

51
Я-311

Б.Я. ЯГУДАЕВ

АЖОЙИБ
СОНЛАР
ОЛАМИДА

236158

2 3 5 7 11 13 17

1 2 2 4 2 4

1 0 2 2 2

1 2 0 0

1 2 0

1 2

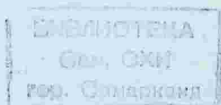
1

Б. Я. ЯГУДАЕВ

51
Я-311

АЖОЙИБ СОНЛАР ОЛАМИДА

236158



«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент — 1973

4

Бу китобнинг қўл ёзмаси 1970 йилда Ўзбекистон ССР Маориф министрилигининг математикадан оригинал методик қўлланмалар яратиш бўйича ўтказилган конкурсида учинчи даражали мукофот олишга сазовор бўлди.

Бу қўлланма ўрта мактаб ўқитувчилари учун мўлжалланган бўлиб, ундан факультатив ва синфдан ташқи машғулотлар ўтказишда фойдаланиш тавсия этилади.

Ушбу китоб мактаб программасида кўзда тутилмаган сонлар арифметикаси масалалари билан қизиқадиган ўқувчиларга ҳам катта ёрдам беради.

На узбекском языке

БОРИС ЯКОВЛЕВИЧ ЯГУДАЕВ
В МИРЕ ПРЕКРАСНЫХ ЧИСЕЛ

Издательство «Ўқитувчи» — Ташкент — 1973

Махсус редактор А. Ғ. Ҳикматов
Нашриёт редактори С. Бекбоева

Бадний редактор Е. Соин
Техредактор С. Ахтимова
Корректор А. Рашидхужаева

Теришга берилди 28/III—1973 й. Босишга рухсат этилди 1/XI-1973 й. 84×108^{1/2}.
Қоғоз № 3. Физ. л. 7,25. Шартли л. 12. 18. Уч. нашр. л. 11,87 Тиражи 20000. Р 11370.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий, 30. Шартнома № 204—72. Баҳоси 32 т.
Муқоваси 10 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари бўйича Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинатида теришиб. Морозов номли босмаконеда босилди. Самарқанд. Типография кўчаси, 4, 1973. Заказ № 5290.

Набрано на Ташполиграфкомбинате Государственного комитета Совета Министров УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Отпечатано в типографии имени Морозова. Самарканд. ул. Типографская, 4.

КИРИШ

Математика фани унда учрайдиган формулалар, интеграл ва синг-малар билан ташқи дунёдан худди катта девор билан ажралгандек қў-ринади. Бу катта девор орқасида нималар бўлаётгани математикадан хабари бўлмаганлар учун яшириб бўлиб, бу «ниқоб» очилганда ўзининг ички қонунилари билан яшайдиган «ўлик сонлар» дунёсига дуч келинади. Агар «ўлик сонлар» зўр қизиқиш билан ўрганишга киришилса, улар «ажойиб сонлар» га айланади.

Қадимги даврда яшаган буюк математикларнинг ўз вақтида эриш-ган муваффақиятлари ҳозирги вақтда кишиларни ҳайратда қолдирмоқда. Математика билан озми-кўпми шуғулланган ҳар қандай одам учун Ев-клид, Архимед, Пифагор, Герон каби исмлар танинлир.

Буюк немис математиги К. Гаусс (1777 — 1855) арифметикани «ма-тематиканинг маликаси» деб атаган.

Математикада ва ҳусусан арифметикада тузилиши жиҳатидан сод-да, ечилиши жиҳатидан эса анча мураккаб бўлган масалалар учраб ту-ради. Бундай масалалар икки гурппага бўлинади.

Биринчи гурппага ечиш методи аниқ бўлган, лекин жуда катта ҳисоблашларни талаб қиладиган масалалар киради. Бундай ҳисоблаш-лар жуда узоқ вақтни талаб қилади, айрим ҳолларда ҳозирги замон кучли электрон ҳисоблаш машиналари ҳам ёрдам бера олмайди.

Масалан, $2^{101} - 1$ сонининг туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш талаб қилинсин. Бунинг учун берилган сонни 2 дан бошлаб $2^{101} - 1$ гача бўлган туб сонларга бўлиб кўриш керак. Бу вазифани оддий усул-да ва ҳатто кучли электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида ҳам бажар-иб бўлмайди. Лекин математиканинг бошқа кучли усуллари ёрдамида $2^{101} - 1$ нинг мураккаб сон эканлиги аниқланди. Шуниси ажойибки, бу соннинг 1 ва ўзидан ташқари бирорта ҳам бўлувчиси ҳозиргача маълум эмас.

Иккинчи гурппа масалаларига ҳозиргача ҳал қилинмаган ва ҳал қилиш ёўли аниқ бўлмаган масалалар киради. Масалан, $n! + 1$ (n — натурал сон) шаклдаги сонлар ичида айримлари туб, айримлари эса му-раккабдир: $n = 2$ бўлганда $2! + 1 = 3$ — туб сон; $n = 3$ бўлганда $3! + 1 = 7$ — туб сон; $n = 4$ бўлганда $4! + 1 = 25$ — мураккаб сон.

Шунинг учун $n! + 1$ шаклдаги туб сонлар қандай тўпلامни (чекли ёки чексиз тўпламни) ташкил қилади, деган савол ўринлидир.

Бу саволга ҳозиргача аниқ жавоб берилмаган. $11! + 1$ нинг туб сон эканлиги жуда кийинчилик билан ҳал қилинган. $27! + 1$ нинг эса на туб ва на мураккаб эканлиги аниқ эмас.

Лекин $n! + 1$ шаклдаги сонлар нчида чексиз кўп мураккаб сонлар борлиги исботланган.

Шуни ҳам айтиш керакки, иккинчи гурпуадаги масалалар ҳамма вақт ечилмасдан қолавермайди; математиканинг тараққиётида бу муаммо ҳам ҳал қилинади.

1845 йилда француз математиги Ж. Бертран (1822 — 1900) қўғидаги масалани баён қилди: $n > 1$ бўлганда натурал n ва $2n$ сонлар орасида камидан битта туб сон мавжуд (бу масала ҳақида келгусида гапирамиз). Бу фикрнинг тўғрилигин буюк рус математиги П. Л. Чебишев (1824 — 1894) олиғ математика ёрдамида кўрсатди.

1930 йилга келиб поляк математиги Ю. Серпинский томонидан бу масаланинг элементар (комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясидан фойдаланмасдан) исботи берилди. Лекин бу исбот жуда мураккабдир.

I асрда яшаган математик Н. Гезанский қўйидаги сўзларни айтган эди: «Ажойиб сонлар чиройлидир. Маълумки, чиройли нарсалар оз учрайди»

Мана шу чиройли сонларни ҳамма сонлар дунёсидан ажратиб олишда ва уларни моҳирлик билан ўқувчиларга етказишда математика ўқитувчиси катта роль ўйнаши мумкин. Ю. Серпинский Рейн университетиде «Айрим арифметик проблемалар» ҳақида қилган докладиде қўйидагиларни айтди:

«Арифметикада ҳозиргача ҳал қилинмаган масалалар кўпдир. Бундай масалаларнинг сони ўсиб бормоқда. Қўйилган масалаларнинг ҳал қилиниши янги масалаларнинг пайдо бўлишига нисбатан жуда секин бормоқда. Бир проблеманинг ҳал қилиниши йўлида ўнталаб янги проблемалар пайдо бўлади. Айрим ечилмаган масалалар 100 йилдан кўп тарихга эгадир. Лекин дунёда киши ҳаёти чексиз лавом этар экан, ечилмаётган проблемаларнинг сони ўсиб боришига қарамасдан, ҳар бир проблеманинг ечилишига аминмиз».

Мазкур китобда маълум хусусиятга эга бўлган сонлар гурпуларни ҳақида сўз юритамиз. Лекин баён этиладиган масалаларнинг исботларини келтирмаймиз. Биз фақат ечилган ва айрим ечилмаган масалаларни баён этиш билан чегараланамиз.

Бу китобдан мактаб ўқувчилари, ўқитувчилари ва умуман, математика билан қизиқувчилар фойдаланиши мумкин.

Бу китоб қўл ёзмасини ўқиб, ўзларининг қимматбаҳо фикр ва мулоҳазаларини баён этган китобнинг махсус редактори доцент А. Т. Ҳикматовга, доцент Ш. Т. Мақсудовга, доцент Ж. И. Икромовга, республикада хизмат кўрсатган ўқитувчи Д. А. Мавашевга самимий миннатдорчилигини билдираман. Китоб ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазаларини йўллаган китобхонларга ташаккур изҳор қиламан.

Автор

ТУБ СОНЛАР

Натурал сонлардан тузилган

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... (1)

кетма-кетлик берилган бўлсин. Кетма-кетликнинг айрим ҳадларини кўпайтувчиларга ажратамиз. Ҳосил бўлган ёйилма соннинг ўзига тенг бўлмаган кўпайтувчилардан иборат бўлади. Масалан: $6=2 \cdot 3$, $24=2^3 \cdot 3$ ва ҳ.к. Бундай сонларнинг бўлувчилари 2 тадан ортиқ. Баъзи бир натурал сонлар эса юқорида келтирилган маънода кўпайтувчиларга ажралмайди. Масалан, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ва ҳ.к. Бундай сонлар фақат 2 та бўлувчига эга: бир ва шу соннинг ўзи. Биринчи хилдаги сонлар мураккаб сонлар деб, иккинчи хилдаги сонлар эса туб сонлар деб аталади. Натурал 1 сони шартли равишда на туб ва на мураккаб сон деб қабул қилинади.

Шундай қилиб,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... (2)

кетма-кетлик туб сонлар кетма-кетлигини ифодалайди. (2) кетма-кетликнинг чекли эмаслигини, яъни туб сонлар чексиз кўп эканлигини биринчи марта бизнинг эрамиздан уч аср олдин яшаган буюк математик Евклид исботлаган. Ҳозир бу теореманинг бир неча хил исботлари мавжуд бўлса-да, Евклиднинг исботи жуда содда ҳисобланади. Евклид теоремасидан исталганча катта туб сон мавжуд эканлиги келиб чиқади. Масалан, камида 1000 та рақамли туб сон мавжуд. Лекин 1960 йилгача бундай сонларнинг биронтаси ҳам маълум эмас эди, чунки бу вақтда маълум бўлган энг катта туб сон 969 та рақамли $2^{3217} - 1$ сони эди. Кейинчалик $2^{4423} - 1$ кўринишидаги туб сон аниқланди. Қизиқувчиларга шуни айтиб ўтиш ҳам мумкинки, $2^{31} - 1$ нинг туб сон эканини Л. Эйлер (1707 — 1783) кўрсатган. Вена Фанлар академиясининг архивида математик Куликнинг 4212 бетли қўл ёзмаси мавжуд бўлиб, унда 100 000 000

гача бўлган натурал сонларнинг каноник ёйилмаси (туб сонлар кўпайтмаси шакли) берилган. 2^{11213} — 1 нинг туб сон эканлиги ва у 3375 та рақамли эканлиги 1963 йилда электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида аниқланди.

1971 йилда америкалик математик Такерман электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида 40 минут ишлаб, 6002 хонали 2^{19937} — 1 кўринишдаги туб сонни аниқлади. Бу ҳозиргача маълум бўлган энг катта туб сондир.

Туб сонлар жадвалини тузишнинг энг оддий ва шу билан бирга энг қадимги ҳисобланган усули Грециянинг Кренанки шаҳрида яшаган математик ва астроном Эратосфенга (бизнинг эрамизгача бўлган 276 — 193 йиллар) тегишлидир.

Эратосфен замондошлари уни «ҳамма ерда иккинчи» деб атаганлар: Евклиддан кейинги иккинчи математик, Гиппархдан кейинги иккинчи астроном ва ҳоказо.

У таклиф қилган усул қуйидагидан иборат: мисол учун 50 гача бўлган туб сонлар жадвалини тузиш талаб қилинган бўлсин. 1 дан 50 гача бўлган натурал сонларни кетма-кет ёзиб чиқамиз ва уларнинг орасидан туб сонларни қуйидагича қидирамиз (мураккаб сонларнинг устига чизилган):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50										

1 туб сон эмас, у ўчирилмайди. Биринчи туб сон 2, ундан кейинги ҳар бир иккинчи натурал сон ўчирилади (2 ўчирилмайди). Натижада фақат мураккаб сонлар ўчирилади. Иккинчи ўчирилмаган сон — 3, у туб сон. Ундан кейинги ҳар бир учинчи натурал сон ўчирилади (санада ўчирилган сонлар ҳам саналади). Кейинги ўчирилмаган сон 5 бўлади, ундан кейин юқорида кўрсатилган йўл билан ҳар бир бешинчи сон ўчирилади ва ҳоказо. Бизнинг мисолимизда тўртинчи ўчирилишдан кейин фақат туб сонлар қолади.

Бундай усул билан тузилган туб сонлар жадвали «Эратосфен ғалвири» номи билан маълумдир. Эратосфен сонларни мум билан қопланган тахтачага ёзиб, мураккаб сонларни игна билан тешган, натижада тешикчалар ҳосил бўлган. Тахтача худди ғалвирни эслатади, ундан барча мураккаб сонлар эланиб тушиб кетиб, туб сонларгина қолади. Эратосфен туб сонлар жадвалини фақат 1000 гача

бўлган сонлар учун келтирган. Ҳозирги пайтда 100 000 000 гача туб сонлар жадвали мавжуд.

Туб сонлар ҳосил қилишнинг бошқа бир усули Прага шаҳрида яшовчи инженер Мирослав Соукуп томонидан 1954 йилда берилган. Бу усул қуйидагича:

Маълумки, 6 дан катта сонни 6 га бўлганда 0, 2, 3, 4 қолдиқлар ҳосил бўлса, n мураккаб сон бўлади. Шунинг учун $n \neq 2$, $n \neq 3$ бўлган туб сонларни $6n \pm 1$ шаклдаги сонлар ичидан излаш керак.

$$n = 6km \pm (k+m) \quad (k=1,2,3,\dots, m=0,1,2, \dots, k)$$

ва

$$n = 6km \pm (k-m) \quad (k=1,2,3, \dots, m=0,1,2,\dots, k)$$

лардан фойдаланиб, қуйидаги жадвални тузамиз:

$$\left. \begin{array}{cccc} n = 6km \pm (k+m) = 96 \pm 8 & \dots & & \\ & 54 \pm 6 & 72 \pm 7 & \dots \\ & 24 \pm 4 & 36 \pm 5 & 48 \pm 6 & \dots \\ 6 \pm 2 & 12 \pm 3 & 18 \pm 4 & 24 \pm 5 & \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6n + 1 - \\ \text{мураккаб} \end{array}$$

$$0 \pm 1 \quad 0 \pm 2 \quad 0 \pm 3 \quad 0 \pm 4 \quad \dots$$

$$\left. \begin{array}{cccc} 6 \pm 0 & 12 \pm 1 & 18 \pm 2 & 24 \pm 3 & \dots \\ & 24 \pm 0 & 36 \pm 1 & 48 \pm 2 & \dots \\ & & 54 \pm 0 & 72 \pm 1 & \dots \\ n = 6km \pm (k-m) = 96 \pm 0 & \dots & & & \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6n - 1 - \\ \text{мураккаб} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} k=1 \text{ бўлганда} & m=0, 1; \\ k=2 \text{ бўлганда} & m=0, 1, 2; \\ k=3 \text{ бўлганда} & m=0, 1, 2, 3 \end{array}$$

қийматлар олинади.

$6n - 1$ нинг туб бўлиши учун жадвалнинг пастки қисмида n бўлмаслиги, $6n + 1$ нинг туб бўлиши учун жадвалнинг юқори қисмида n бўлмаслиги керак.

Мисол. 1) $n = 13$ жадвалнинг юқори қисмида йўқ, демак

$$6 \cdot 13 + 1 = 79 - \text{туб сон.}$$

$n = 13$ жадвалнинг пастки қисмида бор, шунинг учун $6 \cdot 13 - 1 = 77$ — мураккаб сон. 2) $n = 149$ — туб сон, чунки $149 = 6 \cdot 25 - 1$ ва 25 сони жадвалнинг остки қисмида

йўқ. 3) $n = 229$ — туб сон, чунки $229 = 6 \cdot 38 + 1$ ва 38 жадвалнинг юқори қисмида йўқ. 4) $n = 187$ — мураккаб сон, чунки $187 = 6 \cdot 31 + 1$ ва 31 жадвалнинг юқори қисмида бор.

Туб сонлар ҳосил қилинишининг яна бир усули мавжуд:

Натурал сон 1 билан биринчи n та туб сонларни олиб, уларни ихтиёрий йўл билан икки группага бўламиз. Ҳар бир группа сонларини кўпайтириб, икки хил кўпайтмани ҳосил қиламиз ва бу кўпайтмаларнинг йиғиндиси ёки айирмасини тузамиз. Ҳосил бўлган йиғинди ёки айирма ёрдамида $(n + 1)$ туб соннинг квадратидан кичик бўлган туб сонларни ҳосил қиламиз.

Мисол. 1) 1 билан туб сон 2, 3, 5 ларни ихтиёрий икки группага бўламиз:

$$\begin{array}{l} \text{I группа: } 2 \\ \text{II группа: } 1, 3, 5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 = 13; \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 17. \end{array}$$

13 ва 17 лар 5 дан кейинги туб сон 7 нинг квадратидан кичик. Демак, 13 ва 17 — туб сонлар.

2) 1 ва туб сон 2, 3, 5, 7, 11 лардан фойдаланиб, $13^2 = 169$ дан кичик бўлган туб сонларни ҳосил қиламиз.

$$\begin{array}{l} \text{I группа: } 3 \cdot 5 = 15 \\ \text{II группа: } 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 154 + 15 = 169 = 13^2 \text{ — му-} \\ \text{раққаб;} \\ 154 - 15 = 139 \text{ — туб сон.} \end{array}$$

Бошқа хил группалар тузамиз:

$$\begin{array}{l} \text{I группа: } 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \\ \text{II группа: } 1 \cdot 2 \cdot 11 = 22 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 105 - 22 = 83 \text{ — туб сон.} \\ 105 + 22 = 127 \text{ — туб сон.} \end{array}$$

Изоҳ. Агар ҳосил қилинган айирма туб сон $(n + 1)$ нинг квадратидан катта бўлса, бу сон туб бўлмаслиги мумкин.

Мисол. 1 ва туб сон 2, 3, 5, 7 ларни қуйидаги икки группага бўламиз:

$$\begin{array}{l} \text{I группа: } 1 = 1 \\ \text{II группа: } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 210 - 1 = 209, \text{ лекин } 209 > 11^2. \end{array}$$

Шунинг учун 209 ни туб сон деб айтолмаймиз. Ҳақиқатан ҳам, $209 = 11 \cdot 19$.

1 ва туб сон 2, 3, 5, 7, 11 ларни бошқа хил группаларга бўлиб, 169 дан кичик бўлган ҳамма туб сонларни ҳосил қилинг.

Л. Эйлер Эратосфен ғалвиридан фойдаланиб, туб сонлар жадвалини ва мураккаб сонларнинг энг кичик (бирдан ташқари) бўлувчисини аниқлаш усулини кўрсатиб берди.

Натурал n сонни $n = 30q + r$ кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $r = 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28$ бўлганда n мураккаб сон бўлиб, $r = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ бўлганда эса n туб сон бўлиши мумкин. Эйлер жадвални қуйидагича тузган.

$n = 30q + r$ туб сон бўлганда жадвалнинг тегишли хонасига p ни (p — туб сон) ва $30q + r$ мураккаб сон бўлганда унинг бирга тенг бўлмаган энг кичик туб бўлувчисини ёзган:

$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ q \end{array}$	1	7	11	13	17	19	23	29
0	p	p	p	p	p	p	p	p
1	p	p	p	p	p	7	p	p
2	p	p	p	p	7	p	p	p
3	7	p	p	p	p	p	p	7
4	11	p	p	7	p	p	11	p

Мисол. $q = 3$ бўлганда

$$n = 30 \cdot 3 + 1 = 91 = 7 \cdot 13 \quad \text{ва}$$

$$n = 30 \cdot 3 + 29 = 119 = 7 \cdot 17$$

лар мураккаб бўлиб,

$$n = 30 \cdot 3 + 7, \quad n = 30 \cdot 3 + 11, \quad 30 \cdot 3 + 13$$

$$n = 30 \cdot 3 + 17, \quad 30 \cdot 3 + 19, \quad 30 \cdot 3 + 23$$

лар туб сон бўлади.

Айрим сонларнинг бирор рақамини бошқа сонга алмаштириш натижасида берилган сон туб сонга айланиб қолиши мумкин. Масалан: 81 — мураккаб сон, 1 ни 3 билан алмаштирсак, туб сон 83 ҳосил бўлади. Лекин ҳар қандай сон-

нинг ҳам биргина рақамини бошқа сон билан алмаштириш натижасида туб сон ҳосил бўлавермайди. Масалан, 200 нинг рақамларини алмаштириш билан туб сон ҳосил бўлмайди. Шунинг учун бундай савол туғилади: ҳар қандай $n \geq 10$ соннинг иккита рақамини алмаштириш билан туб сон ҳосил қилиб бўладими? Бу саволга тўла жавоб бериб бўлмайди.

Берилган натурал соннинг туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш қийин масалалардан биридир.

Л. Эйлер 1 000 009 ни туб сон деб ўйлаган эди. Кейинчалик бу фикрни тасдиқлаш учун у қайта ҳисоблашлар ўтказиб, аввалги фикрининг нотўғри эканлигини ва $1\,000\,009 = 293 \cdot 3413$ эканлигини кўрсатди. Шунинг ҳам айтиш керакки, бу вақтда Эйлер 70 ёшда бўлиб, иккала кўзи ожиз ва у ҳамма ҳисоблашларни ёддан ўтказар эди.

П. Фермадан 100 895 598 169 нинг қандай сон эканлигини сўраганларида у бир оз ҳисоблашлар ўтказиб, бу сон 898423 ва 112303 ларнинг кўпайтмаси эканлигини кўрсатган.

Бундан 100 йилча илгари англиялик математик Дже-венс 8 616 460 799 сони қандай сонларнинг кўпайтмасидан иборат деган савол қўйган эди. Кейинчалик, ҳисоблаш машинаси ёрдамида, бу сон 96079 ва 89681 ларнинг кўпайтмаси эканлиги аниқланди.

Баъзи бир натурал сонларнинг туб ёки мураккаб эканлиги ҳозиргача ҳам маълум эмас.

Шундай туб сонлар ҳам мавжудки, уларнинг бир неча кетма-кет охири рақамларини (лекин кетма-кет ҳаммасини эмас) ўчириш натижасида ҳосил бўлган сонлар яна туб сонлар бўлади.

Мисол. 3793 туб сон бўлиб, ундан юқорида айтилган йўл билан ҳосил қилинган 379, 37, 3 сонлар ҳам туб сонлардир.

Бундай туб сонлар энг содда туб сонлар деб аталади.

Қуйида кетма-кет жойлашган энг содда туб сонлар кетма-кетлиги келтирилган:

37	3797	37397	2399333
317	7331	73331	7393931
599	23333	373393	7393933
797	23339	593993	23399339
2393	31193	719333	37337999
3793	31379	739397	59393133
		739399	73939133

Тўққиз ва ундан ортиқ хонали энг содда туб сонлар мавжуд эмаслиги исботланган. Шундай қилиб, энг узун ва энг содда туб сонлар 8 та рақамли бўлиб, улар фақат юқорида келтирилган тўртта 8 та рақамли энг содда туб сонлардир.

Қадимги замонда кўп олимлар n нинг барча натурал қийматлари учун туб сонларни ифода қиладиган формуласини топиш масаласи билан шуғулланиб келганлар.

Бундай формулалардан жуда кўп таклиф қилинган бўлса-да, уларнинг ҳеч бири n нинг ҳамма қийматлари учун ҳамма вақт туб сон бўла бермаган. Бундай формулаларнинг айримларини келтириш билан чегараланамиз.

1) Англиялик математик Рисел Ханс (1970 йилда) $4943 + 60.0708s$ ифода $s = 0, 1, 2, 3, \dots, 12$ бўлганда туб сон бўлишини; $429983158710 + k$ ифода эса $k = 11, 13, 17, 19, 23, 37, 41, 43, 47, 53, 59$ бўлганда туб сон бўлишини кўрсатди.

2) Буюк француз олими Ферма (1601 — 1665) $2^{2^n} + 1$ сони ҳар қандай натурал n сони учун туб сон бўлишини айтган эди. У n га 0, 1, 2, 3, 4 каби қийматларни бериб, 3, 5, 17, 257, 65537 каби туб сонлар ҳосил қилган эди. $n = 5$ бўлганда $2^{2^5} + 1$ сони жуда катта сон бўлгани учун Ферма бу сонни туб ёки мураккаб эканлигини аниқлай олмаган.

1739 йилда Л. Эйлер $2^{2^5} + 1$ нинг мураккаб эканлигини кўрсатди (бундай сонлар ҳақида биз келгуси параграфларнинг бирида алоҳида тўхтаб ўтамиз).

3) $n^2 + n + 17$ кўпҳад $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 16$ бўлганда туб сонларни беради, $n = 17$ бўлганда эса мураккаб сон ҳосил бўлади.

4) $2n^2 + 29$ кўпҳад $n = 0, 1, 2, \dots, 28$ бўлганда туб сонларни беради, $n = 29$ бўлганда мураккаб сон ҳосил бўлади.

5) $n^2 - n + 41$ кўпҳад $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 40$ бўлганда туб сон бўлиб, $n = 41$ бўлганда мураккаб сон бўлади.

$n^2 - n + 41$ формула ёрдамида ҳосил қилинадиган 2348 та соннинг ярми туб сон эканлиги кўрсатилган. Шундай кўринишдаги сонлар ичида миллионнинг 0,475 қисмини туб сонлар ташкил қилиши кўрсатилган. $n^2 - n + a$ ифода $a > 41$ ва $n = 1, 2, 3, \dots, a - 2$ бўлганда туб сонни берадими, деган савол қўйилган эди. Бу саволга ҳозиргача

жавоб берилгани йўқ. Лекин $41 < a < 10^9$ ораликда бундай туб сонлар мавжуд эмаслиги исботланган. Аммо $a = 3, 5, 11, 17$ бўлганда ва барча $0 \leq n \leq a - 2$ ларда $n^2 - n + a$ ифода туб сонларни бериши исботланган.

Мисол. $a = 11$ бўлсин. $n^2 - n + 11$ учҳад барча $0 \leq n \leq a - 2$ лар учун туб сонни беради (текшириб кўринг). $n \leq 11000$ бўлганда $n^2 - n + 41$ кўринишдаги катта туб сон 19421, 27941, 72491 лардир ва бундай туб сонлар 4506 та эканлиги ҳисобланган.

$f(x) = x^2 - x + 41$ Эйлер учҳади дейилади. Бу учҳад туб сонларни берадиган учҳадларнинг генераторидир, чунки бу учҳаддан фойдаланиб, туб сонларни берадиган яна бир нечта учҳадларни ҳосил қилиш мумкин.

Мисол. 1) $f(2x - 40) = g(x) = (2x - 40)^2 - (2x - 40) + 41 = 4x^2 - 160x + 1600 - 2x + 40 + 41 = 4x^2 - 162x + 1681$ учҳад $1 \leq x \leq 40$ лар учун $f(x)$ дан ҳосил қилинадиган ўша туб сонларни беради. (Текшириб кўринг.)

2) $h(x) = f(3x - 81) = 9x^2 - 489x + 6683$ учҳад ҳам $1 \leq x \leq 40$ лар учун 40 та туб сонни беради. Лекин $f(x)$ ва $h(x)$ лар фақат 27 та умумий туб сонга эга.

3) $l(x) = f(3x - 38) = 9x^2 - 231x + 1523$ учҳад ҳам $0 \leq x \leq 39$ бўлганда 40 та ҳар хил туб сонни беради. Булар В. А. Голубев топган квадрат учҳадлардир.

4) $f(4x) = 16x^2 - 4x + 41$ учҳад $0 \leq x \leq 40$ лар учун фақат 31 та туб сонни беради.

5) $4(x^2 - x + 41)$ учҳад $x = \frac{2n+1}{2}$ бўлганда $0 \leq n \leq 19$ лар учун, $9(x^2 - x + 41)$ учҳад $x = \frac{3n+1}{3}$ бўлганда, $0 \leq n \leq 12$ лар учун, $16(9x^2 - 3x + 41)$ учҳад $x = \frac{2n+1}{2}$ бўлганда $-6 \leq x \leq 19$ лар учун, $16(9x^2 - 3x + 41)$ учҳад $x = \frac{2n+1}{4}$ бўлганда $-5 \leq n \leq 20$ лар учун туб сонларни беради.

6) $n^2 - 79n + 1601$ эса $n = 0, 1, 2, \dots, 79$ бўлганда туб сонларни беради. $n = 80$ бўлганда эса мураккаб сон $80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 41^2$ ни беради. Бу кўпҳадларнинг ҳаммасини Эйлер кўрсатган. Шу билан бирга Эйлер $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ кўпҳад x нинг ҳамма натурал қийматлари учун ҳар доим туб сон бўла олмаслигини исбот қилган.

1967 йилда Совет математиги В. А. Голубев $9x^2 - 231x + 1523$ кўпҳад кетма-кет 40 та туб сонни беришини ва

$8x^2 - 326x + 2659$ кўпхад эса $x = 0$ дан $x = 39$ гача бўлган натурал сонлар учун кетма-кет 40 та туб сонни беришини кўрсатди.

1968 йил 25 мартда француз математиги Д. Х. Лемер Голубевга ёзган хатида Ф. Т. Шурц деган математик $36x^2 - 810x + 2753$ кўпхад $x = 0, 1, 2, \dots, 44$ лар учун 45 та туб сонни беришини кўрсатганини маълум қилди. Бу туб сонлар 2753 билан бошланиб, 36809 туб сони билан тугалланади.

Айрим туб сон p лар учун $p^2 + p + 1$ ёки $p^2 - p + 1$ сонлар туб сон бўлади.

Мисол. $p = 5$ учун $p^2 + p + 1 = 31$, $p = 3$ учун $p^2 - p + 1 = 7$.

Лекин кўпгина туб сонлар учун $p^2 \pm p + 1$ кўринишдаги сонлар мураккаб сонлар бўлади. Совет математиги В. А. Голубев 10000 дан кичик бўлган барча туб сон p лар учун $p^2 \pm p + 1$ кўринишдаги мураккаб сонларни туб кўпайтувчиларга ажратилганини берди (Австрия Фанлар академиясининг журналида босилган).

Варшавалик математик Андрей Монковский кўрсатишича, $A_n = \frac{1}{3} (10^n - 7)$ кўринишдаги сонлар $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ бўлганда 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331 шаклдаги туб сонларни беради. A_n кўринишдаги энг кичик мураккаб сон $n = 9$ бўлганда ҳосил бўлиб, у

$$A_9 = \frac{1}{3} (10^9 - 7) = 333333331 \text{ дир.}$$

Шунингдек, A_{12} нинг ҳам мураккаблиги аниқланди. Лекин $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ва 8 лардан ташқари n лар учун A_n шаклдаги бошқа туб сонлар мавжудми, деган саволга ҳозиргача жавоб топилгани йўқ.

$n = 16m + q$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) лар учун A_n соннинг 17 га бўлиниши исботланган.

Мисол. $m = 0$ бўлганда $n = 9$. $A_9 = 333333331$ сони 17 га бўлинади:

$$333333331 = 17 \cdot 19607843.$$

Шинцелнинг қуйидаги гипотезалари мавжуд:

1) бир вақтда туб сон бўлган p ва $p + 10$ каби туб сонлар чексиз: масалан, 7 ва 17; 13 ва 23; 19 ва 29; 31

ва 41; 37 ва 47; 61 ва 71; 73 ва 83; 79 ва 89; 97 ва 107 ва бошқалар;

2) бир вақтда туб сон бўлган p ва $p + 1000$ каби туб сонлар чексиз кўп; масалан, 13 ва 1013; 19 ва 1019; 31 ва 1031; 61 ва 1061; 97 ва 1097; 103 ва 1103; 1039 ва 2039 ва бошқалар.

3) $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$ лар бир вақтда туб сон бўладиган натурал n сонлар сони чексиз кўп.

Мисол. $n = 4$, 10, 100; $n = 4$ бўлганда 5, 7, 11, 13, 17 — туб сонлар; $n = 10$ бўлганда 11, 13, 17, 19, 23 — туб сонлар.

$f(n) = n^2 + 1$ — иккинчи даражали кўпхад $n = 1, 2, 4, 6, 10$ бўлганда туб сонни беради. $n \leq 10000$ бўлганда 842 та $n^2 + 1$ шаклдаги туб сон, $n \leq 100\,000$ бўлганда $n^2 + 1$ шаклдаги туб сонлар 6 656 та, $n \leq 180\,000$ бўлганда $n^2 + 1$ шаклдаги туб сонлар 11223 та эканлиги ҳисобланган. Лекин $n^2 + 1$ шаклдаги туб сонларнинг чекли ёки чексизлиги маълум эмас. Голубев ўзи ишлаб чиққан алгоритм ёрдамида $n^2 + 1$ шаклдаги мураккаб сонларнинг $n \leq 190\,000$ бўлгандаги туб кўпайтувчиларга ёйилмасини берган. $n \leq 1500$ бўлганда бундай мураккаб сонларнинг туб кўпайтувчиларга ёйилмасини эса Л. Эйлер берган эди. Яқинда америкалик математик Д. Шанс электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида Голубев тузган жадвални қайтадан текшириб, фақат биттагина тузатиш киритди.

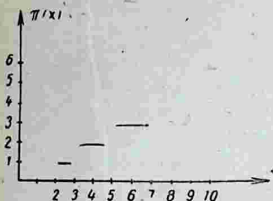
Ҳозирги вақтда ҳамма $n \leq 100\,000\,000$ ва айрим $n \leq 40 \cdot 10^9$ лар учун $n^2 + 1$ шаклдаги мураккаб сонларнинг туб кўпайтувчиларга ёйилмаси мавжуд.

Немис математиги Дирихленинг исботига кўра $(a, b, c) = 1$ бўлганда $ax^2 + bxy + cy^2$ ифода чексиз кўп туб сонларни беради. $\pi(n)^*$ билан натурал n сонигача бўлган туб сонлар сонини, умуман, n сонигача $f(k)$ шаклдаги туб сонлар сонини $\pi_n(f(k))$ билан белгилаймиз.

Мисол. $\pi_n(k^2 + a)$ билан натурал n сонигача $k^2 + a$ шаклдаги туб сонлар сони белгиланади; $\pi(30) = 10$; $\pi_n(k^2 + 1) = 3$; 30 гача $k^2 + 1$ шаклдаги туб сонлар: 2, 5, 17.

* Бу белгини П. Л. Чебишев киритган.

$y = \pi(x)$ функциянинг графиги қуйидагичадир (1-шакл).



1-шакл.

В. А. Голубев $1 \leq n \leq 30\,000$ бўлганда $\frac{\pi_n(k^3+1)}{\pi(n)} \approx 0,69$ эканлигини ҳисоблаган. Шундай c қийматлар ҳам мавжудки, $\frac{\pi_n(k^2+c)}{\pi(n)}$ нисбат бирдан катта бўлади. Масалан,

$$\frac{\pi_n(k^2 - k + 41)}{\pi(n)} \approx 3,7;$$

$$\frac{\pi_n(k^2 + 7)}{\pi(n)} \approx 1,1;$$

$$\frac{\pi_n(k^2 + k + 72491)}{\pi(n)} \approx 4,0.$$

$k^4 + 1$ шаклдаги туб сонлар ҳам чексиз кўп, деган гипотеза мавжуддир. В. А. Голубев $k = 1, 2, 4, 16, 20, 24, 28, 34, 46, 48, 54, 56, 74, 80, 82, 88, 90, 118, 132, 140, 142, 154, 160, 164, 174, 180, 194, 198, 204, 210, 220, 228, 238, 242, 248, 254, 264, 266, 272, 276, 278, 288, 296$ бўлганда $k^4 + 1$ шаклдаги туб сонлар ҳосил бўлишини кўрсатган. $\frac{\pi_n(k^4+1)}{\pi(n)} = l$ деб олиб, $10 < n < 300$ бўлганда $0,60 \leq l \leq 0,68$ эканлиги аниқланган.

$n = 150$ бўлганда l энг кичик қийматга эга эканлиги аниқланди.

Ҳар қандай натурал m сон учун шундай $n^2 + m$ ифода мавжудки, бу ифода шаклидаги туб сонлар чексиз кўп, деган гипотеза ҳам мавжуддир.

$n^3 + 1$ кўринишдаги туб сон фақат битта (2 туб сон) эканлигини осонлик билан кўрсатиш мумкин (исботланг).

$n^3 + 2$ ва $n^3 - 2$ кўринишдаги туб сонлар чексиз кўп, деган гипотеза мавжуд. $n = 1, 2, 5, 29$ бўлганда $n^3 + 2$ кўринишдаги ва $n = 9, 15, 19, 27$ бўлганда $n^3 - 2$ кўринишдаги туб сонлар ҳосил бўлади.

$N_p = \frac{2p+1}{3}$ формулада p нинг ўрнига 31 гача тоқ туб сонлар қўйилса, N_p ҳам туб сон бўлади (баъзи бир тоқ мураккаб p сон учун ҳам N_p туб сон бўлади): $N_3 = 3$;

$N_5 = 11$; $N_7 = 43$; $N_9 = 683$; $N_{11} = 2731$; $N_{13} = 43691$;
 $N_{15} = 174761$; $N_{17} = 2796203$; $N_{19} = 178956771$; $N_{21} =$
 $= 715827883$; $p = 37$ бўлганда $N_{37} = \frac{2^{37} + 1}{3} =$
 $= 1777 \cdot 25781083$ — мураккаб сон бўлади.

Юрий Стасович деган оддий бир ишчи бўш вақтларида математика билан шуғулланиб, қуйидаги ажойиб йўл билан туб сонларни ҳосил қилган:

$$\left. \begin{aligned} 2! + 1 \cdot 2 + 1 &= 5 \\ 2! + 2 \cdot 2 + 1 &= 7 \end{aligned} \right\} \text{иккита кетма-кет туб сон}$$

$$\left. \begin{aligned} 4! + 1 \cdot 4 + 1 &= 29 \\ 4! + 2 \cdot 4 + 1 &= 31 \\ 4! + 3 \cdot 4 + 1 &= 37 \\ 4! + 4 \cdot 4 + 1 &= 41 \end{aligned} \right\} 4 \text{ та кетма-кет туб сон}$$

$$\left. \begin{aligned} 6! + 1 \cdot 6 + 1 &= 727 \\ 6! + 2 \cdot 6 + 1 &= 733 \\ 6! + 3 \cdot 6 + 1 &= 739 \\ 6! + 4 \cdot 6 + 1 &= 743 \\ 6! + 5 \cdot 6 + 1 &= 751 \\ 6! + 6 \cdot 6 + 1 &= 757 \end{aligned} \right\} 6 \text{ та кетма-кет туб сон}$$

Бундан қуйидаги гипотеза келиб чиқади; ҳар қандай жуфт $n = q - 1$ (q — туб сон) учун

$$\sigma_k = n! + \begin{cases} kn + 1, & \text{агар } kn + 1 \text{ туб сон бўлса,} \\ kn - 1, & \text{агар } kn - 1 \text{ туб сон бўлса} \end{cases}$$

формула туб сонларни беради. Агар $kn \pm 1$ лар бир вақтда мураккаб бўлмаса, у ҳолда σ_k сони n та кетма-кет жойлашган туб сонларни беради. Агар $kn \pm 1$ лар бир вақтда мураккаб бўлса, бу ҳолда кетма-кет жойлашган туб сонлар сони n дан кичик бўлади.

Бу гипотеза ҳозиргача ҳал қилинмаган.

Мисол. $q = 5$ учун $n = 4$ бўлади.

$\sigma_k = 4! + (4k + 1)$ формула кўпгина $4k + 1$ кўринишдаги туб сонлар учун қуйидаги туб сонларни беради:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 4! + 5 = 29 \text{ — туб,} \\ \sigma_3 &= 4! + 13 = 37 \text{ — туб,} \\ \sigma_4 &= 4! + 17 = 41 \text{ — туб,} \end{aligned}$$

$$\sigma_7 = 4! + 29 = 53 \text{ — туб,}$$

$$\sigma_9 = 4! + 37 = 61 \text{ — туб,}$$

$$\sigma_{10} = 4! + 41 = 65 \text{ — мураккаб сондир.}$$

Шундай қилиб, юқорда келтирилган мисоллар шунини кўрсатадики, $\sigma_k = 4! + (4k + 1)$ ҳар доним фақат туб сонларни беравермайди.

Америкалик математик Миллс 1947 йилда маълум ҳақиқий сон α учун $[\alpha^{2^n}]$ ифода исталган n учун туб сонни беришини исбот қилди.

Райт деган математик $\alpha_{n+1} = 2^{\alpha_n}$ рекуррент формула ёрдамида $[2^{2^0}]$, $[2^{2^1}]$, $\dots$ ифодалар $\alpha = \alpha_0$ нинг маълум ҳақиқий (иррационал) қийматида туб сонларни беришини кўрсатди.

Бу теорема назарий томондан аҳамиятли бўлса-да, тажрибада унинг ёрдами билан исталганча катта бўлган туб сонни топиш мумкин эмас, чунки α_0 — иррационал сон бўлгани учун унинг фақат бир неча ўнли улушлари маълумдир.

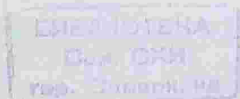
Польша математиги В. Серпинский

$$p_n = [\alpha \cdot 10^{2^n}] - 10^{2^n - 1} [\alpha \cdot 10^n - 1]$$

формула ёрдамида α нинг маълум ҳақиқий қийматида n -туб сонни аниқлаш мумкинлигини исботлади. Афсуски, бу ҳам юқоридаги камчиликка эгадир.

Америкалик математик С. Улам ўзи учун жуда зерикарли бўлган ҳисобот докладларнинг бирида қатнашиб, зерикканлигидан қўлида бўлган қоғозга горизонтал ва вертикал чизиқларни чизиб квадратлардан иборат панжара ҳосил қилган. Олдин бирор шахмат этюдини тузиш учун уриниб, бундан ҳеч нарса чиқмагандан сўнг, панжаранинг ўртасида жойлашган квадратдан бошлаб спираль чизиб, кесишган квадратларни кетма-кет номерлаб, туб номерларни доира ичига олади. Натижада ҳосил бўлган панжарани диққат билан кўздан ўтказар экан, туб сонлар маълум квадратларнинг диагоналлари бўйлаб кетма-кет жойлашганлигини кўради (2-шакл).

Кейинчалик спирални 1 дан бошлаб эмас, бошқа бир сондан, жумладан туб сонлардан бошлаб кўрган. Натижада, агар спирални 17, 41 каби туб сонларидан бошласа, 16×16 , 40×40 ўлчовли квадратларнинг бош диагоналларида бирида мос равишда 16, 40 та туб сонлар жойлашган бўлади (3-шакл).



236158

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

2- шакл.

272	271	270	269	268	267	266	265	264	263	262	261	260	259	258	257
213	212	211	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	199	256
214	161	150	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	198	255
215	162	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	148	197	254
216	163	118	81	80	79	78	77	76	75	74	73	106	147	196	253
217	164	119	82	53	52	51	50	49	48	47	72	105	146	195	252
218	165	120	63	54	33	32	31	30	29	46	71	104	145	194	251
219	166	121	84	55	34	21	20	19	28	45	70	103	144	193	250
220	167	122	85	56	35	22	17	18	27	44	69	102	143	192	249
221	168	123	86	57	36	23	24	25	26	43	68	101	142	191	248
222	169	124	87	58	37	38	39	40	41	42	67	100	141	190	247
223	170	125	88	59	60	61	62	63	64	65	66	99	140	189	246
224	171	126	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	139	188	245
225	172	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	187	244
226	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	243
227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242

3- шакл.

Умумий ҳолда спираль марказидан узоқлашган сари туб сонлар камая боришини кўриш мумкин. Диагоналлари бўйлаб жойлашган туб сонларни айрим парабола формуллари ёрдамида ҳосил қилиш мумкин. Масалан, 2-шаклдаги 5, 19, 41, 71 каби туб сонлар $4n^2 + 10n + 5$ параболадан $n = 0, 1, 2, 3$ бўлганда ҳосил бўлади. 3-шаклнинг бош диагоналида жойлашган 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257 каби туб сонлар $n^2 + n + 17$ параболадан $n = 0, 1, 2, \dots, 15$ бўлганда ҳосил бўлади.

Улам спиралларига доир қуйидаги гипотеза қўйилган бўлиб, у ҳозиргача ҳал қилинмагандир.

Улам спирали қайси сондан бошланганда ва қандай «чексиз» квадратнинг диагоналида чексиз кўп туб сонлар жойлашган бўлади?

$p_n = (a - x)^2 + x + 1$ формула $x = 0, 1, 2, \dots, a - 1$ бўлиб, $a = 2, 4, 10, 16, 40$ бўлгандагина туб сон ҳосил қилиниши исботланган.

Мисол. $a = 16$ бўлиб, $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$ бўлганда $p_0 = 257$; $p_1 = 227$; $p_2 = 199, \dots, p_{15} = 17$ лар туб сонлар бўлади.

Эратосфен ғалвирига яна бир назар ташлар эканмиз, унинг бошланишида туб сонлар орасидаги масофа кичиклигини, натурал сонлар кетма-кетлигининг кейинги қисмларида эса бу масофа борган сари катталашиб бораётганини кўрамиз. Агар натурал сон 1 ва 10 лар орасида 4 та туб сон мавжуд бўлса, 1001 ва 1010 лар орасида фақат 1 та (1009) туб сон учрайди, баъзан битта ҳам туб сон учрамаслиги мумкин. Бундан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Ҳар қандай натурал k сон учун шундай натурал l сонни кўрсатиш мумкинки, ундан бошлаб k та кетма-кет натурал сонлар орасида битта ҳам туб сон бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам,

$$l = \alpha_1 = (k + 1)! + 2$$

$$l + 1 = \alpha_2 = (k + 1)! + 3$$

$$l + k + 1 = \alpha_k = (k + 1)! + (k + 1),$$

k та сонларнинг ҳаммаси мураккабдир, чунки улар мос равишда 2 га, 3 га, $\dots, (k + 1)$ ларга бўлинади. Шундай қилиб, кетма-кет жойлашган 1000 та, 1000000 та ва ҳоказо натурал сонлар орасида бирорта ҳам туб сон бўлмаслиги мумкин.

Мисол. 370261 ва 370373 лар орасидаги 111 та соннинг ҳаммаси мураккабдир. 4652354 ва 4652506 сонлар орасидаги 153 та кетма-кет соннинг ҳаммаси мураккабдир. 1671800 ва 1671900 сонлари орасидаги 100 та соннинг ҳаммаси мураккабдир.

Венгриялик математик Эрдешининг исбот қилган жумласини келтирамиз: камида 10^6 та туб сон мавжудки, улар учун $\alpha = p_{k+1} - p_k > 10^{12}$ бўлиб, p_k ва p_{k+1} лар эса тартиб билан k ва $(k+1)$ -туб сонларни кўрсатади.

Қуйидаги Шинцель гипотезаси ҳам мавжуд: ҳар қандай натурал n сон учун шундай натурал m сони мавжудки, $m^{2^n} + 1$, $m^{2^n} + 3$, $m^{2^n} + 7$, $m^{2^n} + 9$ сонларнинг ҳаммаси туб сон бўлади.

Мисол. 1) $n = 1$ бўлганда $m = 2$, $m = 10$ лар учун 5, 7, 11, 13, 101, 103, 107, 109 каби туб сонларни ҳосил қиламиз.

2) $n = 2$ бўлганда $m = 10$ учун 100001, 100003, 100007, 100009 каби туб сонларни ҳосил қиламиз. Мавжуд бўлган туб сонлар жадвали бўйича n га нисбатан $\pi(n)$ ҳисобланса, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

n	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000 000
$\pi(n)$	4	25	168	9 543	78 498	50 847 478
$\frac{\pi(n)}{n}$	0,4	0,25	0,168	0,09543	0,078498	0,050847478
%	40%	25%	17%	9,6%	8%	5%

Бу жадвалдан туб сонларнинг сийраклашганини $\left(\frac{\pi(n)}{n}\right)$ нисбатни) кўрамиз. $\frac{\pi(n)}{n}$ қиймат борган сари кичрайдими, n нинг шундай қийматларини кўрсатиш мумкинки, унга тегишли $\pi(n)$ қиймат n нинг 0,000001% идан кам эмас.

Математик Л. Лохер-Эрст $n > 50$ бўлганда $\pi(n)$ ни

$$f(n) = \frac{n}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}}$$

формула билан аниқроқ ифодалашни кўрсатди. Масалан, $\pi(10^3) = 168$ бўлса, $f(10^3) = 167,1$; $\frac{\pi(10^3)}{f(10^3)} \approx 1,007$ ва $\frac{\pi(10^{10})}{f(10^{10})} \approx 1,005$ бўлади.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{f(n)} = 1$ эканлигини элементар усул билан исботлаш мумкин.

XIX асрнинг бошларида Буркхарт тузган 3 000 000 гача туб сонлар жадвали мавжуд эди. Кейинчалик гамбурглик Захария Даза 8 000 000 гача туб сонлар жадвалини тузди. Розенбург бу жадвални 9 000 000 гача давом эттирди. 1909 йилга келиб математик Лемер 10 000 000 гача туб сонлар жадвалини тузди ва илгариги жадвалларда бўлган хатоларни тузатди, 1951 йилда 11 000 000 гача туб сонлар жадвали мавжуд эди. 1959 йилда Бейкер ва Грунбергерлар $104\,395\,301 = p_{6\,000\,000}$ (тартиб билан 6 000 000—туб сон) туб сонигача бўлган туб сонларнинг микрофильмини кўрсатди.

Математик Лемернинг айтишича, $2 \cdot 17 \cdot 10^9$ гача бўлган сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш учун 40 минут, 10^{15} гача бўлган сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш учун 1 кун ва 10^{100} гача бўлган сонларни эса омад келса, 1 йилда туб кўпайтирувчиларга ажратиш мумкин (албатта электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамсиз) экан.

АҚШ даги энг йирик атом маркази бўлган Лос Аламос олимлари ихтиёрида 90 миллионгача бўлган туб сонлар жадвали мавжуддир.

Биринчи, учинчи, тўртинчи, бешинчи, ўнинчи ва ўн биринчи юзликларда фақат 25 тадан туб сонлар борлигини кўрсатиш мумкин. Фақат 24 та туб сонлар мавжуд бўлган юзликларнинг сони чеклилигини исботлаш мумкин. Туб сонлар сони 23 та бўлган юзликлар чексиз кўпдир, деган гипотеза мавжуд.

Бунга ўхшаган мисоллардан $\frac{\pi(n)}{n}$ нинг қиймати камаё бориши кўринмоқда. Буюк рус математики П. Л. Чебишев (1821 — 1890) $\frac{\pi(n)}{n}$ нинг қиймати n нинг ўсиши билан олдиндан берилган ҳар қандай мусбат сондан кичик бўлишини, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$ эканлигини кўрсатди.

