36.** $y = 2x + 2$. **37.** $y = x^2 - x - 5$. **38.** $y^2 = 4x$. **39.** $y = e^x$. **40.** $y = xe^x$. **41.** 39.

§ 120

1. $y = 1 - x$. **2.** $y = \frac{5}{2}x^2 - 12x + 19$. **3.** $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x - 1$. **4.** $s = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{11}{6}t + 2$. **5.** $0 = \frac{1}{12}\omega^4 + \frac{3}{4}\omega$. **6.** $y = -2\ln x + Cx + C_1$. **7.** $0 = e^\varphi + C\varphi + C_1$. **8.** $y = -\cos x + Cx + C_1$. **9.** $s = \frac{1}{2}t^2 + \sin t + Ct + C_1$. **10.** $y = \frac{1}{2}e^{-x} + Cx + C_1$. **11.** $v = 84$ *км*, $s = 108$ *км*. **12.** $s = \frac{1}{3}t^3$. **13.** $s = t^4 + 1$.

§ 123

1. Сходится. **2.** Сходится. **3.** Сходится. **4.** Расходится. **5.** Расходится. **6.** Сходится. **7.** Сходится. **8.** Сомнительный случай. **9.** Расходится. **10.** Сходится. **11.** Сомнительный случай. **12.** Расходится.

§ 124

1. Сходится. **2.** Сходится. **3.** Расходится.

§ 125

1. Сходится абсолютно. **2.** Сходится неабсолютно.

§ 127

1. Сходится при $-1 < x < 1$. **2.** Сходится при $-1 \leqslant x < 1$. **3.** Сходится при $-\infty < x < +\infty$. **4.** Сходится при $-\infty < x < +\infty$. **5.** Сходится при $-1 < x < 1$.

§ 141

1. $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots\right) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

2. $$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$
$$+ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots \quad (-\pi < x < \pi).$$

6 р. 45 к.