Шундай қилиб, натурал сонлар кетма-кетлигида туб сонлар сони чексиз кўп бўлса-да, улар натурал сонларга нисбатан жуда оздир. Шунинг ҳам айтиш керакки, берилган ҳар қандай n га мос келган $\pi(n)$ учун формула топиш масаласи кўп йиллардан бери қўйилган бўлса-да, бу масала ҳозиргача ҳал қилинмаган. Лекин $\pi(n)$ ни n орқали то

пиш учун тақрибий формулалар тузиб уриниб кўрганлар ҳам бўлди. Бундай формулалар биринчи марта буюк француз олими Лежандр (1752 — 1833) томонидан берилди:

$$\pi(n) = \frac{n}{2,3025 \cdot \ln n - 1,03366}$$

(бу формула билан $\pi(n)$ ни ҳисоблашда унинг бутун қисми олинади).

Бу формула $1\,000 < n < 4\,000\,000$ бўлганда аниқроқ қиймат берди. Буни қуйидаги жадвал ёрдамида кўриш мумкин:

n	10	100	1000	10 000	1 000 000
$\pi(n)$ — Лежандр формуласи бўйича	8	28	171	1230	9597
$\pi(n)$ — аслида	4	25	168	1229	9592

Бунда n қанчалик катта бўлса, унга мос келган $\pi(n)$ ларнинг қиймати шунча кам фарқ қилиши кўриниб турибди. Лежандр формуласи тажриба тарзида топилган. Уни Лежандрнинг ўзи ҳам, ундан кейинги олимлар ҳам исбот қила олмадилар. Лежандрнинг юқорида келтирилган формуласига П. Л. Чебишев тузатиш киритди. У қуйидаги теоремани исботлади: n нинг катта қийматлари учун $\frac{\pi(n)}{n}$ нинг қиймати $A(n) = \frac{0,43429}{\ln n}$ дан жуда кам фарқ қилади ва бу фарқ n нинг ўсиши билан камая боради.

Буни қуйидаги жадвалдан кўриш мумкин:

n	2	5	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
$A(n)$	1	4	6	29	178	1246	9630	78628	664918	5762209
$\pi(n)$	1	3	4	25	168	1229	9592	78498	664579	5761455

$A(n) - \pi(n)$ қиймат борган сари ошса-да, лекин $\frac{A(n) - \pi(n)}{n}$ камаяди. Юқоридаги жадвал учун $A(n) \geq \pi(n)$. Бу ҳамма вақт шундай бўлиши керак, деган фикр майдонга келган

эди. Лекин 1914 йилда англиялик математик Литльвуд $A(n) < \pi(n)$ бўлган n лар мавжудлигини кўрсатди.

$A(n) < \pi(n)$ қандай бўлганда ўринли бўлади, деган савол ҳам қўйилди. Бундай n нинг қиймати жуда катта эканлигини Литльвуднинг ўртоғи Харди топди, яъни $n \geq 10^{700}$.

Кейинчалик n нинг аниқроқ тақрибий қийматини ва $n \approx 10^{10^{31}}$ эканлигини 1933 йилда англиялик математик Скъози кўрсатди.

Бу сон ниҳоятда катта сондир. Бу сонни Курт Лассвиц кўрсатган ва у ниҳоятда катта бўлган 9^9 сонга нисбатан ва Архимеднинг «қумни санаш» натижасида топилган $10^8 \times 10^{16}$ сонларига нисбатан ниҳоятда каттадир. (Бундай улкан сонлар ҳақида келгуси параграфларнинг бирида га-пирамиз.)

$\pi(10^k)$ учун $\pi(10^k) \approx \frac{0.434}{k} 10^k$ тақрибий ифоданинг мавжудлиги кўрсатилган. $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ бўлганда $\pi(10^k)$ мос равишда 4, 22, 145, 1090, 8680, 72300 ларга тенглиги ҳисобланган.

П. Л. Чебишев топган тақрибий формула бутун дунё математиклари олдига катта вазифани қўйди. $\pi(n)$ ни $\frac{n}{\ln n}$ билан алмаштириш ва бу алмаштириш натижасидаги хатони ҳисоблаш масаласи асосий масала бўлиб қолди. $0,92129 < \frac{\pi(n) \ln n}{n} < 1,0555$ тенгсизлик мавжудлигини ҳам Чебишев исбот қилган эди.

1848 йилда Чебишев, агар $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}$ мавжуд бўлса, у

бирга тенглигини исбот қилди. Лекин бу лимитнинг мавжудлигини Чебишев исбот қила олмади. Бу жуда қийин вазифа бўлиб, ўша вақтдаги математик аппарат ёрдамида ҳал қилиб бўлмайдиган масала эканлиги кейинчалик аниқланди.

$\pi(n)$ ни $\frac{n}{\ln n}$ билан алмаштириш туб сонларнинг асимптотик тақсимот қонуни деб аталди ва $\pi(n) \propto \frac{n}{\ln n}$ билан белгиланди. Бу қонунни олий математика ёрдами билан биринчи марта бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда 1896 йилда француз математиклари Адамар ва Валле-Пуссенлар исбот қилишди.

Кейинчалик 1949 йилда норвегиялик математик А. Сельберг ва венгриялик математик П. Эрдешлар туб сонларни асимптотик тақсимот қонунининг «элементар» (комплекс ўзгарувчилик функциялар назариясидан фойдаланмасдан) исботини беришди.

Қуйидаги гипотеза ўринлидир:

Ҳар қандай натурал $n > 1$ ва $m > 1$ сонлар учун $\pi(m+n) \leq \pi(m) + \pi(n)$ бўлади.

Мисол. $\pi(12+8) \leq \pi(12) + \pi(8);$

$$8 < 5 + 4;$$

$$8 < 9.$$

Бу гипотеза ҳозиргача ҳал қилинмаган.

Биз туб сонлар натурал сонларнинг квадратига нисбатан натурал сонлар кетма-кетлигида зичроқ жойлашганлигини исботлашимиз мумкин.

Мисол учун биринчи юзликда 25 та туб сон бўлса, фақат 9 та квадратлар учрайди. Биринчи мингликда 168 та туб сон бўлса, 31 та квадратлар учрайди ва ҳ.к.

Кетма-кет туб сонларнинг тескари қийматларидан тузилган $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ қатор узоқлашувчи, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ қатор эса яқинлашувчи эканлигини исботлаш мумкин.

Монстерда яшаган студент Бонзе ўзининг ўқитувчиси М. Дена ёрдамида элементар йўл билан $p_{n+1} < \sqrt[p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n]{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}$ эканлигини исботлади. П. Л. Чебишев эса жуда қийин йўл билан $p_{n+1} < 2p_n$ эканлигини исботлаган эди.

Мисол. $\sqrt[2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11]{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \sqrt[2310]{2310} = 48,06 \dots$, яъни $p_6 < 48,06$ бўлиши керак. Аслида эса $p_6 = 11$. Шунга қарамайдан $p_{n+1} < \sqrt[p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n]{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}$ тенгсизлиги катта аҳамиятга эгадир.

$n > 5$ учун $p_{n+1} < \sqrt[p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n]{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}$ эканлигини ҳам исботлаш мумкин.

Агар p_n билан n -туб сон белгиланса, унинг учун энг содда натижа $p_n < n^2$ дир. Тартиб билан p_{104} -туб соннинг 11 хонали сон эканлигини кўрсатиш мумкин.

Туб сонлар ҳақидаги бу обзорда қуйидаги бир саволга ҳам жавоб беришга уринамиз. Қандай рақамлар билан туб сонлар бошланиши ва тугалланиши мумкин?

Бир хонали туб сонлар 2, 3, 5, 7 лардир. $p > 10$ бўлган туб соннинг охириги рақами фақат 1, 3, 7, 9 бўлиши мум-

кин. Ҳамма рақамлари бирлардан иборат бўлган туб сонлар ҳам мавжуддир, масалан, 11 ва 11 111 11111 1111 111 111 111 = $\frac{10^{23}-1}{9}$ ҳам туб сондир. Бу соннинг туб эканлиги Қрайчик томонидан кўрсатилган. Ҳамма рақамлари бирлардан иборат бўлган туб сонлар қанча, деган саволга тўлиқ жавоб бериб бўлмайди.

Шуниси қизиқки, агар ҳамма рақамлари 1 лардан иборат бўлган сон туб сон бўлса, ундаги бирлар сони ҳам туб сон бўлиши кераклиги исбот қилинган. Лекин тескари жумла тўғри эмас. Масалан: $111 = 3 \cdot 37$ сонининг бирлар сони туб сон, ўзи эса мураккаб сондир.

1907 йилда математик Генри Дудней ҳамма рақамлари 1 лардан иборат бўлиб, ўзи туб бўлган сон фақат 11 дир, деб айтган эди. У ўзининг гипотезасини исбатлаш учун 3 та, 4 та, 5 та, ... 18 та бирлардан иборат бўлган сонларнинг ҳаммасини мураккаб эканлигини кўрсатди. 1918 йилда Нью-Йорк шаҳрида яшовчи Оскар Хоппе деган одам 19 та бирлардан иборат бўлган соннинг мураккаб эканлигини кўрсатди.

Кейинчалик 29, 31, 37, 41 ва 43 та бирлардан иборат бўлган сонларнинг мураккаб эканлиги кўрсатилди. Шундан кейин 43 дан бошлаб 137 гача бирлардан иборат бўлган сонларнинг ҳаммаси мураккаб эканлиги исботланди. Демак, ҳозирги кунда 139 та бирлардан иборат бўлган сондан бошлаб ҳамма рақамлари бирлардан ва уларнинг сони туб сон бўлган сонлар ичида яна туб сонлар мавжудлиги маълум эмас.

Серпинский қуйидаги теоремани исбот қилди:

1) Агар $C_1 \neq 0$; $C_2, C_3, \dots, C_m$ *исталган натурал сонлар бўлса*, $C_1, C_2, \dots, C_m$ *рақамлари билан бошланадиган чексиз кўп туб сонлар мавжуддир*;

2) Агар $C_1, C_2, \dots, C_m$ *лар учун* $C_m = 1, 3, 7$ *ва 9 бўлса*, $C_1, C_2, \dots, C_m$ *рақамлари билан тугалланадиган чексиз кўп туб сонлар мавжуддир*.

Мисол. 10^6 та бирлар билан бошланадиган ва тугалланадиган туб сонлар чексиз кўпдир. Шунингдек, 10^9 та 9 лар билан тугалланадиган туб сонлар чексиз кўпдир.

Тартиб билан n -туб соннинг (p_n нинг) айрим хоссалари ҳақида Ж. Шерк 1830 йилда исботлаган қуйидаги теорема мавжуддир.

Ҳар қандай натурал n сон учун $+$ ва $-$ ишораларни шундай танлаб олиш мумкинки, натижада

$$p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{n-1} \pm \dots \pm p_{2n-2} \pm p_{2n-1}$$

$$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{2n-1} \pm 2p_{2n}$$

формулар ўринли бўлади.

Мисол.

$$p_{2 \cdot 3} = p_0 = 1 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 + p_5 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11 = 13;$$

$$p_{2 \cdot 3+1} = p_7 = 1 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + 2p_6 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2 \cdot 13 = 17.$$

Бунда 13 ва 17 туб сонлари тартиб билан 6- ва 7- туб сонлардир. Шундай натурал n сони мавжудки, у учун $P_n = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}$ тенглик ўринли бўлади.

Мисол. $n = 16, 37, 40, 55, 240, 273$ бўлганда

$$p_{16} = \frac{p_{15} + p_{17}}{2} \text{ ёки } p_{53} = \frac{p_{47} + p_{59}}{2} \text{ бўлади.}$$

Рақамлар ўрнини истаганча алмаштирганда ҳам яна туб сон бўлиб қолаверадиган қуйидаги туб сонлар ҳам мавжуд: 13 ва 31; 17 ва 71; 37 ва 73; 79 ва 97; 113, 131 ва 311; 199, 991 ва 919, 337, 373 ва 733 лар. Булардан ташқари яна шундай хоссага эга бўлган туб сонлар борлиги маълум эмас (бунга, албатта, рақамлари бирлардан иборат бўлган туб сонлар кирмайди).

Л. Мозер 100 000 дан кичик бўлган шундай туб сонларни топдики, уларнинг рақамлари тескари ёзилганда ҳам бу сон ўзгармайди. Уларнинг ҳаммаси 102 та бўлиб, 1000 дан кичиклари 101, 131, 151, 181, 313, 353, 273, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929 лардир.

Шундай хоссага эга бўлган туб сонлар чеклими ёки чексизми, деган саволга ҳам аниқ жавоб бериб бўлмайди.

Энди туб сонларга доир айрим гипотезаларни кўриб ўтамыз.

1) Француз математиги Бертран мавжуд туб сонлар жадвалини кузатиб, қуйидаги гипотезани баён қилди:

натурал n ва $2n$ сонлари орасида камида битта туб сон мавжуд.

Бу гипотезани «Бертран постулати» деб юритилади. Бу постулатни 1852 йилда Чебишев исбот қилди.

Бертран постулатидан 500 та рақамли сонлар орасида камида 3 та туб сон мавжудлигини келтириб чиқариш мумкин. Лекин уларнинг бирортаси ҳам маълум эмас.

100 хонали туб сонларнинг 3 таси мавжудлиги исботланган. Уларни математик Р. М. Робинзон топди: $81 \cdot 2^{324} + 1$; $63 \cdot 2^{326} + 1$; $35 \cdot 2^{327} + 1$. Рақамлари 500 тадан ортиқ бўлган $2^n - 1$ шаклдаги туб сонлар ҳам мавжуд: $n = 2281$ ва $n = 3217$ лар учун мос равишда 687 та ва 969 та рақамли туб сонлар келиб чиқади.

2) А. Шинцель томонидан айтилган, лекин ҳозиргача исботланмаган гипотеза мавжуд: ҳар қандай натурал сон $n \geq 17$ учун n ва $n + \sqrt{n}$ лар орасида камида битта туб сон p мавжуд. Бу гипотезани А. Шинцель $117 \leq n \leq 2 \cdot 10^7$ тенгсизлиқни қаноатлантирадиган барча натурал n лар учун мавжуд туб сонлар жадвали бўйича текшириб тасдиқлади.

3) Учта кетма-кет жойлашган $n > 7$ натурал сонлардан камида бирининг ҳеч бўлмаганда иккита ҳар хил туб бўлувчиси мавжудлигини исботлаш мумкин.

Мисол. 9, 10, 11 лар учун 10 сони 2 ва 5 туб бўлувчиларга эга; 17, 18, 19 лар учун 18 сони 2 ва 3 туб бўлувчиларга эга.

4) Ҳар қандай $n > 1$ учун n^2 ва $n^2 + n$ сонлари орасида камида битта туб сон мавжуд.

5) Ҳар қандай $\frac{r}{s}$ мусбат раціонал сонни чексиз кўп йўллар билан $\frac{p+1}{q+1}$ ва $\frac{p_1-1}{q_1-1}$ кўринишда (p ва q , p_1 ва q_1 — туб сонлар) ифодалаш мумкин.

Бу гипотезадан $\frac{r}{s} = 2$ раціонал сонни $\frac{p+1}{q+1}$ ва $\frac{p_1-1}{q_1-1}$ кўринишида чексиз кўп усулда ифодалаш мумкинлиги келиб чиқади. Бу содда ҳол учун ҳам гипотезанинг исботи маълум эмас:

$$2 = \frac{13-1}{7-1} \text{ ва } 2 = \frac{11+1}{5+1}.$$

6) 1 дан n^2 гача бўлган сонларни қуйидаги жадвал шаклида ёзамиз:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+k & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 2n+k & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1) & n+1 & \dots & (n-1) & n+k & \dots & n^2. \end{array}$$

Бу жадвалнинг устунлари арифметик прогрессияни ташкил қилади.

В. Серпинский қуйидагини айтган: жадвалнинг ҳар бир йўлида камида битта туб сон мавжуд.

Шинцель бу гипотезани мавжуд туб сонлар жадвалига асосан $n \leq 4500$ гача текшириб кўрди ва шу ҳол учун тўғрилигини тасдиқлади. Биринчи йўлда ҳамма вақт туб сон мавжудлиги аниқ (ҳеч бўлмаганда унда туб сон 2 мавжуд). Иккинчи йўлда туб соннинг мавжудлиги «Бертран постулатидан» келиб чиқади. Умуман, $n \geq 9$ бўлганда биринчи йўлларнинг ҳар бирида камида битта туб сон мавжуд. Серпинскийнинг, ҳар қандай иккита кетма-кет квадратлар орасида камида битта туб сон мавжудлиги ҳақидаги гипотезасидан жадвалнинг охириг икки йўли

$$\begin{array}{ll} (n-1)^2, & (n-1)^2+1, \dots, n^2-n; \\ n^2-n+1, & n^2-n+2, \dots, n^2 \end{array}$$

да туб сон мавжудлиги келиб чиқади. Бу гипотезани математик Меле ҳамма $n < 2999$ лар учун текшириб тасдиқлади.

7) Ҳар қандай натурал m сон учун шундай натурал n сон топиладики, натижада $m^3 \leq (n-1)^2$ ва $n^2 \leq (m+1)^3$ бажарилади.

Мисол. $m = 3$ бўлсин, у ҳолда, агар $n = 7$ деб олинса, $3^3 < 6^2$ ва $7^2 < 4^3$ бўлади.

Шуни назарга олиб Серпинский гипотезасидан, ҳар қандай иккита кетма-кет кублар орасида камида 2 та туб сон мавжудлиги келиб чиқади.

Мисол. $2^3 = 8$, $3^3 = 27$; 8 ва 27 лар орасида 6 та туб сон бор.

Серпинский гипотезаси умумий ҳолда исботланмагани учун, юқорида келтирилган унинг хусусий ҳоллари ҳам гипотеза бўлиб қолади.

8) Агар ҳамма натурал сонларни

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
.	.	.	.	.	.

уч бурчакли жадвал шаклида ёзсак, бу жадвалнинг иккинчи сатридан бошлаб ҳар бирида камида битта туб сон мавжуд.

9) 8 ва 9 лар шундай кетма-кет жойлашган натурал сонларки, уларни кўрсаткичи $\alpha > 1$ натурал сондан иборат бўлган туб сонларнинг даражаси шаклида ёзиш мумкин: $8 = 2^3$, $9 = 3^2$.

Математик Каталиннинг, яна шундай хоссали кетма-кет жойлашган натурал сонлар борми, деган саволига ҳозиргача жавоб топилганича йўқ.

Математик А. Монковский, ҳар қандай n , $n+1$, $n+2$ кетма-кет натурал сонларни кўрсаткичи $\alpha > 1$ бўлган даража шаклида ифодалаш мумкин эмас, деган теоремани исбот қилди.

Математик Шинцелнинг исбот қилинмаган бир гипотезасидан $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ лар бир вақтда туб сонлар бўладиган n ларнинг чексиз кўплиги келиб чиқади. Масалан:

$n = 4$, 10, 100 лар учун юқоридаги сонлар туб сонларни беради. $k+1$, $k+2$, $k+3$, $\dots$, $k+10$ кетма-кетликда $k = 0$, 2, 10, 100, 190, 820 лар учун 4 тадан туб сон борлиги кўрсатилган. Лекин бундай k ларнинг қанчаси мавжудлиги маълум эмас. $k+1$, $k+2$, $\dots$, $k+100$ кетма-кетлик фақат $k = 1$ бўлганда энг кўп (26 та) туб сонларга эга эканлиги исботланган, $k = 0$, 2, 3, 4 бўлганда юқоридаги кетма-кетликда 25 та туб сон мавжуд.

$k > 1$ бўлганда бу кетма-кетликда кўпи билан 25 та туб сон мавжудлиги исботланган.

10) Математик Эрдешнинг айтишича, $1^n + 2^n + 3^n + \dots + (m-1)^n = m^n$ тенгликни қаноатлантирадиган натурал $n > 1$ ва $m > 1$ сонлар мавжуд эмас.

Бу гипотеза Мозер томонидан ҳамма $m \leq 10^{10^6}$ лар учун текшириб тасдиқланган.

11) Эрдешнинг исбот қилишига кўра исталганча кетма-кет натурал сонларнинг кўпайтмаси квадрат сон бўла олмайдн: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \neq n^2$ ёки $k! \neq n^2$; кетма-кет тоқ сонларнинг кўпайтмаси ҳам n^m ($m > 1$) шаклдаги сон бўла олмаслигини Эрдеш исботлаган: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \neq n^m$.

12) Шундай натурал сонлар жуфти мавжудки, уларнинг йигиндиси ва кўпайтмаси квадрат сон бўлади. $n \leq 100$ учун бундай жуфтликларнинг 12 таси мавжудлиги аниқланган: 2 ва 2; 5 ва 20; 8 ва 8; 10 ва 90; 18 ва 18; 20 ва 80; 9 ва 19; 32 ва 32; 50 ва 50; 72 ва 72; 2 ва 98; 36 ва 64 лар.

13) $1!+1=2$, $2!+1=3$, $3!+1=7$ лар туб сонлардир. Булардан кейинги шу хилдаги туб сон $11!+1=39916801$ дир. $3!-1=5$, $4!-1=23$, $6!-1=719$ лар туб сонлар-

дир. $n!+1$ ва $n!-1$ шаклдаги туб сонларнинг чекли ёки чексизлиги аниқ эмас. $n!+1$ шаклдаги сонлар $n=4, 5$ ва 7 бўлганда k^2 шаклдаги сонларни беради ($k!$ — натурал сон): $4!+1=25=5^2$; $5!+1=121=11^2$; $7!+1=5041=71^2$; $n>7$ бўлганда k^2 шаклидаги сонлар мавжудми, деган саволга 1924 йилда математик М. Крайчик $n>1020$ бўлганда $n!+1$ кўринишидаги ифода квадрат сон, яъни k^2 бўлишини кўрсатди.

14) $p_1+1=3$, $p_1 p_2+1=7$, $p_1 p_2 p_3+1=31$, $p_1 p_2 p_3 p_4+1=211$; $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5+1=2311$ лар туб сонлар (p_k сони навбат билан k -туб сонни кўрсатади).

$n=6, 7, 8$ бўлганда $p_1 p_2 p_3 \dots p_n+1$ кўринишидаги сонлар мос равишда 59, 19, 347 ларга бўлинадиган мураккаб сонлардир. $p_1 p_2 p_3 \dots p_n+1$ кўринишидаги туб ва мураккаб сонлар чекли ёки чексизлиги маълум эмас.

15) 1958 йилда Гильбройт қўйидаги гипотезани айтди.

Агар туб сонлар бирин-кетин ёзилиб, кейин биринчи қаторда кетма-кет туб сонларнинг айирмаси, иккинчи қаторда эса биринчи қаторда кетма-кет жойлашган сонлар айирмасининг абсолют қиймати, учинчи қаторда иккинчи қаторда кетма-кет жойлашган сонлар айирмасининг абсолют қиймати ва ҳоказо ёзилса, у ҳолда ҳар бир йўлнинг биринчи элементи 1 дан иборат бўлади. Масалан:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	
	1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0	4	
		1	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	4	
			1	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	
				1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	
					1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	
						1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	
							1	2	2	2	2	2	2	0	0		
								1	0	0	0	0	0	0	2	0	
									1	0	0	0	0	0	2	2	
										1	0	0	0	0	2	0	
											1	0	0	0	2	2	
												1	0	0	2	0	
													1	0	2	2	
														1	2	0	
															1	2	
																1	

Бу гипотеза биринчи 63418 та йўл учун текширилиб тасдиқланган бўлса-да, унинг тўлиқ исботи мавжуд, емас.

16) Агар p туб сон бўлса, у ҳолда $A = 1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} + 1$ ифоданинг p га бўлиниши Ферма томонидан исбот қилинган. Шундай хосса фақат туб сонлар учун ўринли, деган гипотеза математик П. Джуга томонидан айтилди ва у жуда кўп туб сонлар учун текшириб кўрилди.

17) Қуйидаги Ферма теоремаси ҳам мавжуддир: Агар p туб сон бўлса, $a^p - a$ сон $(a, p) = 1$ бўлганда p га бўлинади.

Бундан $a = 2$ бўлгандан $2^p - 2$ сон ҳамма вақт p га бўлиниши келиб чиқади. Қуйидаги саволни қўямиз: Ферма теоремасининг тескарисси ҳам ўринлими? Яъни, агар $n \geq 1$ бўлганда $2^n - 2$ сон n га бўлинса, n туб сон бўладими? $1 < n \leq 300$ бўлганда $(2^n - 2)$ сон n га бўлиниб, n нинг туб эканлиги аниқланди. Бу теоремани «Хитой» теоремаси деб юритилади, чунки бундан XXV аср илгари хитойликлар шу теоремани ҳамма вақт ўринли деб ҳисоблаганлар.

Кейинчалик бу теореманинг нотўғрилиги кўрсатилди. $2^{341} - 2$ нинг 341 га бўлинганлиги исботланди, лекин $341 = 11 \cdot 31$ — мураккаб сондир. $2^{341} - 2$ нинг 341 га бўлинишини кўрсатамиз: $2^{341} - 2 = (2^{31})^{11} - 2^{11} + 2^{11} - 2$. $2^{10} - 1 = 1023 = 3 \cdot 341$ бўлгани учун $(2^{10} - 1)$ сони 341 га бўлинади. $(2^{10})^3 - 1$ сони ҳам 341 га бўлинади.

$$\left. \begin{aligned} 2^{11} - 2 &= 2(2^{10} - 1) \\ 2^{31} - 2 &= 2[(2^{10})^3 - 1] \end{aligned} \right\} \text{лар ҳам 341 га бўлинади.}$$

Демак, $(2^{31})^{11} - 2^{11}$ сони 341 га бўлинади. Бундан $2^{341} - 2$ нинг ҳам 341 га бўлиниши келиб чиқади. m мураккаб сон бўлганда «Хитой» теоремаси тўғри эмаслигини исботлаш мумкин. 1950 йилда $2^{161038} - 2$ сонининг 161038 га бўлинишини Д. Х. Лемер кўрсатди (161038 туб эмас). 1951 йилда чексиз кўп n жуфт сонлар учун $2^n - 2$ сонининг n га бўлинишини математик В. Х. Биджер исботлади.

«Хитой» теоремаси нотўғрилиги исботлангандан кейин шундай савол қўйилган эди: ҳар қандай a — бутун сон учун $a^n - a$ сонини n га бўлинишини таъминловчи мураккаб n сони мавжудми?

Бундай мураккаб n сонларни абсолют псевдо туб сонлар ёки Кармикаэл сонлари деб юритилади¹.

Абсолют псевдо туб сонлар чексиз кўп деган гипотеза мавжуд. Энг кичик псевдо туб сон $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ дир. Ҳар қандай a — бутун сон учун ($a^{561} - a$) сони 561 га бўлинади. $5 \cdot 29 \cdot 73$; $7 \cdot 23 \cdot 31$; $7 \cdot 31 \cdot 73$; $13 \cdot 37 \cdot 61$; $5 \cdot 17 \cdot 29$; $113 \times 673 \cdot 2689$ лар ҳам абсолют псевдо туб сонлар эканлиги исботланган.

$p > 2$ туб сон бўлганда $2^{p-1} - 1$ сонининг p га бўлиниши юқорида айтилган Ферма теоремасидан келиб чиқади. $2^{p-1} - 1$ сони p^2 га бўлинadиган туб сон p лар мавжудми, деган савол қўйилган эди. Биз фақат иккита шундай туб сонларни биламиз:

$$p = 1093 \text{ ва } p = 3511.$$

100000 дан кичик бўлган сонлар ичида бошқа бундай туб сонлар йўқлиги исботланган.

Математик Роткевич жуфт ва тоқ псевдо туб сонлар чексиз кўп эканлигини исботлади. Шу билан бирга ($2^n - 2$) сони n га бўлинади, ($3^n - 3$) эса n га бўлинмайди. Бундай псевдо туб сонларнинг энг кичиги $n = 341$ лиги аниқланган, яъни ($2^{341} - 2$) сони 341 га бўлинади, ($3^{341} - 3$) эса 341 га бўлинмайди.

Бу чегарадан кейин шундай псевдо туб сонлар мавжуд эмаслиги кўрсатилмаган. Агар улар яна мавжуд бўлса, уларнинг сони чекли ёки чексизлиги маълум эмас. Албатта, $2^{p-1} - 1$ сони p^2 га бўлинмайдиган туб сонлар ҳам мавжуд. Шу хоссага эга бўлган туб сонларнинг чекли ёки чексизлиги аниқ эмас.

18) 1933 йилда немис математиги Х. Хейльброннинг исботлашига кўра 1^{250} , 2^{250} , 3^{250} , ..., n^{250} , $(n+1)^{250}$ кетма-кетликнинг ёнма-ён турган икки ҳади орасида қандайдир $n = n_0$ дан бошлаб камида битта туб сон ётади.

Совет математиги Чудаков юқорида келтирилган кетма-кетликни 1^4 , 2^4 , ..., n^4 , $(n+1)^4$, ... билан алмаштириш мумкинлигини исбот қилди. 1937 йилда эса Англия математиги А. Е. Ингам 1^3 , 2^3 , 3^3 , ..., n^3 , $(n+1)^3$, ... кетма-кетлик юқорида келтирилган хоссага эга эканлигини исботлади.

¹ $a = 2$ бўлганда $2^n - 2$ сони n га бўлинса, бундай n ларни фақат псевдо туб сон (ёки Пуле сонлари) деб юритилади.

Шу билан бирга n^3 ва $(n+1)^3$ сонлар орасидаги туб сонлар сони n нинг ўсиши билан ўса бориши исботланди.

Берилган натурал n соннинг туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш учун айрим усуллар мавжуд. Лекин уларнинг ҳаммаси ўнғайсиз, чунки жуда кўп ёрдамчи ҳисоблашлар ўтказишни талаб қилади ва амалда ишлатиш қийин. Бу усулларнинг айримларини кўриб ўтамоиз: 1) n сонининг туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш учун уни $\sqrt{n}$ дан кичик бўлган туб сонларга бўлиб кўриш етарли.

Мисол. $n = 919$. $\sqrt{919}$ сондан кичик бўлган барча туб сонлар 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29 лардан иборат, 919 буларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди. Демак 919 — туб сондир. Бу мисол жуда катта сонларнинг туб ёки мураккаблигини шу йўл билан аниқлаш ноқулайлигини яққол кўрсатади.

2) n соннинг туб бўлиши учун $(n-1)! + 1$ нинг n га бўлиниши зарур ва етарлидир. (Бу йўлни математик Вильсон кўрсатди.)

Мисоллар. 1) $n = 7$ — туб сон, чунки $(7-1)! + 1 = 721$ сони 7 га бўлинади, 2) $n = 6$ сони мураккаб, чунки $(6-1)! + 1 = 121$ сони 6 га бўлинмайди. Бу йўл билан ҳам n нинг туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш ноқулай, чунки катта n лар учун $(n-1)!$ сони жуда катта бўлиб, $(n-1)! + 1$ нинг n га бўлиниш ёки бўлинмаслигини ҳисоблаш қийиндир.

$(p-1)! + 1$ сони p га бўлиниши билан биргаликда p^2 га ҳам бўлинадиган p туб сонлари мавжудми, деган савол қўйса бўлади. 30000 дан катта бўлмаган p сонлар ичида фақат 5, 23 ва 563 сонлари учун $(p-1)! + 1$ сони p^2 га бўлинади. 30000 чегарасидан кейин бундай соннинг мавжуд эмаслиги исботланмаган.

Берилган натурал n соннинг туб ёки мураккаб эканлигини П. Ферма томонидан кўрсатилган қуйидаги йўл билан ҳам аниқлаш мумкин.

Фараз қилайлик, m сони $m^2 > N$ тенгсизликни қаноатлантирувчи энг кичик натурал сон бўлсин.

$$m^2 - N, (m+1)^2 - N, (m+2)^2 - N, \dots$$

сонларни тузиб, квадратли сон ҳосил бўлгунча давом эттирамоиз. Агар $(m+k)^2 - N = y^2$ бўлса, $N = (m+k)^2 - y^2$ бўлиб, $N = (m+k+y) \cdot (m+k-y)$ бўлади. Бунда N нинг мураккаб сон эканлиги аниқ бўлади.

Агар N туб сон бўлса, $m + k - y = 1$ бўлади. Айтилганларга мисол келтирамиз.

Мисол. $N = 9271$ бўлсин. Натурал сонларнинг квадратлар жадвалидан қуйидагини аниқлаймиз (бундай жадвалларнинг энг қулайи Барлоу жадвалидир):

$$\begin{aligned} 96^2 &< 9271 < 97^2, \\ 97^2 - 9271 &= 138, \\ 98^2 - 9271 &= 333, \\ 99^2 - 9271 &= 530, \\ 100^2 - 9271 &= 729 = 27^2. \end{aligned}$$

Демак,

$$9271 = 100^2 - 27^2 = (100 - 27)(100 + 27) = 73 \cdot 123 \text{ бўлади.}$$

МЕРСЕНН СОНЛАРИ

Буюк француз математиги Мерсенн (1588—1648) жуда камбағал оиладан бўлиб, ўзи ҳам камбағалликда яшаган. Мерсенн $M_n = 2^n - 1$ (n — натурал сон) шаклдаги сонларни текширган. $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ бўлганда мерсенн сонлари деб аталган $M_1 = 1, M_2 = 3, M_3 = 7, M_4 = 15, \dots$ сонлар ҳосил бўлади. Бу сонларнинг айримлари туб бўлиб, айримлари эса мураккабдир. M_n туб сон бўлса, мерсенн туб сони деб аталади.

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ бўлганда } M_2 &= 3, \\ n = 3 \text{ бўлганда } M_3 &= 7, \\ n = 5 \text{ бўлганда } M_5 &= 31, \\ n = 7 \text{ бўлганда } M_7 &= 127 \end{aligned}$$

лар ҳосил бўлади. M_k билан k -мерсенн туб сонини белгилаймиз. Шундай қилиб, 3, 7, 31, 127, ... лар мос равишда биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва ҳоказо мерсенн туб сонлари дейилади.

Агар $n = n_1 \cdot n_2$ мураккаб сон бўлса, $M_{n_1 \cdot n_2}$ нинг мураккаб сон бўлишини исботлаш осон:

$$M_n = M_{n_1 \cdot n_2} = (2^{n_1})^{n_2} - 1 = (2^{n_1} - 1)[(2^{n_1})^{n_2-1} + \dots + 1].$$

Демак, M_n сони $(2^{n_1} - 1)$ га бўлинади, шунинг учун M_n соннинг мураккаб эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, агар M_n туб сон бўлса, n туб сон бўлади. Лекин ҳар қандай туб сон n учун M_n туб сон бўлавермайди.

Агар p туб сон бўлса, M_p нинг бўлувчилари $(2pk + 1)$ шаклида бўлиши исботланган. ($k \geq 0$ бутун сон). Юқоридагидан, $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$ нинг мураккаб эканлиги аниқланган. M_{11} нинг бўлувчилари $22k + 1 = 2 \cdot 11 \cdot k + 1$; жумладан $2 \cdot 11 + 1 = 23$ ($k = 1, p = 11$); $2 \cdot 4 \cdot 11 + 1 = 8 \cdot 11 + 1 = 89$ ($k = 4, p = 11$).

$M_{101} = 2^{101} - 1$ соннинг бўлувчиси $2 \cdot k \cdot 101 + 1$ шаклида эканлиги маълум бўлса-да, лекин унинг бирорта ҳам бўлувчиси аниқланган эмас. Шунинг учун ҳам M_{101} соннинг кўп вақтлардан бери туб ёки мураккаблиги аниқ эмас эди. Бу соннинг мураккаблиги бошқа йўл билан кейинчалик исботланди.

31 хонали $2^{101} - 1$ нинг иккита ҳар хил туб сон кўпайтмасидан иборат эканлиги ва унинг энг кичик туб бўлувчиси камида 11 хонали сон эканлиги ҳам исботланган.

Мерсенн 1644 йилда исботсиз $p = 13, 17, 19, 31$ бўлганда $(2^p - 1)$ шаклдаги сон туб сон бўлишини айтган. $2^{31} - 1$ нинг туб сон эканлигини биринчи бўлиб Л. Эйлер исботлаган эди.

Агар $p = 8k + 7$ шаклдаги сон туб сон бўлса, $\frac{M_{p-1}}{2}$ нинг p га бўлиниши кераклиги ҳам исботланган.

Бундан $p = 8k + 7$ шаклдаги сон туб сон бўлса, M_p кўринишдаги сонларнинг кўпи мураккаб эканлиги аниқланган.

$M_{23} = 2^{23} - 1$ сони 47 га бўлинади, чунки $p = 23 = 8 \cdot 2 + 7$ ва $M_{\frac{p-1}{2}} = M_{11} = 2047$ сони 23 га бўлинади.

$M_{33} = 2^{33} - 1$ сони 67 га бўлинади.

$M_{131} = 2^{131} - 1$ сони 263 га бўлинади.

$M_{179} = 2^{179} - 1$ сони 359 га бўлинади.

$M_{191} = 2^{191} - 1$ сони 383 га бўлинади.

$M_{223} = 2^{223} - 1$ сони 447 га бўлинади.

Бундай мураккаб сонлар чексиз кўп деб ҳисобланган бўлса-да, лекин бу фикр ҳозиргача ҳам исбот қилинмаган.

Бизга ҳозиргача фақат 24 та мерсенн туб сонлари маълум. Улар қуйидаги p ларга мос келувчи M_p лардир:

$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213$ ва 19937. M_{127} ва M_{521} мерсенн туб сонлари орасида 66 та мерсенн мураккаб сонлари мавжудлиги аниқланган.

M_{1279} мерсенн туб сонининг 386 хонали эканлиги аниқланди. Бундан олдин 39 хонали M_{127} мерсенн туб сони 75 йил мобайнида маълум бўлган энг катта туб сон бўлиб келаётган эди.

Шундай қилиб, энг катта мерсенн сони ва шу билан бирга ҳозиргача маълум бўлган энг катта (12003 хонали) туб сон $M_{24} = 2^{19937} - 1$ дир. M_{11213} нинг туб эканлигини ва у 3376 хонали эканлигини 1963 йилда электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида Дональд Желлис кўрсатди.

$2^{257} - 1 = 2315841789476323908471419700173758457065399693311281128078915168015826259279871$ эканлиги ҳисобланган.

$2^{5002331} - 1$ нинг 1,5 миллиондан ортиқ рақамли эканлиги ва 10004663 унинг бўлувчиси эканлиги аниқланган. $p = 521$ дан бошлаб мерсенн сонларининг тублиги электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида исботланди.

Люк ва Лемерлар исми билан боғлиқ бўлган қуйидаги теорема мавжуддир:

$p \neq 2$ туб сон бўлганда M_p мерсенн сонининг туб сон бўлиши учун M_p сони қуйидаги йўл билан ҳосил қилинадиган кетма-кетликнинг $(p - 1)$ -ҳадининг бўлувчиси бўлиши зарур ва етарлидир:

$$u_1 = 4; \quad u_{n+1} = u_n^2 - 2; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Бу кетма-кетликнинг биринчи ҳадлари 4, 14, 194, 1416, 37634, 317954, ... лардир. (Люк кетма-кетлиги.)

M_{4423} нинг туб эканлиги қуйидагича кўрсатилган. Юқоридаги кетма-кетликнинг $p - 1 = 4423 - 1 = 4422$ ҳадини топиб, у сонни $M_{4423} = 2^{4423} - 1$ га қолдиқсиз бўлиниши кўрсатилган.

Шу теоремага асосан $2^{149} - 1$ нинг мураккаб эканлигини аниқлаш учун Д. Лемер 70 соат вақт сарфлаган. $2^{128099} - 1$ нинг 256199 га бўлинишини аниқлаш учун ёш совет математиги Слободский 12 соат вақт сарф қилган.

Албатта, бу оғир иш бўлиб, фақат электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамидагина текшириб кўриш мумкин бўлган мисолдир.

Худди шу йўл билан 31 хонали M_{101} нинг мураккаб эканлиги ҳам кўрсатилган, чунки ҳисоблаш билан кўрсатилган кетма-кетликнинг 100-ҳади M_{101} га бўлинмаган.

Люк юқоридаги теоремага асосланиб, $2^{127} - 1$ нинг туб эканлигини кўрсатган эди. Бунинг учун $2^{127} - 1 = 17014118346016923173168730371588441$ ифода Люк

кетма-кетлигининг 05727 126-ҳадининг бўлувчиси эканлигини кўрсатди.

Қуйидаги гипотеза ҳам мавжуддир:

$p_1 = 3$; $p_n + 1 = 2^{p_n} - 1$ шаклдаги сонларнинг ҳаммаси туб сонлардир.

Мисол. $p_1 = 3$; $p_2 = 2^3 - 1 = 7$; $p_3 = 2^7 - 1 = 127$; $p_4 = 2^{127} - 1$ — туб сон ва ҳоказо.

Мураккаб мерсенн сонларининг каноник ёйилмасида ҳам туб сонлар 1-даражада ёки квадратли сон йўқ деган гипотеза мавжуд.

Люк қуйидаги жадвални тузди:

p туб сон	$2^p - 1$ мерсенн сони	$d > 1$ бўлув- чиси	$2^p - 1$ нинг ҳолати
11	$2^{11} - 1$	23	мураккаб
13	$2^{13} - 1$	ўзи	туб сон
17	$2^{17} - 1$	ўзи	туб сон
19	$2^{19} - 1$	ўзи	туб сон
23	$2^{23} - 1$	47	мураккаб
29	$2^{29} - 1$	233	мураккаб
31	$2^{31} - 1$	ўзи	туб сон
37	$2^{37} - 1$	233	мураккаб
41	$2^{41} - 1$	13367	мураккаб
43	$2^{43} - 1$	431	мураккаб
47	$2^{47} - 1$	2351	мураккаб
53	$2^{53} - 1$	6361	мураккаб
59	$2^{59} - 1$	179951	мураккаб
61	$2^{61} - 1$	ўзи	туб сон
67	$2^{67} - 1$	?	мураккаб
71	$2^{71} - 1$	228479	мураккаб
73	$2^{73} - 1$	439	мураккаб
79	$2^{79} - 1$	2687	мураккаб
83	$2^{83} - 1$	167	мураккаб
89	$2^{89} - 1$	ўзи	туб сон
97	$2^{97} - 1$	11447	мураккаб
101	$2^{101} - 1$	?	мураккаб
103	$2^{103} - 1$	?	мураккаб
107	$2^{107} - 1$	ўзи	туб сон
109	$2^{109} - 1$	74518807	мураккаб
113	$2^{113} - 1$	3391	мураккаб
127	$2^{127} - 1$	ўзи	туб сон

Албатта, бу ҳол мерсенн сонлари орасида мураккаблари ёки тублари чекли ёки чексизлиги ҳақида ҳеч нарса айтолмайди.

Шундай гипотеза ҳам мавжуддир.

$q_0 = 2$, $q_{n+1} = 2^{q_n} - 1$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) қонунига асосан топилган $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари туб сонлардан иборат.

Бу $n \leq 4$ учун тўғри бўлиб чиқади, лекин $n = 5$ учун q_5 сони 10^{37} тадан ортиқ рақамли сон бўлиб, унинг туб ёки мураккаблиги аниқланмагандир.

Агар $p = 4k + 3$ ва $q = 2p + 1 = 8k + 7$ нинг иккаласи ҳам туб бўлса, у ҳолда M_p мерсенн сонининг q га бўлинишини ўз вақтида Эйлер кўрсатган эди.

Мисол. $p = 11 = 4 \cdot 2 + 3$; $q = 2p + 1 = 23$; шунинг учун $M_{11} = 2^{11} - 1$ сони $q = 23$ га бўлиниши керак. (Люк жадвалига қаранг.)

Ҳар хил бўлувчиларга эга бўлган мураккаб сонлар мавжуддир. Дюжина — 12, Гросс — 144 ёки 24 соат, 1440 минут, 86400 секундлардан иборат бўлган 1 сутка, 360', 21600'', 1896000'' дан иборат бўлган айлана ҳар хил бўлувчиларга эга бўлган сонларга мисол бўла олади.

Агар натурал n соннинг каноник ёйилмаси (туб кўпайтувчиларга ажратмаси) $n = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \dots \cdot p_k^{\mu}$ шаклида бўлса, ($p_1, p_2, \dots, p_k$ лар туб сонлар, $\alpha, \beta, \dots, \mu$ лар натурал сонлар), у ҳолда n нинг ҳар хил бўлувчилари сони $\tau(n)$ қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\tau(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\mu + 1).$$

Мисол. $n = 84400 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ учун

$$\tau(n) = (7 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 96,$$

$n = 1896000 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ учун

$$\tau(n) = (7 + 1)(4 + 1)(3 + 1) = 160.$$

n нинг кўп қийматлари учун $\tau(n)$ нинг қийматлар жадвалини Маурер тузган. Унинг жадвали бўйича 21621600 сони 576 та ҳар хил бўлувчига эгадир. Қуйидаги каноник ёйилма ҳам маълум: $125000 \dots 000 = 2^{2^{3^2}} \cdot 3 \cdot 5^{3^{2^2}} \cdot 19$

($\tau(n) = \tau(n + 1)$ тенгликни қаноатлантирадиган n сонлар мавжуд.

Мисол. $\tau(14) = \tau(15) = 4$,

$$\tau(21) = \tau(22) = 4.$$

Шундай хоссага эга бўлган n сонлар чекли ёки чексизлиги ҳозиргача маълум эмас. Агар шундай n лар сони чексиз кўплиги исботланса, у ҳолда чексиз кўп n лар учун $\tau(n) = \tau(n+1) = 4$ бўлар эди. Бу ҳолда ҳар бири иккита ҳар хил туб сонлар кўпайтмасидан иборат бўлган n ва $n+1$ жуфтликларнинг чексиз кўпи мавжуд бўлар эди.

$$\begin{aligned}\tau(21) = \tau(22) = 4; & \quad 21 = 3 \cdot 7, \quad 22 = 2 \cdot 11, \\ \tau(33) = \tau(34) = 4; & \quad 33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17.\end{aligned}$$

$\varphi(n)$ эйлер сонли функциясига алоқадор баъзи бир масалаларни кўриб ўтамиз. Маълумки, $\varphi(1) = 1$ ва $\varphi(n)$ n дан кичик ва n билан ўзаро туб бўлган сонлар сонини ифода қилади.

Мисол. $\varphi(18) = 6$. $\varphi(m) = \varphi(n)$ тенгликни қаноатлантирадиган m ва n лар мавжуддир.

Мисол. $\varphi(8) = \varphi(10) = 4$. Ҳар қандай натурал m сон учун $\varphi(m) = \varphi(n)$ тенгликни қаноатлантирадиган натурал n соннинг мавжудлигини исботлаш мумкинми, деган савол қўйилиши мумкин. Бу масала умумий ҳолда исботланмаган. Айрим хусусий ҳоллар учун масала ҳал қилинган.

1) m тоқ сон бўлганда $\varphi(2m) = \varphi(m)$ эканлиги кўрсатилган.

Мисол. $\varphi(10) = \varphi(5) = 4$.

2) Агар $2^n + 1$ туб сон бўлса, $\varphi(2^{n+1}) = \varphi(2^n + 1) = 2^n$ бўлади.

Мисол. $\varphi(2^4 + 1) = \varphi(17) = \varphi(2^4 + 1) = \varphi(32) = 16 = 2^4$.

$n = 2$, $n = 6$ лардан ташқари $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$ эканлиги исботланган.

Мисол. $n = 30$; $\varphi(30) = 8$, $8 > \sqrt{30}$.

$\varphi(n)$ ва $\tau(n)$ сонли функциялар орасида қандай n лар учун $\varphi(n) = \tau(n)$ тенглик ўринли бўлади?

Бу муносабат $n = 1, 3, 8, 10, 18, 24$ ва 30 лар учун ўринли, яъни $\varphi(1) = \tau(1) = 1$,

$\varphi(3) = \tau(3) = 2$, $\varphi(8) = \tau(8) = 4$, $\varphi(10) = \tau(10) = 4$, $\varphi(18) = \tau(18) = 6$, $\varphi(24) = \tau(24) = 8$, $\varphi(30) = \tau(30) = 8$.

$\varphi(n) = \tau(n)$ тенгликни қаноатлантирадиган юқоридаги сонлардан бошқа натурал сонлар мавжуд эмаслиги исботланган.

$n > 30$ учун $\varphi(n) > \tau(n)$ эканлигини исботлаш мумкин.

Мисол. $n = 32$ учун $\varphi(32) = 16$; $\tau(32) = 6$; $16 > 6$.

$\varphi(n) = \varphi(n+1)$ ни қаноатлантирадиган n лар мавжуд.

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \varphi(2) = 1, & \varphi(194) &= \varphi(195) = 96, \\ \varphi(3) &= \varphi(4) = 2, & \varphi(255) &= \varphi(256) = 128, \\ \varphi(15) &= \varphi(16) = 8, & \varphi(495) &= \varphi(496) = 240, \\ \varphi(104) &= \varphi(105) = 48, & \varphi(584) &= \varphi(585) = 288, \\ \varphi(164) &= \varphi(165) = 80, & \varphi(975) &= \varphi(976) = 480.\end{aligned}$$

Бундай хоссага эга бўлган n лар сони чексиз кўп деган гипотеза мавжуддир. Туб сонлар учун Эйлер функциясининг яна бир хоссаси маълум: $n = p$ туб бўлганда $\varphi(p) = p - 1$ бўлиб, $p - 1$ сони $\varphi(p)$ га бўлинади. Масалан, $\varphi(11) = 10$; 10 сони эса $\varphi(11)$ га бўлинади. Шу муносабат мураккаб сонлар учун ҳам ўринлими, деган савол қўйилиши мумкин. 1932 йилда математик Лемер, бундай мураккаб n сонлар мавжуд эмас, деб айтган эди. Лекин бу гипотеза ҳозиргача ҳам исботланмаган.

Яна бошқа савол ҳам қўйилган эди:

$k\varphi(m) = m - 1$ тенгликни қаноатлантирадиган мураккаб m сонлари мавжудми? (m — натурал сон.) Англиялик математикнинг исботига кўра, агар шундай мураккаб m сон мавжуд бўлса, у камида 11 та туб сонлар кўпайтмасидан иборат бўлиши керак.

$$\begin{aligned}n = 6 \text{ учун } \varphi(6) &= 2; \pi(6) = 3; \pi(6) > \varphi(6), \\ n = 20 \text{ учун } \varphi(20) &= 8; \pi(20) = 8; \pi(20) = \varphi(20), \\ n = 21 \text{ учун } \varphi(21) &= 12; \pi(21) = 8; \pi(21) < \varphi(21).\end{aligned}$$

Ҳар қандай $n > 90$ учун $\varphi(n) > \pi(n)$ бўлади, деган гипотеза мавжуд эди.

1951 йилда бу гипотезани математик Мозер исботлади. Кейинчалик математик Эрдеш ҳам бошқа йўл билан бу гипотезанинг исботини берди.

Агар $S(m)$ ифода m билан ўзаро туб бўлган сонлар йиғиндисини ифодаласа, у ҳолда $m > 1$ учун $S(m) = \frac{m \cdot \varphi(m)}{2}$ формула ўринли бўлади.

Мисол. $m = 12$, $\varphi(12) = 4$, $S(12) = 1 + 5 + 7 + 11 = 24$;

$$S(12) = \frac{12 \cdot \varphi(12)}{2} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24.$$

Миллионга ҳар хил бўлувчига эга бўлган натурал сонларнинг энг кичиги $n = (1267650600228229401496703205376)^{66} \times (847288609443)^4$ сони эканлигини Мерсенн кўрсатди. Бу 2028 хонали сондир. Биринчи қавсдаги сон 100 та бўлув-

чига эга. Юқорида аниқланган $S(m)$ функция умуман ўсувчидир. Лекин туб сонларнинг чексизлиги $S(m)$ нинг тез ўсишига йўл қўймайди.

Энди мерсенн сонларининг яна бир хоссасини кўриб ўтамыз: $(2^n - 1)$ кўринишдаги мерсенн сони фақат иккита туб сонларнинг кўпайтмасидан иборат бўлган ҳоллар ҳам маълумдир.

10^6 дан кичик бўлган бундай шаклдаги сонлар $2^4 - 1 = 3 \cdot 5$, $2^9 - 1 = 7 \cdot 73$; $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Бундай хоссали ва 10^6 дан катта бўлган мерсенн сонлари ҳам мавжуд.

$M_n = 2^n - 1$ сонлар $n = 23, 37, 49, 67$ ва 101 лар учун фақат иккита туб сонлар кўпайтмасидан иборат. Бундай сонлар сони қанчалиги маълум эмас. Барча $n \geq m$ лар учун n ва $n + 1$ ларнинг камида бири ҳеч бўлмаганда иккита ҳар хил туб бўлувчига эга бўлган шундай m натурал сони мавжудми, деган савол қўйилиши мумкин.

Агар шундай m сони мавжуд бўлса, $m \geq 2^{19937}$ бўлиши кераклиги аниқ, чунки юқорида айтилганидек, $2^{19937} - 1$ ва 2^{19937} лар фақат 1 та туб бўлувчига эга. Шуниси қизиқки, агар шундай сон мавжудлиги исботланса, у ҳолда Ферма ва Мерсенн туб сонларининг сони чеклилиги келиб чиқади.

$n^2 - 1$ ва $n^2 + 1$ сонлари фақат 3 та ҳар хил туб сонлар кўпайтмаси кўринишида ёзилиши мумкин бўлган натурал n сонлар мавжуддир. Мисол.

1) $n^2 - 1$ шаклдагилар $n = 14, 16, 20, 22, 32$ лар учун:
 $14^2 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 13$; $16^2 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 17$; $20^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 19$;
 $22^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 23$; $32^2 - 1 = 3 \cdot 11 \cdot 33$.

2) $n^2 + 1$ шаклдагилар $n = 13, 17, 21, 23, 27, 112$ лар учун

$$\begin{array}{ll} 13^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 7; & 23^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 53; \\ 17^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 19; & 27^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 73; \\ 21^2 + 1 = 2 \cdot 13 \cdot 17; & 112^2 + 1 = 5 \cdot 13 \cdot 193. \end{array}$$

Ҳар қандай $S > 1$ учун чексиз кўп натурал n сони мавжудки, улар учун $n^2 - 1$ S та ҳар хил туб сонлар кўпайтмасидан иборатдир.

$S = 2$ бўлганда $n - 1$ ва $n + 1$ лар эгизак туб сонлар жуфтлиги дейилади (бундай сонлар ҳақида келгуси параграфларнинг бирида сўз юритилади).

Энди ҳозиргача ечилмаган айрим масалаларни баён қиламиз.

1) Ҳар бири фақат битта туб бўлувчига эга бўлган ва кетма-кет жойлашган натурал n ва $n+1$ сонлар мавжуддир. Масалан, $n=2, 3, 4, 7, 8, 16, 31, 127, 256$ лар учун n ва $n+1$ лар юқорида кўрсатилган хоссага эгадир.

Шундай хоссага эга бўлган кетма-кет жойлашган натурал сонлар жуфтларидан фақат 29 таси маълумдир, уларнинг энг катта жуфтлиги $2^{19937} - 1$ ва 2^{19937} дир. Бундай жуфтликлар сони чексиз кўп деган гипотеза ҳам мавжуд.

2) Ҳар бири иккита ҳар хил туб сонларнинг кўпайтмасидан иборат бўлган ва кетма-кет жойлашган учта натурал сон мавжуддир. Масалан,

$$\begin{array}{lll} 33=3 \cdot 11; & 34=2 \cdot 17; & 35=5 \cdot 7, \\ 93=3 \cdot 31; & 94=2 \cdot 47; & 95=5 \cdot 19. \end{array}$$

Бундай 3 таликлар чексиз деган гипотеза мавжуд.

3) $n > 7$ натурал сондан бошлаб кетма-кет жойлашган учта натурал соннинг камида бири ҳеч бўлмаганда 2 та ҳар хил туб бўлувчиларга эга. Масалан; $n=17; 17, 18, 19$ лардан 18 сони 2 ва 3 туб бўлувчиларга эга;

$n=24; 24, 25, 26$ лардан 24 ва 26 лар иккита ҳар хил туб бўлувчиларга эга.

4) $n, n+1, n+2$ лар айрим n лар учун иккита ҳар хил туб сонлар кўпайтмасидан иборат.

Мисол. $n=33, 93, 141$.

$$n=33 \text{ учун } 33=3 \cdot 11, \quad 34=2 \cdot 17; \quad 35=5 \cdot 7,$$

$$n=93 \text{ учун } 93=3 \cdot 31; \quad 94=2 \cdot 47; \quad 95=5 \cdot 19,$$

$$n=141 \text{ учун } 141=3 \cdot 47; \quad 142=2 \cdot 71; \quad 143=11 \cdot 13.$$

Шундай натурал n сонлар чексиз кўп деган гипотеза мавжуд.

МУКАММАЛ СОНЛАР

Евклид ўзининг «Негизлар» ида мукаммал сонлар билан шуғулланган. У мукаммал сонлар деб ўзининг хос бўлувчилари (яъни ўзидан ташқари) йиғиндисига тенг бўлган сонларни атаган. Агар n сони хос бўлувчиларининг йиғиндисини $\sigma(n)$ билан белгиланса, мукаммал сон учун $\sigma(n) = n$ бўлади. Масалан, $6=1+2+3$,

$$28=1+2+4+7+14 \text{ ва ҳоказо.}$$

Юнон олими Платон ҳам мукаммал сонлар ҳақида ёзган. Платоннинг ҳикматли сўзларидан бирида: «6 рақами жуда ажойиб сондир» деган жумла учрайди. Римликларда ўтказиладиган базмларда олтинчи ўринни энг ҳикматли, донишманд одамларга тақдим этиш одат бўлиб қолган. 1917 йилда Римда жуда катта ер ости саройи топилди, унда 28 та ҳужра бўлган. Аниқланишича, бу сарой Пифагор номидаги академия бўлиб, унда 28 та аъзо бўлган. Қадимий грекларга (икки минг йил олдин) фақат 4 та мукаммал сонлар маълум бўлган: 6, 28, 496, 8128.

Евклид қуйидаги йўл билан мукаммал сонлар ҳосил қилишни баён этган эди:

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ... геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари йиғиндиси ҳисобланганда туб сон ҳосил бўлса, у сонни охириги қўшилувчига кўпайтириб, мукаммал сон ҳосил қилинади. Масалан,

$$1+2=3\text{—туб сон;}$$

$$(1+2)\cdot 2=6\text{—мукаммал сон;}$$

$$1+2+2^2=7\text{—туб сон;}$$

$$(1+2+2^2)\cdot 2^2=28\text{—мукаммал сон.}$$

Шу йўл билан мукаммал сонларни ҳамма вақт ҳосил бўлишини қуйидаги Евклид теоремаси билан баён этиш мумкин:

Агар $n = 2^{k-1} (2^k - 1)$ ($k > 1$ — натурал сон) бўлиб, $2^k - 1$ туб сон бўлса, n мукаммал сон бўлади.

Мисол. $k \leq 7$ бўлганда $2^k - 1$ ифода $k = 2, 3, 5, 7$ лар учун мос равишда 3, 7, 31, 127 каби туб сонларни беради.

Уларга Евклид вақтида маълум бўлган 6, 28, 496 ва 8128 каби мукаммал сонлар мос келади.

Евклиддан кейин мукаммал сонлар соҳасидаги янгиликлар Эйлер номи билан боғлиқдир. У қуйидаги теоремани исбот қилди:

Ҳар қандай мукаммал n сон $2^{k-1}(2^k - 1)$ шаклда бўлади ва $(2^k - 1)$ туб сон бўлади.

Шундай қилиб, $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ жуфт мукаммал сонларнинг умумий кўринишидир.

Юқоридаги мулоҳазаларга кўра $2^k - 1$ шаклдаги туб сонлар Мерсенн туб сонлари бўлиб, $k = p$ туб сон бўлиши керак.

Шундай қилиб, $k=p$ бўлганда $n=2^{p-1}(2^p-1)$ мукам-
мал соннинг умумий кўриниши бўлади. Айрим p туб сон-
лар учун $n=2^{p-1}(2^p-1)$ мукаммал сонлар жадвалини кел-
тирамиз.

p	2^{p-1}	2^p-1	Мукаммал сонлар
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8128
13	4096	6191	33550336
17	65536	131071	858966956
19	262144	524287	13748691328
31	1073741824	2147483647	23058430008139952128

Бу жадвалдан кўринадики, ундаги ҳар бир мукаммал
сон 6 ёки 28 сонлари билан тугалланган. Умуман, барча
жуфт мукаммал сонлар 6 ва 28 сонлари билан тугал-
ланишини исботлаш мумкин. Бешинчи мукаммал сон 1460
йилда аниқланган. 6, 7, 8- мукаммал сонларни матема-
тик Қатальди XVI асрда топган эди. Фақат XIX асрда
Эгельгоф ва Первушинлар тўққизинчи мукаммал сон
2658455991569831744654692615953842176 ни топдилар. Ай-
рим грек математиклари ўзининг хос бўлувчилари кўпайт-
масига тенг бўлган сонларни ҳам мукаммал сон деб ата-
ганлар. Масалан, $6=1 \cdot 2 \cdot 3$; $8=1 \cdot 2 \cdot 4$; $10=1 \cdot 2 \cdot 5$; $14=1 \cdot 2 \cdot 7$
ва ҳоказолар. 6 сони иккала маънода ҳам мукаммал бўлиб
чиқади. $n=2^{p-1}M_p$, бунда M_p —Мерсенн туб сонлари. Мер-
сенн туб сонларининг ҳозирга қадар фақат 24 таси маълум бўл-
гани учун мукаммал сонларнинг ҳам фақат 24 таси маълум бў-
либ, уларнинг энг кичиги 6 ва ҳозирча энг каттаси
 $n=2^{19936}(2^{19937}-1)$ дир. 386 хонали M_{1279} мерсенн сонига
тегишли мукаммал соннинг 770 хонали эканлиги аниқланган.
Қатальди 6 дан ташқари ҳар қандай жуфт мукаммал сон-
нинг $9n+1$ шаклида бўлишини исботлади.

Агар $n > 28$ жуфт мукаммал сон бўлса, $(n-1)$ ёки $(n-6)$
нинг 7 га бўлиниши исботланган.

Мисол. Учинчи мукаммал сон: $n=496$; $496-6=490$
сони 7 га бўлинади. Тўртинчи мукаммал сон: $n=8128$;
 $n-1=8127$ сони 7 га бўлинади. $p=13$ га мос бўлган бе-

шинчи мукаммал сон 33550336 XV асрда топилган. Лекин у вақтда $2^{17}-1$, $2^{19}-1$ ва $2^{31}-1$ ларнинг туб эканлигини исботламасдан, уларни шундай қабул қилганлар. Уларнинг туб сон эканлигини кейинчалик Эйлер кўрсатган эди. 1914 йилга келиб 12 та мукаммал сон маълум бўлди. Қуйида баъзи мукаммал сонлар ва уларнинг топилиш вақти ҳамда муаллифини кўрсатиб ўтамиз.

$p = 61$ бўлганда тўққизинчи мукаммал сон: $2^{60} (2^{61}-1) = 2^{60} \cdot 2305843009213693951$ (37 рақамли, И. М. Первушин, 1833 йил).

$p = 89$ бўлганда ўнинчи мукаммал сон: $2^{88} (2^{89}-1) = 2^{88} \cdot 618970019642690137449562111$ (54 хонали, Тарри, Поуре, 1911 йил).

$p = 107$ бўлганда ўн биринчи мукаммал сон: $2^{106} \times 162259276829213363391538010288127$ (65 хонали, Факамбер, Поуре, 1914 йил).

$p = 127$ бўлганда ўн иккинчи мукаммал сон: $2^{126} (2^{127}-1)$ (77 хонали, Лнекс, Факамбер, 1915 йил).

1952 йилда электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида 17-мукаммал соннинг 1373 хонали эканлиги аниқланди. 1957 йилда 18-мукаммал сон $2^{3216} (2^{3217}-1)$ нинг 2000 дан ортиқ хонали эканлиги исботланди. Юқорида келтирилган мукаммал сонлар жуфт мукаммал сонлардир.

Тоқ мукаммал сонлар мавжудми, деган савол қўйилган. Ҳозиргача бирорта ҳам тоқ мукаммал сон топилмаган ва уларнинг мавжуд эмаслиги исботланмаган. Бу соҳада қилинган айрим кашфиётлар билан танишиб ўтамиз.

$n=p$ тоқ туб соннинг мукаммал бўла олмаслиги аниқ, чунки p туб соннинг бўлувчилари 1 ва p бўлиб, улардан фақат 1 сони p нинг хос бўлувчисиدير.

p туб сон бўлганда $n = p^\alpha$ нинг (α —натурал сон) мукаммал сон бўла олмаслигини исботлаш мумкин. Тоқ мукаммал сонлар мавжуд бўлган тақдирда улар жуда ҳам катта сон бўлиши исботланган. Уларнинг ҳатто бирортаси ҳам 10^{36} ва e^{62729} ($e=2,71$, ...—иррационал сон) дан кичик бўла олмаслиги исботланган.

Агар тоқ мукаммал сонлар мавжуд бўлса, у ҳолда улар фақат $p^{4k+1} \cdot m^2$ кўринишда бўлиб (бунда $p=4e+1$ —туб сон, $(m,p)=1$), тоқ мукаммал соннинг ҳар хил туб бўлувчилар сони 2800 дан кўп бўлиши керак. Бу йўлда эришилган ютуқлар совет математиги Градштейн (1925 йил) номи билан боғлиқдир.

Математик Хетнинг кўрсатишича, ҳар қандай 6 дан ташқари жуфт мукаммал сонни $2^{\frac{p-1}{2}}$ та кетма-кет тоқ сонларнинг кублари йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин.

Мисол.

$$28 = 1^3 + 3^3,$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3,$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

$$33550336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 127^3.$$

$p=7$ бўлганда мукаммал сон 8128 келиб чиқади (жадалга қаранг). Шунинг учун 8128 сони $2^{\frac{7-1}{2}} = 8$ та тоқ сон кубларининг йиғиндисидан иборатдир. Ҳар қандай мукаммал сон 2 нинг кетма-кет даражалари йиғиндисидан иборат:

$$6 = 2^1 + 2^2,$$

$$28 = 2^2 + 2^3 + 2^4,$$

$$496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8,$$

$$8128 = 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12},$$

$$33550336 = 2^{12} + 2^{13} + \dots + 2^{24}.$$

28 дан бошлаб, ҳар бир маълум бўлган мукаммал сонларнинг рақамларини кетма-кет қўшиб, ҳосил бўлган сон устида ҳам шундай йиғиндилар тузиб борилса, охирида 1 ҳосил бўлади:

$$28 \text{ учун } 1+8=10; \quad 1+0=1;$$

$$496 \text{ учун } 4+9+6=19; \quad 1+9=10; \quad 1+0=1;$$

$$8128 \text{ учун } 8+1+2+8=19; \quad 1+9=10; \quad 1+0=1;$$

$$33550336 \text{ учун } 3+3+5+5+0+3+3+6=28,$$

$$2+8=10; \quad 1+0=1.$$

Бу параграфнинг охирида ўта мукаммалмас ва ўта мукаммал сонлар ҳақида қисқача маълумот бериб ўтамиз.

Таъриф. Агар n сони ўзининг хос бўлувчилари йиғиндисидан кичик бўлса, бундай сонга ўта мукаммал, катта бўлса, мукаммал бўлмаган сон деб айтилади.

$\sigma(n) > n$ бўлганда n —ўта мукаммал ва

$\sigma(n) < n$ бўлганда мукаммал бўлмаган бўлади.

Мисол. 1) $n=12$, унинг хос бўлувчилари 1, 2, 3, 4, 6, у ҳолда $\sigma(12)=1+2+3+4+6=16$; $12 < \sigma(12)$, демак, 12 ўта мукаммал сондир;

2) $n=8$, унинг хос бўлувчилари 1, 2, 4, у ҳолда

$$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 = 7; 8 > \sigma(8).$$

демак, $n=8$ мукамал бўлмаган сондир.

Барча бўлувчиларининг йиғиндиси бир-бирига тенг бўлган натурал n ва $n+1$ сонлар ҳам мавжуд.

Мисол. 14 ва 15 нинг бўлувчилари йиғиндиси 24 га, 206 ва 207 нинг бўлувчилари йиғиндиси 312 га тенг.

$n < 10000$ бўлганда, яъни $n = 14, 206, 957, 1334, 1364, 2685, 2974$ ва 4364 бўлганда $S(n) = S(n+1)$ эканлиги текширилган.

Шундай натурал n сонлар чексиз кўп деган гипотеза мавжуд. Агар n нинг каноник ёйилмаси

$$n = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \dots \cdot p_k^{\lambda}$$

шаклида бўлса,

$$S_n = \frac{p_1^{\alpha+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\beta+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\lambda+1} - 1}{p_k - 1}$$

бўлади.

$S(n) = 2n - 1$ тенглама $n = 2^{\alpha}$ лар учун (α — натурал сон) ечимга эга эканлигини оsonлик билан кўрсатиш мумкин (ўйлаб кўринг). Лекин $S(n) = 2n + 1$ тенглама ечимга эгани, деган саволга жавоб бера олмаймиз.

Математик Католин қуйидаги кетма-кетликлар билан шуғулланган:

$$n, \sigma(n), \sigma(\sigma(n)), \sigma(\sigma(\sigma(n))), \dots$$

Ҳар қандай $n > 1$ учун бу кетма-кетлик даврий кетма-кетлик ёки 1 сони билан тугалланадиган кетма-кетлик бўлиши мумкин.

Математик Пуле $n=936$ бўлганда 189 та ҳаддан иборат бўлган ва энг катта ҳади 15 та рақамли бўлган 936, 1794, 2238, 2250, ..., 74, 40, 50, 43, 1 кетма-кетлик ҳосил бўлишини қийинчилик билан ҳисоблаб топган. Агар n мукамал сон бўлса, юқоридаги кетма-кетлик $n, n, n, \dots$ га айланади, чунки $\sigma(n) = n$, $\sigma(\sigma(n)) = n \dots$ бўлади.

$S(n) = kn$ бўлган натурал сонлар ҳам мавжуд. Бундай сонларга каррали мукамал сонлар дейилади.

$k=5$ бўлганда каррали мукамал сонларнинг 6 таси,

$k=6$ бўлганда каррали мукамал сонларнинг 35 таси,

$k=7$ бўлганда каррали мукамал сонларнинг 66 таси,

$k=8$ бўлганда каррали мукамал сонларнинг 3 таси мавжудлиги ҳисобланган.

Фараз қилайлик, n сонининг каноник ёйилмасидаги ҳар хил туб сонлар сони 4 дан катта бўлмасин. Бу ҳолда уч каррали мукамал сон (яъни $S(n) = 3n$) фақат $n_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $n_2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ лар учун бўлганлиги кўрсатилган.

Бу ҳолда

$$S(n_1) = S(2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 360 \text{ га тенг.}$$

$$n_1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120, \quad 360 = 3 \cdot 120,$$

$$S(n_1) = \frac{2^{3+1} - 1}{2-1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3-1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5-1} = 360.$$

Бу ҳолларда $S(n)$ ни топиш учун n нинг ҳамма бўлувчилари олинади.

БАХТЛИ, ҚУЛАЙ, ДЎСТ ВА ТУҒМА СОНЛАР

1. Бахтли сонлар.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, ... (1)

тоқ сонлар кетма-кетлигидан қуйидагича янги кетма-кетлик тузамиз.

$u_1 = 1$ ва u_1 дан катта бўлган энг кичик тоқ сон 3 ни u_2 деб оламиз. Энди (1) кетма-кетликнинг ҳар бир учинчи элементини ўчирамиз. Натижада ундаги 5, 11, 17, ... рақамлар ўчирилиб.

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 27, 31, 37, ... (2)

кетма-кетлик ҳосил бўлади. (2) кетма-кетликнинг $u_2 = 3$ дан кейинги ўчирилмасдан қолган элементи 7 ни u_3 деб оламиз: $u_3 = 7$. Энди (2) кетма-кетликнинг ҳар бир еттинчи элементини ўчирамиз. Натижада

1, 3, 7, 9, 13, 15, 25, 27, 31, 37, ... (3)

кетма-кетлик ҳосил бўлади. (3) да $u_3 = 7$ дан кейин ўчирилмаган ҳадни $u_4 = 9$ деб оламиз. Энди (3) кетма-кетликнинг ҳар бир 9-ҳадини ўчирамиз ва ҳоказо. Шу йўл билан шундай кетма-кетликни ҳосил қиламизки, унинг 100 дан кичик бўлган ҳадлари қуйидагилардан иборат бўлади:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 53, 63, 67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99, (4)

Шу йўл билан тузилган чексиз кетма-кетликнинг ҳадлари бахтли сонлар деб аталади. Бахтли сон деб ном бе-

рилишига сабаб, уларнинг ўчирилмасдан қолганлиги бўлса керак. (4) кетма-кетликда чексиз кўп туб сонлар бор, деган гипотеза мавжуд бўлса-да, лекин бу масала ҳозиргача исбот қилинмаган. 98600 гача бўлган бахтли сонлар орасида 715 та туб бахтли сон мавжудлиги ҳисобланган.

2. Қўлай сонлар. Қўйидаги теорема ўринлидир:

Агар натурал n сон учун

$$\left. \begin{aligned} n &= A\alpha^2 + B\beta^2 \\ n &= A\alpha_1^2 + B\beta_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

муносабатлар ўринли бўлса (бунда A, B —натурал, $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ —нолдан фарқли бутун сонлар), у ҳолда n мураккаб сон бўлади ($A=B$ бўлганда ёйилма α ва β ларнинг ишоралари билан фарқ қилсалар, улар бир хил ёйилмалар деб қабул қилинади).

Агар натурал n сони учун(*)нинг биринчиси ўринли бўлса, у ҳолда n туб сон бўлмаслиги мумкин.

Мисол. 1) $2501 = 1^2 + 50^2 = 10^2 + 49^2$ (бунда $A=B=1$), демак, 2501 мураккаб сондир; 2) $20 = 4^2 + 2^2$. Лекин 20 мураккаб сон.

Бу теорема катта аҳамиятга эга, чунки унинг ёрдамида берилган соннинг (*) кўринишдаги иккита ёйилмасини топиш натижасида, у соннинг мураккаблигини аниқлаш мумкин бўлади.

$$p^4 + 4 = (p^2)^2 + 2 = (p^2 - 2)^2 + (2p^2) \cdot (2) \quad (4)$$

айният 5 натурал сондан ташқари, ҳар қандай $p^4 + 4$ кўринишдаги соннинг мураккаб эканлигини кўрсатади.

- Мисол. $85 = (3^2)^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2 = 3^4 + 4$; 85 — мураккаб сон. (2) ёйилма; Софья Жермен айн timer деб юритилади. Юқорида келтирилган теореманинг тескарис ҳамма вақт ўринли бўлмаслиги мумкин, яъни туб сон $A\alpha^2 + B\beta^2$ шаклида ифодаланмаслиги ҳам мумкин. ($A=B$ бўлганда икки квадратлар йиғиндиси келиб чиқади.) Маълумки, $p = 4k + 3$ шаклидаги сон икки квадратлар йиғиндиси шаклида ифодаланмайди ёки бирор мураккаб сон $A\alpha^2 + B\beta^2$ шаклида фақат бир хил йўл билан ифодаланиши мумкин. Масалан, $20 = 4^2 + 2^2$.

$A \cdot B$ кўпайтманинг айрим қийматлари учун юқорида келтирилган теореманинг тескарис ўринли бўлади, яъни у кўпайтма учун ҳар қандай мураккаб сон $A\alpha^2 + B\beta^2$ шаклида икки хил ажралишга эга бўлади.

Эйлер қуйидаги саволни қўйган эди: $A \cdot B$ кўпайтманинг қандай қийматларида туб сон $A\alpha^2 + B\beta^2$ шаклда ифодаланади?

Бу саволга Эйлер тўла жавоб бера олмаган бўлса-да, лекин 1 дан 10000 гача бўлган натурал сонлар ичида бундай кўпайтмаларнинг фақат 65 таси мавжудлигини кўрсатди ва уларни қулай сонлар деб атади.

$14k+1$, $14k+9$, $14k+11$ кўринишдаги тоқ сонларнинг туб сон бўлиши учун уларнинг $x^2 + 7y^2$ шаклида фақат бир хил йўл билан ифодаланишлари исботланган, бунда $(x, y) = 1$, 7 эса қулай сон.

Мисоллар.

$$1) 29 = 14 \cdot 2 + 1 = 1^2 + 7 \cdot 2^2,$$

$$37 = 14 \cdot 2 + 9 = 3^2 + 7 \cdot 2^2,$$

$$67 = 14 \cdot 4 + 11 = 2^2 + 7 \cdot 3^2;$$

2) $11 = x^2 + 7y^2$ (бунда $A \cdot B = 7$), бу ҳол фақат $x = 2$, $y = 1$ бўлганда бўлади.

$$41 = x^2 + 37y^2. \quad A \cdot B = 37, \quad x = 2, y = 1;$$

$$18518809 = 197^2 + 1848 \cdot 100^2 \text{ туб сон. } A \cdot B = 1 \cdot 1848 = 1848.$$

Эйлер топган қулай сонлар қуйидагилардир:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848. Эйлер чидам билан ҳисоблашни 100000 гача давом эттирган бўлса-да, кўрсатилган 65 та қулай сондан бошқа қулай сонлар топилгани йўқ. Бугунги кунда ҳам фақат шу 65 та қулай сон мавжуд.

Қулай сонлар сонининг чеклилигини математик Чоула исбот қилган. Лекин уларнинг қанча эканлигига аниқ жавоб бера олмаймиз.

3. Дўст сонлар.

Пифагордан дўст нима деб сўраганларида, «дўстим—менинг ўзим. Бу 220 ва 284 ларнинг дўстлиги» деб жавоб берган экан.

Бу сонларнинг «дўст» лиги нимадан иборат, деган саволга жавоб берайлик.

Араб математиги Собит ибн Корра (826—901 йиллар) дўст сонларни ҳосил қилиш қондасини берган эди. Кейин-

чалик бу қондани Ферма қайтадан такрорлаб, Декарт 1638 йилда нашр этган эди.

Агар m ва n сонлар учун бирининг барча хос бўлувчилари йиғиндиси иккинчисига тенг бўлса, улар дўст сонлар деб аталади. Бунда соннинг ўзи бўлувчи сифатида қабул қилинмайди.

Масалан, $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ (1, 2, 4, 71 ва 142 лар 284 нинг хос бўлувчилари). $\sigma(n)$ билан n сонининг барча хос бўлувчилари йиғиндисини белгилаймиз. m ва n лар дўст сонлар бўлганда $\sigma(m) = n$; $\sigma(n) = m$ бўлади. $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, ўнг томондаги қўшилиувчилар 220 нинг хос бўлувчиларидир.

Агар m ва n дўст сонлар бўлса, у ҳолда $m = 2^{\alpha} p$; $n = 2^{\alpha} q \cdot l$ бўлиши кераклиги исботланган. Бунда α — натурал сон, p , q , l туб сонлар бўлиб, $p = (2^k + 1)^2 \cdot 2^{2\alpha-k} - 1$; $q = 2^{\alpha} - 1 + 2^{\alpha-k}$, $l = 2^{\alpha} - 1 + 2^{\alpha+k}$ ларга тенг бўлиши кераклиги ҳам исботланган.

Бу формулани Собит ибн Корра ишлаб чиққан.

Агар $k=1$ деб олинса, p , q , l туб сонлар учун $p = 3^2 \cdot 2^{2\alpha-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^{\alpha-1} - 1$; $l = 3 \cdot 2^{\alpha} - 1$ ларни ҳосил қиламиз. α га ҳар хил қийматлар бериб, $k=1$ учун қуйидаги жадвални тузиш мумкин:

α	p	q	l	m	n
2	71	5	11	284	220
4	1151	23	47	18416	17296
7	73727	191	383	4427056	9363584

Албатта ҳар қандай α учун p , q , l лар туб сон бўлавермайди. Шунинг учун α ни шундай танлаш керакки, ҳосил бўлган p , q , l лар туб сонлар бўлсин. α қиймати ўсиши билан p , q , l нинг қийматлари, хусусан p тез ўсади ва шунинг учун p туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш айрим ҳолларда қийин бўлиб қолади.

Айрим $k=5, 7, 9, \dots$ лар учун юқорида келтирилган жадвални тузиш жуда қийин.

Кўриб ўтилган дўст сонлардан ташқари яна бир неча жуфт дўст сонлар мисолини келтирамыз:

2620 ва 2924;	10744 ва 10856;
5020 ва 5564;	17296 ва 18416;
6232 ва 6368;	63020 ва 76084;
66928 ва 66992.	

Дўст сонларни ҳосил қилишда асосий қийинчилик α нинг қандай қийматларида p, q, l лар туб сон бўлишлигини аниқлашдадир. Шунинг учун ҳам барча дўст сонлар тўпламини тасаввур қила олмаймиз.

Ҳозирги кунда 900 тага яқин дўст сонлар жуфти маълумдир. Улар орасида ўзаро туб бўлган дўст сонлар мавжуд эмас.

Топилган кўпгина m ва n дўст сонлар учун $m + n$ йинди 9 га бўлинганлиги аниқланган. Масалан, $m = 2620$ ва $n = 2924$ бўлсин, $m + n = 5544$, бу сон 9 га бўлинади.

Топилган m ва n дўстларнинг фақат 3 та жуфти учун $m + n$ йинди 9 га бўлинмайди. Келтирилган мисолларда ҳамма дўст сонлар жуфт сонлар бўлиб чиқди. Лекин ҳар иккаласи ҳам тоқ бўлган дўст сонлар ҳам мавжуд:

$$m = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13; \quad n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139.$$

Бу ҳолда $m + n = 18690$ сони 9 га бўлинмайди.

Эйлер дўст сонларнинг 60 жуфтини топган эди. Улар орасида ҳар иккаласи ҳам жуфт сон бўлганлари 34 та ва ҳар иккаласи тоқ сонлардан иборат бўлганлари 26 та. Бир жуфт, иккинчиси тоқ бўлган дўст сонлар жуфти мавжудми?

Бу саволга жавоб топилгани йўқ. Агар бундай дўст сонлар мавжуд бўлса, уларнинг ҳар бири 10^{23} дан катта бўлиб, $m \cdot n$ сони 20 тадан ортиқ туб бўлувчига эга бўлиши кераклиги исботланган.

$n, \sigma(n), \sigma(\sigma(n)), \dots$ (а) $(\sigma(n))$ ифода натурал n соннинг n дан ташқари бўлувчилари йиндисини белгилайди).

(а) кетма-кетликда n дўст сонларнинг бири бўлганда, у ҳолда кетма-кетлик фақат иккита ҳар хил ҳадлардан иборат даврий кетма-кетликка айланишини исботлаш мумкин.

Мисол. $n = 220$ бўлганда (а) кетма-кетлик қуйидагича бўлади:

220, 284, 220, 284,

$n = 284$ бўлганда эса (а) кетма-кетлик 284, 220, 284, 220, ... бўлади.

Дўст сонлар билан биргаликда дўст ойлар ҳақида ҳам сўз юритиш мумкин.

Масалан, апрель ва июль, март ва ноябрь, сентябрь ва декабрь ойларини дўст ойлар деб юритилади. Уларнинг дўстлиги қуйидагидан иборат: апрелнинг тартиб билан числolari ҳафтанинг қайси кунига тушган бўлса, июлнинг ўша числоси ҳафтанинг ўша кунига тушган бўлади. Мисол учун 1969 йил 8 апрель сешанба кuni бўлса, 8 июль ҳам сешанба кунига тўғри келади. Шу маънода ҳам март ва ноябрь, сентябрь ва декабрлар дўст ойлардир.

Май ойи эса келгуси йилнинг январь ойи билан юқорида келтирилган маънода дўст ойлардир.

4. Туғма сонлар деб қуйидаги йўл билан ҳосил қилинадиган кетма-кетликнинг чапдан энг биринчи элементиға айтилади.

Мисол: 13 натура! сонни олиб унга ўзининг рақамлари йиғиндисини қўшамиз: $13 + (1+3) = 17$. Бу сонға ҳам ўзининг рақамлари йиғиндисини қўшамиз: $17 + (1+7) = 25$ ва ҳоказо, 13 ва ҳосил бўлган сонлардан кетма-кетлик тузамиз.

Натижада 13, 17, 25, 32, 39, ... (1) кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликни ўнг томонға истаганча давом эттириш мумкин. (1) кетма-кетликнинг чап томонига ҳам сонлар ёзиш мумкинми, деган савол қўямиз.

Бунинг учун шундай сон топиш керакки, у ўзининг рақамлар йиғиндисини билан 13 ни берсин. Бундай сон 11 дир. Энди шундай сон топиш керакки, у ўзининг рақамлари йиғиндисини билан 11 ни берсин. Бундай сон 10 дир. Энди 10 ҳам ўз навбатида 5 ва 5 нинг рақамлари йиғиндисидан иборат. Лекин ҳеч қандай сон ўз рақамлари йиғиндисини билан 5 ни бера олмайди. Демак, (1) кетма-кетликни чап томонға 5 гача давом эттириш мумкин.

Шундай қилиб, 5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, 39, ... (2) кетма-кетликни ҳосил қиламиз ва берилган таърифға асосан 5 туғма сон бўлади. (2) кетма-кетликнинг ҳамма элементлари 5 дан таиқари маълум қондаға асосан ҳосил бўлади. 5 сони эса «ўзи пайдо бўлганича» қолиб, ундан ол

дин сон пайдо бўлмайди. Шунинг учун ҳам уни туғма сон дейилган бўлса керак.

Бир хонали туғма сонлар 1, 3, 5, 7 ва 9 лар эканлигини осонлик билан кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, қуйидаги кетма-кетликларнинг биринчи ҳадлари туғма сонлардан иборат:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, ...

3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, ...

5, 10, 11, 13, 17, 25, 32, ...

7, 14, 19, 29, 40, 48,

10 дан 19 гача бўлган икки хонали сонларнинг бирортаси ҳам туғма сон бўла олмайди (ўйлаб кўринг).

Биринчи икки хонали туғма сон 20 дир, чунки рақамларининг йиғиндиси 20 бўлган натурал сон мавжуд эмас. Натижада 20 туғма сондан бошлаб қуйидаги кетма-кетлик ҳосил бўлади: 20, 22, 26, 34, ...; энди 21 дан 30 гача бўлган икки хонали сонларнинг бирортаси ҳам туғма сон бўла олмайди. Икки хонали туғма сонлар қуйидагилардир: 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. Буларнинг туғма сонлар эканлигини ҳисоблаш билан аниқлаш осон.

Кўп хонали туғма сонлар ҳам мавжуд: 132, 143, 233, 929, 1952, 874531 ва ҳоказо.

ЭГИЗАК ТУБ СОНЛАР

Маълумки,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 ... (1)

туб сонлар кетма-кетлиги чексиздир.

Бу кетма-кетликда кетма-кет жойлашган бир жуфт туб сонлар мавжуд: 2 ва 3. Бошқа бундай кетма-кет жойлашган туб сонлар мавжуд эмас. Лекин айирмаси 2 га тенг бўлган туб сонлар мавжуд бўлиб, улар эгизак туб сонлар жуфти деб аталади. Шундай қилиб, бир вақтда туб бўлган p ва $p+2$ сонлар эгизакдир. Масалан, 3 ва 5, 5 ва 7, 11 ва 13, 17 ва 19 ва ҳоказо. 100 000 гача бўлган натурал сонлар орасида 1224 та эгизак туб сонлар жуфти, 1 000 000 гача бўлган натурал сонлар орасида эса 8164 та эгизак туб сонлар жуфти мавжуд.

Англия математиги Глешер ҳисоблаш натижасида 8000000 ва 8 100 000 сонлар орасида 518 та эгизак туб сонлар жуфти мавжудлигини кўрсатган.

1958 йилда В. А. Голубев $n = 8 \cdot 10^6$ гача бўлган натурал сонлар орасида 48619 та эгизак туб сонлар жуфти мавжудлигини ҳисоблаган.

30 000 000 гача бўлган натурал сонлар кетма-кетлигида 152 892 та эгизак туб сонлар жуфти мавжуд.

$p = 8\,004\,119$, $p = 10\,006\,427$, $p = 1\,000\,000\,009\,649$ ва $p = 1\,000\,000\,000\,149\,341$ туб сонлар учун p ва $p + 2$ лар эгизак туб сонлар жуфтини ҳосил қилади. (1) да эгизак туб сонлар жуфти қанча, деган саволга англиялик математиклар Харди ва Литлвудларнинг айтишича, эгизак туб сонлар жуфтлиги чексиз кўпдир. Буни ҳозирги вақтда эгизак туб сонлар гипотезаси деб юритилади.

$\pi_2(n)$ билан натурал n сонигача бўлган эгизак туб сонлар жуфти сонини белгилаб, $n = 37 \cdot 10^6$ гача бўлган натурал сонлар орасида ҳар бир миллионда $\pi_2(n)$ нинг сонини қуйидаги жадвал билан кўрсатиш мумкин (бу жадвални 1959 йилда Д. Х. Лемер электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида тузган):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	8164	14871	20932	26860	32465	37916	43259	48618	53837	58980
10	64040	69011	73897	78784	83660	88534	93302	98306	10'208	10 707
20	112103	116685	121301	125920	13012	135050	139526	143978	148154	152892
30	157355	161810	166157	170577	174945	179257	183728			

Демак, 37 млн. гача 183 728 та эгизак туб сонлар жуфти мавжуд экан.

Туб сонлар кетма-кетлигида эгизак туб сонлар жуфтини нинг жойланиши худди натурал сонлар кетма-кетлигида туб сонларнинг жойланиши кабидир. Буни қуйидаги мисол билан тушунтириш мумкин:

Агар туб сонлар кетма-кетлигини номерлаб чиқиб, ҳамма номерлардан фақат эгизак туб сонларнинг кичигига тегишли номерлар қолдирилса ва у номерлардан кетма-кетлик тузилса, натижада туб сонлар кетма-кетлигига ўхшаган кетма-кетлик ҳосил бўлади:

2, 3, 5, 7, 10, 13, 17, 20, 21, 28, 33, 41, 43, 45, 52, 57, 60, ... Агарда эгизак туб сонлар жуфти чексиз кўп эканлиги исботланса, у ҳолда $2 = p_2 - p_1$ тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлади ёки 2 ни чексиз кўп усул билан туб сонлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкин бўлади.

Ҳар қандай жуфт сонни чексиз кўп усул билан иккита кетма-кет жойлашган туб сонлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкин, деган гипотеза мавжуд. Лекин биз ҳар қандай жуфт сонни камида бир хил усул билан иккита кетма-кет жойлашган туб сонлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкинлигини исбот қила олмаймиз. Бу гипотеза кўпгина жуфт сонлар учун текшириб кўрилган:

$$\begin{aligned} 2 &= 5 - 3; & 4 &= 11 - 7; & 6 &= 29 - 23; & 8 &= 97 - 89; \\ 10 &= 149 - 139; & 12 &= 211 - 199; & 14 &= 127 - 113; \\ 16 &= 1847 - 1831; & 18 &= 541 - 523; & 20 &= 907 - 887. \end{aligned}$$

Лекин ҳар қандай тоқ сонни иккита туб сонлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкинлигини осонлик билан исботлаш мумкин:

n тоқ сон p ва q туб сонлар айирмаси шаклида ифодаланган бўлсин: $n = p - q$, бунда q жуфт туб сон бўлиб, 2 га тенглиги аниқ.

p тоқ туб сон; p нинг ўрнига 3, 5, 7, 11, ... туб сонларни қўйиб, тоқ натурал сонларни ҳосил қиламиз.

Айрим арифметик прогрессияларда эгизак туб сон жуфти бир текисда жойлашган; масалан, 1 дан 2 000 000 гача бўлган натурал сонлар орасида:

$10k + 7$ прогрессияда 5006 та,

$10k + 1$ прогрессияда 4944 та,

$10k + 9$ прогрессияда 4919 та эгизак туб сонлар жуфти мавжуд.

n^3 ва $(n+1)^3$ лар орасида камида бир жуфт эгизак туб сонлар мавжуд.

n^3 ва $(n+1)^3$ лар орасидаги эгизак туб сонлар жуфтининг жадвали қуйидагидан иборат:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	2	3	3	5	5	4	6	5	11
10	9	12	11	12	9	17	16	19	16	18
20	24	23	17	22	26	32	36	34	25	35
30	39	45	36	36	38	52	42	51	40	59

Мисол. $n=2$ бўлганда 8 ва 27 лар орасида 2 жуфт эгизак туб сонлар мавжуд: 11 ва 13, 17 ва 19; $n=5$ бўлганда 125 ва 216 лар орасида 5 жуфт эгизак туб сонлар мавжуд.

Натурал сонларнинг квадратлари эгизак туб сонлар жуфтини сонига нисбатан секин ўсади. $n=100\,000$ гача бўлган натурал сонларнинг квадратлари 1000 та, эгизак туб сон жуфти эса 8164 та, $n=36 \cdot 10^6$ гача бўлган натурал сонларнинг квадратлари 600 та бўлиб, эгизак туб сонлар жуфти 179 257 тадир. Шуниси қизиқки, айрим $n \leq 122$ учун n^2 ва $(n+1)^2$ орасида бирорта ҳам эгизак туб сон жуфтлиги учрамаслиги мумкин:

$n=9, 19, 26, 27, 30, 34, 39, 49, 53, 77, 122$ лар учун бундай n нинг бирортаси ҳам мавжуд эмас.

Қуйидаги гипотеза мавжуд:

Ҳар қандай $n > 122$ учун n^2 ва $(n+1)^2$ орасида камида бир жуфт эгизак туб сонлар мавжуд.

1969 йилда англиялик математик Рисел Ханс электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида эгизак туб сонларнинг 6 жуфтини топди; улардан энг каттаси $p=9 \cdot 2^{111} - 1$ ва $p+2=9 \cdot 2^{111} + 1$ лардир. p ва $p+2m$ (m — натурал сон) шаклдаги туб сонлар жуфтлари ҳам мавжуд. Масалан, $p=3$, $m=4$ бўлганда 3 ва 11 сонлар жуфти ва ҳоказо. Бу шаклдаги туб сонлар ҳақида қуйидагиларни айтиш мумкин:

1) p ва $p+4$, p ва $p+8$, ..., p ва $p+2^k$ шаклдаги туб сонлар сони 1 дан n гача бўлган натурал сонлар орасида $\pi_2(n)$ га яқинроқдир.

2) p ва $p+6$, p ва $p+12$, ..., p ва $p+3 \cdot 2^k$ шаклдаги туб сонлар сони эса 1 дан n гача бўлган натурал сонлар орасида $\pi_2(n)$ га қараганда тахминан 2 марта кўп.

Кетма-кет жойлашган туб сонларнинг шундай 4 тасини кўрсатиш мумкинки, улар 2 жуфт эгизак туб сонлар жуфтини ташкил қилади; масалан, 11, 13, 17, 19 ва 179, 181, 191, 193 лар. p , $p+2$ ва $p+6$ лар ёки p , $p+4$, $p+6$ лар бир вақтда туб сонлар бўлган ҳоллар ҳам мавжуд. Уларни 3 талик туб сонлар ёки қўшалоқ учталиклар дейилади. Масалан, 5, 7, 11. Ҳозиргача маълум бўлган қўшалоқ учталиқ туб сонларнинг энг каттаси 100014491, 100 014 493 ва 10014497 лар эканлиги аниқланган.

1 дан 10^6 гача бўлган натурал сонлар орасида p , $p+2$ ва $p+6$ шаклдаги учталиқ туб сонлар 1392 ва 1 дан $2 \cdot 10^6$ гача натурал сонлар орасида эса 2378 та эканлиги ҳисобланган.

p , $p+4$, $p+6$ шаклдаги учталиқ туб сонлар ҳам юқорида келтирилган чегараларда тахминан p , $p+2$, $p+6$ учталиклар сонига тенг.

p , $p+2$, $p+6$, $p+8$ шаклдаги туб сонлар ҳам мавжуд. Улар тўртлик эгизак туб сонлар ёки қўшалоқ тўртликлар деб аталади. Чунончи, 11, 13, 17, 19 ёки 191, 193, 197, 199 лар қўшалоқ тўртликлар бўлади. 1957 йилда математик А. Феррье бундай тўртлик туб сонларнинг энг каттаси $p = 2863308731$ бўлганда ҳосил бўлишини аниқлади. $p = 5$, 101, 191, 821, 1481, 3251 бўлганда ҳам тўртлик туб сонлар ҳосил бўлади.

В. А. Голубев $n = 1\,000\,000$ гача бўлган натурал сонлар орасида тўртлик туб сонлар 166 та ва $n = 2\,000\,000$ гача 295 та эканлиги, 1959 йилда эса 10 000 000 ва 15 000 000 ларгача мос равишда 899 ва 1209 та эканлигини кўрсатди.

p , $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+12$ ва p , $p+4$, $p+6$, $p+10$, $p+12$ шаклдаги туб сонларга биринчи ва иккинчи типдаги бешлик эгизак туб сонлар ёки қўшалоқ бешликлар деб аталади.

Мисол. 5, 7, 11, 13, 17 ва 7, 11, 13, 17, 19 лар. Биринчи типдаги қўшалоқ бешликлар $n = 15 \cdot 10^6$ чегарагача қуйидагича эканлигини В. А. Голубев ҳисоблаган.

n	$2 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^6$	$12 \cdot 10^6$	$13 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^6$
Биринчи типдаги қўшалоқ бешликлар	55	73	89	103	111	126	135	146	160	173	180	187	194	203

Демак, $15 \cdot 10^6$ гача 203 та қўшалоқ бешликлар мавжуд.
 $p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16$ туб сонлар
 қўшалоқ олтиликлар деб аталади.

Мисол. 7, 11, 13, 17, 19, 23. $n = 20 \cdot 10^6$ гача бўлган
 энг катта қўшалоқ олтиликлар 19 800 367, 19 800 371,
 19 800 373, 19 800 377, 19 800 379 ва 19 800 383 лар экан-
 лиги ҳисобланган. $p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16,$
 $p+24$ ва $p, p+8, p+12, p+14, p+18, p+20, p+24$
 шаклдаги туб сонларга мос равишда биринчи ва иккинчи
 типдаги қўшалоқ етилиликлар дейилади.

Мисол. 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31.

$n \leq 2 \cdot 10^7$ гача бўлган натурал сонлар орасида $p = 7,$
 43777, 2839927, 3 400 207, 6 005 887, 14 812 867, 16 025 827
 ва $p = 1954 349, 7 187 759, 8 741 129, 14 856 749$ бўлганда
 мос равишда биринчи ва иккинчи типдаги қўшалоқ ети-
 ликлар ҳосил бўлиши ҳисобланган.

$p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16, p+24, p+30$
 лар $p = 7$ ва $p = 8 741 123$ бўлганда, $p, p+6, p+14,$
 $p+18, p+20, p+24, p+30$ лар эса $p = 1 954 343$ ва
 $p = 8 741 123$ бўлганда мос равишда биринчи ва иккинчи
 типдаги қўшалоқ саккизликлар ҳосил қилиши ҳисобланган.

$p, p+4, p+6, p+10, p+12, p+16, p+24, p+30,$
 $p+34$ лар $p = 7$ ва $p = 2 839 927$ бўлганда, $p, p+4,$
 $p+10, p+18, p+22, p+24, p+28, p+30, p+34$ лар
 эса $p = 8 741 119$ бўлганда мос равишда биринчи ва иккинчи
 типдаги қўшалоқ тўққизликлар ҳосил қилиши ҳисобланган.

$2q$ туб сонлар ёки $2q$ қўшалоқ сонлар деб айирмаси $2q$
 га тенг бўлган туб сонларга айтилади.

$q = 1$ бўлганда одатдаги эгизак туб сонлар ҳосил бўла-
 ди. Ҳар қандай q учун шундай $2q$ лик туб сонларнинг ка-
 мида бир жуфти мавжудлиги гипотезаси баён қилинган бўл-
 са-да, бу гипотеза исбот қилинмаган.

Ҳар қандай q учун $2q$ туб сонлар сони чексиз кўп
 эканлиги исботланмаган.

ФЕРМА СОНЛАРИ

Буюк француз математиги П. Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$ кў-
 ринишдаги сонлар билан шуғулланиб, « F_n ҳамма вақт истал-
 ган натурал n сон учун туб сонни беради» деган гипотеза-
 ни айтди. Жумладан:

$$n = 1 \text{ бўлганда } F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 \text{—туб сон,}$$

$$n = 2 \text{ бўлганда } F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17 \text{—туб сон,}$$

$$n = 3 \text{ бўлганда } F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257 \text{—туб сон,}$$

$$n = 4 \text{ бўлганда } F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537 \text{—туб сон,}$$

Ферма $n \geq 5$ бўлганда текширмасдан барча ҳоллар учун ҳам туб сон бўлади, деган эди.

$n = 5$ бўлганда $F_5 = 2^{2^5} + 1$ ўн хонали сон бўлиб, уни туб ёки мураккаб эканлигини аниқлаш қийин масала эди. Узоқ вақт давомида бу масала иккинчи даражали бўлиб келган бўлса-да, фақат 1732 йилда Л. Эйлер Ферма гипотезасининг нотўғри эканлигини, жумладан $F_5 = 2^{2^5} + 1$ нинг 641 га бўлинишини исботлади. Эйлер томонидан келтирилган исбот таққосламалар назариясига асосланган эди.

Кейинчалик Цейлон (Шри Ларка) математиги Қанагасабапхти F_5 нинг мураккаб эканлигини элементар йўл билан исботлади:

$$\begin{aligned} 2^{2^5} + 1 &= 2^{32} + 1 = 2^4 \cdot 2^{28} + 1 = 15 \cdot 2^{28} + (3 + 5^3)2^{21} + 1 = \\ &= 15 \cdot 2^{28} + 3 \cdot 2^{21} + 5^3 \cdot 2^{21} + 1 = 3 \cdot 2^{21} (5 \cdot 2^7 + 1) + (5 \cdot 2^7)^3 + \\ &+ 1^3 = 3 \cdot 2^{21} (5 \cdot 2^7 + 1) + (5 \cdot 2^7 + 1) (5^2 \cdot 2^{14} - 5 \cdot 2^7 + 1) = \\ &= (5 \cdot 2^7 + 1) [3 \cdot 2^{21} + 5^2 \cdot 2^{14} - 5 \cdot 2^7 + 1]. \end{aligned}$$

$5 \cdot 2^7 + 1 = 641$, шунинг учун $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ сон. 641 га бўлинади: $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$. 1867 йилда Лендри $n \leq 64$ бўлганда $2^n + 1$ ва $2^n - 1$ шаклдаги сонларнинг кўпайтувчиларга ажратилган жадвалини бериб, унда $2^{32} + 1$ нинг 641 га бўлинишини кўрсатди. Лендри учун $2^n + 1$ шаклдаги сонларни кўпайтувчиларга ажратишдаги энг қийин сон $2^{59} + 1$ бўлиб чиқди. Бу соннинг бўлувчиси $d = 57\,646\,075\,230\,342\,349$ эканлигини кўрсатди. Аввал Лендри d сонни туб сон деб ўйлаган эди. Кейинчалик бу соннинг мураккаб сон ва уни иккита тўққиз хонали сонларнинг кўпайтмасидан иборат эканлигини кўрсатди.

Қуйидаги теорема исбот қилинган:

$n = 2^k + 1$ нинг туб сон бўлиши учун $3^{\frac{n-1}{2}} + 1$ нинг n га бўлиниши зарур ва етарлидир.

Мисол. 1) $5 = 2^2 + 1$ —туб сон, шунинг учун $3^{\frac{5-1}{2}} + 1 = 3^2 + 1 = 10$ сони 5 га бўлинади.

2) $n = 2^3 + 1 = 9$ мураккаб сон, шунинг учун $3^{\frac{9-1}{2}} +$

$+1 = 3^4 + 1 = 82$ сони 9 га бўлинмайди. Францель қуйидаги ёйилмани кўрсатди:

$$\begin{aligned}2^6 + 1 &= (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2), \\ 2^{10} + 1 &= (3^2 + 4^2)(5^2 + 4^2).\end{aligned}$$

Ферма гипотезаси нотўғри эканлиги исботлангандан кейин қуйидаги икки масала қўйилди:

- 1) Туб ферма сонлари қанча?
- 2) Мураккаб ферма сонлари қанча?

Юқорида $n = 1, 2, 3, 4$, ларда туб ферма сонлари ҳосил бўлишини кўрсатган эдик.

Бугунги кунда $n > 4$ учун бирорта ҳам туб ферма сони топилмаган ва уларнинг йўқлиги исботланмаган. Лекин $n = 5$ дан ташқари яна мураккаб ферма сонлари топилган. $F_6 = = 274177 \cdot 67280421310721$ эканлиги кўрсатилди. F_9 нинг $37 \cdot 2^{16} + 1$ га, F_{12} нинг $7 \cdot 2^{14} + 1, 397 \cdot 2^{16} + 1$ ва $7 \cdot 139 \cdot 2^{16} + 1$ ларга, F_{18} нинг $13 \cdot 2^{20} + 1$ га, F_{23} нинг $16772161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$ га, F_{36} нинг $5 \cdot 2^{39} + 1$ га, F_{38} нинг $3 \cdot 2^{41} + 1$ га, F_{73} нинг $5 \cdot 2^{75} + 1$ га бўлинганликлари исбот қилинган. F_{73} сони жуда улкан сон. Улкан сонлар ҳақида кейинчалик гапирамиз.

1952 йилгача $n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$ бўлганда $F_n = 2^{2^n} + 1$ шаклдаги сонларнинг мураккаблиги исботланган эди. (F_{12} ва F_{23} ларни И. М. Первушин топган.)

1964 йилга келиб ҳаммаси бўлиб 37 та мураккаб ферма сонлари топилди, улар

$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 39, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 284, 316, 452, 1945$

бўлгандаги F_n лардир.

$F_n = 2^{2^n} + 1$ шаклдаги мураккаб ферма сонларининг чекли ёки чексизлиги маълум бўлмаса-да, лекин $2^{2^n} + k$ ($k \neq 1$) шаклдаги мураккаб сонларни чексиз кўп эканлигини А. Шинцель исботлаган эди.

Ферма сонларининг биттаси ҳам иккита туб соннинг йигиндисидан иборат эмаслигини исботлаш мумкин: $F_n = = 2^{2^n} + 1$ — тоқ сондир. Агар $F_n = p_1 + p_2$ туб сонларнинг йигиндисидан иборат бўлса, бу ҳолда $p_1 = 2$ ва $p_2 = F_n$ —

$-2 = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2^n} - 1$ бўлиши керак. Лекин $2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$ бўлгани учун p_2 нинг туб сон бўла олмаслигидан далолат беради.

$F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ мураккаб ферма сонида 10^{582} тадан кўп рақам бўлиб, F_{1945} нинг энг кичик туб бўлувчиси бўлган $5 \cdot 2^{1947} + 1$ сони 587 та рақамли сон эканлиги исботланган.

F_{10} нинг бўлувчиси 45592577 эканлиги ва F_{16} нинг бўлувчиси 825753601 эканлиги аниқланган.

F_{14} нинг $65536 \times 2000 + 1 = 130072001$ гача $p = k \times \times 2^{n+1} + 1$ шаклдаги бўлувчиси мавжуд эмаслиги исботланган. F_{14} нинг мураккаб сон эканлигидан, унинг туб бўлувчиси 131 072 001 дан катта бўлиши келиб чиқади.

F_5 ва F_6 ларнинг каноник ёйилмаси топилган, F_7, F_8, F_{13}, F_{14} ларнинг мураккаб эканлиги аниқланган бўлса-да, уларнинг бирорта ҳам 1 дан ва ўзидан ташқари бўлувчиси топилган эмас. F_{13} нинг 2467 хонали сон эканлиги маълумдир. 1953 йилда F_{16} нинг туб бўлувчиси $m = 2^{18} \cdot 3150 + 1$ эканлиги топилди. F_{452} нинг 10^{135} тадан ортиқ хонали сон эканлиги ва $27 \cdot 2^{455} + 1$ унинг бўлувчиларидан бири бўлиб, 139 хонали сон эканлиги аниқланди.

Шундай қилиб, ҳозиргача маълум бўлган энг катта мураккаб ферма сони F_{1945} дир.

Юқорида келтирилган сонларнинг мураккаб эканлиги математиканинг турли усуллари билан, айримлари эса олий математика методлари билан аниқланган.

1945 йилгача $n = 17, 19, 20, 21, 22, 24 \dots$ бўлганда (юқорида келтирилганлардан ташқари) ферма сонларидан қайси бири туб ёки мураккаб эканлиги маълум эмас эди. F_{17} нинг 30 000 тадан ортиқ рақамли сон эканлиги маълум. Лекин унинг қандай ферма сони эканлигини бугунги кунда жуда кучли электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида ҳам аниқлай олмаётдилар. Шуни ҳам қайд қилиб ўтиш лозимки, туб ферма сонларининг геометрияга катта алоқаси бор. Буни биринчи марта бу юк немис математиги К. Гаусс кўрсатди.

Айланани циркуль ва чизғич ёрдамида m та тенг бўлақларга бўлиш учун $m = 2^k, k \geq 1$ — натурал сон ёки $m = 2^k F_n, k \geq 0$ — бутун сон, F_n эса туб ферма сони бўлиши зарур ва етарлидир. (Маълумки, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ бўлганда туб ферма сони ҳосил бўлади.)

$m \leq 20$ бўлганда, айланани циркуль ва чизғич ёрдамида 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20 та тенг бўлақларга бўлиш мумкин. $m = 2^k \cdot F_2$ сон $k=0$ бўлганда $m = F_n$ туб ферма сони ҳосил қилади.

Биз ҳозиргача фақат 5, 17 257, 65537 туб ферма сонларини биламиз. Демак, айланани циркуль ва чизғич ёрдамида туб ферма сонлари қадар тенг бўлақларга бўлиш мумкин экан. Айланани циркуль ва чизғич ёрдамида 5 ва 17 та тенг бўлақларга бўлиш осон бўлса-да, 257 ва 65537 ларга бўлиш жуда қийин.

Мунтазам 17 бурчакни циркуль ва чизғич ёрдамида яшаш усулини Ф. Гаусс берган эди. 1832 йилда Ришало мунтазам 257 бурчакли кўпбурчакни яшаш усулини кўрсатди. Кейинчалик Майвольд мунтазам 514 бурчакли кўпбурчак яшашнинг осонроқ усулини кўрсатган эди.

Бир профессор ўзининг аспирантига: «Бор, тезда 65537 = $2^{16} + 1$ томонли мунтазам кўпбурчакни яшаш усулини ишлаб кел» — дейишга мажбур бўлган эди. Бу аспирант 20 йил кўринмасдан кетиб, охирида айтилган масалани ечиб келади. У Ришалонинг шогирди Гермас эди. Унинг бу қўл ёзмаси ҳозирги вақтда Гёттингендаги математика институтининг кутубхонасида сақланади.

Қуйидаги теорема ҳам мавжуд:

Агар циркуль ва чизғич ёрдамида айланани α ва β га тенг бир хилда бўлақларга бўлиш мумкин бўлиб, $(\alpha, \beta) = 1$ бўлса, бу ҳолда шу айланани $m = \alpha \cdot \beta$ га тенг бир хил бўлақларга бўлиш мумкин.

Бунинг учун арифметикадан маълум бўлган қуйидаги хоссадан фойдаланиш етарлидир: $(\alpha, \beta) = 1$ бўлгани учун шундай k ва l бутун сонлар мавжудки, улар учун $\alpha \cdot k + \beta l = 1$ бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонини $m = \alpha \cdot \beta$ га бўлсак, $\frac{1}{m} = \frac{k}{\beta} + \frac{l}{\alpha}$ ни ҳосил қиламиз. Демак, айлананинг $\frac{1}{m}$ бўлагини ҳосил қилиш учун унинг $\frac{1}{\beta}$ ва $\frac{1}{\alpha}$ қисмларини (шартга асосан бундай қисмларни тузиш мумкин) ясай олиш етарлидир.

Мисоллар. 1) Айланани $m = 15$ та тенг бўлақка бўлиш талаб қилинсин.

$$m = 15 = 3 \cdot 5; (3, 5) = 1; (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 1,$$

ёки $\frac{1}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$. Демак, айлананинг $\frac{1}{15}$ бўлагини ҳосил

қилиш учун унинг $\frac{1}{3}$ бўлагининг иккиланганидан $\frac{1}{5}$ бўлагининг учланганини айириш етарлидир.

2) Айланани $m = 170$ та тенг бўлакка бўлиш талаб қилинсин.

$$170 = 17 \cdot 10; (17, 10) = 1; 3 \cdot 17 - 5 \cdot 10 = 1$$

ёки
$$\frac{1}{170} = \frac{3}{10} - \frac{5}{17}.$$

Демак, айлананинг $\frac{1}{10}$ бўлагининг учланганидан унинг $\frac{1}{17}$ бўлагининг бешланганини айириш етарли. Туб ферма сонларининг қолганларини аниқлаш йўлида олиб борилган ҳисоблашлар натижасида янги масалалар вужудга келди.

Бу масалалардан айримларини келтирамиз.

1) $2 + 1, 2^2 + 1, 2^{2^2} + 1, \dots$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари туб сонлардан иборат, деган гипотеза қўйилди. Бу гипотеза ҳам кўпдан бери ҳал қилинмай, фақат 1953 йилда электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида бу кетма-кетликнинг бешинчи ҳади $2^{2^{2^2}} + 1 = F_{16}$ нинг мураккаб ферма сони эканлиги ва у 19729 хонали сон бўлиб, $2^{18} \cdot 3150 + 1$ унинг бўлувчиси эканлиги аниқланди.

Жумладан, F_{16} нинг 19729 хонали сон эканлигини осонлик билан исботлаш мумкин:

$2^{18} = 65536 \lg 2^{2^{16}} = 65536 \lg 2$; маълумки, $0,301029 < \lg 2 < 0,301031$. Бу тенгсизликларнинг ҳар иккала томонини 65536 га кўпайтириб,

$$19728,236 < \lg 2^{2^{36}} < 19728,368 \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

Демак, $2^{2^{16}} + 1 = 2^{2^{2^2}} + 1$ сони 19729 хонали эканлиги исботланди.

$2^{2^{36}} + 1$ соннинг охирги рақами 7 эканлигини кўрсатиш осон. Умуман, $n \geq 2$ бўлганда F_n ферма сонининг охирги рақами 7 эканлигини исботлаш мумкин.

2) $n^n + 1$ шаклдаги сонлар n нинг баъзи бир натурал қийматларида туб сонларни ифода қилади. Масалан, $n = 1, 2, 4$ бўлганда $1^1 + 1 = 2$; $2^2 + 1 = 5$; $4^4 + 1 = 257$ лар туб сонлардир. Булардан ташқари $n^n + 1$ кўринишдаги ифода яна туб сонларни берадими, деган савол ўринлидир. Бу

саволга ҳозиргача аниқ жавоб топилмаган. Агар 2, 5, 257 лардан ташқари $n^n + 1$ шаклдаги туб сон мавжуд бўлса, унинг 300 000 тадан ортиқ рақамли бўлиши кераклиги исбот қилинган.

Агар $n > 4$ учун $n^n + 1$ шаклдаги туб сонлар мавжуд бўлмаса, у ҳолда F_{20} , F_{37} , F_{70} , F_{135} , F_{264} , F_{521} ва F_{1034} ферма сонларининг мураккаб эканлиги келиб чиқади.

3) $n^{n^n} + 1$ шаклдаги сонларни кўрамиз:

$1^1 + 1 = 2$, $2^{2^2} + 1 = 17$ лар туб сонлар. 2 ва 17 дан ташқари $n^{n^n} + 1$ шаклдаги туб сон мавжудми? Ҳозиргача 2 ва 17 лардан ташқари $n^{n^n} + 1$ шаклдаги бирорта ҳам туб сон топилмаган. Лекин, агар $n^{n^n} + 1 > 17$ шаклдаги туб сон мавжуд бўлса, у соннинг рақамлари сони миллиарддан ортиқ бўлиши кераклиги исботланган. Демак, 10^{18} гача бўлган натурал сонлар ичида $n^{n^n} + 1$ шаклдаги туб сонлар фақат 2 ва 17 лардир.

4) Маълумки, $2^n + 1$ шаклдаги туб сон туб ферма сонидир. $2^n + 1$ шаклдаги туб сонлардан фақат бештасини, яъни $n = 1, 2, 4, 8, 16$ бўлганда ҳосил бўладиган 3, 5, 17, $2^8 + 1$, $2^{16} + 1$ ларни биламиз.

$2 \cdot 2^n + 1$ шаклдаги туб сонларнинг фақат 4 тасини биламиз. Улар $n = 1, 3, 7, 15$ бўлганда ҳосил бўладиган сонлардир; $3 \cdot 2^n + 1$ шаклдаги туб сонларнинг ҳозирча 19 таси маълум. Улар $n = 1, 2, 5, 6, 8, 12, 18, 30, 36, 41, 66, 189, 201, 209, 279, 353, 408, 438, 534$ бўлганда ҳосил бўлади; $4 \cdot 2^n + 1$ шаклдаги туб сонларнинг ҳозиргача фақат 3 тасини биламиз; улар $n = 2, 6, 14$ бўлганда ҳосил бўладиган 17, 257 ва 65537 сонларидир.

$5 \cdot 2^n + 1$ шаклдаги туб сонларнинг эса ҳозиргача фақат 12 таси маълум; улар $n = 1, 3, 7, 13, 15, 25, 39, 55, 77, 85, 127, 1947$ бўлганда ҳосил бўлади. Умуман, ҳар қандай $n \leq 100$ учун ($k = 47$ ва $k = 94$ лардан ташқари) камида битта натурал k сон мавжудки, у учун $k \cdot 2^n + 1$ шаклдаги соннинг туб эканлиги исботланган. Шу билан бирга $k \cdot 2^n + 1$ шаклдаги сонлар k нинг чексиз кўп қийматлари учун мураккаблиги исботланган.

Умуман, $k \cdot 2^n + 1$ шаклдаги сонларни Каллин сонлари деб юритилади, $k=n$ бўлганда $n > 1$ учун ҳамма $n \cdot 2^n + 1$ шаклдаги Каллин сонлари мураккаб деган гипотеза мавжуддир.

Математик Каннингем $1 < n < 141$ лар учун Каллин сонларининг энг кичик туб бўлувчисини топган.

$n \cdot 2^n + 1$ — Каллин сонларидан 14 тасининг каноник ёйилмаси мавжуд.

5) $2^m + 2^n + 1$ шаклдаги туб сонларни кўриб ўтамыз: $m > n$ бўлганда

$$2^2 + 2 + 1 = 17,$$

$$2^3 + 2 + 1 = 11,$$

$$2^3 + 2^2 + 1 = 13,$$

$$2^4 + 2 + 1 = 19$$

туб сонлар ҳосил бўлади.

Бундай шаклдаги туб сонлар тўплами қандайлиги аниқ эмас. Лекин $2^{2n} + 2^{n+1} + 1 = (2^n + 1)^2$ ифодасидан $2^m + 2^n + 1$ шаклдаги мураккаб сонларнинг чексиз кўп эканлиги кўриниб турибди.

6) $2^n + 3$ шаклдаги туб сонларни кўриб ўтамыз. $n < 24$ бўлганда $2^n + 3$ шаклдаги сонлар $n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 15, 16, 18$ бўлганда туб сонларни ифода қилишини математик А. Рихтер кўрсатган.

Эрдеш чексиз кўп тоқ k лар учун $2^n + k$ шаклдаги сонларнинг мураккаблигини исботлаган.

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ бўлганда $2^{2^{(3k+1)}} + 3$ нинг 19 га бўлинганлигидан $2^{2^{2n}} + 3$ шаклдаги чексиз кўп мураккаб сонлар мавжудлиги келиб чиқади.

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ бўлганда $2^{2^{2k+1}} + 3$ сони ҳамма вақт 7 га бўлинади.

$2^{2^{2k}} - 3$ сони ҳамма вақт 13 га бўлинади (k — натурал сон), шунинг учун $2^{2^{2^2}} - 3, 2^{2^{2^{2^2}}} - 3, \dots$ шаклдаги сонлар мураккаб сонлар эканлиги келиб чиқади. $2 + 3, 2^2 + 3, 2^{2^{2^2}} + 3, 2^{2^{2^2}} + 3, \dots$ шаклдаги сонлар ичида туб сонларнинг қанчалиги маълум эмас. Лекин $2^{2^2} + 5, 2^{2^{2^2}} + 5, \dots$

шаклдаги сонларнинг ҳаммаси мураккаблигини осонлик билан исботлаш мумкин: $2^{2^k} = (3+1)^k$ ифодадан 2^{2^k} ни 3 га бўлганда қолдиқда 1 ҳосил бўлади, демак, $2^{2^k} = 3t+1$ бўлади. Шунинг учун $2^{2^k} + 5 = 2^{3t+1} + 5 = (7+1)^t \cdot 2 + 5$ ифода ҳар қандай t учун 7 га бўлинади.

7) $2^{n_1} + 2^{n_2} + 2^{n_3} + \dots + 2^{n_k} + 1$ шаклдаги сонлар k нинг қандай қийматларида туб сон бўлиши аниқ эмас.

8) $2^n + n^2$ шаклдаги туб сонлар қанчалиги аниқ эмас. Бундай кўринишдаги сонлардан фақат 4 та туб сон маълум:

$$\begin{aligned} 3 &= 2^1 + 1^2; & 593 &= 2^9 + 9^2; \\ 17 &= 2^3 + 3^2; & 32993 &= 2^{15} + 15^2. \end{aligned}$$

Математик А. Минковский кўрсатганидек, $4^n + n^4$ шаклдаги сонлар $n = 1$ бўлгандагина туб сон 5 ни беради, чунки $n > 1$ бўлганда n нинг тоқ сон қийматларида $4^n + n^4$ кўринишидаги ифода туб сонни бериши мумкин. $n = 2k+1$ бўлсин. Бу ҳолда $4^n + n^4 = 4(2^k)^4 + n^4 = (2 \cdot 2^{2k} - 2^{k+1} \cdot n + n^2) (2 \cdot 2^{2k} + 2^{k+1} \cdot n + n^2)$. Демак, $n > 1$ бўлганда $4^n + n^4$ мураккаб сон бўлади.

9) a нинг $2 \leq a \leq 2^{27}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган натурал қийматлари учун n нинг $n \leq 15$ бўлган камида битта натурал қиймати мавжуд бўладики, унинг учун $a^{2^n} + 1$ сони мураккаб бўлади. Бунни А. Шинцель исбот қилган.

Агар a соннинг ҳар қандай қиймати учун камида битта натурал n сони мавжуд бўлса, $a^{2^n} + 1$ кўринишидаги ифода мураккаб сонни беради, деган гипотеза исбот қилинган бўлса, у ҳолда F_n мураккаб ферма сонлари чексиз кўп эканлиги келиб чиқар эди. Чунки бу ҳолда $a = 2^{2^k}$ деб қабул қилишнинг ўзи kiffoйдир. ($a = 2^{2^{1945}}$ учун юқоридаги гипотеза ҳозиргача тасдиқланмаган.)

$a^{2^n} + 1$ шаклдаги сонларнинг чексиз кўп a лар учун мураккаб сон бўлиши аниқдир, чунки бу ҳолда $a = b^m$ (b — натурал сон, m — тоқ сон) бўлиб, бунда $(b^m)^{2^n} + 1 = (b^{2^n})^m + 1$ ифода кўпайтувчиларга ажралади. $A_n = a^{2^n} + 1$ шаклдаги сон бўлсин ($a \neq 2^n$ — жуфт сон, n — натурал сон). a ва n нинг маълум қийматларида, уларга мос бўлган A_n сонлари $F_m = 2^{2^m} + 1$ шаклдаги туб сонларга бўлинади.

Шундай хоссали A_n сонларнинг 85 таси топилган. $1 < n \leq 15$; $6 \leq a \leq 98$ бўлганда F_2, F_3, F_4 туб ферма сонларига бўлинадиган A_n сонларнинг 119 тасининг жадвали мавжуд. Агар туб ферма сонларининг сони чексиз кўплиги исботланса, у ҳолда $2^m \cdot 3^n + 1$ шаклдаги туб сонлар ҳам чексиз кўплигини исботлаш мумкин бўлади.

Математик Т. Куликовский бундай шаклдаги туб сонларнинг кўпини топган. Бундай маълум туб сонларнинг энг каттаси 162 хонали $3 \cdot 2^{634} + 1$ сон эканлиги аниқланган.

ПИФАГОР СОНЛАРИ

Қадимги замон буюк математикларидан бири Пифагордир. У ўз шогирдлари билан тўғаракларда машғулотлар ўтказар эди. Бу тўғаракларга «Пифагор мактаби» деб ном беришган. Унинг тўғри бурчакли учбурчак учун ўринли бўлган теоремаси ҳаммага маълумдир:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Бу тенгликни қаноатлантирувчи (a, b, c) сонларга Пифагор сонлари деб аталади. (a, b, c) лар натурал сонлардан иборат бўлиб, биз қуйида шундай сонлар билан иш кўрамиз. $a < b < c$ деб қабул қиламиз.

Маълумки, агар a, b, c лар (1) тенгликни қаноатлантирса, ka, kb, kc лар ҳам (k — исталган натурал сон) (1) ни қаноатлантиради.

Масалан, $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(15, 20, 25)$ лар Пифагор сонларидир. Шундай қилиб, (a, b, c) Пифагор сонларидан яна чексиз кўп Пифагор сонлари ҳосил қилиш мумкин.

Биз (a, b, c) Пифагор сонларини ўзаро туб сонлар деб қабул қиламиз, чунки, агар улар ўзаро туб бўлмасалар, қисқартиш билан ўзаро туб сонларга келтириш мумкин. Шунинг учун ўзаро туб (a, b, c) Пифагор сонларига асосий Пифагор сонлари деб аталади.

Миср пирамидаларининг тарихи ҳаммага маълумдир. Археологлар Мисрдаги Хефрон пирамидалари ёнидаги қазилмалардан бирида томонлари $(3, 4, 5)$ бўлган гранит уч бурчакли плиталар топишган. Буларнинг ҳаммаси тарихий жиҳатдан катта аҳамиятга эга.

Пифагор мактабида асосий Пифагор сонларини топишда, умумий формулаларни чиқариш соҳасида кўп ишлар қилинган. Жумладан, қуйидаги йўл билан кўпгина асосий Пифагор сонларининг ҳосил қилиниши баён этилган.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, ... (2)

кетма-кет квадратларни олиб, улардан ёнма-ён турганларининг айирмасини оламыз:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, ... (3)

ёки умуман

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \quad (4)$$

тоқ сонлар кетма-кетлигини ҳосил қиламыз.

(3) да квадратдан иборат бўлган тоқ сонлар ҳам мавжуд : 9, 25, 81, 121, Бундай квадратлар ҳаммаси $2n + 1$ шаклида бўлиб, улар $n = 4, 12, 24, 40, 60, \dots$ бўлганда (4) дан ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$ айтилатдан $n = 4, 12, 24, 40, 60, \dots$ бўлганда асосий Пифагор сонлари ҳосил бўлади:

$$5^2 = 4^2 + 3^2,$$

$$13^2 = 12^2 + 5,$$

$$25^2 = 24^2 + 7^2,$$

$$41^2 = 40^2 + 9^2,$$

$$61^2 = 60^2 + 11^2$$

ва ҳоказо.

(3, 4, 5), (5, 12, 13) Пифагор сонлари бизнинг эрамыздан олдин VI — V асрларда маълум бўлган. Шундай қилиб, (4) дан чексиз кўп Пифагор сонларини ҳосил қилиш мумкин.

Ҳамма асосий Пифагор (a, b, c) сонларини (4) дан ҳосил қилиб бўладими, деган савол туғилади.

Бу саволга жавоб беришга уриниб кўрамыз. Юқорида келтирилган (2), (3) кетма-кетлигидаги сонларни бошқача йўл билан тузамыз.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... ларни олиб, кетма-кет квадратлар айирмаси эмас, биттадан кейин жойлашган квадратлар айирмасини ҳосил қиламыз. Натижада:

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 ...

4 8 12 16 20 24 28 32 36 (5)

(5) да тўртга каррали бўлган жуфт сонлар ҳосил бўлди, улар орасида ўзи квадрат бўлган 16, 36, 64, ... жуфт сон-

лар ҳам мавжуд. Бу сонлар Пифагор сонларини майдонга келтиради. Масалан, 16 га (3, 4, 5), 36 га (6, 8, 10) Пифагор сонлари мос бўлиб, улардан иккинчиси (6, 8, 10) асосий Пифагор сонлари эмас, кейинги асосий Пифагор сонлари (8, 15, 17) 64 фарқдан ҳосил бўлади. (8, 15, 17) Пифагор сонларини аввалги кўрсатилган усул билан ҳосил қилиш мумкин эмас. Лекин бу усул билан ҳам ҳамма Пифагор сонларини ҳосил қилиб бўлмайди.

Пифагор яшаган даврда томонлари натурал сонлардан иборат бўлган учбурчакларни

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 \quad (6)$$

айният ёрдамида топиш қондаси маълум бўлган. Бу айтилатган ёрдамида жуда кўп Пифагор сонларини ҳосил қилиш мумкин:

n	I катет $2n+1$	II катет $2n(n+1)$	Гипотенуза $2n^2+2n+1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61

Бу жадвалдан иккинчи катет ва гипотенуза кетма-кет жойлашган натурал сонлардан иборат бўлиб, уларнинг йиғиндисини эса тўлиқ квадрат бўлиши яққол кўриниб турибди. Шунинг учун, агар натурал сонлар қаторида кетма-кет жойлашган икки натурал соннинг йиғиндисини тўлиқ квадрат бўлган ҳол учраса, улар Пифагор сонларини ҳосил қилади. Масалан,

$$1, 2, 3, \underbrace{4, 5}_{3^2}, \dots, \underbrace{12, 13}_{5^2}, \dots, \underbrace{24, 25}_{7^2}, \dots, \underbrace{40, 41}_{9^2}, \dots$$

$$\dots \underbrace{60, 61}_{11^2}, \dots \underbrace{84, 85}_{13^2}, \dots$$

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \quad (7)$$

айният ёрдамида ҳам чексиз кўп Пифагор сонлари ҳосил қилиниши исботланган.

(7) айниятда

$$a = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad b = mn, \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2} \quad (*)$$

деб олиш мумкин.

(7) айният (*) га қараганда умумийроқ эканлигини ва унинг ёрдамида ҳамма асосий Пифагор сонлари ҳосил бўлишини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун:

- 1) m ва n лар ҳар хил жуфтликда;
- 2) $(m, n) = 1$, яъни m ва n ўзаро туб;
- 3) $m > n$ бўлиши керак.

Юқорида айтилганларни назарга олиб, қуйидаги Пифагор сонларини ҳосил қиламиз:

m ва n сонларига юқорида кўрсатилган талабларга жавоб берувчи ҳар хил қийматлар бериб, турли Пифагор сонларини ҳосил қиламиз. Юқорида келтирилган жадвалдан қуйидагиларни аниқлаш мумкин.

Икки элементи кетма-кет жойлашган Пифагор сонлари мавжуд: (9, 40, 41), (17, 144, 145). Бундай хоссага эга бўлган Пифагор сонларининг чексиз кўплигини исботлаш мумкин. Шундай сонларнинг кўпини математик Месспер

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
4	1	8	15	17
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
6	1	35	12	37
7	2	45	28	53
8	7	15	112	113
9	8	17	144	145
9	2	77	36	85

кўрсатди. Уларни қуйидаги айниятга асосан топиш мумкин:

$$(10n - 5)^2 + [50n(n - 1) + 12]^2 = [50n(n - 1) + 13]^2.$$

Масалан, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10$ бўлганда (5, 12, 13), (15, 112, 113), (25, 312, 313), (35, 612, 613), (45, 1012, 1013), (55, 1512, 1513), (65, 2112, 2113), (75, 2812, 2813), (85, 3612, 3613), (95, 4512, 4513) Пифагор сонлари ҳосил бўлади. Қуйидаги Пифагор сонлари ҳам мавжуд:

- (21, 220, 221),
 (201, 20200, 20201),
 (2001, 2002000, 2002001),
 (20001, 200020000, 200020001),

(41, 840, 841), (4001, 8004000, 8004001),
(401, 80400, 80401), (40001, 8000 40000, 800040001)

(уларнинг тузилишига эътибор беринг). Учта соннинг бири квадратли сон бўлган Пифагор сонлари ҳам мавжуддир. Масалан, (3, 2², 5), (7, 24, 5²), ... Бундай Пифагор сонларининг ҳам чексиз кўплигини исботлаш мумкин. Пифагор сонларини ташкил қилувчи (a , b , c) лардан икkitаси квадрат бўла олмаслигини Ферма исботлаган. a ва b катетлар айирмаси берилган натурал q сонига тенг бўлган асосий Пифагор учбурчакларнинг бири маълум бўлса, уларнинг чексиз кўплигини қуйидаги йўл билан топиш мумкин:

$$a - b = q; \quad mn = b, \quad \frac{m^2 - n^2}{2} = a, \quad \frac{m^2 + n^2}{2} = c.$$

Бу тенгликлардан m ва n ларни аниқлаб,

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{m-1}, U_m, U_{m+1}, \dots \quad (U)$$

кетма-кетликни тузамиз:

$$U_1 = n, \quad U_2 = m,$$

$$U_{e+1} = 2U_e + U_{e-1}, \quad e \geq 2.$$

(U) кетма-кетликнинг исталган икки қўшни ҳадларининг кўпайтмаси b ни, квадратлар айирмасининг ярми a ни, квадратлар йиғиндисининг ярми c ни беради.

Мисоллар. 1) $a - b = 7$ бўлган асосий Пифагор сонлари топилсин. (12, 5, 13) Пифагор сонлари учун $a - b = 7$.

$$\left. \begin{aligned} a &= 12, \quad m \cdot n = 5, \\ b &= 5, \quad \frac{m^2 + n^2}{2} = 13 \end{aligned} \right\} \text{системадан } n = 1, \quad m = 5 \text{ ларни топамиз.}$$

Шундай қилиб, $U_1 = 1$, $U_2 = 5$ ва $U_{e+1} = 2U_e + U_{e-1}$ лардан фойдаланиб, 1, 5, 11, 27, 65, 157, 379, ... кетма-кетликни ҳосил қиламиз ва ундан юқорида айtilган йўл билан

$$(5, 12, 13), (55, 48, 73), (297, 304, 425),$$

$$(1755, 1748, 2477), (10205, 10212, 14437),$$

$$(59503, 59496, 84145) \dots$$

асосий Пифагор сонларини ҳосил қиламиз. Агар асосий Пифагор сонлари сифатида (8, 15, 17) олинса, юқорида айtilган йўл билан 3, 5, 13, 31, 75, 181, 437, ... кетма-кетликни тузиб, ундан (15, 8, 17), (65, 72, 97), (403, 396, 565), (2325, 2332, 3293), (13575, 13568, 19193), (79097, 79104, 111865), ... Пифагор сонларини ҳосил қиламиз.

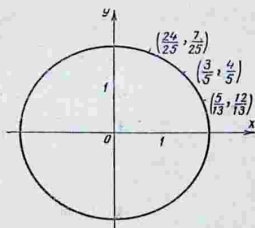
2) Катетлари кетма-кет натурал сонлардан иборат бўлган чексиз кўп Пифагор учбурчаклари ҳосил қилинсин. Бу ҳолда $a - b = q = 1$. Асосий Пифагор учбурчак сифатида (3, 4, 5) ни олиш мумкин. $n = 1$, $m = 3$ ларни топиб, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, ... кетма-кетликни ҳосил қилиб, ундан

(3, 4, 5), (21, 20, 29), (119, 120, 169), (697, 696, 985), ... Пифагор сонларини ҳосил қиламиз.

Ферма қўйидаги масалани қўйган эди: шундай (a, b, c) Пифагор сонлари топилсинки, улар учун $a + b$ ва c лар тўлиқ квадратдан иборат бўлсин. Бундай Пифагор сонларининг чексизлиги исботланган. Шуниси ажойибки, улар учун (a, b, c) сонлар жуда катта сонлардир. Бундай учталикларнинг энг кичиги $a = 4565486027761$, $b = 1061652293520$, $c = 4\,687\,2986\,10289$ бўлиб, $a + b = 23721\,51^2$; $c = 2165017^2$ бўлади. Шундай қилиб, бу ҳолда $a + b = 2372151^2$, $c^2 = a^2 + b^2 = 2165017^4$. Пифагор сонини ташкил қилувчи a , b ва c ларнинг бири 5 га бўлинишини исботлаш мумкин.

Арифметик прогрессия ташкил қилувчи Пифагор сонларининг чексиз кўплигини исботлаймиз: $b - r$, b , $b + r$ Пифагор сонлари бўлсин ва бу уч сон айирмаси r бўлган уч ҳадли прогрессия ташкил қилсин. Шу билан бирга $(b - r)^2 + b^2 = (b + r)^2$, бундан $b = 4r$. Масалан, (32, 42, 52) Пифагор сонларини ҳосил қилади. $r = 1, 2, 3, \dots$ бўлганда бундай Пифагор сонларининг чексизлигини кўрсатиш мумкин. $r = 1$ бўлгандагина асосий Пифагор сонлари ҳосил бўлади.

$a^2 + b^2 = c^2$ тенгламанинг натурал ечимларини топиш учун уни $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ шаклида ёзиб, $(a, c)^2 = 1$ ва $(b, c)^2 = 1$ ни назарга олиб, $a_1^2 + b_1^2 = 1$ тенгламанинг рационал ечимларини топиш масаласига ўтилади. Ўз навбатида бу масала, айлана устидаги рационал нуқталарни топишга айланади. Бундай нуқталарнинг айримларини кўрсатиш билан чегараланамиз (4-шакл).



4- шакл.

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1,$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

(5, 12, 13) — Пифагор сонлари.

Гипотенузаси берилган c га тенг бўлган Пифагор учбурчаклари мавжуд. Масалан, $c = 12$ бўлганда (a, b, c) Пифагор сонларини топиш талаб қилинсин, яъни $144 = 12^2 = a^2 + b^2$ бўлсин. b^2 нинг қиймати 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 ларга тенг бўлиши керак.

$b^2 = 121$ бўлса, $144 = 121 + a^2$, $a^2 = 23$ бўлиб, a натурал сон бўлмайди. $a < b$ эканлиги назарга олинса, юқоридаги квадратларнинг ҳаммасини текширишга ҳожат қолмайди.

$144 = a^2 + b^2 \leq 2b^2$, демак, $b^2 \geq 72$, яъни b^2 учун юқорида келтирилган квадратларнинг 72 дан каттасини синаб кўриш етарли.

$$144 - 100 = 43 \text{ — квадрат эмас,}$$

$$144 - 81 = 63 \text{ — квадрат эмас.}$$

Шундай қилиб, гипотенузаси 12 га тенг бўлган ва катетлари натурал сонлардан иборат бўлган учбурчак мавжуд эмас. Агар $c = 13$ деб олинса, юқорида келтирилган йўл билан $a = 5$, $b = 12$ ларни топиш мумкин. Умуман, $c \leq 100$ учун, яъни

$c = 5, 10, 13, 15, 17, 20, 25, 29, 30, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 45, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 60, 61, 65, 68, 70, 73, 74, 75, 78, 80, 82, 85, 87, 90, 91, 95, 97, 100$

бўлганда катетлари натурал сонлардан иборат бўлган учбурчак мавжуд бўлади.

1949 йилда математик Шельд $c = 2576450045 = 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53$ га тенг бўлган ва юзлари тенг бўлмаган Пифагор учбурчагининг 64 тасини кўрсатган эди. 5, 13, 29, 37, 41, 53 ларнинг ҳаммаси $4k + 1$ шаклдаги туб сон. $a + b + c$ йиғиндиси бир хил бўлган (a, b, c) — Пифагор сонлари ҳам мавжуд (бу йиғиндини Пифагор сонларининг периметри деб аталади).

Масалан,

$$(3255, 5032, 5993),$$

$$(7055, 168, 7057),$$

(119, 7080, 7081) учун уларнинг периметри 14280 га тенг. Юзи ва периметри сон жиҳатдан тенг бўлган Пифагор сонларининг фақат иккитаси мавжуд:

$$1) a = 6, \quad b = 8, \quad c = 10, \quad S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24, \quad p = 6 + 8 + 10 = 24;$$

$$2) b = 12, \quad a = 5, \quad c = 13, \quad S = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30, \quad p = 5 + 12 + 13 = 30.$$

Периметрлари натурал сонларнинг квадратига тенг бўлган асосий Пифагор сонлари ҳам мавжуд. Булардан энг кичик периметрга эга бўлгани (16, 63, 65) бўлиб, $16 + 63 + 65 = 144 = 12^2$ га тенг. (252, 275, 373) учун периметр $900 = 30^2$ га тенг. Периметрлари куб, тўртинчи, бешинчи ва умуман, натурал соннинг n -даражасидан иборат бўлган Пифагор сонлари ҳам мавжуд. Чунончи, (57967, 44544, 73105) учун периметр $p = 175616 = (2^3 \cdot 7)^3$ га тенг.

Ферманинг исботига кўра юзи натурал соннинг квадратига тенг бўлган Пифагор сонлари мавжуд эмас.

Иккита элементи туб сонлардан иборат бўлган Пифагор сонлари мавжуд: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (11, 60, 61), (19, 180, 181), (61, 1860, 1861). Бундай Пифагор сонлари чексиз кўп деган гипотеза мавжуд. Асосий Пифагор сонлари учун $\frac{a \cdot b}{2}$ га Пифагор сонларининг юзи деб аталади.

Умумий юзга эга бўлган Пифагор сонларининг энг кичиги (20, 21, 29) ва (12, 35, 37) лардир. Уларнинг юзи 210 кв. бирликка тенг. Ҳар қандай натурал n сон учун умумий юзга эга бўлган n та Пифагор сонининг мавжудлигини Ферма исботлаган.

Масалан, 1) (518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458), (231, 2960, 2969) ва (111, 6160, 6161) лар Пифагор сонлари бўлиб, улар 341880 га тенг бўлган умумий юзга эга.

2) (2508, 52416, 52491), (3168, 46410, 46518), (5236, 14040, 28564), (6006, 24480, 25206) ва (8580, 17136, 19164) лар Пифагор сонлари бўлиб, улар 73513440 га тенг бўлган умумий юзга эга.

Одатда $a + bi$ шаклдаги комплекс сонлар a ва b бутун рационал сонлар бўлганда Гаусс бутун сонлари деб аталади. Гаусс бутун сонлари Пифагор сонларини ҳосил қилиш манбандир. $a + bi$ — Гаусс бутун сонининг квадрати яна $x + iy$ шаклдаги Гаусс бутун сонини беради:

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi; \quad x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab.$$

$x, y, z = a^2 + b^2$ сонлари Пифагор сонларини ҳосил қилади.

Мисоллар. 1) $(3 + 2i)^2 = 5 + 12i$; $x = 5, y = 12, z = 9 + 4 = 13$; $(5, 12, 13)$ — Пифагор сонлари.

2) $(4 - 1 \cdot i)^2 = 15 - 8i$; $x = 15, |y| = 8, z = 16 + 1 = 17, (15, 8, 17)$ — Пифагор сонлари.

Гаусс комплекс сони z нинг кубини $x^2 + y^2 = z^3$ тенгламанинг бутун ечимини топишга олиб келади.

Мисол. $(2 + i)^3 = 2 + 11i$; $z = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$; бундан $5^3 = 2^2 + 11^2$; $x = 2, y = 11, z = 5$ лар бутун ечимларидир.

Бу мисолда $(5\sqrt{5})^2 = 2^2 + 11^2$, шунинг учун $(2, 11, 5\sqrt{5})$ Пифагор сонларини беради. Худди шундай йўл билан $x^2 + y^2 = z^4$ ва умуман $x^2 + y^2 = z^n$ тенгламаларининг бутун ечими топилади.

Мисол. $z^4 = x^2 + y^2$ тенгламанинг бутун илдизларини топинг.

$z = 2 - i$ Гаусс бутун сонини оламиз:

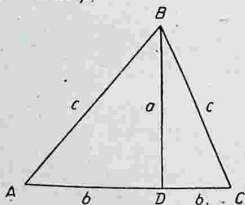
$$z^4 = (2 - i)^4 = -7 - 24i;$$

$$x = |-7| = 7;$$

$$y = |-24| = 24; |z| = a^2 + b^2 = 5,$$

демак, $5^4 = 7^2 + 24^2$ ёки $(7, 24, 25)$ Пифагор бутун сонларидир.

Иккита Пифагор учбурчагини тенг катетлари билан бирлаштириб, учбурчак ҳосил қилинса, у ҳолда бу учбурчакнинг ҳамма томонлари ва юзи натурал сонлардан иборат бўлади. Бундай учбурчак Герон учбурчаги деб аталади (5- шакл).



5- шакл.

$\triangle ABC$ нинг томонлари $c, c_1, (b + b_1)$ лар натурал сонлардан иборат. $S_{ABC} = \frac{1}{2}a(b + b_1)$ ҳам натурал сон, чунки Пифагор учбурчакларидан катетларининг бири жуфт сон. Шунинг учун, агар a тоқ бўлса, b ва b_1 лар жуфт сон бўлиб, $\frac{b + b_1}{2}$ натурал сон бўлади.

Мисол. (9, 12, 15), (5, 12, 13) Пифагор учбурчакларининг иккинчи катетлари бир хил. Бу катетлари бўйича учбурчаклар бирлаштирилса, томонлари (13, 14, 15) ва юзи 84 *ка* бирликка тенг бўлган Герон учбурчаги ҳосил бўлади.

Шунингдек, [(51, 75, 84), (36, 51, 75)], [(68, 75, 77), (13, 68, 75)], [(40, 51, 77), (13, 40, 51)], [(40, 68, 84), (36, 40, 68)] лардан Герон учбурчаклари ҳосил бўлади.

Томонлари кетма-кет натурал сонлардан иборат бўлган Герон учбурчакларига қуйидаги мисолларни келтириш мумкин: (51, 52, 53), (193, 194, 195), (723, 724, 725), (2701, 2702, 2703).

Эйлер қуйидаги масалани қўйган эди: ҳамма томонлари, медианалари ва юзи натурал сонлардан иборат бўлган Герон учбурчаклари мавжудми? Шундай учбурчакларнинг мавжудлигини ва улардан энг кичик (136, 170, 174) томонларга эга бўлган учбурчак Герон учбурчаги эканлигини Эйлер кўрсатган эди. Қирралари натурал сонлардан иборат бўлган кўп ёқлилар ҳам мавжуд. Бундай масалалар билан математик Шверинг шуғулланган.

Масалан, қирралари 6, 7, 8, 9, 10, 11, ҳажми эса 48 куб бирликка тенг бўлган тетраэдр. Бу тетраэдрнинг ҳажми, ён ёғининг юзлари ва ҳамма қирралари натурал сонлардан иборатдир. Шундай хоссага эга бўлган тетраэдрлардан яна қуйидагиларни кўрсатиш мумкин. Қирралари 896, 990, 1073, 1073, 1073 ва ҳажми 62092800, ёғларининг юзлари 436800, 436800, 471240, 471240 ларга тенг бўлган тетраэдр қуйидаги масалани қўйган эди: ҳар қандай натурал n сон учун исталган иккитасининг йиғиндиси квадратли сон бўлган n та квадрат сонлар мавжудми?

$n = 2$ учун $9 = 3^2$ ва $16 = 4^2$ квадрат сонлар мавжудки, $9 + 16 = 5^2$ дир.

$n = 3$ учун 44^2 , 177^2 , 240^2 натурал сонлар мавжудки, улар учун қуйидаги йиғиндилар квадратли сон бўлади:

$$1) 44^2 + 177^2 = 125^2; (44, 177, 125),$$

$$2) 44^2 + 240^2 = 244^2; (44, 240, 244).$$

Булар ҳам Пифагор сонлари. Умумий ҳолда юқорида келтирилган гипотеза ҳал қилинмаган.

Пифагор сонлари маъқул сонлар деб аталадиган сонларни ҳосил қилиш манбаидир. Қадим замонда

$$\left. \begin{aligned} x^2 - k &= y^2, \\ x^2 + k &= z^2 \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

тенгламалар системасининг (x, y, z) натурал ечимларини топиш масаласи билан шуғулланганлар. Айрим натурал k сонлар учун бундай ечимлар мавжуд бўлган ва шу ҳолда бундай k ларга маъқул сонлар деб аталган.

(x, y, z) лар $(**)$ нинг натурал ечимлари бўлганда

$$k = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

бўлади. Демак, k сони $(x + z)$ ва $(x + y)$ ларга бўлинади. Шунинг учун ҳам $(x + z) \leq k$, $(x + y) \leq k$, бундан $x < k$, $z < k$, $y < k$ бўлади. x, y, z $(**)$ системанинг, берилган k маъқул сон учун чекли натурал ечимлари бўлади, деган хулоса келиб чиқади.

$2x^2 = z^2 + y^2$, $z > y$ бўлгани учун z ва y лар бир вақтда ё жуфт, ёки тоқ сонлар бўлади, шунинг учун $z + y = 2b$, $z - y = 2a$ бўлади. Бундан $z = b + a$, $y = b - a$, $2x^2 = z^2 + y^2 = (a + b)^2 + (b - a)^2 = 2(a^2 + b^2)$, $x^2 = a^2 + b^2$ бўлади. Демак,

$$2k = z^2 - y^2 = (a + b)^2 - (b - a)^2 = 4ab, \quad k = 2ab.$$

Шундай қилиб, k маъқул сон бўлганда $a^2 + b^2 = c^2$ тенглама (a, b, c) Пифагор сонларини бериб, $k = 2ab$ бўлади.

Аксинча, (a, b, c) лар Пифагор сонларини ҳосил қилганда, $c^2 \pm 2ab = (b \pm a)^2$ бўлиб, $k = 2ab$ маъқул сон бўлади.

Мисоллар. 1) $3^2 + 4^2 = 5^2$; $a = 3$; $b = 4$; $k = 2ab = 24$.

Демак, $\begin{cases} x^2 - 24 = y^2 \\ x^2 + 24 = z^2 \end{cases}$ системани қаноатлантирувчи чекли сондаги (x, y, z) натурал сонлар мавжуддир. Булардан $x \geq 5$, $z \geq 7$, $y \geq 1$ эканлиги келиб чиқади.

(x, y, z) ларни қуйидаги йўл билан аниқлаймиз:

$k = 24$ нинг натурал бўлувчилари 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 бўлиб,

$$z = b + a = 7,$$

$$y = b - a = 1,$$

$$x^2 = z^2 - 24 = 25,$$

$$x = 5,$$

$$24 : (z + x) \text{ ёки } 24 : 12;$$

$$24 : (x + y) \text{ ёки } 24 : 6,$$

демак, $(x, y, z) = (5, 1, 7)$ берилган системанинг ечимидир.

2) $5^2 + 12^2 = 13^2$; $a = 5$; $b = 12$; $c = 13$ бўлганда, $k = 2ab = 120$ бўлади.

$$\text{Бундан } z = b + a = 12 +$$

$$+ 5 = 17.$$

$$y = b - a =$$

$$= 12 - 5 = 7.$$

$$x^2 + 120 = z^2; x^2 = 17^2 -$$

$$- 120 = 169.$$

120 нинг бўлувчилари:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10,$$

$$12, 15, 20, 24, 30, 40,$$

$$60, 120.$$

Демак, $\left. \begin{array}{l} x^2 - 120 = y^2, \\ x^2 + 120 = z^2 \end{array} \right\}$ системанинг натурал ечимлари $(x, y, z) = (13, 7, 17)$ лардир.

$$120 : (x+z) \text{ ёки } 120 : 30;$$

$$120 : (x+y) \text{ ёки } 120 : 20.$$

Бундан, $x > 11, z > 15, y > 1$ эканлиги маълумдир. (13, 7, 17) лардан ташқари бошқа натурал ечимларнинг ҳозиргича осонлик билан аниқлани мумкин.

Айрим маъқул сонлар $a^2 + b^2 = c^2$ тенгламанинг иккинчи ундан ортиқ ечимларидан топилади.

Мисоллар. 1) $20^2 + 21^2 = 29^2$

$$12^2 + 35^2 = 37^2 \text{ лардан } k = 840 \text{ маъқул}$$

сон топилади:

$$29^2 + 840 = 41^2,$$

$$37^2 - 840 = 23^2.$$

$$2) 40^2 + 42^2 = 58^2$$

$$24^2 + 70^2 = 74^2$$

$$15^2 + 112^2 = 113^2$$

$\left. \begin{array}{l} 40^2 + 42^2 = 58^2 \\ 24^2 + 70^2 = 74^2 \\ 15^2 + 112^2 = 113^2 \end{array} \right\} \text{ лардан } k = 4 \cdot 840 = 3360 \text{ маъқул}$

сон топилади:

$$58^2 + 4 \cdot 840 = 82^2,$$

$$74^2 - 4 \cdot 840 = 46^2,$$

$$74^2 + 4 \cdot 840 = 94^2,$$

$$113^2 + 4 \cdot 840 = 127^2,$$

$$113^2 - 4 \cdot 840 = 97^2.$$

k — маъқул сон бўлганда kd^2 ҳам $d = 1, 2, \dots$ лар учун маъқул сон бўлиши аниқ (ўйлаб кўринг!). Лекин kd^2 маъқул сон бўлганда k нинг ҳам маъқул сон бўлиши шарт эмас. Масалан, $k = 6 \cdot 2^2$ маъқул сон, лекин 6 маъқул сон эмас. $k = 4mn(m^2 - n^2)l^2$ (m, n, l — натурал сонлар) бўлганда k нинг маъқул сон эканлигини исботлаш мумкин. Шундай k лар учун $[(m^2 + n^2)l^2] \pm k = [(m^2 - n^2) \pm 2mn]l^2$ бўлади.

$3^x + 4^y = 5^z$ тенглама $x = y = z = 2$ дан ташқари яна бутун ечимга эгами, деган савол қўйилган эди. $3^x + 4^y = 5^z$

нинг $x = y = z = 2$ дан ташқари бошқа бутун ечимлари мавжудмаслигини математик Паранкевич исбот қилган. Математик Л. Юшманович эса

$$5^x + 12^y = 13^z,$$

$$7^x + 24^y = 25^z,$$

$$11^x + 60^y = 61^z,$$

$$9^x + 40^y = 41^z$$

тенгламалар ҳам $x = y = z = 2$ лардан бошқа ечимларга эга эмаслигини исботлаган. Ҳамма элементлари ўз вақтида квадратлардан иборат бўлган (a, b, c) Пифагор сонлари топилсин, деган масала қўямиз. Яъни, $a = a_1^2$, $b = b_1^2$, $c = c_1^2$ бўлсин. Бунда a_1, b_1, c_1 лар ҳам натурал сонлар. Алгебра тили билан айтганда $a_1^4 + b_1^4 = c_1^4$ тенгламани қаноатлантирувчи натурал a_1, b_1, c_1 сонлари мавжудми, деган савол қўйилган эди. Бу масала қуйидаги умумий масаланинг хусусий ҳолидир.

$x^n + y^n = z^n$ тенглама $n > 2$ бўлганда натурал ечимга эгами? ($n = 2$ учун бундай сонлар чексиз кўп; улар Пифагор сонларини ташкил қилади.) Бу масалани француз математиги П. Ферма қўйган эди. У грек математиги Днофантнинг (бизнинг эрамыздан 300 йил олдин яшаган) аниқмас тенгламаларга доир китобини ўрганар экан, унинг бир бетида қуйидаги жумлани ёзиб қолдирган эди:

«Мен $n > 2$ бўлганда $x^n + y^n = z^n$ тенгламанинг натурал ечимга эга бўла олмаслигининг ажойиб исботини топдим, лекин ўқиётган китоб бетида бўш жой кам бўлганлиги учун унинг исботини келтира олмайман».

Ҳозиргача бу теореманинг исботи ҳеч ким томонидан умумий ҳолда келтирилмаган. Шунинг учун бу теорема Ферма гипотезаси ёки Ферманинг буюк теоремаси деб юритилади. Эйлер бу теоремани $n = 3, 4$ лар учун, немис математиги Дирихле $n = 5$ учун ечими мавжуд эмаслигини исбот қилди. Ламэ эса $n = 7$ учун ечими мавжуд эмаслигини исбот қилди. $x^4 + y^4 = z^4$ тенглама натурал ечимларга эга эмаслиги исботланган бўлса-да, $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = (z^2 - 1)^2$ тенглама

$$x = 10, \quad x = 265,$$

$$y = 13, \quad y = 287,$$

$$z = 14, \quad z = 329$$

натурал ечимларга эга эканлиги исботланган. Булардан ташқари натурал ечимларни сир-қўқилиши аниқ эмас. Кейинчалик немис математиги Куммер (1810 — 1893) ҳам яратган алгебраик соялар назарияси ёрдамида Ферма гипотезасини ҳал қилиш йўлида кўп хизмат қилди. Куммер яшаган вақтда $2 < n \leq 100$ бўлганда $x^n + y^n = z^n$ нинг натурал ечимларга эга эмаслиги исботланган эди.

Ферма теоремасининг $x^n + y^n = z^n$ тенглама $n > 2$ бўлганда натурал ечимларга эга эмаслигини исботлаш ўринига $x^p + y^p = z^p$ нинг (p — туб сон) $p > 2$ бўлганда ечимга эга эмаслигини исботлаш етарли. $2 < p < 4002$ бўлганда $x^p + y^p = z^p$ нинг натурал ечимларга эга эмаслиги исботланган. Шундай қилиб, $p > 4002$ учун бу гипотеза ҳозиргача ҳал қилинмаган.

Германиянинг Дармштадт шаҳрида яшаган математик Вольфскаль ҳам Ферма гипотезасини ҳал қилиш йўлида кўп ишлаган, лекин бу гипотезани ҳал қила олмаганига кўйин ўзининг ўлими олдида қўйидаги васияти билан қилган:

«Ферма гипотезасини ҳал қилиш йўлида мен ва мен ота-таморани кўпгина олимлар хизмат қилиб келган бўлишига қўйин кунда бу гипотеза умумий ҳолда ҳал қилинмагани қолди. Мен ўзимнинг ҳамма бойлигимни (10000 марка) Теттинген банкига қўйиб, кимда-ким шу гипотезани тўғри ҳал қилса, ўшанга беришни васият қиламан».

Унинг васияти 2007 йилгача ўз кучини сақлаган марри эди. Шунча йил мобайнида бу пулдан тўлланидиган жорамад математика тараққиёти учун сарф қилиниши керак эди. Шундан кейин математика билан кам шуғулланиётганлар ҳам, математикадан жуда узоқ бўлганлар ҳам Ферма гипотезаси билан шуғулланиб, ҳар хил нотўғри, маъносиз «ечим»ларни, ўша вақтда ташкил қилинган комиссияга юбора бердилар.

Буюк немис математиги Д. Гильберт юборилган ечимлар муҳокамаларининг бирида қўйидагини айтган эди:

«Менимча, Ферма гипотезасини ҳал қилишга мендан ташқари ҳеч кимнинг кучи етмайди. Мен бўлсам олтин туҳум тугаётган товукни сўйиш тарафдори эмасман».

Кейинчалик қўйилган пулнинг бир қисмини математик Вифрихга шу соҳада эришган катта муваффақиятлари учун берилди.

1911 йилгача Ферма гипотезасининг 111 «исбот»и текширилиб, маъносиз эканлиги кўрсатилган эди. Ҳатто шун-

дай авторлар ҳам бўлдики, улар томонидан баён этилган «исбот» ларнинг маъносиз эканлиги кўрсатилгандан кейин ҳам, улар бу билан рози бўлмасдан, эълон қилинган мукофот комиссияси аъзоларини судга беришгача борганлар.

Гёттинген банкига қўйилган бу пул Германияда Гитлернинг ҳукумат бошлиғи бўлгунича мавжуд эди. Кейинчалик Гитлер бу пулни давлат ҳисобига ўтказиб юборди.

Пифагор сонларига оид қуйидаги масала ҳам қўйилган эди.

Тўғри бурчакли учбурчак ва тўғри бурчакли трапециянинг асосларига параллел бўлган чизиқлар ёрдамида уларни тенгдош бўлақларга бўлиш масаласи. Бу масала билан қадимги Вавилон математиклари шуғулланган.

Қуйидаги ҳолларни кўриб ўтамиз:

1) $S_1 = S_2$ бўлсин. Бу ҳолда (6-шакл)

$$C_1B_1 = x, S_{AC_1B_1} = S_1,$$

$$C_2B_2 = y, S_{C_1B_1BC} = S_2,$$

$$CB = z, S_{C_2B_2BC} = S_3,$$

$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{x^2}{y^2}, \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2, \frac{y}{x} \text{ рационал сон}$$

эмас, шунинг учун x ва y лар бир вақтда рационал сон бўла олмайди.

2) $S_1 = S_3$. Бу ҳолда $x^2 + y^2 = z^2$ бўлади. (Исботлаб кўринг-чи!) (x, y, z) лар Пифагор сонларини ҳосил қилади.

3) $S_2 = S_3$. Бу ҳолда тўғри бурчакли трапеция иккита тенгдош бўлган тўғри бурчакли трапецияларга бўлинади. Бу ҳолда $2y^2 = x^2 + z^2$ бўлиб, унинг натурал ечимлари

$$x = l(m - n),$$

$$y = lk,$$

$$z = l(m + n)$$

шаклда бўлишини Вавилон математиклари топишган. $l = 1$

бўлганда $\begin{cases} x = m - n, \\ y = k, \\ z = m + n \end{cases}$ бўлади. Бундай x, y, z сонларга математик А. А. Вайман «Вавилон» сонлари деб атаган.

Бу жадвалдан кўринадики, ҳар бир кейинги Вавилон сонлари, ундан олдинги Вавилон сонларининг охириги сонидан бошланади.

n	m	k	x	y	z
3	4	5	1	5	7
5	12	13	7	13	17
7	24	25	17	25	31
9	40	41	31	41	49

Эйлер томонидан қуйидаги гипотеза айtilган:

$$2 \leq k < n$$

бўлганда $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y^n$ тенглама $x_1, x_2, \dots, x_k$ ва y натурал ечимларга эга эмас.

Уорд бу гипотезанинг хусусий ҳолини, яъни $t \leq 10\,000$ бўлганда $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ нинг бутун ечимга эга эмаслигини текшириб тасдиқлади. $n = k \leq 5$ бўлганда юқорида келтирилган тенглама ечимга эга; $k = n = 2$ бўлганда, $x_1^2 + x_2^2 = y^2$ Пифагор сонларидир.

$$k = n = 3 \text{ бўлганда } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$

$$k = n = 4 \text{ бўлганда } 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4,$$

$$k = n = 5 \text{ бўлганда } 7^5 + 43^5 + 57^5 + 80^5 + 100^5 = 107^5$$

бўлади.

Ҳар қандай натурал n сонни $x^3 + y^3 + 2z^3$ (x, y, z — бутун сонлар) шаклида ифодалаш мумкинми, деган савол қўйилган эди. 1936 йилда n сонни $n \leq 220$ қийматларида ($n = 76, 99, 113, 148, 183, 190, 195$ лар учун маълум эмас) $x^3 + y^3 + 2z^3$ шаклида ифодалаш мумкинлиги кўрсатилган эди.

$x^n + y^n = z^n + t^n$ тенглама ҳар қандай $n > 4$ учун $x \neq z$, $y \neq t$ бутун ечимларга эгами, деган саволга жавоб топилгани йўқ.

Айрим $n(n < 5)$ лар учун бундай ечимлар мавжуд:

$$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2,$$

$$133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4,$$

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3,$$

$$103^2 + 542^2 = 359^2 + 514^2.$$

$x^n + y^n = z^{n+1}$ тенгламанинг бутун ечимларга эга эканлигини осонлик билан кўрсатиш мумкин. n — ихтиёрий натурал сон бўлсин. Ихтиёрий натурал a ва b сонлар учун $a^n + b^n = c$ ни ҳисоблаб топамиз. Натижада $x = ac$, $y = bc$

ва $z = c$ қийматлар $x^n + y^n = z^{n+1}$ нинг бутун ечимларини беради:

$$(ac)^n + (bc)^n = c^{n+1} = c^n \cdot c = c^n(a^n + b^n)$$

ёки

$$a^n c^n + b^n c^n = c^n(a^n + b^n)$$

бўлади.

Мисол. $x^2 + y^2 = z^3$ учун ихтиёрий натурал $a = 4$, $b = 7$ сонларни оламиз:

$$n = 2, \quad c = a^2 + b^2 = 4^2 + 7^2 = 65.$$

$x = 4 \cdot 65 = 260$, $y = 7 \cdot 65 = 455$, $z = 65$ лар берилган тенгламанинг бутун ечимлари бўлади.

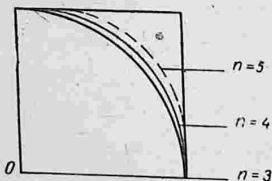
Ферманинг буюк теоремаси ўринли бўлмаган ҳолда, унинг қандай геометрик маъно беришини кўрсатиб ўтамиз. $n > 2$ бўлганда $x^n + y^n = z^n$ натурал ечимларга эга бўлмаса, $(\frac{x}{z})^n + (\frac{y}{z})^n = 1$ ёки $x_1^n + y_1^n = 1$ тенглама $n > 2$ бўлганда рационал ечимларга эга бўлмайди.

7-шаклдан $n = 3, 4, 5, \dots$ бўлган ҳолларда $x_1^n + y_1^n = 1$ чизиқларнинг устида бирорта ҳам рационал нуқта мавжуд эмаслиги кўриниб турибди.

Энди Пифагор сонлари билан боғлиқ бўлган ён ва диагонал сонлари билан танишиб ўтамиз.

Платон ўзининг «Давлат» деган китобида 7 ни 5 томонига мос бўлган «Рационал диагонал сон» деб атаган. Шунга асосан математик Прокл «Ён ва диагонал» сонларини қуйидагича таърифлаган:

Катетлари $a_1 = 1$ га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакнинг гипотенузаси $d_1 = 1$ га тенг.



7-шакл.

Шунга асосан $a_{n+1} = a_n + d_n$, $d_{n+1} = 2a_n + d_n$ формулалар ёрдамида a_n катетлар ва d_n гипотенузаларни топиш учун тақрибий формулаларни бериб, a_n ларни ён сонлар, d_n ларни эса диагонал сонлар деб атаган.

Масалан,

$$a_1 = 1, \quad d_1 = 1,$$

$$a_2 = a_1 + d_1 = 2, \quad a_3 = a_2 + d_2 = 2 + 3 = 5, \\ d_2 = 2a_1 + d_1 = 3, \quad d_3 = 2a_2 + d_2 = 4 + 3 = 7.$$

Бу формулалар ёрдамида катетлари a_n га тенг бўлган тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакларнинг d_n гипотенузлари тақрибий топилган.

Пифагор теоремасига асосан катетлари $a = 5$ бўлган учбурчакнинг гипотенузаси $d = 5\sqrt{2}$ бўлиши керак. Тақрибий формула ҳам $d = 7$ ни беради.

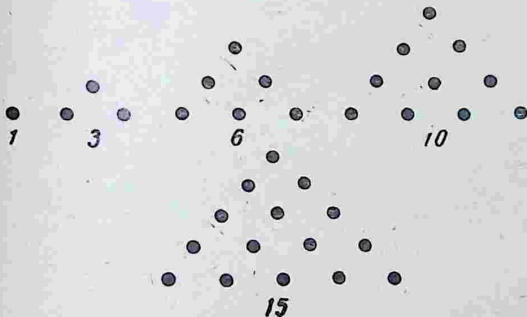
КЎП БУРЧАКЛИ ЁКИ ФИГУРАЛИ СОНЛАР

Буюк француз математиги П. Ферма кўп бурчакли сонлар билан ҳам шуғулланган. Биз ана шундай сонларнинг ҳосил бўлиши ва уларнинг айрим хоссалари билан танишиб чиқамиз.

Уч бурчакли сонлар

Бир неча бир хил тангалар олиб, қуйидаги йўл билан учбурчаклар ясаймиз ва уларни ясаш учун кетган тангалар сонини уч бурчакли сонлар деймиз (8-шакл).

Уч бурчакли сонларни қуйидаги усул билан ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... нату-



8- шакл.

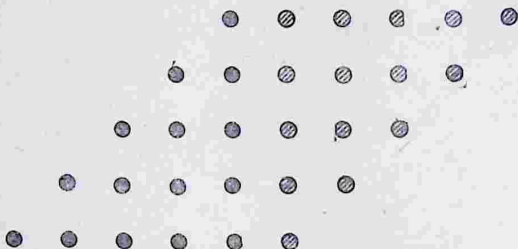
рал сонларни олиб, 1 нинг тагига 1 ни ёзамиз ва ҳар бир кейинги уч бурчакли сонни ҳосил қилиш учун уч бурчакли сонлар қаторидаги мавжуд сонни натурал сонлар қаторидаги, ундан бир хона узоқдаги сон билан қўшамиз ва ўша натурал сон остига ёзамиз:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ \dots \quad (1)$$

$$1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 21 \ 28 \ 36 \ 45 \ 55 \ 66 \ 78 \ 91 \ 105 \ 120 \ \dots \quad (2)$$

Натижада (2) қаторда уч бурчакли сонлар ҳосил бўлди. Энди ихтиёрий ўринда турган уч бурчакли сонни қандай қилиб топиш мумкинлигини аниқлаймиз. Биздан бешинчи ўринда жойлашган уч бурчакли сонни аниқлаш талаб этилсин.

Бунинг учун тангалардан юқорида кўрсатилган усул билан ҳосил қилинган учбурчакларнинг 5- ўриндагиларидан иккитасини олиб, уларни параллелограмм ҳосил бўладиган қилиб жойлаштирамиз (9- шакл):



9- шакл.

Бу параллелограмм 30 та тангадан тузилган, яъни $5 \cdot 6 = 30$, уларнинг ярми бешинчи уч бурчакли сонни беради:

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

Шундай қилиб, уч бурчакли сон k $\sigma_k^{(3)} = \frac{k(k+1)}{2}$ формула бўйича аниқланади. $\sigma_k^{(3)}$ сони 1 дан k гача бўлган

натурал сонларнинг йиғиндисига тенг. Мерсенн сони ва уч бурчакли сон бир вақтда мавжуд бўлиши мумкин, яъни $2^n - 1 = \frac{k(k+1)}{2}$ тенглик n ва k ларнинг қуйидаги қийматлари учун ўринли эканлигини 1956 йилда Бровский ва Шинцельлар кўрсатди: $(n, k) = (1, 1), (2, 2), (4, 5), (12, 90)$.

Қуйидаги теорема ҳам ўринлидир:

$(2^n - 1)$ Мерсенн сонлари уч бурчакли сон бўлганда $n \neq 22, 24, 42, 44$ ва умуман $n \neq 22 + 60t, 24 + 60t, 42 + 60t, 44 + 60t$ (t — исталган натурал сон) бўлмаслиги керак.

Масалан, $n = 12$ бўлганда $2^{12} - 1 = 4095$ — мураккаб Мерсенн сони; $k = 90$ бўлганда $\sigma_{90}^{(3)} = \frac{90 \cdot 91}{2} = 4095$ уч бурчакли сон.

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

уч бурчакли сонларнинг даражалари орасида қуйидаги муносабат мавжуд:

$$\begin{aligned} & 3 \left[1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} \right]^3 = \\ & = \left[1^3 + 3^3 + 6^3 + 10^3 + \dots + \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^3 \right] + \\ & + 2 \left[1^4 + 3^4 + 6^4 + 10^4 + \dots + \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Мисол. $3(1+3)^3 = 1^3 + 3^3 + 2(1^4 + 3^4)$, яъни

$$192 = 1 + 27 + 164 = 192.$$

Бунда 1 ва 3 сонлари биринчи ва иккинчи уч бурчакли сонлардир.

Умумий ҳади $3k + 2$ бўлган арифметик прогрессиянинг бирорта ҳам ҳади уч бурчакли сон эмаслигини исботлаш мумкин. Агар қандайдир k учун $3k + 2$ ифода уч бурчакли сон бўлса, у ҳолда $3k + 2 = \frac{k(k+1)}{2}$ бўлиши лозим. Бундан эса $k^2 - 5k + 4 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг натурал ечими мавжуд эмас. Демак, $3k + 2$ кўринишдаги уч бурчакли сон мавжуд эмас.

Агар уч бурчакли сонлардан $3 + 1 = 2^2$; $6 + 3 = 3^2$; $10 + 6 = 4^2$, ... шаклдаги йиғиндилар тузилса, ҳар бир квадрат сон иккита қўшни уч бурчакли сонлар йиғиндисидан иборат эканлиги кўринади. 1 ва 6 уч бурчакли сонлар

шундай хоссага эгаки, уларнинг квадратлари ҳам (1 ва 36) уч бурчакли сонлардир.

1 ва 6 уч бурчакли сонлардан ташқари, яна шундай хоссага эга бўлган уч бурчакли сонлар мавжудми, деган савол қўйилиши мумкин. 1946 йилда математик Люнгрэн бу саволга жавоб берди ва у 1 ва 6 дан ташқари квадрати яна уч бурчакли сон бўладиган уч бурчакли сонлар мавжуд эмаслигини исбот қилди.

Иккита кетма-кет уч бурчакли сонларнинг кўпайтмаси квадрат сон эмаслигини, яъни $\sigma_k^{(3)} \cdot \sigma_{k+1}^{(3)} \neq l^2$ ни исбот қилиш мумкин. Лекин ҳар қандай $\sigma_k^{(3)}$ уч бурчакли сон билан $l > k$ номерли уч бурчакли сонлар кўпайтмаси $\sigma_k^{(3)} \cdot \sigma_l^{(3)}$ квадрат бўлган чексиз кўп l сонининг мавжудлиги исботланган. Бунда k ва l уч бурчакли сонларнинг номери, улар кетма-кет уч бурчакли сонлар бўлиши шарт эмас.

Мисол. $k = 2$ учун

$$\sigma_2^{(3)} \cdot \sigma_{24}^{(3)} = 30^2 \text{ ёки } \sigma_2^{(3)} \cdot \sigma_{2 \cdot 10}^{(3)} = (3 \cdot 20 \cdot 4)^2.$$

Профессор Царанкевич томонидан бундай савол қўйилган эди. Ҳар бир элементи уч бурчакли сонлардан иборат бўлган Пифагор сонлари мавжудми?

8778, 10296 ва 13530 сонлар Пифагор сонлари ва уларнинг ҳар бири уч бурчакли сон эканлиги аниқланди:

$$13530^2 = 8778^2 + 10296^2,$$

$$8778 = \sigma_{132}^{(3)} = \frac{132 \cdot 133}{2},$$

$$10296 = \sigma_{143}^{(3)},$$

$$13530 = \sigma_{164}^{(3)}.$$

Айни бир вақтда квадрат сон бўлган уч бурчакли сонларнинг сони чексиз кўп эканлигини исботлаш мумкин.

Агар $\sigma_x^{(3)} = \frac{x(x+1)}{2} = y^2$ бўлса, $\sigma_{3x+4y+1}^{(3)}$ квадрат сон бўлади, яъни $\sigma_{3x+4y+1}^{(3)} = (2x + 3y + 1)^2$.

Мисол. 1) $\sigma_1^{(3)} = 1^2$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1, \end{cases} \sigma_{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1}^{(3)} = \sigma_8^{(3)} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1)^2 = 36;$

2) $\sigma_8^{(3)} = 36 = 6^2$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 6, \end{cases} \sigma_{3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 1}^{(3)} = \sigma_{49}^{(3)} = 35^2;$

3) $\sigma_{228}^{(3)} = 204^2$ ларни ҳосил қилиш мумкин.

1, 2, 3, ..., n сонлардан тузилган $Q_n = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n$ сонга Стирлинг сони дейилади. Масалан, 1, 2, 3, 4, 5 лардан

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 85 = Q_5$$

Стирлинг сони ҳосил бўлади. Стирлинг сони учун қуйидаги формула ўринли:

$$Q_n = 2 \cdot \sigma_1^{(3)} + 3\sigma_2^{(3)} + 4 \cdot \sigma_3^{(3)} + 5\sigma_4^{(3)} + \dots + n\sigma_{n-1}^{(3)}.$$

Мисол.

$$\begin{aligned} Q_5 &= 2\sigma_1^{(3)} + 3\sigma_2^{(3)} + 4\sigma_3^{(3)} + 5\sigma_4^{(3)} = \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 10 = 85. \end{aligned}$$

Ҳар қандай натурал $n > 33$ сон ҳар хил учта уч бурчакли сон йиғиндисидан иборат. Бу теоремани математик Рихтер исботлаган.

Мисол. $46 = 10 + 15 + 21 = \sigma_4^{(3)} + \sigma_5^{(3)} + \sigma_6^{(3)}.$

Ҳар қандай натурал $n > 51$ сон тўртта ҳар хил уч бурчакли сон йиғиндисидан иборат. Бу теоремани математик Шинцель исботлаган.

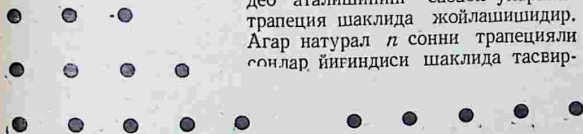
$$n = 60, 60 = 1 + 10 + 21 + 28 = \sigma_1^{(3)} + \sigma_4^{(3)} + \sigma_5^{(3)} + \sigma_7^{(3)}.$$

$k + (k+1) + (k+2) + \dots + (k+l)$ кўринишдаги сонлар, яъни кетма-кет натурал сонлар йиғиндисидан иборат бўлган сонлар трапецияли сон дейилади. Бунда $k=1$ бўлганда уч бурчакли сонлар ҳосил бўлади. k исталган натурал сон бўлиб, $l=0$ бўлса, бир қаторга жойлашган нуқталар ҳосил бўлади;

Мисол. $k=3, l=2$ бўлганда $12 = 3 + 4 + 5$ трапецияли сон ҳосил бўлади;

$k=5, l=0$ бўлганда бир қаторга жойлашган 5 та нуқта ҳосил бўлади, бу ҳам трапецияли сон (10-шакл).

Бундай сонларни трапецияли сон деб аталишининг сабаби уларнинг трапеция шаклида жойлашишидир. Агар натурал n сонни трапецияли сонлар йиғиндиси шаклида тасвир-



10-шакл.

ланиш сони $t(n)$ билан белгиланса, у ҳолда $n = 1, 2, 3, 6, 15, 81, 105$ лар учун $t(n) = 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8$ ҳосил бўлади.

Бундай $t(15) = 4$, демак, 15 сонини 4 хил йўл билан трапецияли сонлар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин:

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

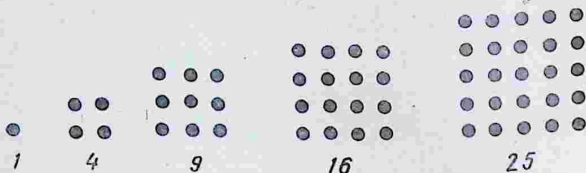
$n = p$ тоқ туб сон бўлганда $t(p) = 2$ бўлади. $t(n)$ сони n нинг тоқ бўлувчилари сонига тенг эканлигини исботлаш мумкин.

Мисоллар: 1) $t(25) = 3$; $25 = 12 + 13 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, 25 нинг тоқ бўлувчилар сони ҳам учта: 1, 5, 25.

2) $t(27) = 4$; $27 = 13 + 14 = 8 + 9 + 10 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, 27 нинг тоқ бўлувчилари ҳам тўртта: 1, 3, 9, 27.

Тўрт бурчакли (квадрат) сонлар

Бир нечта бир хил танга олиб, қуйидаги йўл билан квадратлар ясаймиз ва уларни яшаш учун кетган тангалар сонини тўрт бурчакли сонлар деб атаймиз (11-шакл).



11-шакл.

Тўрт бурчакли сонларни қуйидаги усул билан ҳам тузиш мумкин. Тоқ сонлар кетма-кетлигини олиб, уч бурчакли сонларни ҳосил қилиш усули каби у кетма-кетлик остидан биринчи тўрт бурчакли сон ёзилади, сўнгра биринчи тўрт бурчакли сон билан тоқ сонлар қаторидаги иккинчи сон йиғиндиси олиниб, тўрт бурчакли сонлар қаторига ёзилади. Сўнгра 2-тўрт бурчакли сон билан 3-тоқ сон йиғиндиси олиниб, тўрт бурчакли сонлар қаторига ёзилади ва ҳоказо:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, ...

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, ...

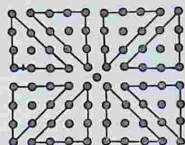
Шундай қилиб, тўрт бурчакли сонлар кетма-кет натурал сонлар квадратларидан тузилган эканлиги кўриниб турибди. Қадимги грек математиги Диофант қуйидаги теоремани баён қилган эди:

Агар 8 та бир хил уч бурчакли сонга натурал 1 сони қўшилса, квадрат сон ҳосил бўлади, яъни

$$8\sigma_k^{(3)} + 1 = \sigma_{(2k+1)}^{(4)}.$$

Бу теоремани оsonгина исботлаш мумкин: $\sigma_k^{(3)}$ уч бурчакли сон $\frac{k(k+1)}{2}$ га тенг. Демак, $8 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$ — квадрат сон. Диофант теоремасини қуйидаги шаклда ҳам кўрсатиш мумкин (12- шакл).

Бу теоремадан ҳар қандай n соннинг уч бурчакли сон эканлигини аниқлаш учун $8n + 1$ нинг квадрат сон эканлигини аниқлаш кифоя экани келиб чиқади.



12- шакл.

Масалан, $8 \cdot 66 + 1 = 529 = 23^2$; $8 \sigma_{11}^{(3)} + 1 = \sigma_{23}^{(4)} = \sigma_{23}^{(4)}$. Демак, 66

сони уч бурчакли сон. k -ўриндаги квадрат сон кетма-кет k та тоқ сонлардан тузилган (1 дан бошлаб) геометрик прогрессиянинг йигиндисидан иборат:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = \frac{1 + (2k-1)}{2} \cdot k = k^2.$$

Қуйидаги теорема ўринлидир.

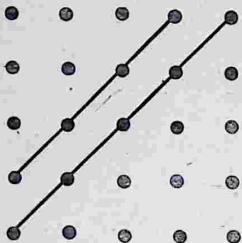
Ҳар қандай квадрат сон иккита уч бурчакли соннинг йигиндисидан иборат; уларнинг бири шу квадрат сон қайси ўринда бўлса, у ҳам уч бурчакли сонлар кетма-кетлигида ўша ўринда бўлиб, иккинчиси эса биринчи уч бурчакли сондан олдинги учбурчакли сондир.

Бу теореманинг исботи ҳам жуда оson: $\frac{k(k-1)}{2}$ ва $\frac{k(k+1)}{2}$ лар иккита кетма-кет жойлашган уч бурчакли сонлар. Шунинг учун

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2 - k + k^2 + k}{2} = k^2.$$

Масалан, 25 сони тўрт бурчакли сон: $25 = 10 + 15$, яъни кетма-кет икки уч бурчакли соннинг йигиндисидан иборат. Теореманинг чизмадаги тасвири қуйидагича бўлади (13-шакл).

Шундай қилиб, натурал сонлар: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ,
 Уч бурчакли сонлар: 1, 3, 6, 10, 15, 21,
 Квадрат сонлар: 1, 4, 9, 16, 25, 36,



13- шакл.

Қуйидаги теорема ўринлидир:

Ҳар қандай квадрат соннинг квадрат сонлар кетма кетлигидаги ўрнининг номери билан номери шу квадрат сондан 1 та кам бўлган уч бурчакли сон иккиланмасининг йигиндисига тенг.

Бу теоремани ҳам оsonлик билан исботлаш мумкин:

$$\sigma_k^{(4)} = k + \frac{2k(k-1)}{2} = k + k^2 - k = k^2,$$

бунда $\sigma_k^{(4)}$ сони k -тўрт бурчакли сонни, $k(k-1)$ эса $(k-1)$ -уч бурчакли сонни белгилайди. Бир вақтда ҳам уч бурчакли, ҳам квадрат сон бўладиган сонларнинг (1 дан ташқари) энг кичиги 36 бўлиб, ундан кейингилари 1225, 41616, 1413721, 48024900 лар эканлиги аниқланган. Бундай сонларнинг чексиз кўп эканлиги исботланган. n уч бурчакли квадрат сон

$$\frac{(17 + 12\sqrt{2})^n + (17 - 12\sqrt{2})^n - 2}{32}$$

формула ёрдамида топилади.

Мисол. $n = 2$ бўлганда

$$\frac{(17 + 12\sqrt{2})^2 + (17 - 12\sqrt{2})^2 - 2}{32} = 36 \text{ бўлади.}$$

Беш бурчакли (пентагонал)¹ сонлар

14- шаклда беш бурчакли сонлар тасвирланган.

Уларни қуйидаги усул билан ҳосил қилиш мумкин:

3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...

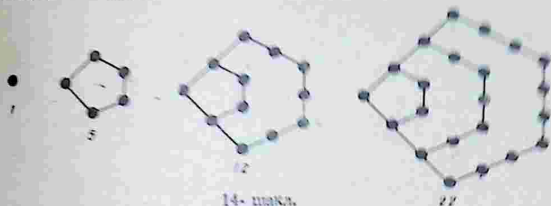
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ...

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, ...

¹ Пентагонал — юнонча сўз бўлиб, бешбурчак деган маънони билдиради.

Пентагонал сонларга тегишли қуйидаги теоремалар ўринлидир:

1) ҳар қандай беш бурчакли сон $5k$ номери билан ундан битта олдинги ўриндаги уч бурчакли сон ўқилишининг йиғиндисига тенг.



Агар $\sigma_k^{(5)}$ билан k -ўриндаги беш бурчакли сонни белгиласак, беш бурчакли сонларни ҳосил қилишнинг қуйидаги формуласи келиб чиқади:

$$\sigma_k^{(5)} = k + 3 \cdot \frac{(k+1)k}{2} = \frac{2k + 3k^2 - 3k}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Масалан, $k=3$ бўлса, учинчи ўриндаги 5 бурчакли сон 12 га тенг бўлади:

$$\sigma_3^{(5)} = 12; \pi_3^{(5)} = \frac{3(3 \cdot 3 - 1)}{2} = 12; \sigma_3^{(5)} = 3 + 3 \cdot \sigma_2^{(3)}.$$

2) ҳар қандай беш бурчакли сон худди $5k$ ўриндаги уч бурчакли сон билан ундан олдинги ўриндаги уч бурчакли сон иккиланмасининг йиғиндисига тенг:

$$\sigma_k^{(5)} = \sigma_k^{(3)} + 2\sigma_{k-1}^{(3)} = \frac{k(k-1)}{2} + 2 \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Мисол. $\sigma_5^{(5)} = 15 + 2 \cdot 10 = 35$. Демак, 5-ўриндаги беш бурчакли сон 5-ўриндаги уч бурчакли сон 15 билан 4-ўриндаги 3 бурчакли сон 10 нинг иккиланмасининг йиғиндисидан иборат.

3) беш бурчакли соннинг учлангани уч бурчакли сондир, яъни

$$3 \cdot \sigma_k^{(5)} = 3 \frac{k(3k-1)}{2} = \frac{3k(k-1)}{2} = \sigma_{(3k-1)}^{(3)}.$$

Бу сон $(3k-1)$ -уч бурчакли сондир.

Мисол. 22 сони 4- ўриндаги беш бурчакли сон, унинг учланмаси эса 11- ўриндаги уч бурчакли сон: $22 \cdot 3 = 66 = \sigma_{11}^{(3)}$.

Бу теоремадан беш бурчакли сонларнинг 3, 4, 8, 9 рақамлар билан тугамаслиги келиб чиқади, чунки акс ҳолда тегишли уч бурчакли сонлар 9, 2, 4, 7 рақамлар билан тугаган бўлар эди; лекин ҳеч қандай уч бурчакли сон охирида 9, 2, 4, 7 рақамлари йўқ;

4) ҳар қандай беш бурчакли сон ўзининг тартиб номери квадрати билан ундан олдинги ўриндаги уч бурчакли соннинг йиғиндисига тенг:

$$\sigma_k^{(5)} = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k^2 + k^2 - k}{2} = \frac{3k^2 - k}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Мисол. Беш бурчакли сонлар қаторида 8- ўринда жойлашган: $92 = 8^2 + 28 = 64 + 28 = 92$, бунда 28 сони 7- ўриндаги уч бурчакли сондир. Беш бурчакли сонларни қўйидаги усул билан ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot 2 &= 5 \\ 1 + 2 + 3 \cdot 3 &= 12 \\ 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 4 &= 22 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \cdot 5 &= 35 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \cdot 6 &= 61 \\ \text{ва ҳоказо.} \end{aligned}$$

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

$$\begin{aligned} \text{Умуман } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (k-1) + k \cdot k &= \frac{3k^2 - k}{2} = \\ &= \sigma_k^{(5)} - \text{беш бурчакли сондир.} \end{aligned}$$

Беш бурчакли сонлар айрим аддитив (йиғинди) масалаларни ҳал этишда муҳим роль ўйнайди. Бирор натурал n сонни ҳар хил қўшилувчилардан иборат бўлган натурал сонлар йиғиндисини кўринишида бир неча хил ифодалаш мумкин.

Масалан, $17 = 2 + 4 + 5 + 6$ ва $17 = 4 + 6 + 7$.

Уларнинг бири жуфт сондаги ҳар хил қўшилувчилар йиғиндисидан (4 та), иккинчиси эса тоқ сондаги (3 та) ҳар хил қўшилувчилар йиғиндисидан иборат.

Берилган натурал n сонни жуфт ва тоқ сондаги ҳар хил қўшилувчилар йиғиндиси шаклида турлича ифодалаш мумкин:

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4,$$

$$7 = 1 + 2 + 4.$$

Бундан 7 сонини иккита ҳар хил қўшилувчининг йиғиндиси шаклида 3 хил ифодалаш мумкин экани, лекин 3 дан ортиқ ҳар хил қўшилувчилар шаклида ифодалаш мумкин эмаслиги кўринади. Берилган натурал n сонни маълум сондаги ҳар хил қўшилувчиларнинг йиғиндиси шаклида неча хил ифодаланиш сони унинг тасвирланиш сони дейилади.

Мисол. 7 нинг иккита ҳар хил қўшилувчилар шаклида тасвирланиш сони 3 га тенг. Унинг учта ҳар хил қўшилувчилар шаклида тасвирланиш сони 1 га тенг; учдан ортиқ сондаги ҳар хил қўшилувчилар шаклида тасвирланиш сони эса 0 га тенг.

Берилган n сонини маълум сондаги ҳар хил қўшилувчилар шаклида неча хил ифодалаш мумкинлиги ҳақида ушбу теорема (Лежандр-Эйлер теоремаси) мавжуд:

Агар $n \neq \frac{3k^2 - k}{2}$ бўлса, яъни n беш бурчакли сон бўлмаса, уни ҳар хил жуфт ва тоқ сондаги қўшилувчилар шаклида тасвирланиш сони бир хил бўлади.

Агар $n = \frac{3k^2 - k}{2}$, яъни беш бурчакли сон бўлса, юқорида айтилган маънодаги тасвирланиш сони орасидаги айирма $(-1)^k$ га тенг.

1) $n = 9$ — пентагонал сон эмас.

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5,$$

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4.$$

2) $n = \frac{3k^2 - k}{2}$ да $k = 3$ деб олсак, $n = 12$ — беш бурчакли сон ҳосил бўлади.

$$12 = 1 + 11 = 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 1 + 2 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 6.$$

Шундай қилиб, 12 сони жуфт дона ҳар хил қўшилувчилар шаклида 7 хил усулда тасвирланди:

$$12 = 1 + 2 + 9 = 1 + 3 + 8 = 1 + 4 + 7 = 1 + 5 + 6 = \\ = 2 + 3 + 7 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5.$$

Демак, 12 сонини ҳар хил тоқ дона қўшилувчилар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони 8 га тенг (12 нинг ўзи ҳам ҳисобланади), $7 - 8 = -1 = (-1)^3$.

Олти бурчакли сонлар

Улар бир хил тангалардан қуйидаги усулда тузилади (14-а шакл):

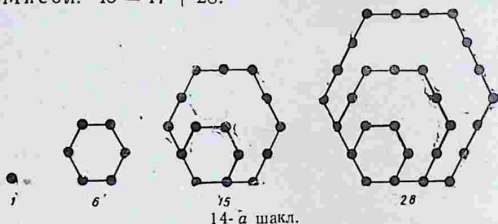
Олти бурчакли сонларни қуйидаги усулда ҳам тузиш мумкин:

(1) 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...

(2) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 25, ...

(3) Олти бурчакли сонлар 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 91, ..

Мисол. $45 = 17 + 28$.



Олти бурчакли сонлар тўғрисида қуйидаги теоремалар ўринлидир:

1) ҳар қандай олти бурчакли сон унинг тартиб номери билан шу номердан 1 та кам ўринда жойлашган уч бурчакли соннинг тўртланмасининг йиғиндисига тенгдир.

Агар k -ўринда жойлашган олти бурчакли сонни $\sigma_k^{(6)}$ билан белгиласак,

$$\sigma_k^{(6)} = k + 4 \cdot \frac{(k-1)k}{2} = 2k^2 - k = k(2k-1)$$

бўлади.

Бунда $\frac{(k-1)k}{2}$ нинг қиймати $(k-1)$ -ўринда жойлашган уч бурчакли сондир.

$$\text{Мисол. } \sigma_3^6 = 3 + 4 \cdot \frac{3(3-1)}{2} = 3(2 \cdot 3 - 1) = 15,$$

$$\sigma_4^6 = 4 + 4 \cdot \frac{4(4-1)}{2} = 4(2 \cdot 4 - 1) = 28 \text{ ва ҳоказо;}$$

2) ҳар қандай олти бурчакли сон шу номерли уч бурчакли сон билан ундан олдинги уч бурчакли сон учланмасининг йигиндисига тенг:

$$\sigma_k^{(6)} = \frac{k(k+1)}{2} + 3 \frac{(k-1)k}{2} = k(2k-1).$$

$$\text{Мисол. } 91 = 28 + 3 \cdot 21.$$

Бунда 91 еттинчи ўринда жойлашган олти бурчакли сон худди шу ўринда жойлашган уч бурчакли сон (28) билан ундан олдинги уч бурчакли сон (21) нинг учланмасининг йигиндисидан иборат;

3) уч бурчакли сонлар қаторидаги барча тоқ ўриндаги сонлар олти бурчакли сонлардир, яъни

$$\sigma_k^{(6)} = \frac{(2k-1)(2k-1+1)}{2} = k(2k-1),$$

бунда

$$\frac{(2k-1)(2k-1+1)}{2}.$$

$(2k-1)$ — тоқ ўринда жойлашган уч бурчакли сонни белгилайди.

Уч бурчакли сонлар: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

Олти бурчакли сонлар: 1, 6, 15, 28, ...

n бурчакли сонлар

Юқорида кўриб чиқилган $\sigma_k^{(3)}$, $\sigma_k^{(4)}$, $\sigma_k^{(5)}$, $\sigma_k^{(6)}$ сонларни ҳосил қилинишидан фойдаланиб, умуман n бурчакли $\sigma_k^{(n)}$ сонларни ҳосил қилиш методини аниқлаш мумкин.

Ҳар қандай k -ўринда жойлашган n бурчакли сон биринчи ҳади 1 га ва айирмаси $(n-2)$ га тенг бўлган k та ҳадлардан тузилган арифметик прогрессиянинг йигиндисидан иборат:

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(n)} &= 1 + (n-1) + (2n-3) + (3n-5) + \dots + [1 + (n-2)(k-1)] = \\ &= \frac{1 + 1 + (n-2)(k-1)}{2} k = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}. \end{aligned}$$

Бў формулани биринчи марта бизнинг эрамиздан II аср олдин александриялик математик Гипсикл кўрсатган эди.

Мисол. $\sigma_k^{(5)} = \frac{(5-2)k^2 - (5-4)k}{2} = \frac{3k^2 - k}{2}$ беш бурчакли сон.

Умуман, n бурчакли сонлар учун қуйидаги теоремалар ўринлидир:

1) ҳар қандай n бурчакли сон шу соннинг тартиб номери билан ундан битта кам номерли ўринда жойлашган уч бурчакли соннинг $(n-2)$ тасининг йигиндисидан иборат:

$$\sigma_k^{(n)} = k + \frac{k(k-1)}{2}(n-2) = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}.$$

Мисол. $\sigma_3^{(6)} = 3 + 3(6-2) = 15$, ҳақиқатан ҳам 3-олти бурчакли сон 15 дир;

2) ҳар қандай n бурчакли сон шу номерли уч бурчакли сон билан ундан олдинда жойлашган уч бурчакли соннинг $(n-3)$ тасининг йигиндисига тенг.

Мисол. $\sigma_5^{(5)} = 15 + 10(5-3) = 15 + 20 = 35$.

15 сони бешинчи ўриндаги уч бурчакли сон, 10 сони эса тўртинчи ўриндаги уч бурчакли сон, 35 эса 5-ўриндаги беш бурчакли сондир. Кўп бурчакли сонларга доир қуйидаги жадвални ҳисоблаш билан келтириб чиқариш мумкин.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Уч бурчакли сонлар	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Тўрт бурчакли сонлар	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Беш бурчакли сонлар	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Олти бурчакли сонлар	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Етти бурчакли сонлар	1	7	16	34	55	81	112	148	189	235
Саккиз бурчакли сонлар	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тўққиз бурчакли сонлар	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Ўн бурчакли сонлар	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 устундаги сонлар мос равишда айирмаси 3, 6, 10, 15, 21, 26, 36, 45 ларга тенг бўлган арифметик прогрессиядан иборат.

Грециянинг Гераз шаҳрида туғилган ва эрамининг 100-йилларида яшаган Никомах деган математикнинг «Арифметикага кириш» деган китобида уч бурчакли ва пирамидал сонлар ҳақида сўз юритилган. Жуда аниқ бўлмаган маълумотларга асосан кўп бурчакли сонлар билан бизнинг эраминдан 2 аср олдин яшаган математиклар шуғулланганлар. Айрим маълумотларга қараганда Пифагор мактабида (бизнинг эраминдан V аср олдин) кўп бурчакли сонлар билан шуғулланганлар.

Фигуралли (кўп бурчакли) сонлар тарихий жиҳатдан катта аҳамиятга эгадир, чунки улар билан Ферма томонидан айтилган ва биринчи марта 1815 йилда француз математиги Коши томонидан исбот қилинган қуйидаги аддитив масалалар боғлиқдир.

Ҳар қандай натурал m сон 3 ёки undan кам уч бурчакли сонлар йиғиндисидан, тўрт ёки undan кам тўрт бурчакли сонлар ва умуман n ёки undan кам n бурчакли сонлар йиғиндисидан иборат.

Мисол. $m = 20$ бўлсин;

$20 = 10 + 10$ — иккита уч бурчакли сонлар йиғиндиси,

$20 = 16 + 4$ — иккита тўрт бурчакли сонлар йиғиндиси,

$20 = 12 + 5 + 1 + 1 + 1$ — бешта беш бурчакли сонлар йиғиндиси,

$20 = 6 + 6 + 6 + 1 + 1$ — бешта олти бурчакли сонлар йиғиндиси,

$20 = 16 + 1 + 1 + 1 + 1$ — бешта етти бурчакли сонлар йиғиндиси,

$20 = 8 + 8 + 1 + 1 + 1$ — бешта саккиз бурчакли сонлар йиғиндиси.

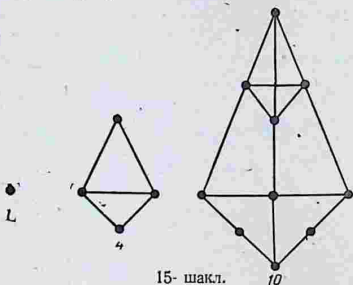
$20 = 9 + 9 + 1 + 1$ — тўртта тўққиз бурчакли сонлар йиғиндиси,

$20 = 10 + 10$ — иккита ўн бурчакли сонлар йиғиндиси-
дан иборат.

Пирамидал сонлар

Ўнта бир хил шарлардан учбурчак тузамиз. Бу учбурчакнинг устига 6 та худди шундай шарлардан яна учбурчак тузамиз. Унинг устига 3 та шундай шарлардан учбурчак ясаймиз ва энг устки учбурчак устига 1 та шар қўямиз. Натижада ёқлари учбурчаклардан иборат бўлган уч бурчакли пирамида ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, бу пирамида уч бурчакли 10, 6, 3, 1 сонлардан тузилади (15- шакл).



15- шакл.

Шунга ўхшаш пирамидаларни (тетраэдрларни) исталган учбурчак устида яшаш мумкин. Бу учбурчаклардаги шарлар сони уч бурчакли сонлардан иборатдир. Ҳар бир пирамидани ҳосил қилиш учун кетган шарлар сонига пирамидал уч бурчакли сонлар дейилади.

Натурал сонлар: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

Уч бурчакли

сонлар: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Пирамидал (тетраэдрал) уч бурчакли сонлар:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

Ҳар қандай пирамидал уч бурчакли сон олтиланмасининг биринчиси шу пирамидал соннинг номерини кўрсатадиган 3 та кетма-кет натурал сонларнинг кўпайтмасидан иборат.

Мисоллар. 1) $6 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, бунда 10 сони 3-ўриндаги пирамидал сонни кўрсатади.

2) $6 \cdot 35 = 5 \cdot 6 \cdot 7$, бунда 35 сони 5-ўриндаги пирамидал сонни кўрсатади.

Шундай қилиб, агар пирамидал уч бурчакли сонни $\theta_k^{(3)}$ билан белгиласак, $\theta_k^{(3)} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ эканлиги аниқланади. Қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$\theta_1^{(3)} = \sigma_1^{(3)},$$

$$\theta_2^{(3)} = \sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)},$$

$$\theta_3^{(3)} = \sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta_k^{(3)} = \sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} + \dots + \sigma_k^{(3)}.$$

Мисол.

$$\theta_4^{(3)} = \sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} + \sigma_4^{(3)} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

Бир вақтда ҳам уч бурчакли сон, ҳам уч бурчакли пирамидал сон бўлган сонларнинг фақат 5 таси мавжуд деган гипотезани математик Эскатт кўрсатган: 1, 10, 120, 1540 ва 7140.

$$\sigma_1^{(3)} = \theta_1^{(3)} = 1,$$

$$\sigma_{55}^{(3)} = \theta_{20}^{(3)} = 1540,$$

$$\sigma_4^{(3)} = \theta_3^{(3)} = 10,$$

$$\sigma_{119}^{(3)} = \theta_{34}^{(3)} = 7140.$$

$$\sigma_{15}^{(3)} = \theta_8^{(3)} = 120,$$

Пирамидал сонлар ичида квадратли сонлар қанча, деган савол қўйилган эди. Люк деган математик, бундай пирамидал сонлардан фақат 3 таси мавжуддир, деган гипотезани айтиб, улар $\theta_1^{(3)} = 1 = 1^2$; $\theta_2^{(3)} = 4 = 2^2$; $\theta_{13}^{(3)} = 140^2$ эканлигини кўрсатган эди. Бу гипотезани 1918 йилда Ватсон деган математик исботлади.

Исталган икkitаси ўзаро туб бўлган чексиз кўп пирамидал (тетраэдал) сонлар кетма-кетлиги мавжуд эканлигини исботлаш мумкин.

$$\theta_1^{(3)} = 1; \quad \theta_2^{(3)} = 4; \quad \theta_5^{(3)} = 35; \quad \theta_{17}^{(3)} = 969, \dots$$

1, 4, 35, 969, ... бу кетма-кетликнинг исталган икки ҳади ўзаро тубдир. $\theta_k^{(3)} + 1$ туб сонлардан иборат бўлган тетраэдал сонлар:

$$\theta_1^{(3)} + 1 = 1 + 1 = 2,$$

$$\theta_2^{(3)} + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$\theta_3^{(3)} + 1 = 10 + 1 = 11.$$

Юқоридагидек, пирамидал сонларни фақат уч бурчакли сонлар асосидагина эмас, балки квадрат, беш бурчакли, олти бурчакли ва ҳоказо сонлар асосларида ҳам тузиш мумкин. Натижада квадрат, беш бурчакли, олти бурчакли ва ҳоказо пирамидал сонлар ҳосил бўлади.

1) Ҳар қандай квадрат пирамидал сон ўша ўринли уч бурчакли пирамидал сон билан ундан олдинги уч бурчакли пирамидал соннинг йиғиндисидан иборат:

$$\theta_k^4 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k-1)k(k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Шундай қилиб, 1, 5, 14, 30, 55, ... тўрт бурчакли пирамидал сонлардир.

2) Беш бурчакли пирамидал сонлар 1, 6, 18, 40, 75, ... бўлиб, $\theta_k^{(5)} = \frac{1}{2} k^2 (k+1)$ бўлади.

3) Олти бурчакли пирамидал сонлар 1, 7, 22, 50, 95, ... бўлиб, $\theta_k^{(6)} = \frac{1}{6} n(n+1)(4n-1)$ бўлади.

4) Бир вақтда ҳам уч бурчакли сон ҳамда квадрат пирамидал соннинг учланмаси бўлган сонларнинг фақат икkitаси мавжуд.

$$\sigma_2^{(3)} = 3 \cdot \theta_1^{(4)}, \quad 3 = 3 \cdot 1;$$

$$\sigma_5^{(3)} = 3 \cdot \theta_2^{(4)}, \quad 15 = 3 \cdot 5.$$

Умуман k -тартибли l бурчакли пирамидал сон ўша тартибли уч бурчакли пирамидал сон билан ундан олдинги уч бурчакли пирамидал соннинг $(l-3)$ га кўпайтмасининг йиғиндисига тенгдир, яъни

$$\theta_k^{(l)} = \theta_k^{(3)} + \theta_{k-1}^{(3)} \cdot (l-3)$$

ёки

$$\theta_k^{(l)} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k-1)k(k+1)}{6} \cdot (l-1).$$

Мисол. $l = 5$ бўлганда

$$\theta_k^{(5)} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{2(k-1)k(k+1)}{6} = \frac{k^3(k+1)}{6}$$

ни ҳосил қиламиз. Пирамидал сонлар ҳақида Серпинскийнинг қуйидаги теоремалари мавжуд:

1) Икки натурал сон квадратларининг йиғиндисидан иборат бўлган пирамидал сонлар чексиз кўп.

Мисол. $10 = 1^2 + 3^2 = \theta_3^{(3)}$, $20 = 2^2 + 4^2 = \theta_1^{(3)}$.

2) Икки пирамидал сон йиғиндисидан иборат бўлган квадрат сонлар чексиз кўп.

Мисол. $1 + 35 = \theta_1^{(3)} + \theta_5^{(3)} = 36 = 6^2 = \sigma_6^{(4)}$.

3) Икки пирамидал сон йиғиндисидан иборат бўлган туб сонларнинг фақат учтаси мавжуд.

Мисол.

$$p_1 = 2 = \theta_1^{(3)} + \theta_1^{(3)} = 1 + 1; \quad p_3 = 5 = \theta_1^{(3)} + \theta_2^{(2)} = 1 + 4;$$

$$p_5 = 11 = \theta_1^{(3)} + \theta_3^{(3)} = 1 + 10.$$

4) Учта ҳар хил пирамидал сонлардан иборат бўлган уч ҳадли арифметик прогрессиялар чексиз кўп.

Мисол. 20, 120, 220 уч ҳадли арифметик прогрессия, бунда

$$\theta_4^{(4)} = 20, \quad \theta_8^{(3)} = 120, \quad \theta_{10}^{(3)} = 220.$$

СЕҲРЛИ КВАДРАТЛАР

1640 йилнинг апрель ойида П. Ферма Мерсеннга юборган хатида қуйидагиларни ёзган эди. «Мен арифметикада сеҳрли квадратлардек ажойиб сонларни билмайман».

Сеҳрли (магик) квадратлар деб n та йўл ва n та устундан иборат бўлиб, нима-кет жойлашган натурал сонлардан тузилган шундай квадратга айтиладики, унда ҳамма йўллар, устунлар ва асосий диагоналарда жойлашган сонларнинг йиғиндиси бир-бирига тенг бўлади. Сеҳрли квадратлар бизнинг эрамыздан 400—300 йил олдин Хитойда маълум бўлган. Энг қадимги Хитой сеҳрли квадрати қуйидаги шаклда бўлган:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Бу сеҳрли квадратда ҳамма йиғиндилар 15 га тенг. Кейинчалик сеҳрли квадрат эрамызнинг 1 асрида Ҳиндистонда пайдо бўлган.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Бунда ҳамма йиғиндилар 34 га тенг.

Европада сеҳрли квадратлар XV асрнинг бошларида пайдо бўлган. Юқорида келтирилган 4- тартибли сеҳрли квадратнинг умумий хоссасидан ташқари, яна ажойиб хоссалари бор:

1) Квадрат учларидаги рақамларнинг йиғиндиси ҳам 34 га тенг:

$$1 + 4 + 13 + 16 = 34.$$

2) Квадрат учларидаги кичик квадратлар ва ўртадаги кичик квадратдаги рақамлар йиғиндиси ҳам 34 га тенг:

$$1 + 14 + 12 + 7 = 15 + 4 + 6 + 9 = 6 + 11 + 13 + 4 = \\ = 10 + 5 + 3 + 16 = 7 + 6 + 11 + 10 = 34.$$

3) Икки четки йўллар (устунлар) даги ва икки ўртадаги йўллар (устунлар) даги сонлар квадратларининг йиғиндиси бир-бирига тенг:

$$1^2 + 14^2 + 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2^2 + 3^2 + 16^2 = 438,$$

$$12^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 = 8^2 + 4^2 + 10^2 + 5^2 = 310.$$

n -тартибли сеҳрли квадратда n та йўл ва n та устун мавжуддир. Бундай квадратларда йўл, устун ва бош диагоналардаги сонларнинг йиғиндиси $\frac{1}{2} n(n^2 + 1)$ эканлигини исботлаш мумкин.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Мисоллар: 1) $2 + 7 + 6 = 9 +$
 $+ 5 + 1 = 4 + 3 +$
 $+ 8 = 2 + 9 + 4 =$
 $= 7 + 5 + 3 =$
 $= 6 + 1 + 8 =$
 $= 2 + 5 + 8 =$
 $= 4 + 5 + 6 = 15 =$
 $= \frac{3(3^2 + 1)}{2}$

2) Бунда $\frac{1}{2} n(n^2+1) = \frac{1}{2} \cdot 4(4^2 + 1) = 34$ га тенгдир.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Баъзи бир қўшимча хоссаларга эга бўлган сеҳрли квадратлар ҳам мавжуддир. Масалан, 64 катакдан иборат шундай сеҳрли квадрат мавжудки, уни тўртта тенг бўлақларга бўлганда яна 4 та сеҳрли квадрат ҳосил бўлади.

Қатта сеҳрли квадратда $\frac{1}{2} n(n^2+1) = \frac{1}{2} 8(8^2 + 1) = 4 \times 65 = 260$ га, кичикларда эса $\frac{1}{2} n(n^2+1) = 130$ га тенг.

1544 йилда математик Штифельт четидаги ҳамма квадратларни ташлаганда 13 дан 37 гача бўлган сонлардан тузилган 25 хонали сеҳрли квадрат, яна унинг четидаги квадратларни ташлаганда 21 дан 29 гача бўлган сонлардан тузилган 9 хонали сеҳрли квадрат ҳосил бўладиган 49 катакли сеҳрли квадрат ясади. Биринчи квадрат учун йиғиндилар 175 га, иккинчиси учун эса 125 га ва учинчи квадрат учун 75 га тенг.

1	6	60	63	9	55	54	12
59	64	2	5	52	14	15	49
62	57	7	4	16	50	51	13
8	3	61	58	28	11	10	56
41	19	22	43	39	29	33	40
46	24	17	48	28	34	30	27
20	42	47	21	38	35	31	26
23	45	44	18	25	32	36	37

40	1	2	3	42	41	45
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

569	59	449
239	359	479
269	659	149

Барча элементлари туб сонлардан иборат бўлган сеҳрли квадратлар ҳам мавжуд.

Йиғиндилар 1077 га тенг:

Йиғиндилар 798 га тенг.

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

Йиғиндилар 2792 га тенг:

23	1259	1217	293
947	653	383	809
449	743	1013	587
1373	137	179	1103

Туб сонлардан тузилган шундай тўққиз элементли сеҳрли квадрат мавжудки, уларнинг элементлари, биринчи ҳади $a_1 = 199$ га ва айирмаси $d = 210$ га тенг бўлган арифметик прогрессияни ташкил қилади.

829	1879	409
619	1039	1459
1669	199	1249

Бунда тегишли йиғиндилар 3117 га тенг.

Совет математиги В. А. Голубев абсолют қиймати туб сонлардан иборат бўлган сонлардан тузилган қуйидаги сеҳрли квадратларни тузган:

Тегишли йиғиндилар $S = 15$ га тенг.

-7	53	-31
-19	5	29
41	-43	17

47	101	-103	-37
-79	-43	41	89
59	23	-13	-61
-19	-73	83	17

Қуйидаги ажратилган йиғиндилар $S = 8$ га тенг:

$$47 + 17 + (-37) + (-19) = 101 + (-103) + (-73) + 83 = (-43) + 41 + 23 + (-13) = (-79) + 89 + 59 + (-61) = 8.$$

Ҳамма элементлари туб сонлардан иборат бўлиб, арифметик прогрессияни ташкил қилувчи тўртинчи тартибли сеҳрли квадрат мавжудми, деган савол қўйилган эди. Бу саволга жавоб топиш учун ҳамма элементлари туб сонлардан иборат бўлган 16 ҳадли прогрессия тузиш керак эди. 15 элементи туб сон бўлиб, битта элементи мураккаб сон бўлган шундай тўртинчи тартибли сеҳрли квадрат тузилган эди.

1969 йилда АҚШ математиги С. С. Рут ҳамма элементлари туб сонлардан иборат бўлиб, биринчи ҳади $Q = 2\,236\,133\,941$ га ва айирмаси эса $d = 223\,092\,870$ га тенг бўлган 16 ҳадли арифметик прогрессия тузди. Улардан тузилган сеҳрли квадрат қуйидагичадир:

2 236 133 941	5 359 434 121	5 136 341 251	2 905 412 551
4 690 155 511	3 351 598 291	3 574 691 161	4 020 876 901
3 797 784 031	4 243 969 771	4 467 062 641	3 128 505 421
4 913 284 381	2 682 319 681	2 459 226 811	5 582 526 991

Бунда йиғиндилар $15\,637\,321\,864$ га тенг.

Шундай гипотеза мавжуд:

Ҳар қандай натурал $n \geq 3$ сон учун n^2 та ҳар хил туб сонлардан тузилган сеҳрли квадратлар чексиз кўп.

Агар 1 ни ҳам туб сон деб ҳисобланса, биринчиси 3^2 та туб сонлардан тузилган (у шундай тартибли туб сонлардан иборат бўлган сеҳрли квадратларнинг энг кичик элементларидандир), иккинчиси эса 12^2 кетма-кет туб сонлардан тузилган (2 туб сон ўрнига 1 қабул қилинган) иккита сеҳрли квадрат ҳосил бўлади. Бундай сеҳрли квадратни 1913 йилда Манси тузган.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Тегишли йиғиндилар 111 га тенг.

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	703	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Тегишли йиғиндилар 4514 га тенг.

Математик Френикл 4-тартибли ҳар хил сеҳрли квадратларнинг сони 880 та эканлигини кўрсатган эди. Кейинчалик бу теорема исботланди. 1 дан 25 гача бўлган сонлардан тузилиши мумкин бўлган бешинчи тартибли сонли квадратларнинг ҳаммаси $25!$ ни ташкил қилади. Уларнинг бир қисми сеҳрли ва иккинчи бир қисми сеҳрли бўлмаган квадратлардир.

$25!$ сонли квадратларни электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида тузиш учун кетадиган вақт $2,95 \cdot 10^{22}$ секунд ёки $4,92 \cdot 10^{20}$ минут, ёки $8,20 \cdot 10^{18}$ соат, ёки $34 \cdot 10^{17}$ кун, ёки $9,35 \cdot 10^{14}$ йилга тенглиги ҳисобланган. Бу $(9,35 \cdot 10^{14})$ 9000 миллиард йилдан ортиқ вақтдир.

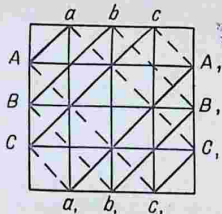
Шундай квадратлар ҳам борки, уларда ҳамма йўллар, устунлар ва асосий диагоналарда жойлашган сонларнинг йиғиндисигина эмас, синиқ диагоналар деб аталган йўналишлардаги сонлар йиғиндилари ҳам бир-бирига тенг бўлади.

Бундай квадратлар «шайтон» ёки панмагик квадратлар деб аталган. Француз математики Д. Лемер сеҳрли ва панмагик квадратларни мустақил тузиш йўлларини кўрсатган эди. Биз қуйидаги 16-шаклда синиқ диагоналарнинг жойлашини кўрсатамиз ва панмагик квадратга мисол келтирамиз.

Синиқ диагоналар:

$$\begin{cases} Aa \text{ ва } a_1A_1 \\ A_1c \text{ ва } c_1A \end{cases} \begin{cases} Bb \text{ ва } b_1B_1 \\ a_1b \text{ ва } b_1B \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cc \text{ ва } c_1C_1 \\ aC_1 \text{ ва } Ca_1. \end{cases}$$



16-шакл.

1	8	15	17	24
20	22	4	6	13
9	11	18	25	2
23	5	7	14	16
12	19	21	3	10

Ўнг томонда келтирилган панмагик квадратда панмагик квадрат учун тегишли бўлган йиғиндилар 20 та бўлиб, улар-

дан 8 таси синиқ диагоналардан иборат; бундай йиғиндилар 65 га тенг, биз синиқ диагоналардаги йиғиндиларни кўрсатиш билан чегараланамиз;

$$\begin{aligned} 1 + 19 + 7 + 25 + 13 &= 65, & 24 + 20 + 11 + 7 + 3 &= 65, \\ 20 + 8 + 21 + 14 + 2 &= 65, & 17 + 13 + 9 + 5 + 21 &= 65, \\ 9 + 22 + 15 + 3 + 16 &= 65, & 15 + 6 + 2 + 23 + 19 &= 65, \\ 23 + 11 + 4 + 17 + 10 &= 65, & 8 + 4 + 25 + 16 + 12 &= 65. \end{aligned}$$

Ҳамма йўллар, устунлар ва асосий диагоналарда жойлашган элементларнинг кўпайтмаси ўзгармас сонга тенг бўлган сеҳрли квадратлар ҳам мавжуддир.

Бундай сеҳрли квадратларни кўпайтма сеҳрли квадратлар деб аталади. Кўпайтма сеҳрли квадратларни йиғинди сеҳрли квадратлардан тузиш мумкин. Маълумки, бир хил асосли даражаларни кўп йиғиришда даража кўрсаткичлари қўйилади:

$$a^x \cdot a^y \cdot a^z = a^{x+y+z}.$$

Шу элементар қондага тасосан йиғинди сеҳрли квадратдан кўпайтма сеҳрли квадратни тузиш мумкин. Бунини қуйидаги мисол ёрдамида кўрсатамиз ($a = 2$).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$$\begin{aligned} 4 + 9 + 2 &= 3 + 5 + \\ &+ 7 = 8 + 1 + \\ &+ 6 = 15. \\ 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^2 &= 2^3 \cdot 2^5 \cdot \\ \cdot 2^7 &= 2^8 \cdot 2^1 \cdot 2^6 = \\ &= 32768. \end{aligned}$$

2^4	2^9	2^2	$=$	2^8	2^1	2^6
2^3	2^5	2^7		2^5	2	64
2^8	2^1	2^6				

йиғинди сеҳрли квадрат учун йиғинди 15 га тенг.

кўпайтма сеҳрли квадрат учун кўпайтма 32768 га тенг.

Устун ва йўл элементларининг йиғиндиси (бош диагоналаридан ташқари) нолга тенг бўлган сеҳрли квадратлар ҳам учрайди; улар нолинчи тўлиқ бўлмаган сеҳрли квадрат деб аталади.

6	-11	5
-16	12	4
10	-1	-9

$$\begin{aligned} 6 + (-11) + 5 &= -16 + 12 + 4 = 10 + \\ + (-1) + (-9) &= 6 + (-16) + 10 = - \\ -11 + 12 + (-1) &= 5 + 4 + (-9) = 0 \end{aligned}$$

1884 йилда профессор В. П. Ермаков «Элементар математика» журналида қуйидаги жадвални бериб, ундаги ҳамма 8 та ҳарфнинг ихтиёрий бутун қийматларида сеҳрли квадратлар ҳосил бўлишини баён қилди:

A	$C + a + b$	$D - a - b$	B
$D + c - d$	$B - d - c$	$A + a - c$	$C + c + d$
$B - c + d$	$D - a + c$	$C + a + c$	$A - c - d$
C	$A + a - b$	$B - a + b$	D

Лекин бу 8 та қийматни 1 дан 16 гача бўлган рақамлар билан катакларни қандай тўлдиришни кўрсатмаган эди. Ҷша журналда: «Биз бу масаланинг осон ечимини билмаймиз» — деб ёзилган эди.

Юрий Стасевич деган оддий бир ишчи (Алчевск шаҳри) юқорида қўйилган масалани ҳал қилиб ($A=1, B=4, C=13, D=16, a=1, b=0, c=-4, d=0$), янги сеҳрли ва шу билан бирга «шайтон» ёки панмагик квадратни ҳосил қилди.

	a	b	c	
A	$2y - t$	$2t - x$	z	$2x - y$
B	$2z - y$	$2x - z$	$2y - x$	t
C	x	$2z - t$	$2t - y$	$2y - z$
	$2t - z$	y	$2x - t$	$2z - x$
	a_1	b_1	c_1	

Бу жадвалда $x=7, y=6, z=10, t=11$ лар учун сеҳрли квадрат ва $a, b, c; a_1, b_1, c_1; A, B, C; A_1, B_1, C_1$ ларни жойлаштирганда «шайтон» квадрат ҳосил бўлади (текшириб кўринг).

Энди сеҳрли учбурчаклар, сеҳрли айлана ҳақида қисқача маълумот берамиз.

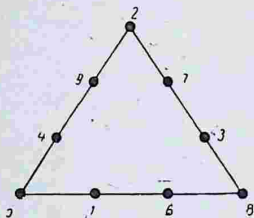
1) Томонларига 1 дан 9 гача натурал сонлар (ҳар бир томонида учтадан) ёзилган ва:

а) ҳар бир томонда жойлашган натурал сонлар йиғиндиси бир-бирига тенг;

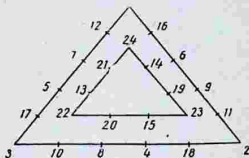
б) ҳар бир томонда жойлашган натурал сонлар квадратларининг йиғиндиси бир-бирига тенг бўлган учбурчаклар сеҳрли учбурчак дейилади (17-шакл):

$$2 + 7 + 3 + 8 = 8 + 6 + 1 + 5 = 5 + 4 + 9 + 2 = 20,$$

$$2^2 + 7^2 + 3^2 + 8^2 = 8^2 + 6^2 + 1^2 + 5^2 = 5^2 + 4^2 + 9^2 + 2^2 = 126.$$



17-шакл.



18-шакл.

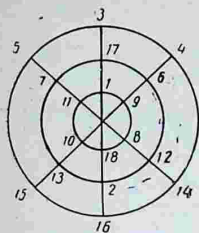
2) Концентрик сеҳрли учбурчаклар ҳам мавжуд (18-шакл): бу икки учбурчакда 1 дан 24 гача сонлар шундай ёзилганки, ташқи учбурчак учун:

$$1 + 12 + 7 + 5 + 17 + 3 = 3 + 10 + 8 + 4 + 18 + 2 = 2 + 11 + 9 + 6 + 16 + 1 = 45$$

ва ички учбурчак учун:

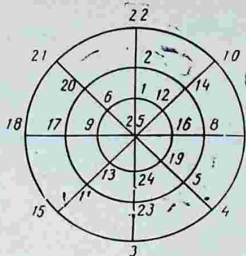
$$24 + 21 + 13 + 22 = 22 + 20 + 15 + 23 = 23 + 19 + 14 + 24 = 80.$$

3) Шундай концентрик айланалар мавжудки, уларда айланалар бўйлаб ва умумий диаметрлари бўйлаб ёзилган натурал сонлар йиғиндиси бир-бирига тенгдир (19, 20-шакллар):



19- шакл.

Бунда ҳамма
йиғиндилар
57 га тенг.

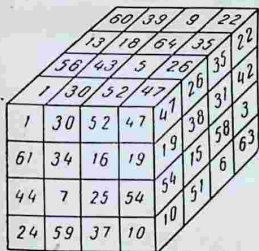


20- шакл

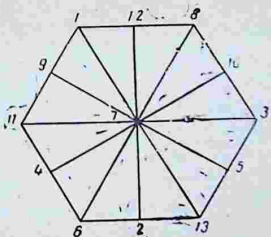
Бунда ҳамма
йиғиндилар
100 га тенг.

Сеҳрли кублар ҳам мавжуддир. Улар ҳақида ҳам қис-
қача маълумот бериш билан чегараланамиз. $3 \times 3 \times 3$ сеҳр-
ли куб мавжуд эмаслиги исботланган. Лекин $4 \times 4 \times 4$
сеҳрли куб мавжуд (21-шакл).

Бунда ҳамма вертикал ва горизонтал йиғиндилар (диаго-
нал йиғиндилардан ташқари) 130 га тенг. Агар куб параллел
кесимлар билан кесилса, натижада шундай квадратлар ҳо-



21- шакл.

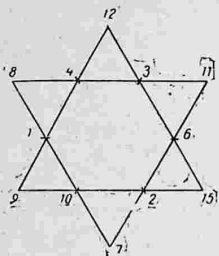


22- шакл.

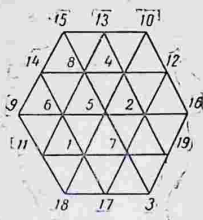
сил бўладики, уларда ҳам мос йиғиндилар 130 га тенг бўлади.

Бундан ташқари сеҳрли олтибурчаклар ҳам мавжуд. Масалан, 22-шаклда йиғиндилар 21 га, 23-шаклда йиғиндилар 26 га тенг.

24-шаклда эса ҳамма йўналишлар бўйича йиғиндилар 38 га тенг.



23- шакл.



24- шакл.

Сеҳрли квадратлар оиласида Эйлер квадратлари деб аталган квадратлар ҳам мавжуддир.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ва $b_1, b_2, \dots, b_n$ элементлардан қуйидаги йўл билан квадратлар тузамиз:

1) квадратнинг ҳар бир хонасига $a_1, a_2, \dots, a_n$ ва $b_1, b_2, \dots, b_n$ лардан фақат биттадан элемент ёзилади;

2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ ларнинг ҳар бири $b_1, b_2, \dots, b_n$ ларнинг фақат биттаси билан квадрат хоначаларида ёзилади;

3) квадратларнинг ҳар бир йўлида ва устунда $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ ларнинг ҳаммаси мавжуд бўлиши керак.

Бундай хоссали квадратларга Эйлер квадратлари деб аталади. Агар Эйлер квадратларининг диагоналлари учун ҳам учинчи хосса ўринли бўлса, бундай квадратларга диагоналли Эйлер квадратлари дейилади.

$n = 3, 4, 5$ бўлганда Эйлер квадратлари қуйидагилардир:

$n = 3$				$n = 4$				$n = 5$				
1, 1	2, 2	3, 3		1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5
2, 3	3, 1	1, 2		3, 4	4, 3	1, 2	2, 1	3, 4	4, 5	5, 1	1, 2	2, 3
3, 2	1, 3	2, 1		4, 2	3, 1	2, 4	1, 3	5, 2	1, 3	2, 4	3, 5	4, 1
				2, 3	1, 4	4, 1	3, 2	2, 5	3, 1	4, 2	5, 3	1, 4
								4, 3	5, 4	1, 5	2, 1	3, 2

$n = 4$ ва $n = 5$ бўлганда диагоналли Эйлер квадратлари ҳосил бўлиб, $n = 3$ бўлганда эса диагоналли бўлмаган Эйлер квадрати ҳосил бўлган. Эйлернинг ўзи жуда кўп уриниб, $n = 6$ бўлганда юқоридаги шартларни қаноатлантирадиган квадратларни ҳосил қила олмаган. Кейинчалик $n = 6$ бўлганда Эйлер квадратларини тузиш мумкин эмаслиги исботланди, $n \geq 7$ бўлганда Эйлер квадратларининг мавжуд ёки мавжудмаслиги ҳал қилинмаган.

АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯДАГИ ТУБ СОНЛАР ҲАҚИДА

Арифметик прогрессиялардаги мавжуд туб сонлар сонини аниқлаш масаласи билан олимлар кўп асрлар давомида шуғулланиб келганлар. Шу йўлда эришилган айрим муваффақиятлар билан танишиб ўтамиз.

Аввало ҳадларининг сони чекли бўлган арифметик прогрессиялар билан шуғулланамиз. Ҳадларининг сони 3 та ҳар хил туб сонлардан иборат бўлган арифметик прогрессияларнинг сони чексиз кўп эканлиги исботланган. Масалан, туб 3 сони билан бошланадиган, учала ҳади ҳам туб сонлардан иборат бўлган прогрессиялар мавжуддир:

3, 5, 7; 3, 11, 19; 3, 13, 23; 3, 17, 31;
3, 23, 43; 3, 31, 59; 3, 37, 71; 3, 41, 79; 3, 43, 83.

Бундай прогрессияларнинг сони чекли ёки чексизлиги маълум эмас.

Биринчи ҳади туб 2 сонига тенг бўлган ва учала ҳади ҳам туб сонлардан иборат бўлган прогрессияларнинг мавжуд бўлмаслигини осон исботлаш мумкин. (Исботлаб кўринг.)

Айирмаси 2 га, 4 га тенг бўлган ва учала ҳади ҳам туб сонлардан иборат бўлган уч ҳадли прогрессиялар иккита: 3, 5, 7 ва 3, 7, 11. Лекин айирмаси тоқ сон бўлиб, учала ҳади ҳам туб сондан иборат бўлган 3 ҳадли прогрессия мавжуд эмас. Айирмаси 6 га тенг бўлган ва учала ҳади ҳам туб сонлардан иборат бўлган прогрессиялар чексиз кўп деган гипотеза мавжуд. Бундай прогрессиялардан қуйидагиларни кўрсатиш мумкин:

5, 11, 17; 11, 17, 23; 17, 23, 29; 47, 53, 59.

Охирги мисолда учала туб сон ҳам туб сонлар кетма-кетлигида бирин-кетин жойлашган туб сонлардир.

Айирмаси 6 га тенг бўлган ва тўртталаси ҳам туб сонлар жадвалида кетма-кет жойлашган 4 ҳадли прогрессиялар ҳам мавжуд:

251, 257, 263, 269 ва 1741, 1747, 1753, 1759.

Айирмаси 6 га тенг бўлган ва бешта ҳади ҳам туб сонлардан иборат бўлган прогрессия фақат биттадир:

5, 11, 17, 23, 29.

Бешта кетма-кет туб сонлардан иборат бўлган беш ҳадли прогрессияларнинг бирортаси ҳам маълум эмасдир.

Учаласи ҳам фибоначчи сонларидан тузилган уч ҳадли ўсувчи арифметик прогрессиялар ҳам мавжуд. (Фибоначчи сонлари ҳақида кейинроқ гапирамиз.) Масалан, 2, 3, 5 ва 3, 8, 13 фибоначчи сонларидан тузилган арифметик прогрессиялар.

Тўртталаси ҳам фибоначчи сонларидан тузилган тўрт ҳадли арифметик прогрессиянинг мавжуд эмаслигини исботлаш мумкин.

Ферма теоремаси: *Арифметик прогрессияни ташкил қилувчи 4 та ҳар хил натурал сонлардан тузилган квадратлар мавжуд эмас. Лекин 3 та ҳар хил туб сонларнинг квадратларидан тузилган прогрессиялар мавжуд:*

$7^2 = 49$, $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $d = 120$, $\div 49, 169, 289$;
 $7^2 = 49$, $17^2 = 289$, $23^2 = 729$, $d = 240$, $\div 49, 289, 729$.

Бундай прогрессиялар чексиз кўп деган гипотеза мавжуд.

Математик Вокулич учта ҳар хил кублардан тузилган прогрессиянинг мавжуд эмаслигини исботлаган.

Учта ҳар хил биквадратлардан тузилган прогрессиянинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги исботланмаган.

Исталган узунликка эга бўлган ва ҳар хил туб сонлардан иборат прогрессиялар мавжуд, деган гипотеза айтилган.

Биринчи ҳади 23143 бўлиб, айирмаси 30030 бўлган ҳар хил туб сонлардан тузилган 12 ҳадли прогрессия мавжуд. Бу прогрессияни Совет математикларидан В. А. Голубев ва В. Н. Сердинскийлар кўрсатишган.

10 та ҳади ҳам туб сонлардан иборат бўлган 10 ҳадли прогрессия мавжуд: 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089, бунда айирма $d = 210$. Биринчи ҳади 4943, айирмаси эса 60060 бўлган ҳар хил туб сонлардан тузилган 12 ҳадли арифметик прогрессия ҳам мавжуд.

Охириги 10 йил мобайнида Совет математиги В. А. Голубев туб сонлардан иборат бўлган 10 ҳадли прогрессиянинг 49 тасини, 11 ҳадли прогрессиянинг 18 тасини, 12 ҳадли прогрессиянинг 3 тасини, 13 ҳадли прогрессиянинг битта-сини экспериментал йўл билан топди.

Мисол.

Биринчи ҳади 67709 га, айирмаси 25410 га тенг бўлган ва биринчи ҳади 179351 га, айирмаси эса 69300 га тенг бўлган прогрессиялар 12 ҳадли прогрессиялардир;

биринчи ҳади 2913971 га, айирмаси эса 510510 га тенг прогрессия 13 ҳадли прогрессиядир.

1969 йилда В. Н. Сердинский, америкалик математик Е. Карст ва С. С. Рутлар туб сонлардан тузилган қуйидаги прогрессияларнинг мавжудлигини кўрсатдилар:

Элементлари сони 10 дан кам бўлмаган прогрессияларнинг 35 таси, жумладан, биринчи ҳади 55117 бўлиб, айирмаси 60060 га тенг бўлган 14 ҳадли прогрессия, биринчи ҳади 2236133941, айирмаси эса 223092870 га тенг бўлган 16 ҳадли прогрессия топилган.

100 та ҳар хил туб сонлардан тузилган 100 ҳадли прогрессиянинг мавжудлиги маълум эмас. Агар шундай 100 ҳадли прогрессия мавжуд бўлса, бундай прогрессиянинг ҳадлари (биринчи ҳадидан ташқари) кавида 24 та рақамли сон бўлишини исботлаш мумкин.

Элементлари уч бурчакли сонлардан иборат бўлган 3 ҳадли арифметик прогрессиялар мавжудлиги исботланган.

Энди чексиз арифметик прогрессияда учрайдиган туб сонлар сони ҳақидаги мулоҳазалар билан танишиб ўтамиз.

Агар прогрессияда биринчи ҳад ва айирма ўзаро туб бўлса, бундай прогрессияни примитив прогрессия деб юритилади.

Айрим примитив прогрессияларда туб сонлар сони чексиз кўп эканлигини исботлаш қийин эмас.

Мисол. $5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots (6m - 1), \dots$

$3, 7, 11, 15, \dots (4m - 1), \dots$

$5, 9, 13, 17, \dots (4m + 1), \dots$

$13, 21, 29, 37, \dots (8m + 5), \dots$

прогрессияларнинг ҳар бирида ҳам туб сонлар чексиз кўпдир.

Юқорида айтилганидек, $(4m + 1)$ ва $(4m + 3)$ шаклдаги туб сонлар сони ҳам чексиз кўпдир.

Натурал n сонигача бўлган $(4m + 1)$ ва $(4m + 3)$ шаклдаги туб сонлар сонини $\pi_1(n)$ ва $\pi_3(n)$ билан белгилаймиз.

Мисол.

$$\pi_1(10) = 1, \quad \pi_3(10) = 2,$$

$$\pi_1(17) = 3, \quad \pi_3(17) = 3,$$

$$\pi_1(100) = 11, \quad \pi_3(100) = 13.$$

$n < 26861$ бўлганда $\pi_1(n) \leq \pi_3(n)$ эканлиги кўрсатилган. Ҳар қандай n учун ҳамма вақт $\pi_1(n) \leq \pi_3(n)$ бўлиши керак, дегэн гипотеза мавжуд эди.

Аммо 1914 йилда Англия математиги Литлвуд қуйидаги теоремани исбот қилди:

$\pi_1(n) > \pi_3(n)$ ва $\pi_1(n) < \pi_3(n)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи чексиз кўп натурал n сонлари мавжуддир.

Лекин $\pi_1(n) > \pi_3(n)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирорта ҳам натурал сон кўрсатилмаган эди. Фақат 1957 йилга келиб Д. Ж. Линч $n = 26861$ бўлганда $\pi_1(n) = 1473$ ва $\pi_3(n) = 1472$ бўлишини кўрсатди.

$n = 623681$ бўлганда $\pi_1(n) = 25444$, $\pi_3(n) = 25436$.

616000 ва 634000 сонлар орасида яна шундай n қийматлар мавжудлиги кўрсатилди. $n = 3 \cdot 10^6$ гача кўрсатилган n лардан ташқари бошқа шундай n лар мавжуд эмаслиги исботланди.

Демак, $n > 3\,000\,000$ натурал сонлар учун $\pi_1(n) > \pi_3(n)$ ни қаноатлантирувчи n лар чексиз кўпдир. Лекин ҳозирга-

ча бундай n ларнинг бирортасини ҳам билмаймиз. Булардан қуйидаги савол келиб чиқади.

Ҳар қандай чексиз примитив арифметик прогрессияда қанча туб сон мавжуд?

1788 йилда француз математиги Лежандр: *Ҳар қандай чексиз примитив арифметик прогрессияда чексиз кўп туб сон мавжуд*, деган теоремани айтди. Лекин у бу теоремани исбот қилолмади. Фақат 1837 йилга келиб немис математиги Лежен Дирихле биринчи марта бу теоремани исбот қилди.

Кейинги вақтларда бу теореманинг исботи кўп олимлар томонидан соддалаштирилди.

1949 йилда норвегиялик математик А. Сельберг ва ундан кейин совет математиги А. О. Гельфонд бу теореманинг «элементар» исботини беришди.

Кўп йиллар мобайнида берилган чексиз примитив прогрессиядаги энг кичик туб сон қандай бўлиши ҳақидаги масала қўйилган эди. Бу масалани 1944 йилга келиб ленинградлик академик Ю. В. Линник ҳал қилди.

Линникнинг кўрсатишича, агар арифметик прогрессиянинг айирмаси d бўлса, ҳар қандай примитив прогрессиядаги энг кичик туб сон $p < d^c$ бўлади. Бундаги c сон d га боғлиқ бўлмаган абсолют ўзгармасдир.

1958 йилга келиб Хитой математиги Пан-Чен-Тонг Линник усулидан фойдаланиб, $c \leq 5448$ эканлигини кўрсатди. 1965 йилга келиб Хитой математиги Чен-ин-Рун $c \leq 777$ эканлигини исботлади.

Шундай чексиз примитив бўлмаган арифметик прогрессиялар мавжудки, уларда биронта ҳам Фибоначчи сонлари мавжуд эмас:

4, 12, 20, 28, ..., умумий ҳади $8k + 4$,

6, 14, 22, 30, ..., умумий ҳади $8k + 6$.

Таркибида бирорта ҳам Фибоначчи сонлари мавжуд бўлмаган чексиз примитив арифметик прогрессиялар мавжудлигини исботлаш мумкин. Масалан, умумий ҳади $11k + 4$ бўлган 4, 15, 26, 37, ... прогрессияда бирорта ҳам Фибоначчи сонлари мавжуд эмас.

Математик Серпинский $1, q, q^2, q^3, \dots$ геометрик прогрессиянинг таркибида фақат q иррационал сон бўлгандагина, 3 ҳадли арифметик прогрессия мавжуд бўлиши мумкинли-

нинг исбот қилди. $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ бўлганда q^m, q^{m+1}, q^{m+3} лар ($m > 0$ — бутун сон) арифметик прогрессияни беради.

$m = 1$ бўлганда $\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ лар уч ҳадли арифметик прогрессияни ҳосил қилади (бунда $d = 2 - \sqrt{5}$).
 $1^2, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots$ кетма-кетлик таркибида арифметик прогрессияни ташкил қилувчи x^2, y^2, z^2 лар мавжуд.

Мисол. $1^2, 5^2, 7^2$ — уч ҳадли арифметик прогрессия бўлиб, айирмаси $d = 24$ га тенг.

$n!, m!, p!$ ҳеч қачон арифметик прогрессия ташкил қилмаслиги исботланган (n, m, p лар натурал сонлар).

Арифметик прогрессия $f(t) = kt + l, t = 1, 2, 3, \dots$ чизиқли функция қийматлариган тузилган бўлади.

Агар $f(t)$ чизиқли функция ўрнига бирор бошқа функция олинса, у вақтда қуйидаги масалани қўйиш мумкин.

$f(1), f(2), f(3), \dots$ кетма-кетликда қанча туб сон мавжуд?

Масалан, $f(t) = t^2 + 1$ бўлса, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, ... кетма-кетликда қанча туб сон мавжуд?

Юқоридаги кетма-кетликнинг олдинги 3500 та ҳадларида 300 та туб сон учрайди. Бундан кейинги ҳадларида ҳам яна туб сон учрайдими, йўқми, деган саволга жавоб бера олмаймиз ва шунинг учун юқоридаги кетма-кетликда қанча туб сон мавжудлиги маълум эмас.

ПАСКАЛЬ СОНЛАРИ

Буюк француз олими Паскаль (1623 — 1662) маълум хоссаларга эга бўлган ва жойланиши жиҳатдан учбурчакка ўхшаган сонлар жадвали билан шуғулланган. Кейинчалик бу учбурчаклар Паскаль учбурчаклари деб, ундаги сонлар эса Паскаль сонлари деб аталди.

Биз шундай сонларнинг ҳосил қилиниши ва уларнинг айрим хоссалари билан танишиб ўтамиз.

$$d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n \quad (1)$$

бутун сонлардан

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= d_0 \\ S_1 &= d_0 + d_1 \\ S_2 &= d_1 + d_2 \\ &\dots \dots \dots \\ S_k &= d_{k-1} + d_k \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= d_{n-1} + d_n \\ S_{n+1} &= d_n \end{aligned} \right\} 1 \leq k \leq n \quad (*)$$

қонунига асосан

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1} \quad (2)$$

сонларни ҳосил қиламиз.

(*) — Паскаль қонуни дейилади. Аня шу (*) қонунга асосан (2) дан бошқа сонларни ҳам тузиш мумкин.

Мисол.

$$\begin{aligned} &2, 0, -2, 3 \\ &2, 2, -2, 1, 3 \\ &2, 4, 0, -1, 4, 3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad \text{ва ҳоказо.}$$

Қуйидаги теоремалар ўринлидир:

1-теорема. (2) сонлар йиғиндиси (1) сонлар йиғиндисидан 2 марта катта.

Исбот.

$$\begin{aligned} S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + S_{n+1} &= d_0 + (d_0 + d_1) + (d_1 + d_2) + \\ &+ \dots + (d_{n-1} + d_n) + d_n = 2(d_0 + d_1 + \dots + d_n). \end{aligned}$$

Таъриф. Агар ҳар қандай

$$0 \leq k \leq n \text{ учун } d_k = d_{n-k} \quad (3)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ (1) сонлар симметрик йўл дейилади. Шундай қилиб, симметрик йўлда

$$\begin{aligned} d_0 &= d_n \\ d_1 &= d_{n-1} \\ &\dots \dots \dots \\ d_k &= d_{n-k} \end{aligned}$$

бўлади.

Мисол. $\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 3, 1 \\ 1, 2, 3, 3, 2, 1 \end{array} \right\}$ симметрик йўллар.

2-теорема. Агар $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}$ (2) йўл $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ (1) симметрик йўлдан (*) Паскаль қонунига асосан ҳосил қилинган бўлса, (2) йўлнинг ўзи ҳам симметрик бўлади.

Исбот. $S_k = S_{(n+1)-k}$ (4) эканлигини кўрсатиш етар-
лидир (бунда $k = 0, 1, 2, \dots, n+1$). $k = 0$, $k = n+1$ бўл-
ганда (*) дан (4) тенглик келиб чиқади.

$$1 \leq k \leq n \text{ учун: } S_k = d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k} = \\ = d_{(n+1)-k} + d_{[(n+1)-k]-1} = d_{[(n+1)-k]-1} + d_{(n+1)-k} = \\ = S_{(n+1)-k}.$$

Фараз қиламиз, (1) йўл фақат битта элементдан иборат бўлсин. Бундай йўл нолинчи Паскаль йўли деб аталади.

Ундан Паскаль қонунига асосан иккинчи йўлни ва ундан учинчи Паскаль йўлларини ҳосил қиламиз. Йўлдан йўлга ўтишда йўлдаги элементлар сони ортиб-боргани туфайли n -йўлда $n+1$ та элемент бўлади:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

Бу уч бурчакли жадвал Паскаль учбурчаги дейилади. Учбурчакнинг ён томонларида 1 лар бўлиб, ён томондаги бирлардан ташқари ҳар бир Паскаль сони шу сон устида жойлашган чап ва ўнг томонлардаги Паскаль сонлари йиғиндисидан иборат. Масалан, $35 = 20 + 15$. Паскаль учбурчаги 1665 йилда Паскаль вафот этганидан кейин унинг «Арифметик учбурчак ҳақида» деган китобида баён этилган эди. Лекин Паскалнинг ўзи уч бурчакли жадвални қуйидаги шаклда берган эди:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 1 3 6 10 15 21 28 36
 1 4 10 20 35 56 84
 1 5 15 35 70 126
 1 6 21 56 126
 1 7 28 84
 1 8 36
 1 9
 1

Бунда ҳар бир Паскаль
 сони унинг устида ва чап
 томонида турган Паскаль
 сонлари йиғиндисидан
 иборат. Бу жадвални 45°
 га бурилса, юқоридаги
 Паскаль учбурчаги ҳо-
 сил бўлади.

Паскаль учбурчагида жойлашган сонлар қуйидаги хос-
саларга эга:

биринчи диагональ қаторлар (ҳам чап ва ҳам ўнгга)
фақат 1 лардан; иккинчи диагональ қатор эса кетма-кет на-
турал сонлардан;

учинчи диагональ қатор уч бурчакли сонлардан (1, 3, 6,
10, 15, ...) иборат бўлиб, уч бурчакли сонлар орасидаги
масофа кетма-кет натурал сонлардан;

тўртинчи диагональ қатордаги сонлар 1, 4, 10, 20, 35, ...
пирамидал сонлардан;

бешинчи диагональдаги

1, 5, 15, 30, 70, ...

сонлар пентагональ сонлардан;

ҳар бир горизонтал қатордаги паскаль сонларининг йиғин-
диси 2 нинг даражаларидан иборат:

$$\begin{aligned}
 1 &= 2^0, \\
 1+1 &= 2^1, \\
 1+2+1 &= 2^2, \\
 1+3+3+1 &= 2^3, \\
 1+4+6+4+1 &= 2^4, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Бундан ташқари

$$\begin{aligned}1 - 1 &= 0, \\1 - 2 + 1 &= 0, \\1 - 3 + 3 - 1 &= 0, \\1 - 4 + 6 - 4 + 1 &= 0, \\&\dots\end{aligned}$$

Паскалдан 1 аср олдин яшаган италиялик математик Николло Тарталья уч бурчакли жадвал билан эмас, қуйидаги тўрт бурчакли жадвал билан шуғулланган:

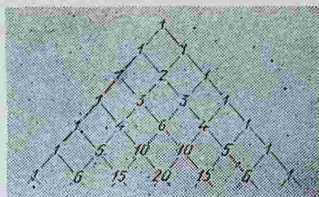
$$\begin{array}{cccccccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \dots \\1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \dots \\1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \dots \\1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & \dots \\& \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{array}$$

Бу жадвалда юқоридаги йўл ва чап устун 1 лардан иборат бўлиб, ҳар бир ички элемент ўзининг устидаги ва олдидаги элементлар йиғиндисидан иборат. Айрим китобларда бу жадвал «Тарталья жадвали» деб юритилади.

Паскаль учбурчагининг ҳар бир йўлида турган Паскаль сонларини номерлашни қуйидаги мисолда кўрсатамиз: c^2_5 билан 5-йўлдаги иккинчи Паскаль сони белгиланади. Умуман, c^k_n билан n -йўлдаги, k -Паскаль сони белгиланади.

$c^0_0 = 1$, $c^2_5 = 4$, $c^4_{14} = 1001$ лар Паскаль сонларидир. $c^k_k, c^k_{k+1}, c^k_{k+2}, \dots, c^k_n, \dots$ (с) кетма-кетликнинг элементлари қуйидагича ҳосил қилинади.

Агар Паскаль учбурчагининг 1 лардан иборат бўлган ён ёқларига тўғри чизиқлар ўтказиб, уларга параллел қилиб Паскаль сонларини кесиб ўтувчи тўғри чизиқлар ўтказсак, қуйидаги шакл ҳосил бўлади:



Юқорида келтирилган (с) кетма-кетлик Паскаль учбурчагининг чапдан (ёки симметрияга асосан ўнгдан) k -чизикда ётган Паскаль сонларидир.

Мисол.

$k = 0$	бўлганда	1, 1, 1, 1, ...
$k = 1$	«	1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
$k = 2$	«	1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Бу сонлар мос равишда Тарталья тўртбурчагининг нолинчи йўли ёки нолинчи устунда, биринчи йўли ёки биринчи устунда, иккинчи йўли ёки иккинчи устунда турган элементлардан иборатдир.

$k = 2$ бўлганда ҳосил бўлган 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Паскаль сонлари уч бурчакли сонлардир.

$k = 4$ бўлганда 1, 4, 10, 20, 35, ... пирамидал сонлар ҳосил бўлади. Берилган n ва k лар учун c_n^k ифодани аниқлаш Паскаль операцияси дейилади.

c_n^k ни топиш учун Паскаль учбурчагининг n -йўлини тузиб, ундаги k -Паскаль сонини аниқлаш етарлидир. Лекин жуда катта n ва k лар учун бундай ҳисоблаш бирмунча ўнғайсиз. Уларни ҳисоблашда формулалар келтириб чиқариш учун қуйидаги йўл билан бином (иккиҳад) формуласини чиқариб, унинг коэффициентлари орасидаги боғланишни келтириб чиқарамиз:

$$(1 + x)^0 = 1,$$

$$(1 + x)^1 = 1 + x,$$

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

$$\dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (5)$$

(5) ёйилма n -кўрсаткичга тегишли бином ёйилмаси дейилади. Бу ёйилмадаги коэффициентлар учун $a_k = C_n^k$ белгини киритиб, уларни биномиал коэффициентлар деб атаймиз.

Биномиал коэффициентларга тегишли қуйидаги теоремалар ўринлидир:

$$1) C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \text{ (Паскаль айнияти).}$$

Бу айният ёрдамида биномиал коэффициентларни аниқлаш мумкин.

Биномиал коэффициентларга тегишли қуйидаги жадвални (Паскаль учбурчагидан фойдаланиб) тузиш мумкин:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Бу жадвалнинг кейинги йўлларидаги ҳар бир элементи-
ни ҳосил қилиш учун олдинги йўлдаги шу элемент устида
ва чап томонида ётган элементларни мос равишда қўшиб
етарлидир.

2) $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}$ (биномиал коэффициент-
лар формуласи).

Бу формула ёрдамида исталган биномиал коэффициент-
ни топиш мумкин.

Мисоллар. 1. Юқорида келтирилган жадвалнинг 11-
йўли қуйидагича бўлади: 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462,
330, 165, 55, 11, 1.

$$C_{11}^8 = C_{10}^8 + C_{10}^7 = 165.$$

$$2. C_{11}^8 = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 55\cdot 3 = 165.$$

3) $(n, k) = 1$ бўлганда $C_n^k : n$ бўлади.

Мисол. $C_9^4 = 126$, $(9, 4) = 1$, $126 : 9$.

Биномиал коэффициентлар қуйидаги хоссаларга эга:

$$1) C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$2) C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + \dots + C_{m+l}^m = C_{m+l+1}^{m+1};$$

$$3) C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$4) C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

Биномиал коэффициентларнинг хоссаларидан фойдаланиб,
исталган биномиал коэффициентни p туб сонга бўлгандаги
қолдиқни аниқлаш мумкин.

Қуйидаги теорема ўринлидир:

Теорема. p туб сон учун $n = pl + t$ ва $k = pl_1 + t_1$
бўлсин. C_n^k ни p га бўлгандаги қолдиқ $C_l^{l_1} \cdot C_t^{t_1}$ ни p га бўл-
гандаги қолдиққа тенгдир.

Мисол. 1) C_{99}^{23} ни 5 га бўлгандаги қолдиқ топилсин.

$\left. \begin{array}{l} 99 = 5 \cdot 19 + 4, \\ 23 = 5 \cdot 4 + 3 \end{array} \right\} C_{99}^{23} \text{ ни } 5 \text{ га бўлгандаги қолдиқ } C_{19}^4 \cdot C_4^3$
ни 5 га бўлгандаги қолдиққа тенг.

$\left. \begin{array}{l} 19 = 5 \cdot 3 + 4, \\ 4 = 5 \cdot 0 + 4 \end{array} \right\} C_{19}^4 \cdot C_4^3 \text{ билан алмаштирилади.}$

Шундай қилиб, $C_{99}^{23} \cdot C_3^0 \cdot C_4^1 \cdot C_4^3$ билан алмаштирилади ва
қолдиқ $C_3^0 \cdot C_4^1 \cdot C_4^3 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$ га тенг бўлади.

2) C_{127}^{31} ни 11 га бўлгандаги қолдиқ топилсин.

$127 = 11 \cdot 11 + 6$, C_{127}^{31} ни 11 га бўлгандаги қолдиқ
 $31 = 11 \cdot 2 + 9$ $C_{11}^2 \cdot C_6^9$ ни 11 га бўлгандаги қолдиққа тенг.
 Лекин $C_6^9 = 0$, чунки C_n^k фақат $n \geq k$ бўлгандагина маънога эга. Шунинг учун, $n < k$ бўлганда $C_n^k = 0$ деб олинади. Демак, C_{127}^{31} сони 11 га қолдиқсиз бўлинади.

Изоҳ. C_n^k га ($n \geq k$ бўлганда) юқоридаги теоремани татибиқ этишда $l \geq l_1$ бўлиши керак. Агар $t_1 > t$ бўлиб қолса, у ҳолда $C_{t_1}^t = 0$ бўлиб, $C_n^k : p$ бўлади. Катта n лар учун C_n^k нинг p га қолдиқсиз бўлиниш эҳтимоллиги ошади.

C_n^k ларнинг ($0 \leq k \leq n$ бўлганда) $0 \leq n \leq 3^5$ лар учун 3 га бўлинмайдиганлари 26,2% га; $0 \leq n \leq 3^{10}$ лар учун тахминан 3,6% га ва $0 \leq n \leq 3^{15}$ лар учун 0,45% га тенг эканлиги ҳисобланган.

Мисол.

$$\begin{aligned}
 C_2^1 &= 2, & C_{16}^8 &= 12870, \\
 C_4^2 &= 6, & C_{32}^{16} &= 601080390. \\
 C_8^4 &= 70,
 \end{aligned}$$

Бу қийматларни юқорида келтирилган формулалар ёрдамида ҳисоблаш осон.

2, 6, 70, 12870, 601080390 сонлар бирор ажойиб хусусиятга эга бўлмаса ҳам, лекин уларнинг кетма-кет айирмалари иккиннинг ҳар хил даражаларига бўлинади:

$$\begin{aligned}
 6 - 2 &= 4 = 2^2, & 601080390 - 12870 &= \\
 70 - 6 &= 64 = 2^6, & &= 601067520 = 2^{12} \cdot 146745. \\
 12870 - 70 &= 2^9 \cdot 25,
 \end{aligned}$$

Бу ҳолат тасодифий эмас. Қуйидаги теорема ўринлидир.

$$n \geq 1 \text{ учун } (C_{2^n+1}^{2^n} - C_{2^n}^{2^n-1}) : 2^{2^n+2}.$$

Мисол. $n = 2$ учун $(C_5^4 - C_4^2) : 2^6$ (ҳисоблаб кўринг).

$$n = 3 \text{ учун } (C_{16}^8 - C_8^4) : 2^8 \text{ (ҳисоблаб кўринг).}$$

Шунингдек:

$$\begin{aligned}
 C_9^3 - C_3^1 &= 84 - 3 = 3^4, \\
 C_{27}^9 - C_9^4 &= 4686825 - 84 = 4686741 = 3^7 \cdot 2143, \\
 C_{81}^{27} - C_{27}^9 &= 2306279447501851002720 - 4686825 = \\
 &= 2306279447501846315895 = 3^{10} \cdot 39057044954221855, \\
 C_{25}^5 - C_5^1 &= 43130 - 5 = 43125 = 5^6 \cdot 69, \\
 C_{49}^7 - C_7^1 &= 85900584 - 7 = 85900577 = 7^6 \cdot 5111.
 \end{aligned}$$

Шу ҳисоблашлар қуйидаги гипотезага олиб келади.
Ихтиёрий p туб сон учун

$$(C_{p^n+1}^{p^n} - C_{p^n}^{p^n-1})$$

ифода p нинг биринчи даражасига бўлиниши билан бирга p нинг айрим юқори даражаларига ҳам бўлинади.

Бу гипотезанинг исботи ҳалигача маълум эмас.

Агар p туб сон бўлмаса, юқоридаги гипотеза ўринли бўлмайди.

Мисол. $C_{16}^4 - C_4^1 = 1820 - 4 = 1816$ сони 4^2 га бўлинмайди.

$C_{36}^6 - C_6^1 = 1947786$ сони 6^2 га бўлинмайди.

Паскаль учбурчагининг n -йўлида жойлашган Паскаль сонлари квадратларининг йигиндиси Паскаль учбурчагининг $2n$ -йўлининг ўртасига жойлашган Паскаль сонига тенг:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Мисол. $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20$,

$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$. (Жадвалга қаранг.)

Элементлари тенг ёнли трапеция шаклида жойлашган сонлар жадвали мавжуддир. Бундай сонлар триноминал сонлар дейилади:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

.....

Исталган горизонтал қатордаги сонлар 0, 1 билан бошланади, 1, 0 билан тугалланади. Ҳар бир триноминал сон шу сон устига жойлашган горизонтал қатордаги кетма-кет учта элемент йигиндисида иборат: $45 = 19 + 16 + 10$.

n -горизонтал қаторда жойлашган триноминал сонларнинг йигиндиси 3^{n-1} га тенг (солиштириш учун эслатиб ўтамизки, худди шундай йигинди Паскаль сонлари учун 2^{n-1} га тенг):

$$0 + 1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1 + 0 = 27 = 3^3 = 3^{4-1}.$$

Исталган горизонтал қатордаги триноминал сонлар квадратларининг йиғиндиси яна триноминал сонни беради:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 19 \quad (5\text{-қатордаги триноминал сон}),$$

$$0^2 + 1^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 = 141 \quad (7\text{-қатордаги триноминал сон}).$$

ЛЕЙБНИЦНИНГ ГАРМОНИК УЧБУРЧАГИ

Маълумки, a ва b сонларнинг ўта гармоник қиймати деб $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ сонига айтилади. Сонларнинг ўрта гармонигига асосан

ажойиб хоссаларга эга бўлган ва учбурчак шаклида жойлашган сонлар жадвалини немис математиғи Лейбниц тузган. Гармоник учбурчакнинг айрим хоссалари Паскаль учбурчагининг хоссаларига ўхшашдир. Паскаль учбурчаги натурал сонлар билан боғлиқ бўлса, Лейбниц учбурчаги эса натурал сонларнинг тескари қийматлари билан боғлиқдир.

Лейбниц учбурчагининг ён томонларига жойлашган сонлар кетма-кет натурал сонларнинг тескари қийматларидан иборат бўлиб, унинг ҳар бир элементи шу қатордан кейинги қаторда жойлашган ва шу элементга [қўшни бўлган икки элементнинг йиғиндисидан иборат:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
 \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
 \frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
 \end{array}$$

Мисол.

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}; \quad \frac{1}{140} = \frac{1}{280} + \frac{1}{280}; \quad \frac{1}{42} = \frac{1}{168} + \frac{1}{56}.$$

Лейбниц учбурчагининг кейинги икки горизонтал қаторларини тузинг.

ФИБОНАЧЧИ СОНЛАРИ

Ўрта асрда яшаган италиялик математик Леонардодир. Уни Фибоначчи деб ҳам аташган.

Фибоначчи 1228 йилда «Liber abacci» (абак ҳақида китоб) деган асарини ёзиб, унда ўша вақтда маълум бўлган ҳамма арифметик ва алгебраик маълумотларни баён этган. Бу китоб математика тараққиётида катта роль ўйнаган. Жумладан, европаликлар бу китобдан араб рақамларини ўрганган. Бу китоб жуда кўп қизиқарли масалалар билан бой бўлган.

Биз бу китобда баён этилган масалаларнинг бири билан танишиб ўтамыз: «Бир жуфт қуёндан бир йилда неча жуфт қуён олинади?»

Агар бир жуфт қуёндан 1 ой ўтгач янги бир жуфт қуён олинса ва янги туғилган бир жуфт қуёндан иккинчи ойда янги бир жуфт қуён олинса ва ҳ. к. бир йилда неча жуфт қуён олинади, деган саволга жавоб бериш керак.

Оддийгина ҳисоблашлар ўтказиб, қуйидаги схемани тузамиз:

	I ой	II ой	III ой	IV ой
1 жуфт	2 жуфт	3 жуфт	5 жуфт	8 жуфт
V ой	VI ой	VII ой	VIII ой	IX ой
13 жуфт	21 жуфт	34 жуфт	55 жуфт	89 жуфт
X ой	XI ой	XII ой		
144 жуфт	233 жуфт	377 жуфт		

Демак, 12 ойда I жуфт қуёндан 377 жуфт қуён олинади. Юқорида келтирилган жадвални диққат билан кўздан кечирганда қуйидагиларни билиб оламиз:

Олдинги ойдаги қуёнлар жуфти билан кейинги ойда олинган қуёнлар жуфти қўшилса, уч ойда олинган қуёнлар жуфти

келиб чиқади. Албатта бу процессни чексиз давом эттириш мумкин.

Энди қуёнлардан сонларга ўтамыз.

$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$ (1) шундай сонлар кетма-кетлиги бўлсинки, $n > 2$ бўлганда $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ (2) бўлсин, яъни ҳар бир кейинги ҳад ундан олдинги икки ҳаднинг йиғиндисидан иборат бўлсин.

Математик адабиётларда бундай хоссага эга бўлган кетма-кетликларни (ҳар бир кейинги ҳад олдинги ҳадларнинг функцияси) рекуррент кетма-кетлик деб аталади.

Албатта (1) кетма-кетликни (2) шартга асосан тузишда, унинг аввалги икки ҳади берилган бўлиши керак.

Мисол.

2, 5, 7, 12, 19, ...

1, 3, 4, 7, 11, ...

Бу кетма-кетликларнинг биринчиси, 2 ва 5 лар бўйича, иккинчиси эса 1 ва 3 лар бўйича (2) шартдан фойдаланиб тузилди. Агар $U_1 = 1$; $U_2 = 1$ деб олиб, (2) шартга асосан $U_3, U_4, \dots$ элементларни аниқласак, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ... кетма-кетлик ҳосил бўлади, бунда унинг олдинги 14 та ҳади юқорида келтирилган қуёнлар масаласидаги сонлардан иборатдир.

Фибоначчи кетма-кетлигининг 10^4 дан кичик бўлган ҳадлари 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 лар бўлиб, улар орасида фақат $U_1 = U_2 = 1$ ва $U_{12} = 144$ квадрат сонлар ҳамда $U_1 = U_2 = 1$, $U_6 = 8$ куб сонларни ташкил қилади.

1958 йилда математик Ярден фибоначчи сонларининг 10^{13} сонигача бўлган кетма-кетлигини ва фибоначчи сонларининг каноник ёйилмасининг жадвалини нашр қилди. Бу жадвалдан 144 дан катта ва 10^{13} дан кичик бўлган a^k ($k > 1$ — натурал сон) шаклидаги фибоначчи сонларининг мавжуд эмаслигини кўриш мумкин. 144 дан катта бўлган бундай сонлар ҳозиргача маълум эмас.

Математик Хогаттанинг исбот қилишига кўра ҳар қандай натурал сон фибоначчи сонларининг йиғиндисидан иборатдир:

$$1 = U_1; 2 = U_3; 3 = U_4 = U_1 + U_3; 4 = U_1 + U_4; 5 = U_5 = U_3 + U_4; 6 = U_1 + U_5; 7 = U_3 + U_5; 8 = U_6 = U_4 + U_5; 9 = U_1 + U_6; 10 = U_3 + U_6 \text{ ва ҳоказо.}$$

$U_1 = 1, U_2 = 1, U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ хоссалари билан тузиладиган кетма-кетлик фибоначчи кетма-кетлиги, уларнинг элементлари эса фибоначчи сонлари дейилади.

Фибоначчи сонларига тегишли айрим хоссаларни кўриб ўтамиз.

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ фибоначчи кетма-кетлиги бўлсин.

$$1) \quad U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = U_{n+2} - 1. \quad (3)$$

Таърифга асосан:

$$U_1 = U_3 - U_2,$$

$$U_2 = U_4 - U_3,$$

$$U_3 = U_5 - U_4,$$

$$\vdots$$

$$U_n = U_{n+2} - U_{n+1}.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшсак, (3) тенглик келиб чиқади.

Мисол. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... — фибоначчи кетма-кетлиги берилган.

$$1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1;$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1.$$

$$2) \quad U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1} = U_{2n}. \quad (4)$$

Мисол. $1 + 2 + 5 = 8$, яъни $U_1 + U_3 + U_5 = U_{2 \cdot 3} = U_6$.

$$3) \quad U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n} = U_{2n+1} - 1. \quad (5)$$

(3) дан (4) ни айирганда (5) ҳосил бўлади.

Мисол. $1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1$.

$$4) \quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 = U_n \cdot U_{n+1},$$

яъни фибоначчи сонларининг n та ҳад квадратларининг йиғиндиси n ва $n+1$ ҳадлар кўпайтмасидан иборат.

$$5) \quad U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2.$$

Мисол.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... учун

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = U_4 \cdot U_5 \text{ га тенг}$$

$1 + 1 + 4 + 9 = 3 \cdot 5$ — фибоначчи сонидир.

6) Агар $n:m$ бўлса, у ҳолда $U_n:U_m$ бўлади, яъни, агар иккита фибоначчи сонидан бирининг номери иккинчисининг номерига бўлинса, у номерларга тегишли фибоначчи сонларининг биринчиси иккинчисига бўлинади.

Мисол. 1) $10:2$, демак, $U_{10}:U_2$ бўлиши керак: $55:1$;

2) 9 сони 5 га бўлинмайди, шунинг учун $U_9 = 34$ ҳам $U_5 = 5$ га бўлинмайди.

7) Агар $n \neq 4$ мураккаб сон бўлса, U_n ҳам мураккаб сон бўлади: $n = 6$ мураккаб сон, $U_6 = 8$ ҳам мураккаб сон.

8) $(U_n, U_{n+1}) = 1$, яъни қўшни фибоначчи сонлари ўзаро туб сонлардир:

$$(U_7, U_8) = (13, 21) = 1.$$

9) $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$, яъни m - ва n -фибоначчи сонларининг энг катта умумий бўлувчиси номери (m, n) га тенг бўлган фибоначчи сонига тенгдир. $((m, n)$ ифода m ва n ларнинг энг катта умумий бўлувчисини кўрсатади).

Мисол. $(U_5, U_{10}) = U_{(5, 10)}$.

$$(5, 55) = U_{(5, 55)} = U_5 = 5.$$

Бу хоссадан фибоначчи сонлари кетма-кетлигидан исталган икки ҳади ўзаро туб бўлган ўсувчи сонлар кетма-кетлигини ажратиб олиш мумкинлигини келтириб чиқариш мумкин.

Бундай теорема ҳам ўринлидир:

Агар $U_n = 2k^2$ бўлса, у ҳолда $n = 0, 3$ ёки 6 га тенг бўлиши керак.

Мисол. $U_3 = 2 \cdot 1^2 = 2$, $n = 3$,

$$U_6 = 8 = 2 \cdot 2^2, \quad n = 6.$$

Агар

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

фибоначчи сонларининг кетма-кет жойлашишидан фойдаланиб

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \dots$$

касрлар тузилса, бундай касрларнинг ҳар бири иккинчидан бошлаб қуйидаги ажойиб узлуксиз касрлардан бўлади:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}; \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}; \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}};$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}.$$

Фибоначчи сонлари қуйидаги хоссага ҳам эгадир:

Агар бирор фибоначчи сонининг квадратида у билан қўшни бўлган икки фибоначчи сонларининг кўпайтмаси айирилса, тартиб билан $-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots$ сонлар ҳосил бўлади, яъни

$$U_k^2 - U_{k-1} \cdot U_{k+1} = (-1)^k.$$

Мисол. $1^2 - 1 \cdot 1 = -1, \quad 5^2 - 3 \cdot 8 = +1,$
 $2^2 - 1 \cdot 3 = 1, \quad 8^2 - 5 \cdot 13 = -1,$
 $3^2 - 2 \cdot 5 = -1, \quad 13^2 - 8 \cdot 21 = +1,$

$$21^2 - 13 \cdot 34 = -1,$$
$$377^2 - 610 \cdot 233 = -1.$$

Фибоначчи сонларига доир айрим бўлиниш белгиларини баён қиламиз:

а) $n:3$ бўлгандагина U_n жуфт сон бўлади. $9:3; U_9 = 34$ — жуфт сон

б) $n:5$ бўлгандагина $U_n:5$ бўлади.

$10:5$ бўлгани учун $U_{10}:5$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам $55:5$ бўлади.

в) $n:6$ бўлгандагина $U_n:4$ бўлади. $U_6 = 8, 6:6$, шунинг учун $U_6:4$. Ҳақиқатан ҳам, $8:4$.

г) $n:8$ бўлгандагина $U_n:7$ бўлади: $8:8$ бўлгани учун $U_8:7$. Ҳақиқатан ҳам, $21:7$.

д) 8 га бўлганда 4 қолдиқ берадиган фибоначчи сонлари мавжуд эмас; 17 га бўлинадиган тоқ номерли фибоначчи сонлари мавжуд эмас.

е) Ҳар қандай натурал m сон учун биринчи $m^2 - 1$ фибоначчи сонлари орасида камида 1 та m га бўлинадиган сон мавжуд.

Мисол. $m = 6$ бўлсин. $6^2 - 1 = 35$. Демак, олдинги 35 та фибоначчи сонлари орасида камида 1 та 6 га бўлинадиган сон мавжуд.

Ҳақиқатан ҳам, $U_{14} = 144; 144:6$.

Юқорида келтирилган масалалар фибоначчи сонларига доир бўлиб, уларни осонлик билан ҳал қилиш мумкин. Лекин фибоначчи сонларига доир ҳамма масалалар бундай осонлик билан ҳал бўлавермайди. Мана шундай масалаларнинг айримлари билан танишиб ўтамыз.

1) U_n фибоначчи сони p туб сонига бўлиниб, ундан кичик бўлган бошқа фибоначчи сонлари p га бўлинмасин. Бу ҳолда p сонига U_n нинг махсус бўлувчиси деб атаймиз.

Мисол. 11 туб сони $U_{10} = 55$ нинг, 17 туб сони эса $U_9 = 34$ нинг махсус бўлувчиларидир.

Бундай масала қўйилади: U_n — фибоначчи сони учун p туб сон махсус бўлувчи бўлиши учун n қандай номерли бўлиши керак?

U_1, U_2, U_6, U_{12} — фибоначчи сонларидан ташқари ҳар қандай фибоначчи сони камида 1 та махсус бўлувчига эга эканлиги исбот қилинган. $n \leq p+1$ эканлигини исботлаш мумкин.

Агар $p = 5t \pm 1$ шаклдаги туб сон бўлса, $U_{p-1} : p$ ва $p = 5t \pm 2$ шаклдаги туб сон бўлса, $U_{p+1} : p$ эканлиги исботланган.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, ... фибоначчи сонлар кетма-кетлигида юқорида айтилганларни текшириб кўрамиз.

$p = 11 = 2 \cdot 5 + 1$ туб сон, $U_{p-1} = U_{10} = 55$; $55 : 11$,

$p = 19 = 4 \cdot 5 - 1$ туб сон, $U_{p-1} = U_{18} = 2584$; $2584 : 19$,

$p = 7 = 5 \cdot 1 + 2$ туб сон, $U_{p+1} = U_8 = 21$; $21 : 7$,

$p = 3 = 5 \cdot 1 - 2$ туб сон, $U_{p+1} = U_4 = 3$; $3 : 3$ бўлади.

2) Агар U_n мураккаб сон бўлса, n ҳам мураккаб бўлиши шартми, деган савол қўямиз.

$U_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ ва $U_{31} = 1346269 = 557 \cdot 2417$ мисоллар қўйилган саволга салбий жавоб беради.

Фибоначчи сонлар кетма-кетлигида 2, 3, 5, 13, 89 ... туб сонлар мавжуд. Уларнинг сони қанча эканлиги аниқ эмас.

$$n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47$$

лар учун U_n фибоначчи сонларининг туб эканлиги исботланган.

Кўрсатилганлардан ташқари туб фибоначчи сонлари бизга маълум эмас. Маълум бўлган энг катта фибоначчи туб сони 10 та рақамли $U_{47} = 2971215073$ сонидир. p туб сон бўлганда U_p шаклдаги мураккаб сонларнинг сони чексиз кўп дейилган бўлсада, бу исбот қилинмаган гипотезадир.

U_n фибоначчи сонини n га қараб аниқлаш формуласини топиш мумкинми, деган савол қўйилган эди. Бундай формула мавжуд. Лекин шуниси ажойибки, n ва U_n лар натурал сон бўлса ҳам U_n ни n орқали ифодаловчи рационал формула эмас;

$$U_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}; \quad (a)$$

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ҳақиқатан ҳам, $n = 1$ бўлганда,

$$U_1 = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

$n = 2$ бўлганда,

$$U_2 = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1.$$

Шундай қилиб, фибоначчи сонлар кетма-кетлигининг 1-ва 2-ҳадлари (а) формуладан топилиб, улар учун $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ қонун ўринли бўлганидан (а) формула аниқ бўлиб чиқади.

Фибоначчи сонлар кетма-кетлигида ҳар бир учинчи сон жуфт, ҳар бир тўртинчи сон 3 га, ҳар бир бешинчи сон 5 га ва ҳар бир 15-сон 10 га бўлиниши исботланган. Томонлари турли фибоначчи сонларидан иборат бўлган учбурчак ясаш мумкин эмаслиги ҳам исботланган.

Фибоначчи кетма-кетлигида тоқ туб ўринли ҳадлари, туб фибоначчи сонига тенг бўлиши мумкин (лекин шарт эмас).

Мисол. 1) $U_5 = 11$, 11 эса туб фибоначчи сони,

2) $U_{10} = 4181 = 37 \cdot 113$ — туб номерли фибоначчи сони бўлсада, лекин ўзи мураккаб фибоначчи сонидир.

Англиялик математик Вайнштайн Лепарднинг (1966 й) исботига кўра олдинги $2n$ та фибоначчи сонларидан ихтиёрӣ $n+1$ тасини таълаб олиш мумкинки, улар орасида бири иккинчисига бўлинадиган сонлар мавжуд бўлади.

Мисол. Олдинги 8 та 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 фибоначчи сонларидан 1, 2, 5, 8, 13 ларни ажратиш мумкинки, улардан 8 сони 2 га бўлинади.

Фибоначчи кетма-кетлигига ўхшаган қуйидаги кетма-кетлик ҳам мавжуд:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 3, \quad v_{n+2} = v_n + v_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Бу кетма-кетликнинг биринчи ҳадлари 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, . . . лардир. $n = 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71$ ларга тегишли v_n лар туб сонлар эканлиги текширилган. $v_{71} = 688846502588399$ сони бугунги кунда маълум бўлган v_n шаклидаги энг катта туб сондир. Бундай туб сонлар чексиз кўп деган гипотеза мавжуд.

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, \dots$$

сонлар кетма-кетлиги

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-3}$$

қонунига асосан тузилган бўлиб,

$$G_1 = G_2 = G_3 = 1.$$

Бу кетма-кетликнинг n -ҳади G_n қуйидаги йўл билан топилади:

$$G_n = C_{n-1}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-5}^2 + \dots$$

Мисол. $G_9 = C_8^0 + C_6^1 + C_4^2 = 1 + 6 + 6 = 13$. Фибоначчи сонлари учун эса

$$F_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots$$

қоида ўринлидир.

$$\text{Мисол. } F_6 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Энди бир воқеа ҳақида гапириб ўтамиз.

Фибоначчи яшаган даврда тез-тез математикларнинг йиғилишлари бўлиб турган. Бу йиғилишларда бoshқа математиклар билан биргаликда Фибоначчи ҳам қатнашган. Бу йиғилишда қуйидаги масала ҳам ҳал қилинган:

Тўлиқ квадрат бўлган сондан 5 ни айирганда ёки унга 5 ни қўшганда яна тўлиқ квадрат сонни ифода қиладиган сон топилсин.

Шу йиғилишда қатнашган Фибоначчи бир оз ўйлаб, бу сон

$$a^2 = \frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

кўринишдаги каср сон эканлигини айтган.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2,$$

$$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Бу сонни Фибоначчи қандай топгани кўп вақтлар давомида маълум бўлмасдан келган. Совет математиги Г. Н. Попов ўзининг «Тарихий масалалар» китобида юқорида келтирилган масаланинг қуйидаги алгебраик ечимини баён қилди.

Масаланинг шартига асосан:

$$a^2 + 5 = U^2,$$

$$a^2 - 5 = v^2.$$

Шундай қилиб, $U^2 - v^2 = 10$. Лекин $10 = \frac{80 \cdot 18}{12^2}$. Шундай қилиб, $(U - v)(U + v) = \frac{80 \cdot 18}{12^2}$. Бунда $U + v = \frac{80}{12}$ ва $U - v = \frac{18}{12}$ деб олинса,

$$U = \frac{49}{12}; \quad v = \frac{31}{21}; \quad a = \frac{41}{12}$$

топилади.

Юқорида келтирилган масаланинг $a^2 = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ дан ташқари яна ечими борми, деган савол қўйилган эди.

Пермь шаҳрида яшаган инженер Н. В. Никифоров шундай умумий формула мавжудлигини кўрсатди, у формуладан $\left(\frac{41}{12}\right)^2$ дан ташқари яна масала шартини қаноатлантирувчи сонлар мавжудлиги келиб чиқади. Жумладан $a_1 = \frac{3344161}{1494696}$ шундай сонлардандир. Ҳақиқатан ҳам

$$\left(\frac{3344161}{1494696}\right)^2 - 5 = \left(\frac{113279}{1494696}\right)^2; \quad \left(\frac{3344161}{1494696}\right)^2 + 5 = \left(\frac{4728001}{1494696}\right)^2.$$

Бундан ташқари

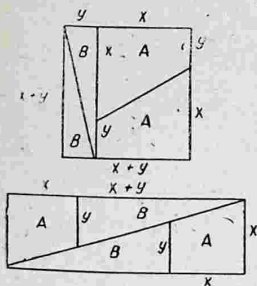
$$a_2 = \frac{249\,850\,594\,047\,271\,588\,364\,480\,641}{5\,354\,229\,862\,821\,602\,092\,291\,248}$$

ҳам шундай хоссали сон эканлиги аниқланди.

Энди фибоначчи сонлари билан боғлиқ бўлган бир геометрик парадоксни кўриб ўтамыз.

Томони $x+y$ га тенг бўлган квадратни қуйидагича иккита тенг тўғри бурчакли учбурчак ва иккита тенг трапецияларга бўлиб, ундан тўғри тўртбурчак тузамиз (25-шакл).

Агар квадратдан тўғри тўртбурчакни ҳосил қилиш мумкин бўлса, бу шаклнинг юзлари тенг бўлиши керак. Квадратдан тўғри тўртбурчак ҳосил қилиш учун берилган квадрат томонларини x ва y бўлакларга қандай бўлиш керак, деган савол қўямиз.



25- шакл.

Агар томони $x+y=8$ бўлган квадратни $x=6$, $y=2$ бўлакларга бўлсак, бўлақлар тўғри келмасдан, тўғри тўртбурчак ҳосил бўлмайди (буни тажрибада текшириб кўриш мумкин). Шунингдек, агар $x=4,5$, $y=2,5$ бўлакларга бўлинса, яна шундай ҳол юз берishi мумкин. Лекин $x=5$, $y=3$ деб олинса, тўғри тўртбурчак ҳосил бўлгандай кўринади. Бунда қуйидаги англашилмовчилик ҳосил бўлади: берилган квадрат-

нинг томони $x+y=8$ бўлгани учун унинг юзи $(x+y)^2 = 64$ бўлиб, тўғри бурчакли тўртбурчакнинг юзи $[x+(x+y)]x = [5+(5+3)] \cdot 5 = 65$ бўлади.

Иккинчи бир мисол: томони $x+y=13$ бўлган квадратни $x=8$, $y=5$ бўлакларга бўлиб, яна юқоридаги йўл билан тўғри тўртбурчак ясалса, бу ҳолда ҳам тўғри тўртбурчак ҳосил бўлгандай бўлсада, лекин унинг юзи квадратнинг юзидан 1 кв. бирлик кам бўлади:

$$(x+y)^2 = 13^2 = 169,$$

$$[x+(x+y)]x = [8+(8+5)] \cdot 8 = 168.$$

Бу келишмовчиликларни тушунтириш ва унинг фибоначчи сонлари билан бўлган алоқасини кўрсатишга уриниб кўрамиз.

Аввало шунни айтиб ўтиш керакки, $x=5$, $y=3$ ҳолда ҳам, $x=8$, $y=5$ ҳолда ҳам ҳосил бўлган иккинчи шакл тўғри тўртбурчакка ўхшайди: биринчи ҳолда тўртбурчакнинг ўртасида узун ромб шаклидаги «бўшлиқ» ҳосил бўлиб, иккинчи ҳолда эса бўлақлар бир-бирининг устига тушган бўлади.

Улар шунчалик кичикки (уларнинг юзи 1 кв. бирлик), тажрибада у кўринмайди. Бунини 26- шаклда кўрсатиш мумкин.

Квадратнинг юзи $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, тўғри тўртбурчакнинг юзи эса

$$(2x+y) \cdot x = 2x^2 + xy$$

га тенг. Агар бу юзлар орасидаги айирма R билан белгиланса, у ҳолда

$$R = x^2 - xy + y^2$$

га тенг.

$$R = 0, \text{ яъни } x^2 - xy + y^2 = 0$$

бўлгандагина квадрат ва тўғри тўртбурчакларнинг юзлари тенг бўлади. Бундан $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = 0$ ёки $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Демак $\frac{x}{y}$ нисбат $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ иррационал сонга тенг бўлгандагина

квадратдан юзи шу квадрат юзига тенг бўлган тўғри тўртбурчак ҳосил қилиш мумкин. Юқоридаги ҳолларда эса x ва y ларнинг қийматлари рационал сонларга тенг бўлган эди. x ва y ларнинг қиймати бутун сон бўлганда юзлар орасидаги айирманинг энг кичиги $R = 1$ бўлади.

Юқорида келтирилган мисолларда $R = 1$ бўлиб, x ва y нинг қийматлари эса ёнма-ён турган фибоначчи сонларидан иборат эди:

$$U_6 = 5; \quad U_4 = 3 \quad \text{ва} \quad U_6 = 8, \quad U_5 = 5.$$

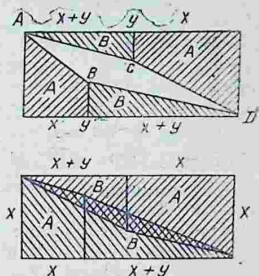
Шу билан бирга ҳосил бўлган $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ қиймат ҳам

$$U_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}; \quad a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

даги фибоначчи сонларини ҳосил қилиш формуласидан келиб чиқади.

АРИФМЕТИКАДАГИ АЙРИМ АДДИТИВ МАСАЛАЛАР

Ҳиндистонлик Раманутжан (1887 — 1920) қобилиятли математик сифатида танилган; Совет математиги Линник ун «математика Паганиниси» деб атаган эди.



26- шакл.

Бир кун англиялик математик Харди касал ётган Раманутжаннынг уйига таксида боради. Раманутжан билан учрашиб, «дўстим кечикканим учун узр, шошилиб таксида келдим» дейди. Раманутжан қандай номерли машинада келганини сўраган. У машинанинг номери 17 — 29 эканини айтади. Раманутжан бу номерни эшитиб ўйланиб қолади. Харди унга «Нега шунча ўйланиб қолдингиз, ахир бу соннинг ҳеч қандай қизиқарли жойи йўқ-ку?» дейди. «Дўстим, сиз хато қилипсиз, — дейди унга Раманутжан, — бу сон ажойиб сондир, у икки хил йўл билан — иккита ҳар хил натурал сонлар кублари йиғиндиси сифатида ёзиладиган сонларнинг энг кичигидир» дейди:

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 7 \cdot 13 \cdot 19.$$

Математикларнинг бошқа бир учрашувиде шу бўлган воқеани Харди ҳикоя қилиб берган экан, шу учрашувда қатнашган бир математик: «Бу сон менимча туб сон бўлса керак» деган экан, ва бир оздан кейин: «Сўраган одам жуда катта олим бўлсада, бирдан фарқли икки кубнинг йиғиндиси туб сон бўла олмаслигини тезгина англай олмабди», — дебди.

1729 нинг ажойиб хоссали сон эканлигини яна қуйидаги ёйилма ёрдамида кўрсатиш мумкин:

$1729 = 1 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 377 + 987$,
яъни 10 та ҳар хил фибоначчи сонлари йиғиндисидан иборат.

Бу кўрилган мисол арифметиканинг аддитив масалаларига доирдир.

Берилган натурал соннинг маълум хоссаларга эга бўлган ва маълум сондан иборат бўлган қўшилувчилар йиғиндиси шаклида ёзилишига аддитив масала деб аталади. Аддитив сўзи латин тилидан олинган бўлиб «йиғинди» маъносини беради.

Биз бу параграфда айрим аддитив масалалар ҳақида сўз юритамиз.

Аввало туб сонлар билан боғлиқ бўлган аддитив масалаларни, яъни қўшилувчилари туб сонлардан иборат бўлган масалалар билан танишиб ўтамиз.

1. Гольдбах-Эйлер гипотезаси

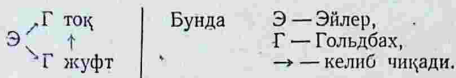
Петербург академиясининг академиги Х. Гольдбах 1742 йил 7 июнда Л. Эйлерга ёзган хатида «Менимча ҳар қандай $n \geq 6$ натурал сон учта туб сон йиғиндисидан иборат» де-

ган фикрни баён қилган. Л. Эйлер ўзининг жавоб хатида: «Ҳар қандай $n > 2$ жуфт сон иккита туб сон йиғиндисидан иборатлигига аминман, лекин афсуски, жуда кўп уринган бўлсам-да, мен бунни исбот қилолмаяпман» деб ёзган.

Бу гипотезалар биргаликда Гольдбах-Эйлер гипотезалари деб юритилади. Кейинчалик С. Галашевский бу гипотезаларни мавжуд туб сонлар жадвалларидан фойдаланиб, аввал $n < 50\,000$ натурал сонлар учун, кейинчалик $n \leq 100\,000$ натурал сонлар учун текшириб кўриб тасдиқлаган.

Бу проблемаларни исботлаш масаласи билан жуда кўп олимлар шуғулланиб келганлар.

Агар Гольдбах гипотезасини тоқ сонлар ва жуфт сонлар учун алоҳида айтилса, у ҳолда Гольдбах ва Эйлер гипотезалари орасидаги боғланишлар қуйидагича бўлади:



1. Агар $n \geq 4$ жуфт сонига 2 туб сони қўшилса, у ҳолда ҳамма $n \geq 6$ жуфт сонлар ҳосил бўлади. Шунинг учун Эйлер гипотезаси ҳал қилинганда, жуфт сонлар учун Гольдбах гипотезаси ҳам ҳал қилинган бўлади.

2. Агар жуфт сонлар учун Гольдбахнинг гипотезаси ҳал қилинса, Эйлер гипотезаси ҳал қилинган бўлади. Бу ҳолда жуфт сонлар учун Гольдбах гипотезасидаги қўшилувчилардан бири 2 туб сон бўлиши керак ва қолган иккитаси тоқ туб сон бўлиб, ҳар қандай жуфт сонни иккита туб сонлар йиғиндисини шаклида ифодалаш мумкинлиги, яъни Эйлер гипотезаси келиб чиқади.

3. Эйлер гипотезаси ёки унга эквивалент бўлган жуфт сонлар учун Гольдбах гипотезаси ҳал қилинганда, $n \geq 6$ тоқ сонлар учун Гольдбах гипотезаси ҳал қилинган бўлади, яъни ҳар бир $n \geq 4$ жуфт сонга 3 туб сон қўшилса, тоқ сонлар учун Гольдбах гипотезаси келиб чиқади.

Мисол. $8 = 3 + 5$ дан $11 = 3 + 8 = 3 + 5 + 3$ эканлиги келиб чиқади.

4. Тоқ сонлар учун Гольдбах гипотезасидан Эйлер гипотезаси келиб чиқмайди; ундан фақат ҳар қандай жуфт соннинг 4 та туб сонлар йиғиндисидан иборатлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, агар $n \geq 6$ жуфт сонлар ва $n \geq 9$ тоқ сонлар билан чегараланса, бу ҳолда Эйлер ва Гольдбах гипотезалари қуйидагича бўлади:

Эйлер гипотезаси: ҳар қандай $n \geq 6$ жуфт сон иккита туб сон йиғиндисидан иборат.

Гольдбах гипотезаси: ҳар қандай $n \geq 9$ тоқ сон учта тоқ туб сон йиғиндисидан иборат.

1912 йилда бўлиб ўтган математикларнинг халқаро конгрессида буюк немис математиги Э. Ландау: «Гольдбах проблемасини ҳозирги замон математикаси билан ҳал қилиш мумкин эмас» деган эди.

Гольдбах проблемасини ҳал қилиш йўлидаги биринчи муваффақиятлар буюк совет математиги Л. Г. Шнирельманга (1905—1938) тегишлидир. У 1930 йилда математикага сонли кетма-кетликларни қўшиш методи деган янги тушунча киритди. Шнирельман ўзининг методи билан қўйидаги теоремани исботлади:

Ҳар қандай $n > 1$ натурал сон учун шундай C ўзгармас сон мавжудки, n сони кўпи билан C донга туб сонлар йиғиндисидан иборат.

Бу C сонига Шнирельман константаси дейилади.

Шнирельман C қийматнинг 800 000 дан ортиқ эмаслигини исботлади. Шундай қилиб, Шнирельман теоремаси бўйича, ҳар қандай $n > 1$ сони кўпи билан 800 000 та туб сонлар йиғиндисидан иборатлиги келиб чиқади. Албатта бу константа жуда катта бўлса-да, лекин ўз вақтида эришилган катта муваффақият эди.

Математик Пип $9 < n < 360749$ бўлган ҳамма тоқ сонларнинг 3 та тоқ туб сонларнинг йиғиндисидан шаклида ифодаланган жадвални ва $n \leq 100\,000$ бўлган ҳамма жуфт сонларнинг иккита тоқ туб сонлар йиғиндисидан шаклида ифодаланган жадвални берди.

1936 йилда математик Риччи C ни 67 гача, 1951 йилда Шапиро ва Варгалев 20 гача ва 1958 йилда математик Ин Шнирельман константасини 18 гача камайтирди. Шундай қилиб, Шнирельман теоремасидан 9^{9^9} соннинг ва $10^{10^{10^{34}}}$ улкан соннинг ҳам 18 та туб сонлар йиғиндисидан иборатлиги келиб чиқади.

1968 йилда совет математиги Н. И. Климов ўз шогирдлари билан жуфт сонлар учун Шнирельман константаси $C \leq 10$ эканлигини, тоқ сонлар учун эса $C \leq 9$ эканлигини исботлади.

1937 йилда совет академиги, Социалистик Меҳнат Қаҳрамони, Давлат мукофотининг лауреати И. М. Виноградов Гольдбах гипотезасини деярли ҳал қилди. У ўзи яратган

тригонометрик йиғиндилар назариясидан фойдаланиб ҳар қандай $n > n_0$ тоқ сон учта туб сонлар йиғиндисидан иборат эканлигини исбот қилди.

У Гольдбах гипотезасининг n_0 сонидан бошлаб тўғри эканлигини кўрсатди. Бу сон кўп вақтлардан бери аниқланмай келган эди.

1939 йилда совет математиги К. Г. Бородкин $n_0 \leq e^{e^{41.96}}$ эканлигини аниқлади ва кейинчалик бу сон $n_0 < e^{e^{16.033}}$ гача камайтирилди (бунда $e = 2,718281828459045 \dots$ — иррационал сон).

Бу жуда катта сондир. Ҳар ҳолда n_0 гача бўлган сонлар учун Гольдбах гипотезасининг тўғри эканлигини аниқлаш масаласи бу гипотезанинг ҳамма $n > n_0$ сонлар учун тўғри эканлигини аниқлашга қараганда осондир.

Математик Минковский ҳар қандай $n > 55$ натурал сон $4k+3$ шаклдаги ҳар хил туб сонлар йиғиндисидан иборат эканлигини исбот қилди.

Мисол. $60 = 7 + 11 + 19 + 23$;
бунда

$$7 = 4 \cdot 1 + 3, 11 = 4 \cdot 2 + 3, 19 = 4 \cdot 4 + 3, 23 = 4 \cdot 5 + 3.$$

Ҳар қандай жуфт сон иккита туб соннинг айирмасидан иборат, деган гипотеза ҳам мавжуддир.

1938 йилда совет математиги Н. Г. Чудзков қуйидаги теоремани исбот қилди: *деярли ҳамма жуфт сонлар иккита туб сон йиғиндисидан иборат.*

Бу теоремани қуйидагича тушуниш мумкин. Агар $\lambda(x)$ орқали x дан кичик ва иккита туб сон йиғиндисидан шаклида ифодаланмайдиган жуфт сонлар сони ифодаланса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(x)}{x} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, Гольдбах гипотезаси ҳал қилинган бўлса-да, Эйлер гипотезаси (ҳар қандай $n > 2$ жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенг) ҳозиргача исботланмаган. Ҳозирги кунда дунёдаги ҳамма йирик математиклар Эйлер гипотезасини ҳал қилиш устида тинмай ишламоқдалар. Жумладан, 1948 йилда венгриялик математик А. Реньи ленинградлик академик Линник усулидан фойдаланиб, ҳар қандай n жуфт сон учун $n = p + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$ (ҳамма p лар туб сон) тенглик ўринли эканлигини исботлади. ($l \leq k$ бўлиб, k —

маълум константа эканлиги ҳам аниқланди; агар $k=1$ бўлса, Эйлер гипотезаси исботланган бўлар эди.) 1956 йилда академик И. М. Виноградов қуйидаги теоремани исботлади: ҳар қандай n жуфт сон $k_1 + k_2$ га тенг, бунда k_1 ва k_2 лар кўпи билан 3 та туб сон кўпайтмасига тенг.

Қуйидаги ажойиб теорема ҳам исботланган:

Ҳар қандай катта n жуфт сон $n = a_{(r)} + b_{(s)}$ шаклида ифодаланади. $a_{(r)}$ ва $b_{(s)}$ сонлар мос равишда (r) ва (s) тадан ортиқ бўлмаган туб кўпайтувчиларга эга.

Масалан, 1919 йилда математик Брун $r=s=9$ лигини, 1924 йилда математик Радемахер $r=s=7$ лигини, 1932 йилда математик Эстерман $r=s=6$ лигини, 1935 йилда математик Риччи

$$r=5, \quad s=7,$$

$$r=4, \quad s=9,$$

$$r=3, \quad s=15,$$

$$r=2, \quad s=366,$$

1940 йилда совет математики Бухштаб $r=s=4$ лигини, 1950 йилда норвегиялик математик А. Сельберг $r=2; s=3$ лигини кўрсатдилар.

Изоҳ. $r=2; s=3$ ни қуйидагича тушуниш керак; деярли ҳар қандай катта жуфт сон бири 2 та, иккинчиси эса 3 та туб сонлар кўпайтмасидан ортиқ бўлмаган иккита натурал сонлар йиғиндисидан иборат.

1958 йилда совет математики Бухштаб ҳар қандай n сонни $n = p + l$ шаклида (бунда p туб сон, l эса кўпи билан 3 та туб сонлар кўпайтмасидан иборат) ифодалаш мумкинлигини исботлади.

Лекин буларнинг ҳаммаси ҳам Эйлер гипотезасини ҳал қилмайди.

2. Варинг гипотезаси

1770 йилда англиялик математик Э. Варинг қуйидаги аддитив масалани қўйди:

Ҳар қандай натурал $n \geq 2$ сон учун шундай натурал $r = g(n)$ сон мавжудки, исталган натурал N сон $x_1, x_2, \dots, x_r$ манфий бўлмаган бутун сонларнинг n -даражалари йиғиндисидан иборат, яъни:

$$N = x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_r^n, \quad x_i \geq 0.$$

Бунда r n га боғлиқ бўлиб, N га боғлиқ эмас.

XVIII асрда француз математиги Лагранж элементар йўл билан Варинг гипотезасининг қуйидаги хусусий ҳолини кўрсатган эди:

$n = 2$ бўлганда $r = 4$ бўлади, яъни ҳар қандай натурал сон манфий бўлмаган 4 та бутун сонлар квадратлари йиғиндисини шаклида ифодаланади.

Мисол.

$$27 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2,$$

$$250 = 14^2 + 7^2 + 2^2 + 1^2,$$

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2.$$

Айрим сонлар учун $n=2$ бўлганда $r < 4$ эканлиги ҳам кўрсатилган.

Ферма теоремаси:

а) $p = 4k + 1$ шаклидаги ҳар қандай туб сон фақат биргина усул билан иккита натурал сонлар квадратлари йиғиндисини шаклида ифодаланади.

Мисол.

$$5 = 1^2 + 2^2,$$

$$37 = 1^2 + 6^2,$$

$$13 = 2^2 + 3^2,$$

$$41 = 4^2 + 5^2,$$

$$17 = 1^2 + 4^2,$$

$$53 = 2^2 + 7^2,$$

$$29 = 2^2 + 5^2,$$

$$61 = 5^2 + 6^2,$$

$$73 = 3^2 + 8^2,$$

$$\text{ва ҳ. к.}$$

Лекин иккита натурал сонлар квадратлари йиғиндисига ажралган сон доим туб сон бўлмайди.

Мисол.

$$10 = 1^2 + 3^2,$$

$$18 = 3^2 + 3^2,$$

$$45 = 3^2 + 6^2 \text{ ва ҳ. қ.}$$

Шундай натурал сонлар мавжудки, уларни бир неча хил усул билан иккита натурал сон квадратларининг йиғиндисини шаклида ифодалаш мумкин.

Мисол. $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2,$

$$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

б) $p = 4k + 3$ шаклдаги ҳар қандай туб сонни иккита натурал сонлар квадратларининг йиғиндисини шаклида ифодалаш мумкин эмас. ($p = 19, 31$ лар учун кўрсатинг.)

в) Мураккаб t соннинг иккита натурал сон квадратларининг йиғиндиси шаклида ифодаланиши учун унинг туб кўпайтувчилари ичида $4k + 3$ шаклидаги туб сонлар ё мутлақо бўлмаслиги, ёки фақат жуфт даражаларда бўлиши зарур ва етарлидир.

Мисол. $58 = 3^2 + 7^2$, $58 = 2 \cdot 29$.

2 ва 29 лар туб сон бўлиб, $4k + 3$ шаклида эмасдир.

$245 = 7^2 + 14^2$, $245 = 5 \cdot 7^2$, бунда $5 = 4k + 1$ шаклидаги туб сон. Лекин $7 = 4k + 3$ шаклидаги туб сон бўлса-да, у сон 245 нинг туб кўпайтувчилари ичида 2 даражага эгадир.

Бундай теоремалар ҳам ўринлидир:

Агар бирор соннинг икки сон квадратлари йиғиндиси шаклида 2 хил ёйилмаси мавжуд бўлса, у мураккаб сондир.

Мисол.

$$2501 = 1^2 + 50^2,$$

$$2501 = 10^2 + 49^2.$$

Шунинг учун 2501 мураккаб сон.

Юқорида келтирилган теоремалар француз математиги Ферма томонидан айтилган бўлса-да, уларнинг элементар исботини биринчи бўлиб Эйлер чиқарган.

Агар n тоқ соннинг иккита ўзаро туб сонлар квадратлари йиғиндисининг фақат бир хил ёйилмаси мавжуд бўлса, у ҳолда n туб сон бўлади.

Бу теоремадан фойдаланиб, Варшава техника институтининг электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида $2^{39} - 7$ соннинг туб эканлиги ва

$$2^{39} - 7 = 64045^2 + 738684^2, (65045, 738684) = 1$$

эканлиги исботланди.

$n = 4, 5, 6, \dots, 38$ бўлганда $2^n - 7$ шаклидаги сонлар мураккаб сон бўлади.

$n = 40, 41, 42, 43, \dots, 50$ бўлганда $2^n - 7$ мураккаб сон бўлиб, мос равишда 3, 5, 3, 107, 3, 5, 3, 11, 3, 61, 3 ларга бўлиниши исботланган. Чексиз кўп p туб сонлар учун $2^p - 7$ шаклидаги сонлар мураккаб бўлишлиги исботланган, $n \neq 39$ бўлганда $2^n - 7$ сонлар ичида бошқа туб соннинг мавжудлиги маълум эмас.

Қандай сонлар учта натурал сон квадратларининг йиғиндисига ёйилади, деган савол қўйилган.

$m = 4^n(8k + 7)$ (m, n, k лар натурал сонлар) шаклидаги сонларнинг учта натурал сон квадратларининг йиғиндисига ёйилмаслиги исботланган. Ҳар қандай $m \neq 4^n(8k + 7)$ сон учта натурал сон квадратларининг йиғиндисига ажралиши исботланган. Бунинг элементар исботи мавжуд эмас.

Мисол.

$$m = 61 \neq 4^n(8k + 7), \quad 61 = 3^2 + 4^2 + 6^2.$$

3 та квадратларнинг йиғиндисидан иборат бўлган туб сонларнинг чексиз кўп эканлиги ва учта квадратларга ажралмайдиган туб сонларнинг ҳам чексиз кўп эканлиги исботланган.

Мисол. $p < 100$ ичида:

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2,$	$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2,$
$11 = 1^2 + 1^2 + 3^2,$	$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2,$
$17 = 2^2 + 2^2 + 3^2,$	$67 = 3^2 + 3^2 + 7^2,$
$19 = 1^2 + 3^2 + 3^2,$	$73 = 1^2 + 6^2 + 6^2,$
$29 = 2^2 + 3^2 + 4^2,$	$83 = 1^2 + 1^2 + 9^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2,$
$41 = 1^2 + 2^2 + 6^2 = 3^2 + 4^2 + 4^2,$	$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2 = 2^2 + 6^2 +$
$43 = 3^2 + 3^2 + 5^2,$	$+ 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2,$
$53 = 1^2 + 4^2 + 6^2,$	$97 = 5^2 + 6^2 + 6^2.$

$m = 60 = 4^1(8 \cdot 1 + 7)$ учта квадратлар йиғиндисига шаклида ифодаланмайди.

$p \neq 2, 3, 5, 11, 17, 29$ ва 41 туб сонлар фақат 4 та натурал сонлар квадратларининг йиғиндисига шаклида ифодаланмайди.

Бу теорема Лагранж теоремасига зид эмас.

Шуни ҳам исботлаш мумкинки, ҳар қандай туб сон (2, 3, 7 лардан ташқари) 5 та натурал сонлар квадратларининг йиғиндисидан иборат.

Мисол. $31 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.$

Агар 1 сони туб сонлар қаторига киритилса, математик И. Човлнинг қуйидаги гипотезаси мавжуд:

Ҳар қандай натурал сон 8 та ёки ундан кам туб сонлар квадратларининг йиғиндисидан иборат.

Бу гипотеза $n \leq 288\,000$ лар учун текшириб тасдиқланган.

Энди қандай сонларни иккита сон кубларининг йиғиндисига шаклида ифодалаш мумкинлиги ҳақида сўз юритамиз.

$p = 2 = 1^3 + 1^3$ туб сондан ташқари ҳеч қандай бошқа туб сон иккита натурал сон кубларининг йиғиндиси шаклида ифодаланиши мумкин эмас (исботлаб кўринг).

Қуйидаги гипотезалар ҳам мавжуд:

Учта кублар йиғиндисидан иборат бўлган туб сонлар чексиз кўпдир. Бу 1923 йилда Харди ва Литлвудлар томонидан айtilган.

$n^3 + 2 = n^3 + 1^3 + 1^3$ шаклдаги туб сонлар чексиз кўп (n — натурал сон):

$$3 = 1^3 + 2 = 1^3 + 1^3 + 1^3,$$

$$29 = 3^3 + 2 = 3^3 + 1^3 + 1^3,$$

$$127 = 5^3 + 2 = 5^3 + 1^3 + 1^3,$$

$$24391 = 29^3 + 2 = 29^3 + 1^3 + 1^3.$$

Учта кублар йиғиндисига тенг бўлмаган туб сонлар чексиз кўп. 1, 8, 27, 64, 125, ... сонлар кублар кетма-кетлигини ташкил қилади. Ҳар қандай натурал сонни камида нечта кублар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин, деган савол ўрнидир.

Мисол.

$7 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 - 7$ та кублар йиғиндисидан;

$15 = 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 - 8$ та кублар йиғиндисидан;

$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 - 9$ та кублар йиғиндисидан;

$31 = 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 - 5$ та кублар йиғиндисидан иборат.

Буюк немис математиги Якоби ўзининг Дозе деган шоғирдига ҳар қандай сонни камида нечта кублар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлигини ўйлаб кўришни буюрган. У ҳисоблаш йўли билан қуйидагиларни кўрсатган: 1 дан 12000 гача бўлган сонлар орасида 23 ва 239 лар 9 та кублар йиғиндисидан; 15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 364, 420, 428, 454 лар 8 та кублар йиғиндисидан; 7, 14, 21, 42, 47, 61, 77, 85, 87, 103, ... 5306, 5318, 8042 лар эса 7 та кублар йиғиндисидан иборат.

Биферих деган ёш математик ҳар қандай сон кўпи билан 9 та кублар йиғиндисидан иборатлигини исботлаган. Кейинчалик буюк немис математиги Ландау, маълум бир натурал сондан бошлаб ҳамма натурал сонларни 8 та кублар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлигини исботлаган.

Деярли ҳар қандай катта натурал сон 8 та натурал сонларнинг кублари йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг камида 7 таси туб сондир, деган теоремани 1951 йилда К. Ф. Рот исботлаган. Бир вақтда икки натурал соннинг: ҳам квадратлар йиғиндисидан, ҳам кублар йиғиндисидан иборат бўлган сонларнинг энг кичиги $n=65$ дир:

$$65 = 1^3 + 4^3 = 1^2 + 8^2.$$

Бундай хоссага эга бўлган натурал сонлар чексиз кўпдир. $n > 1$ бўлганда $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = k^2$ ни берадиган биргина $n = 24$ натурал сони мавжудлиги исботланган:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 24^2 = 70^2.$$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ нинг ҳар қандай n учун квадратли сон эканлигини кўрсатиш мумкин:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = k^2 \quad (1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2).$$

Лекин бундай кублар йиғиндиси ҳеч қандай n учун туб сон бўла олмаслигини исботлаш мумкин.

1, 16, 81, 256 ... лар натурал сонларнинг 4- даражаларидан тузилган кетма-кетликдир.

Ҳар қандай натурал сонни камида нечта биквадратлар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлиги масаласи билан кўп олимлар шуғулланган.

15 учун 15 та биквадратлар йиғиндиси керак:

$$15 = 1^4 + 1^4 + 1^4 + \dots + 1^4,$$

$31 = 2^4 + 1^4 + 1^4 + \dots + 1^4$, қўшилувчилар сони 16 та.

47 учун 17 та, 63 учун 18 та, 79 учун 19 та биквадратлар йиғиндиси керакдир. $81 = 3^4$ бўлгани учун унга 1 та биквадрат етарлидир.

Ҳар қандай натурал сон учун 19 та биквадрат етарли эмасми?

Лиувиль элементар йўл билан 53 та биквадратлар етарли эканлиги исботлаган эди. Кейинчалик олимлар 53 ни аста-секин камайтириб, 47, 45, 41, 39, 38 ларга келтирган эдилар. Бу масалада математик Биферих рекорд қўйди: у 37 гача камайтирди. Харди ва Литлвудлар математиканинг кучли усулларидан фойдаланиб, ҳар қандай натурал сон, бирор $N > N_0$ дан бошлаб, 19 та биквадратлар йиғиндисидан иборат эканлигини исботладилар. Лекин N_0 сони шунчалик катта эдики, улар унинг қиймати топиш билан ҳам шуғулланмадилар. Масала ҳал бўлиши учун N_0 сонигача бўл-

ган ҳамма сонларни 19 та биквадратлар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлигини кўрсатиш керак эди. Бунинг учун N_0 сонни мумкин қадар камайтириш мумкинлигини кўрсатиш керак эди. Лекин ҳозиргача Харди ва Литлвудлар томонидан айtilган N_0 сони жуда катталигича қолган.

А. Қалмарчик қуйидагини исботлади: Шундай a сони мавжудки, ҳамма $n > a$ лар 16 та биквадратлар йиғиндисидан иборат.

Фақат иккита биквадратлар йиғиндисидан иборат бўлган туб сонлар ҳам мавжуд:

$$2 = 1^4 + 1^4; 17 = 2^4 + 1^4; 97 = 2^4 + 3^4; 257 = 1^4 + 4^4; 641 = 2^4 + 5^4.$$

Шундай туб сонлар сони қанча, деган савол қўйилган эди. Математик Шинцель бундай туб сонларнинг сони чексиз, деган гипотезани айтган бўлса-да, бу гипотеза ҳалигача исботланмаган.

Агар бирор натурал k сон a^b ($a > 1$; $b > 1$ — натурал сон) шаклдаги сонларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, k сони тўғри даражалар йиғиндиси шаклида ифодаланган дейилади.

$k = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 23$ лардан ташқари ҳар қандай натурал k сон a^b шаклдаги тўғри даражалар йиғиндисидан иборат эканлигини исботлаш мумкин.

Мисол. $k = 12$ бўлганда $12 = 2^3 + 2^2$; $k = 17$ да $17 = 3^2 + 2^3$; $93 = 3^4 + 2^3 + 2^2$.

Шунингдек, $k \leq 10$ сонларнинг ҳаммаси ($k = 6$ дан ташқари) иккита тўғри даражалар айирмаси шаклида ифодаланган:

$$\begin{array}{lll} 1 = 3^2 - 2^3, & 4 = 5^3 - 11^2 = 2^3 - 2^2, & 8 = 2^4 - 2^3, \\ 2 = 3^3 - 5^2, & 5 = 3^2 - 2^3, & 9 = 5^3 - 4^2, \\ 3 = 2^7 - 5^2, & 7 = 2^7 - 11^2, & 10 = 13^3 - 3^7, \end{array}$$

$k = 6$ учун бундай айирма мавжудлигини билмаймиз.

Умуман, Варинг гипотезасидаги қўшилувчилар сони $r = g(n)$ нинг $2^n + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] - 2$ дан кам бўла олмаслигини исботлаш мумкин, яъни:

$$r = g(n) \geq 2^n + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] - 2.$$

Мисол. $n = 2$ бўлганда

$$g(2) \geq 2^2 + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 2 = 4 + 2 - 2 = 4,$$

яъни ҳар қандай натурал сонни квадратлар йиғиндиси шаклида ёзиш учун 4 та ёки ундан ортиқ қўшилувчи етарлидир. Бу ҳолда қўшилувчилар сони 4 га тенглигини Лагранж исботлаган.

$n = 3$ бўлганда

$$g(3) \geq 2^3 + \left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 \right] - 2 = 8 + 3 - 2 = 9,$$

$$\begin{aligned} n = 4 \text{ бўлганда } g(4) &\geq 2^4 + \left[\left(\frac{3}{2} \right)^4 \right] - 2 = \\ &= 16 + \left[\frac{81}{16} \right] - 2 = 16 + 5 - 2 = 19, \end{aligned}$$

яъни ҳар қандай натурал сонни биквадратлар йиғиндиси шаклида ёзишда камида 19 та қўшилувчи бўлиши керак.

Қуйидаги гипотеза ҳам мавжуд: ҳар қандай $n \geq 2$ учун

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n \right] - 2 \quad (1)$$

га тенг. Лекин ҳозир ҳар қандай $n \geq 6$ ва

$$3^n - (2^n - 1) \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n \right] \leq 2 \quad (2)$$

лар учун

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n \right] - 2$$

га тенглиги исботланган. (2) тенгсизликни қаноатлантирмайдиган бирорта ҳам n сони мавжуд эмас. Масалан, $n = 6, 7, 8$ лар учун (2) тенгсизлик ўринли ва улар учун $g(n)$ нинг аниқ қиймати (1) формула билан топилади. $g(6) = 73$; $g(7) = 143$; $g(8) = 278$ га тенг. $g(4)$ ва $g(5)$ ларнинг аниқ қиймати топилмаган; $g(4) \leq 21$ исботланган (юқорида $g(4) = 19$ нинг жуда катта N_0 дан бошлаб бажарилганлиги ҳақида гапирган эдик), $g(5) \leq 40$ исботланган (1) формула эса $g(5) = 37$ ни беради.

Варинг гипотезаси умумий ҳолда кўп йиллар мобайнида ечилмасдан қолган эди, фақат 1909 йилда буюк немис математиги Гильберт бу гипотезани ҳал қилди. Лекин унинг исбот қилган усули жуда оғир.

1920—1925 йилларда Харди ва Литлвудлар Гильберт томонидан келтирилган исботни соддалаштирдилар. 1959 йилда совет математиги И. М. Виноградов Варинг гипотезасининг соддароқ исботини берди.

Илгари берилган n учун Варинг гипотезасидаги қўшилувчилар сонининг энг кичиги $r=g(n)$ билан белгиланган эди. Э ди берилган n учун Варинг гипотезасидаги r қўшилувчилар сонининг энг кичигини ҳамма N лар учун эмас, балки қандайдир $N_0 > N$ дан бошлаб керак бўлган қўшилувчилар сонининг энг кичигини $G(n)$ билан белгилаймиз.

Қуйидагилар аниқланган:

$$n = 2 \text{ учун } g(2) = G(2) = 4,$$

$$n = 3 \text{ учун } g(3) \neq G(3).$$

$g(3) = 9$ бўлиб (фақат 23 ва 239 лар учун 9 та кублар йиғиндиси керак). $n > 239$ бўлганда, $G(3) = 8$ эканлигини юқорида кўрсатиб ўтдик. Лекин Ландау $G(3) \leq 8$ лигини, Лицник эса $G(3) \leq 7$ эканлигини кўрсатдилар.

$G(4) = 16$, $G(5) = 23$; $G(6) \leq 36$; $G(7) \leq 52$, $G(8) \leq 73$ (Давенпорт), $g(4) \leq 35$ (Л. Динкенс), $g(5) \leq 40$ (Чен Цзэн-Жунь), $g(6) = 73$ (Пиллин) қийматлар бугунги кунда исботланган.

$G(5) \leq 23$ ҳар қандай деярли катта бўлган $N_0 > N$ сонларни манфий бўлмаган бутун сонларнинг 5- даражаларининг йиғиндиси шаклида ифодалаш учун энг кўпи билан 23 та қўшилувчи керак; $g(4) \leq 35$, ҳар қандай натурал N сонни манфий бўлмаган қўшилувчиларнинг тўртинчи даражалари йиғиндиси шаклида ифодалаш учун энг кўпи билан 35 та қўшилувчи керак, деган маънони беради ва ҳоказо.

Варинг гипотезаси ҳақидаги обзорни тугатар эканмиз, ўзи аддитив масала бўлмаса ҳам, лекин унга келтирилладиган айрим масалалар билан танишиб ўтамиз.

Ҳар қандай $p \neq 2$ туб сонни биргина усул билан иккита квадратлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкин.

$$\text{Мисол. } 13 = 7^2 - 6^2.$$

$$\text{Умуман } p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (*) \text{ дан бундай мисолларни}$$

хоҳлаганча ёзиш мумкин. (*) формуладан $\frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2} = 1$ келиб чиқади. Яъни, агар $p = x^2 - y^2$ бўлиб, p туб сон бўлса, $x - y = 1$ бўлиши кераклиги келиб чиқади; лекин аксинча эмас, яъни $x - y = 1$ бўлганда, $x^2 - y^2$ нинг туб сон бўлиши шарт эмас; $14 - 13 = 1$, лекин $14^2 - 13^2 = 27$ мураккаб сонга тенг. Юқорида келтирилган Теоремадан, агар натурал n сони икки хил усул билан квадратлар айирмаси шаклида ифодаланса, n мураккаб сон бўлиши ке-

либ чиқади. Юқорида келтирилган мисолдаги 27 ни $27 = 6^2 - 3^2$ шаклида ҳам ифодалаш мумкин. Айрим тоқ мураккаб сонларни ҳам иккита квадратлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкин.

Мисол. $9 = 5^2 - 4^2$.

Агар тоқ мураккаб сон фақат биргина усул билан иккита квадратлар айирмаси шаклида ифодаланса, у тоқ сон туб соннинг квадрати бўлиши кераклигини исботлаш мумкин:

$9 = 5^2 - 4^2 = 3^2$. Ҳар қандай n бутун сонни чексиз кўп йўллар билан $n = x^2 + y^2 - z^2$ (x, y, z — натурал сонлар) шаклида ифодалаш мумкин. Бу теорема қуйидаги айнитлардан келиб чиқиши мумкин:

$$2k - 1 = (2t)^2 + (k - 2t^2)^2 - (k - 2t^2 - 1)^2,$$

$$2k = (2t + 1)^2 + (k - 2t^2 - 2t)^2 - (k - 2t^2 - 2t - 1)^2.$$

p — туб сонни $x^2 + 2y^2$ шаклида ифодалаш учун (x, y — натурал сон) у $p = 8k + 1$ ёки $p = 8k + 3$ шаклдаги туб сон бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ҳолда $p \neq x^2 + 2y^2$ шаклида фақат биргина йўл билан ифодаланади.

Мисол.

$$p = 3 = 1^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$p = 11 = 3^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$p = 17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2,$$

$$p = 19 = 3^2 + 2 \cdot 2^2.$$

Қуйидаги гипотеза мавжуд:

$p = 1^2 + 2y^2$ ва $p = x^2 + 2 \cdot 1^2$ шаклида ифодаланадиган $p = 8k + 1$ ва $p = 8k + 3$ шаклдаги туб сонлар чексиз кўпдир (x, y — натурал сонлар).

Мисол. $73 = 1^2 + 2 \cdot 6^2$, $83 = 9^2 + 2 \cdot 1^2$, $73 = 8 \cdot 9 + 1$; $83 = 8 \cdot 10 + 3$. Бу гипотеза исботланмаган.

Эйлернинг қуйидаги гипотезаси мавжуд:

Ҳар қандай $8k + 3$ шаклидаги натурал сон квадратли сон билан туб сон иккиланмасининг йиғиндисидан иборат:

$$k = 8k + 3 = m^2 + 2 \cdot p.$$

Бу гипотеза ҳозиргача ҳам исботланмаган.

Эйлер бу гипотезани $k = 200$ гача текшириб тасдиқлади. Лемер бу гипотезани $k = 1000$ гача текшириб тасдиқлаган.

Мисол. $11 = 1 \cdot 8 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 5$,

$$19 = 2 \cdot 8 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 5,$$

$$27 = 3 \cdot 8 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 13,$$

$$35 = 4 \cdot 8 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 17 = 5^2 + 2 \cdot 5,$$

$$43 = 8 \cdot 5 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 17,$$

$$51 = 8 \cdot 6 + 3 = 5^2 + 2 \cdot 13,$$

$$59 = 8 \cdot 7 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 29 = 5^2 + 2 \cdot 17 = 7^2 + 2 \cdot 5,$$

$$67 = 8 \cdot 8 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 29,$$

$$75 = 8 \cdot 9 + 3 = 1^2 + 2 \cdot 37 = 7^2 + 2 \cdot 13,$$

$$83 = 8 \cdot 10 + 3 = 3^2 + 2 \cdot 37 = 5^2 + 2 \cdot 29 = 7^2 + 2 \cdot 17.$$

1937—1938 йилларда совет математиги В. А. Голубев $x^2 + 27y^2$ шаклида ифодаланадиган $p < 30000$ туб сонлар ва $x^2 + 64y^2$ шаклида ифодаланадиган $p < 24000$ туб сонлар жадвалини берган эди.

1963 йилга келиб москвалик В. Н. Сердинский, америкалик Е. Карст ва С. Кравицлар $x^2 + 27y^2$ шаклида ифодаланадиган $p < 190\,000$ туб сонлар ва $x^2 + 64y^2$ шаклида ифодаланадиган $p < 120\,000$ туб сонлар жадвалини беришди.

Теорема. $p = 6k + 1$ шаклидаги ҳамма туб сонларни $x^2 + 3y^2$ кўринишида фақат бир хил усул билан ифодалаш мумкин (x, y — натурал сонлар).

$$\text{Мисол. } 7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2, \quad 31 = 6 \cdot 5 + 1 = 2^2 + 3 \cdot 3^2,$$

$$13 = 1^2 + 3 \cdot 2^2, \quad 37 = 6 \cdot 6 + 1 = 5^2 + 3 \cdot 2^2,$$

$$19 = 4^2 + 3 \cdot 1^2, \quad 43 = 6 \cdot 7 + 1 = 4^2 + 3 \cdot 3^2$$

$$p = 1^2 + 3y^2 \text{ ва } p = x^2 + 3 \cdot 1^2$$

шаклида ифодаланадиган $p = 6k + 1$ шаклидаги туб сонлар чексиз кўпдир (x, y — натурал сонлар).

$$\text{Мисол. } 67 = 6 \cdot 11 + 1 = 8^2 + 3 \cdot 1^2,$$

$$103 = 6 \cdot 17 + 1 = 10^2 + 3 \cdot 1^2,$$

$$109 = 6 \cdot 18 + 1 = 1^2 + 3 \cdot 6^2.$$

Бу гипотеза ҳам исботланмаган.

Теорема. p туб сон $x^2 + 4y^2$ шаклида ифодаланиши учун $p = 4k + 1$ шаклидаги туб сон бўлиши зарур ва етарлидир. Бу теоремани польшалик математик Серпинский исботлаган.

$$\text{Мисол. } 17 = 1^2 + 4 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 + 1,$$

$$61 = 4 \cdot 15 + 1 = 5^2 + 4 \cdot 3^2.$$

Теорема. p туб сон $x^2 - 2y^2$ шаклида ифодаланиши учун (x, y — натурал сонлар) $p \neq 8k + 1$ ёки $8k + 7$ шак-

лидаги туб сон бўлиши эҳтимоли юқори. Бу теоремами ҳам Серпинский исботлаган (мисол кўрсатини).

Қандай туб сонлар иккита кубларнинг айирмасидан иборат бўлади?

Агар $p = x^2 - y^2$ туб сон бўлса, $x - y = 1$ эканлигини кўрсатиш осон, чунки, $p = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Демак, $p = x^2 + xy + y^2$; $x - y = 1$, $y = x - 1$ бўлгани учун $p = x^2 - (x - 1)^2 = 3x^2 - 3x + 1$.

Шундай қилиб, p туб сон иккита кубларнинг айирмаси бўлиши учун $p = 3x^2 - 3x + 1 = 3x(x - 1) + 1$ шаклидаги туб сон бўлиши керак ($x > 1$ — натурал сон).

Бундай туб сонлар чексиз кўп, деган гипотеза ҳам мавжуд. $x = 2, 3, 4, 5$ бўлганда $7 = 2^3 - 1^3$; $19 = 3^3 - 2^3$; $37 = 4^3 - 3^3$; $61 = 5^3 - 4^3$ — туб сонлар ҳосил бўлади. $x = 6$ бўлганда $91 = 6 \cdot 3(6 - 1) + 1 = 6 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 7 \cdot 13$ — мураккаб сон; $x = 7$ бўлганда $127 = 7^3 - 6^3$ туб сон; $x = 8$ бўлганда $169 = 13^2$; $x = 9$ бўлганда $217 = 7 \cdot 31$ мураккаб сон; $x = 10, 11, 12$ бўлганда $271 = 10^3 - 9^3$, $331 = 11^3 - 10^3$, $397 = 12^3 - 11^3$ — туб сонлар; $x = 13$ бўлганда $469 = 7 \cdot 67$ — мураккаб сон; $x = 14, 15$ бўлганда $547 = 14^3 - 13^3$; $631 = 15^3 - 14^3$ — туб сонлар; $x = 16, 17$ бўлганда $721 = 7 \times 103$, $817 = 19 \cdot 43$ — мураккаб сонлар, $x = 18$ бўлганда $919 = 18^3 - 17^3$ — туб сон ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, иккита кублар айирмасидан иборат бўлган ва 1000 дан кичик бўлган туб сонлар 7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, 379, 547, 631 ва 919 лардир.

Иккита кублар айирмасидан иборат бўлмаган $6k + 1$ шаклидаги туб сонларнинг чексизлигини исботлаш мумкин.

Мисол. $31 = 6 \cdot 5 + 1$, $67 = 6 \cdot 11 + 1$, $103 = 6 \cdot 17 + 1$, $139 = 6 \cdot 23 + 1$, $157 = 6 \cdot 26 + 1$ лар туб сон бўлиб, уларни иккита кублар айирмаси шаклида ифодалаш мумкин эмас.

$\left. \begin{array}{l} x + y = k^2, \\ x^2 + y^2 = l \end{array} \right\}$ бўладиган x ва y сонлар мавжудми (бунда x, y, k, l — натурал сонлар)?

Ферма бир жуфт $x = 1061652393520$ ва $y = 4565486027761$ лар кўрсатилган хоссага эга бўлган x ва y ларнинг энг кичигидир деб айтди. Кейинчалик бу фикр исботланди.

Энди Харди ва Раманутжанлар кўрсатган бир аддитив масалани кўрсатамиз.

Натурал n соннинг натурал сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони $p(n)$ билан белгиланади. Раманутжан n га қараб $p(n)$ ни аниқлаш формуласини келтирди. Кейинча-

лик бу формулага Харди тузатма киритиб, n нинг ўсиши билан $p(n)$ нинг тез ўсишини исботлади.

Мисол. $p(200) = 3972999029388$, яъни 200 нинг натурал сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони юқорида кўрсатилган сонга тенг.

Натурал n сонни $2^{n-1} = p(n)$ хил йўл билан қўшилувчилар йиғиндиси шаклида ифодалаш мўмкинлиги исботланган.

Мисол. $n = 5$ бўлганда $p(5) = 2^{5-1} = 2^4 = 16$. Демак, 5 нинг натурал сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони 16 га тенг:

$$\begin{array}{ll} 5 = 5, & 5 = 2 + 2 + 1, \\ 5 = 4 + 1, & 5 = 2 + 1 + 2, \\ 5 = 1 + 4, & 5 = 1 + 2 + 2, \\ 5 = 2 + 3, & 5 = 2 + 1 + 1 + 1, \\ 5 = 3 + 2, & 5 = 1 + 2 + 1 + 1, \\ 5 = 3 + 1 + 1, & 5 = 1 + 1 + 2 + 1, \\ 5 = 1 + 3 + 1, & 5 = 1 + 1 + 1 + 2, \\ 5 = 1 + 1 + 3, & 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{array}$$

Исталган натурал n соннинг t та қўшилувчилар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони C_{n-1}^{t-1} га тенгдигини исботлаш мумкин (бунда қўшилувчилар тартиби билан ажраландиган тасвирларни ҳар хил тасвирлар деб ҳисобланади).

Мисоллар.

$$1) \left. \begin{array}{l} n = 4, \\ t = 2 \end{array} \right\} \text{ бўлганда } C_{4-1}^{2-1} = C_3^1 = 3.$$

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1;$$

$$2) \left. \begin{array}{l} n = 4, \\ t = 3 \end{array} \right\} \text{ бўлганда } C_{4-1}^{3-1} = C_3^2 = 3.$$

$$4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2;$$

$$3) \left. \begin{array}{l} n = 5, \\ t = 2 \end{array} \right\} \text{ бўлганда } C_{5-1}^{2-1} = C_4^1 = 4,$$

$$5 = 1 + 4 = 3 + 2 = 4 + 1 = 2 + 3,$$

$$4) \left. \begin{array}{l} n = 5, \\ t = 3 \end{array} \right\} \text{ бўлганда } C_{5-1}^{3-1} = C_4^2 = 4,$$

$$5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1;$$

5) $\left. \begin{matrix} n = 9, \\ t = 5 \end{matrix} \right\}$ бўлганда $C_8^4 = 70$, яъни 9 нинг 5 та натурал сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони 70 га тенглиги келиб чиқади.

$T(n)$ билан n соннинг кетма-кет тоқ сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сонини ифодалаймиз:

$$1) n \neq k^2 \text{ тоқ сон бўлса, } T(n) = \frac{\tau(n)}{2}.$$

Мисол.

$$\begin{aligned} n = 15 : T(15) &= \frac{\tau(15)}{2} = \frac{4}{2} = 2, & 15 &= 15, \\ & & 15 &= 3 + 5 + 7; \\ n = 45 : T(45) &= \frac{\tau(45)}{2} = \frac{6}{2} = 3, & 45 &= 45, \\ & & 45 &= 13 + 14 + 15, \\ & & 45 &= 5 + 7 + 9 + 11 + 13. \end{aligned}$$

2) Агар $n = k^2$ тоқ сон бўлса,

$$T(n) = \frac{\tau(n) + 1}{2}.$$

Мисол.

$$\begin{aligned} T(9) &= \frac{\tau(9) + 1}{2} = 2, & 9 &= 1 + 3 + 5, & 9 &= 9; \\ T(49) &= \frac{\tau(49) + 1}{2} = 2, & 49 &= 1 + 3 + 5 + \\ & & &+ 7 + 9 + 11 + 13, & 49 &= 49. \end{aligned}$$

3) $n = 2k$ бўлиб, $4Tn$ бўлса, у ҳолда $\tau(n) = 0$.

Мисол. $n = 14 = 2 \cdot 7$, $4T14$ да $\tau(14) = 0$, яъни 14 соннинг кетма-кет тоқ сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони нолга тенг.

$$4) n = 4k^2 \neq l^2, \quad T(n) = \frac{\tau\left(\frac{n}{4}\right)}{2},$$

Мисол.

$$\begin{aligned} n &= 48 = 4 \cdot 12 \neq l^2, \\ T(48) &= \frac{\tau(12)}{2} = \frac{6}{2} = 3, \\ 48 &= 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 9 + 11 + \\ & \quad 13 + 15 = 23 + 25. \end{aligned}$$

$$5) \quad n = 4k = l^2, \quad T(n) = \frac{\tau\left(\frac{n}{4}\right) + 1}{2}.$$

$$T(16) = \frac{\tau(4) + 1}{2} = 2, \quad 16 = 7 + 9 = 1 + 3 + 5 + 7.$$

Натурал n сонининг 2 та, 3 та, 4 та ва ҳ. к. ҳар хил натурал қўшилувчилар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сони қанчага тенг, деган саволни Эйлер қўйган эди.

Бу масалани ҳал қилишда у қуйидаги тенгликнинг ўринли эканлигини исботлади:

$$(1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z) \dots = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \dots$$

Бунда

$$A = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + \dots$$

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \dots$$

B нинг коэффициентлари ундаги x ларнинг кўрсаткичларининг иккита ҳар хил натурал сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сонини, C нинг коэффициентлари эса ундаги x ларнинг кўрсаткичларини учта ҳар хил натурал сонлар йиғиндиси шаклида тасвирланиш сонини кўрсатади.

Мисол. B да x^8 нинг коэффициенти 3 га тенг. Демак, 8 ни 2 та ҳар хил натурал сонлар йиғиндиси шаклида 3 хил тасвирлаш мумкин:

$$8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5;$$

C да x^{11} нинг коэффициенти 5 га тенг. Демак 11 ни 3 та ҳар хил натурал сонлар йиғиндиси шаклида 5 хил тасвирлаш мумкин:

$$11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6.$$

B ва C ларнинг исталган ҳадининг коэффициентлари умумил ҳолда аниқланмаган, шунинг учун бу масала охиригача ҳай қилинмаган.

УЛҚАН ВА МИТТИ СОНЛАР

1) Қадим замондан Архимед исми билан боғлиқ бўлган қум заррачаларини санашга доир қуйидаги масала маълумдир.

Радиуси Ердан Қуёшгача (бу масофа 150 миллион километр) бўлган сфера қум билан тўлдирилган деб фараз қиламиз. Бу сферадаги қум заррачалари қанча?

Албатта бу масалани биринчи марта эшитган одам «қум заррачалари чексиз кўп» деб айтади. Архимед ўзи ишлаб чиққан схемага асосан бундай сферадаги қум заррачаларининг сони 10^{63} дан оз эканлигини ҳисоблади.

2) $\alpha = 0,0001^\circ$ бурчак жуда кичик бурчакми?

Агар 1° тийинлик чақага 4000 км узоқликдан қаралса, у чақа $0,0001^\circ$ бурчак остида кўринади.

3) Агар бирор киши 1920 йил 1 январдан бошлаб ҳар кун 10 соатдан ва бир йилда 300 кун мобайнида бир секундда 1 та сон санаб тезлиги билан кетма-кет сонларни бирдан бошлаб санаса 1970 йил 1 январгача қанча рақам санайди. Ҳисоблашлар 540 000 000 рақамнинг ёки тахминан 0,5 миллиард рақамнинг саналишини беради.

4) Мисрдаги Хеопс пирамидасининг ҳажми 2678257 куб м, оғирлиги эса 7231294 тонна. Шундай пирамидани ясаш учун зарур материалларни етказиб беришда нечта юк поездлари ишлатиш керак?

Агар ҳар бир вагонга 16 тонна материал юклаш мумкин бўлиб, бир составда 50 та шундай вагонлар мавжуд бўлса, қўйилган масалани ҳал қилишда 9000 та шундай составлардан керак.

Бу жуда ҳам катта сондир. Энди ўйлаб кўринг-чи, Хеопс пирамидасини ясаш учун қанча одам кучи кетган? Хеопс пирамидасининг баландлиги 150 м, асосининг юзи эса 40 000 кв м. Бу пирамида 200 қатор катта тошлардан иборат бўлиб, уни 30 йил мобайнида 10 минг қул бундан 5000 йил олдин ясаган.

Агар пирамида асосининг периметрини (931, 22 м) пирамида баландлигининг иккиланмасига бўлсак ($2 \times 148, 208$ м), 3,14159 ҳосил бўлади, бу π нинг тақрибий қийматидир. Пирамида баландлиги Ердан Қуёшгача бўлган масофанинг миллиарддан бир бўлагига тенглиги ҳам аниқланган.

5) Германияда 1 йилда 80 миллиард дона папирос чекилган. Бу сон озми, кўпми?

Агар ҳар бир папироснинг узунлиги 6,5 см бўлса, 80 миллиард дона папирос 5200000 км узунликда бўлади. Бу узунлик билан Ер экваторини 130 марта айлантириб чиқиш мумкин бўлади.

6) Астрономияда ёруғлик йили қилиб 1 секундда 300000 км масофага тарқаладиган нурнинг 1 йилда ўтган масофаси

қабул қилинган. Бу албатта жуда катта масофадир. Сизнингча энг «яқин» юлдуз (Сириус) Ердан қанча ёруғлик йили масофасида туради? Ҳисоблашлар шуни кўрсатадики, бу масофа 4 ёруғлик йилига тенгдир.

Оддий кўз билан кўринадиган юлдузлар Ердан 1000, 10000 ёруғлик йили масофасида туради.

7) 1- йилдан 1970 йилгача сизнингча қанча секунд вақт ўтган? Ҳисоблаб, ҳаммаси бўлиб 70 миллиард секунд вақт ўтганлигини топиш мумкин.

Гамбургда яшаган математик Г. Шубертнинг ҳисоблашича, эрамининг бошланишидан 1902 йил 29 апрель соат 10-у 40 минутгача 1 миллиард минут вақт ўтган.

Қуёш сиртининг ёруғлиги тўла ой сиртининг ёруғлигидан $6 \cdot 10^5$ марта кўпдир.

1 куб см ҳавода $n_0 = 3 \cdot 10^9$ донга ҳаво молекулалари бор. Бу сон каттами, кичикми? Джинс деган математикнинг ҳисоблашига кўра, бугунги кунда нафас олаётган кишининг ўпкасида Юлий Цезарнинг энг охирги нафасида чиқарган ҳаво молекулаларининг айримлари бўлиши эҳтимолли бор.

М. Мое ва Ф. Вейнсларнинг ҳисоблашларига кўра 1 та электроннинг умри $2 \cdot 10^{21}$ йилга тенг. Бу вақт кўпми, озми? $2 \cdot 10^{21}$ йил Ернинг умридан 400 миллиард марта, бизнинг галактикамиздан эса 100 миллиард йил катта эканлиги ҳисобланган.

Юқорида келтирилган мисолларимизнинг бирида 1 миллиард минут вақт 1902 йил ичида ўтганини айтган эдик. Албатта, бу ҳисоблашларни ўтказиш учун бирин-кетин санашнинг кераги йўқ ва бундай санашлар учун одамнинг умри етмаслиги ҳаммага маълумдир. Бундай улкан сонларни ҳисоблаш учун ҳисоблаш методлари мавжуд. Буюк немис математиги Ф. Гаусс билан унинг 1- синфда ўқиган даврида бўлиб ўтган воқеани эслатиб ўтмоқчимиз. Ўқитувчи Ф. Гаусс ўқиётган синф ўқувчиларига 1 дан 100 гача бўлган натурал сонлар йиғиндисини ҳисоблаш учун бериб, ўзи ярим соатга синфдан чиқмоқчи бўлган. У чиқиб кетаётганда Гаусс натижада 5050 ҳосил бўлишини айтган (ўша пайтда Гаусс 6 ёшда бўлган). Ўқитувчи таажжубланиб, у қандай ҳисоблаган, деб ўйланиб қолган. Гаусс бўлса, 1 дан 100 гача бўлган натурал сонларнинг йиғиндисини 50 та 101 ларнинг кўпайтмасига тенглигини айтган (кейинчалик арифметик прогрессиянинг n та ҳад йиғиндисини формуласини Гаусс келтириб чиқарган).

Яна бир қизиқарли масала ҳақида гапирамиз.

Дунёда бошидаги сочлар сони тенг бўлган камида 2 та одам мавжудми, деган саволга ўйламасдан бундай иккита одам мавжуд эмас, деб жавоб бериш мумкин.

Ҳолбуки, бундай одамларнинг бир нечтаси мавжудлигини кўрсатиш осон. Бунинг учун одамларнинг бошидаги сочларини санашнинг кераги йўқ. Битта одамнинг бошида 200000 тадан ортиқ соч бўлмаслигига ишониш мумкин. Демак, агар 200001 та кишилар тўплами олинса, улар ичида камида иккитасининг бошидаги сочлар сони тенглиги келиб чиқади. Агар бутун дунёда 4 миллиарддан ортиқ одамлар мавжудлиги ҳисобга олинса, бошидаги сочлар сони тенг бўлган одамларнинг ҳам кўплиги келиб чиқади. (Ҳисобланг-чи, шундай одамларнинг нечтаси мавжуд?)

Поляк математиги Серпинский $x^2 - 991y^2 = 1$ тенглама-нинг энг кичик натурал ечимлари

$$x_1 = 397\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080,$$

$$y_1 = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$$

эканлигини кўрсатди. Агар

$$x = \sqrt{991y^2 + 1} \text{ га } y = 1, 2, 3, 4, \dots$$

қийматларни кетма-кет қўйиб, ҳар бир ҳисоблашда 1 секунд вақт кетади, деб фараз қилсак, юқорида келтирилган қийматларни аниқлаш учун 10^{18} йил вақт етмаган бўлар эди. Агар $400 \cdot 10^{18}$ йил вақт сарф қилинса, юқорида келтирилган x ва y ечимлар топилган бўлар эди.

Яна бир масалани келтирамыз.

Шахмат ўйинини ўйлаб чиқарган одамга Ҳиндистон шоҳи жуда катта мукофот беришни ваъда қилган экан. У одам унга фақат шахмат тахтасининг хоналарига қуйидаги қондага асосан буғдой беришни сўраган: 1- хонага 1 дона, 2- хонага 2 дона, 3- хонага $2^2 = 4$ дона, 4- хонага $2^3 = 8$ дона ва ҳоказо. Охириги хонасигача шу қондага асосан буғдой беришни сўраган. Шунда шоҳ: «Сен мендан ҳеч нима сўрамадинг», — деб хафа бўлган экан. Бизга маълумки, фақат 64- хонаси учун бериши керак бўлган 2^{63} дона буғдой жуда ҳам кўп. Агар шунча дона буғдой ер юзининг қуруқ жойига сепилса, 9 мм баландликдаги буғдой бўлади.

Қалинлиги 0,07 мм бўлган каттароқ бир тахта қоғозни олиб аввал 2 га, кейин яна 2 га ва ҳоказо 40 марта буклаймиз. Бир ўйлаб кўринг-чи, 40 марта буклаганда, қандай қалинликдаги қоғоз ҳосил бўлади?

Шундай қалинликдаги қоғоз 100 000 км дан ортиқдир. Биласизми, 2^{400} қандай катта сон?

$2^{400} = 2582249878086908589655919172003011874329705$

7928292235128306593565406476220168411946296543

53280137831435903171972747493376.

Бизнинг эрамиздан 1700 йил олдин Ахмеснинг тузган қўл ёзмаси бугунги Англия музейида сақланади. Унда жуда қадимги қизиқарли масалалар қаторида қуйидаги масала ҳам бор: 7 одамнинг ҳар бирида 7 та мушук бўлиб, ҳар бир мушук 7 сичқонни, ҳар бир сичқон 7 та буғдой бошоғини ейди. Агар ҳар бир бошоқда 7 та буғдой бўлса, қанча буғдой нобуд бўлади? Бу масалани ҳисоблаш билан 7^5 бошоқ буғдой нобуд бўлганлигини аниқлаш осон.

Ҳар бир одам 2 та ота-она, 4 та бува-буви, 8 та катта бува-буви ва ҳоказоларга эга. Агар 40 авлод кейинга қайирилса (тахминан 1200 йил олдин) ҳар бир бугунги одамнинг 2^{40} та, яъни 10959111627776 тадан авлоди бўлган.

Яна бир масалани кўриб ўтамыз. Фараз қиламиз, эрамизнинг биринчи йилида 1 тийин пул ҳар йили 5% даромад бериш шarti билан омонат кассага қўйилди. Беришган процентларни мураккаб процент деб ҳисоблаб, шу 1 тийин 1950 йил мобайнида неча сўмга айланади?

Мураккаб процент формуласи ёрдамида ҳисоблаш натижаси 1950 йил мобайнида 1 тийин 2^{139} тийинга айланишини кўрсатади. 2^{40} тийиннинг ўзи 10 миллиард сўмдир. 2^{139} эса 2^{40} га нисбатан 2^{99} марта каттадир. 2^{139} тийин 47 хонали сондир. Шунча пул бутун дунёдаги пул бойлигидан ҳам бир неча марта кўп.

Шахмат ўйини билан ҳаммамиз қизиқамиз. Ҳаммаси бўлиб ҳар хил шахмат партияларининг неча хили мавжуд? Ҳисоблаганда, ҳар хил шахмат партиялари ҳаммаси бўлиб $10^{10^{70,5}}$ дан ортиқ эмас. Маълумки, x нинг ўсиши билан $\lg x$ жуда секин ўсади.

$\lg x > 100$ бўлиши учун $x > 10^{100}$ бўлиши керак. Бу сон қирраси 70 миллион ёруғлик йилига тенг бўлган кубдаги сув молекулалари сонидан каттадир. (Тасаввур қилиб кўринг-чи?)

Архимед қуйидаги масалани ҳам қўйган:

Ўзи Қуёш юзига тенг бўлган далага қанча қорамолни сигдириш мумкин? 1880 йилда математик Амтормнинг ҳисоблашига кўра $N \approx 77 \cdot 10^{206513}$ га тенг. Бундай масалалар

нинг жуда кўпини келтириш мумкин. Буларнинг ҳаммаси улкан сонларга мисолдир. Катта сонларни уч рақамли синфларга бўлиб ўқишда қуйидагиларни ҳосил қиламиз (бундай санаш Америка, Франция ва Жанубий Европа давлатларида ҳозир ҳам ишлатилади):

минг	10^3
миллион	10^6
биллион	10^9
триллион	10^{12}
квадриллион	10^{15}
квинтиллион	10^{18}
секстиллион	10^{21}
септиллион	10^{24}
октиллион	10^{27}
нониллион	10^{30}
дециллион	10^{33}
эндекалион	10^{36}
додекалион	10^{39}
центетиллион	10^{42}

Агар одам сочи биллион марта йўғонлаштирилса, у Ер диаметридан 8 марта йўғонроқ бўлар эди. Ҳозирги вақтда бутун дунёда маълум бўлган юлдузлар ва планеталарнинг оғирлиги 20 нониллион: $20 \cdot 10^{54}$ граммга тенг.

Одамнинг юраги унинг қисқа умрида тўхтовсиз кўп миллиард марта уради.

Энди қуйидаги умумий масалани кўрамиз: 3 та 9 дан иборат бўлган сонларнинг энг каттаси қайси: 999 ми? 9^{99} ми? 99^9 ми? ёки 9^{99} ми? 99^9 нинг 99^9 дан катта эканлиги аниқдир. Лекин буларнинг ҳар биридан ҳам 9^{99} сони жуда ҳам каттадир. Бу сон 369693100 та рақамлидир*. Юқорида келтирилган 2^{400} га ўхшаган бу сонни қатор йўллар билан ёзиш мумкинми?

Бу соннинг аввалги рақамлари 4281247731757470480389871159305635213390554822111443514174753 бўлиб, кейинги рақамлари 24178799359681422627177289 дир. Бу рақамлар орасидаги қолган рақамлар маълум эмас. Бугунги кунда маълум бўлган энг кучли электрон ҳисоблаш машиналари

* 1 секундда 1 та рақам ёзилади, деб фараз қилиб, бир кунда тўхтовсиз 10 соат ёзилса 9^{99} ни ёзиб чиқиш учун 28 йил 48 кун вақт кетади.

ҳам бунинг ўртасидаги қолган рақамларни ҳисоблаб беришда кучсиздир.

Агар бу соннинг рақамлари бирин-кетин ёзилса, 1478 км узунликдаги ёзув ҳосил бўлади. Агар бу сон китобга ёзилса, ҳар бири 800 бетдан иборат бўлган 33 томли китоб ҳосил бўлар эди.

Ҳажми 1 куб км бўлган қутига неча гугурт донасини жойлаштириш мумкин? Бундай қутига 5000 биллион гугурт донаси жойлашади. Агар гугурт фабрикаси ҳар куни бир миллион гугурт донаси ишлаб чиқарса, шунча гугурт донасини 14 миллион йилда ишлаб чиқарар эди ва уни 10 миллион вагондан иборат бўлган ва узунлиги миллион км бўлган поездга жойлаштириш мумкин эди.

Яна улкан сонларга тегишли бир мисол келтирамиз.

Маълумки, электрон қум заррачасига нисбатан жуда кичик миқдордир. 1 дона қум заррачаси Ер шаридан неча марта кичик бўлса, 1 дона электрон 1 дона қум заррачасидан шунча марта кичикдир. Жуда кучли телескоплар ёрдами билан кўринадиган дунёнинг радиуси 1 миллиард ёруғлик йилига ёки 10^{20} км га тенг. Бундай радиусли шарнинг ҳажми 10^{81} куб см га тенг. Агар шундай шар уран электронлари билан тўлдирилган бўлса, унга фақат 10^{106} дона уран электрони сиққан бўларди. Бу сон фақат 107 та рақамлидир. Ҳолбуки 9^{99} сони 370 миллионга яқин рақамлидир.

1874 йилда математик Крёнинг томонидан ёзилган китобда $2^2, 3^3, 4^{44}, \dots$ қатор сонлар ҳақида ҳикоя қилинади. Агар 4^{44} см узунликдаги кесма бўйлаб ёруғлик нури юборилса, унинг бу кесмани ўтиши учун 10^{21} йил вақт керакдир.

Радиуси 4^{44} см га тенг бўлган шарга сиёҳ тўлдирилган деб фараз қиламиз. Бундай миқдордаги сиёҳ 4^{44} сонни ёзиш учун етмаган бўлар эди. Албатта, бундан бошқа улкан сонлар ҳам мавжуд, улар олдида бу сонлар жуда кичик сон бўлиб қолади.

Энди факториал тушунчаси билан боғлиқ бир неча улкан сонларни кўриб ўтамиз. 15 та шашка дончалари билан бўлган шашка ўйинида ҳар хил ҳолатлар (шашка дончаларининг жойлашиш ҳолатлари) бўлиши мумкин. Бу ҳолатларнинг $15!$ та бўлишини осонлик билан ҳисоблаб кўриш мумкин.

$15! = 1307674368000$. Демак, 15 та шашка доначаларини бир биллион, яъни 10^{13} дан кўпроқ ўрин алмаштириш мумкин. $16!$ сони эса 20922789888000 га тенг бўлиб, $15!$ дан 16 марта каттадир.

Соннинг ўсиши билан унинг факториалининг ҳам тез ўсиб боришини сезиш осон. 9^{9^9} сони жуда улкан сон бўлишини юқорида айтган эдик. Агар ҳар бир 9 ёнига факториал ёзилса, натижада $9!^{9!^{9!}}$ сони ҳосил бўладики, бу сон олдида 9^{9^9} сони жуда кичик митти сон бўлиб кўринади.

Математик Мольтерар $100!$ сонини ҳисоблаган, у

93326215443994152681699238856266700490715968264381621
46859296389521759999322991566894146397615651828625369
79208272237582511852109168440000000000000000000000000
га тенгдир.

Бу сон 24 та ноль билан тугалланиб, 158 та рақамлидир. У 9^{9^9} олдида митти сондир.

$3!!!$ сони $3!!! > 10^{1242}$ бўлиб, мингтадан ортиқ рақамга эгадир. $3!!!$ соннинг охирида 178 та ноллар бўлиб, унинг ёйилмасига 2^{360} ва 5^{178} даражалар киради $\frac{996!}{10^{348}}$ ни ҳисоблаб, унинг 2310 та рақамли сон эканлиги, $\frac{1000!}{10^{240}}$ ни ҳисоблаб, унинг 2319 та рақамли сон эканлиги аниқланган.

449! ва 751! сонлари орасидаги

500! 550! 563! 600! 603! 650! 652! 700! 750!

ҳамма 9 та соннинг аниқ қиймати мавжуд.

10000! соннинг 35660 та рақамли сон эканлиги, 100000! нинг эса 456574 та рақамли сон эканлиги, 1000000! нинг 8565709 та рақамли сон эканлиги ҳисобланган.

Энди митти сонлар деб аталган кичик сонлар ҳақида сўз юритамиз.

Маълумки, агар n улкан сон бўлса, $\frac{1}{n}$ митти сондир.

Биз митти вақт ва митти оралиқларга доир масалалар билан танишиб ўтамиз.

1 секунд вақт бирлигининг кичик бирликларидандир. Мисол учун кинода 1 секундда 16 дан 24 тагача кадр алмашилиб туради. Шунга қарамасдан одамнинг кўз сезги

аъзоси кино кадрларининг узлуксиз ўзгаришини ҳис қилгандай бўлади. Бунинг асосий сабаби, одамнинг кўз сезги аъзоси 0,1 секунддан кам вақтни сезиш қобилиятига эга эмаслигидадир.

Ҳаракат билан боғлиқ бўлган воқеалар вақт билан ҳам боғлиқдир. Жуда кичик миқдорларни ўлчашда 1 мм ни 1000 қисмга бўлиб, унинг 1 бўлагини 1 микрон (1 μ) деб олинади, 1 микрон ўз навбатида 1000 бўлакка бўлиниб, 1 миллимикрон ($m\mu$) ҳосил қилинади.

Кадмий элементининг қизил тўлқин спектрининг узунлиги (λ_c билан белгиланади), Криптон элементининг қизил-бинафша тўлқин спектрининг узунлиги (λ_k билан белгиланади) митти узунликлардир:

$$1\mu = 1555164, 13 \lambda_c,$$

$$1\mu = 1769557, 93 \lambda_k.$$

Жуда кучли микроскоплар 200 μ м гача бўлган элементларни кўриш қобилиятига эгадир. $6,022 \cdot 10^{23}$ миқдорга Лошмидт сони дейилади. 18 г сувда шунча дона молекула мавжуддир.

Агар шунча молекулани дунёдаги 1370 куб км океан сувига солиб, у молекулалар бир хил текисда тарқалди, деб фараз қилинса, у вақтда океандан олинган 1 литр сувда солинган молекулаларнинг 440 донаси мавжуд бўлар эди.

Водород молекуласининг диаметри 0,4 μ м, 1 см^3 идишдаги водороддаги молекулаларни бирин-кетин жойлаштирилса, 11 миллион км узунликдаги молекулалар занжирини ҳосил бўлар эди. Бу занжир билан экваторни 300 марта айланиб чиқиш мумкин. Агар эни 0,5 м бўлган тахтага бу молекулалар жойлаштирилса, бундай тахтанинг узунлиги 8,8 метр бўлар эди.

Водород атомининг радиуси 10^{-8} см га тенг бўлиб, водород ядросининг радиуси 10^{-13} см га, электроннинг радиуси эса $3 \cdot 10^{-13}$ см га тенгдир.

Денк деган математик қуйидагиларни ҳисоблаб топган: оддий кўз билан кўринадиган дунёнинг радиуси $3 \cdot 10^{28}$ см га тенг. Агар шу радиус бўйлаб занжир шаклида электронлар жойлаштирилса, унга 10^{41} та электрон жойлашади. Агар бу электронлар квадратга жойлаштирилса, бундай квадратнинг томони 100 км бўлар эди. Агар уларни куб ичига жойлаштирилса, бундай кубнинг қирраси 30 см га тенг бўлар эди.

Агар атом заррачаси миллион марта катталаштирилса, у қандай бўлиб кўринади? Шуниси ажойибки, улкан сонлар ҳақидаги тасаввур бу миқдорни жуда катта деб ўйлашга мажбур қилади. Ҳолбуки, у жумла охирида қўйиладиган нуқтадай бўлади.

Электрон водород атомининг теварагида $1 \text{ секундда } 7 \cdot 10^{15}$ марта айланади. Таққослаш учун шуни ҳам айтиб ўтаемизки, самолёт пропеллери 1 секундда 25 марта айланади. 1 м^3 қўрғошиннинг оғирлиги 11,34 тоннадир. Унинг атомлари орасидаги масофа мавжуд бўлмаганда эди, у фақат 1 см ҳажмни эгаллаган бўлиб, бу ҳажмга 11,34 тонна оғирлик жойлашган бўлар эди. Афсуски, бизнинг планетамиздаги деярли ҳамма металлларнинг атомлари орасида бўшлиқ мавжуддир.

1 секунд жуда кичик вақт ораллиги, $\frac{1}{1000}$ секунд эса жуда ҳам митти вақт бирлиги бўлиб, бу вақт ичида ҳеч қандай ўзгариш майдонга келмайди, деб тасаввур қилиш мумкин. Ҳолбуки, $\frac{1}{1000}$ секунд вақт ичида жуда кўп ўзгаришлар бўлиши мумкин. Шундай вақт ичида 36 км/соат тезлик билан юрувчи поезд 1 см масофани ўтади. Товуш $\frac{1}{1000}$ секундда 33 см масофани, милтиқ ўқи эса шунча вақт ичида 70 см масофани босиб ўтади. Ер шари шунча вақт ичида ўзининг Қуёш атрофидаги айланишида 30 м масофани босиб ўтади.

1 секунднинг миллиондан бир бўлагиди, албатта, ҳеч қандай ўзгариш юз бермайди деб тасаввур қилиниши мумкин. Лекин бундай эмас. Ёруғлик нури шунча вақт ичида

$\left(\frac{1}{10^3} \text{ секундда}\right) 300 \text{ м масофани босиб ўтади. } \frac{1}{10^6} \text{ секунд вақт ичида бизнинг кўзимизга 400 миллион қизил ёруғлик тўлқини тушади. Демак, 1 дона қизил ёруғлик тўлқинининг бизнинг кўзимизга тушиши учун керак бўлган вақт}$

$\frac{1}{4000000000000000}$ секундга тенг. Шундай вақт оралликлари ҳам мавжудки, улар учун юқорида келтирилган митти вақтлар улкан бўлиб кўринади. Физикада рентген нури ёруғлик тўлқинларининг бир секунддаги ҳаракатлари 2500 биллион марта эканлиги ҳисобланган.

Улкан ва митти сонлар ҳақидаги таҳлилимишни тугатар эканмиз, муболаға соҳасига «саёҳат» қилиб кўрамиз.

Фараз қилайлик, баҳайбатлар дунёси мавжуд бўлиб, у дунёда ҳар бир одамнинг бўйи 10 м бўлсин. Шу дунё одамлари ўз мамлакатида ўзини баҳайбат деб ҳис қиладими? Ёки митти одамлар (уларнинг бўйи 10 см) ўз мамлакатида ўзини митти деб ҳис қиладими? Албатта бундай эмас. Лекин худди Гулливверга ўхшаган баҳайбатлар дунёсида биз митти бўлиб кўринамиз ёки миттилар дунёсига тушиб қолсак, баҳайбат бўлиб кўринамиз.

Яна муболаға дунёсига ичкарироқ кириб, қуйидагини тасавур қилиб кўрамиз.

Ядро атрофида ҳаракат қиладиган электронларда худди биз ерда яшаётгандек, кичик одамчалар бўлиб, улар ҳам математика билан шуғулланадилар деб тасаввур қилайлик. Ундаги оралиқ ва вақт бизнингча митти сонлардир. Ундаги одамчалар учун эса бу миқдорлар улкан сонлар каби кўринади.

Энди фараз қилайлик: Қуёш, планета ва юлдузлар қандайдир хаёлий жонлиқнинг молекула ва атомлари бўлсин. Бу дунёда ҳам одамлар математика билан шуғуллансинлар. Улар дунёсидаги сонлар бизлар учун улкан сонлар ҳисобланса, улар учун эса нормал сонлар бўлади.

Одамларнинг математика соҳасида эришган катта ютуқларидан бири шуки, улар атрофдаги «чеклик» тўсигини ёриб ўтиб, «чексиз» тушунчасини хаёлийдан ҳақиқий фан дунёсига жорий қилишди.

АЛГЕБРАИК ВА ТРАНСЦЕНДЕНТ СОНЛАР

Ўрта мактабда сон тушунчаси натурал сонлардан бошла-
ниб, рационал, иррационал, комплекс сонлар билан тугал-
ланади. Булар алгебраик ва трансцендент сонлар деб аталган
сонларнинг хусусий ҳолидир.

Ҳар қандай $\frac{a}{b}$ ($(a, b) = 1$, a — исталган бутун сон, b — натурал сон) рационал сон $bх - a = 0$ тенгламанинг ил-
дизидир. Ақсинча, коэффициентлари бутун сонлардан ибор-
рат бўлган ҳар қандай $bх - a = 0$ — биринчи даражали тенг-
ламанинг илдизи ($b \neq 0$), $x = \frac{a}{b}$ рационал сон бўлади.

Энг содда иррационал сонлар эса $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, b, c — бутун сонлар) квадрат тенгламанинг илдизидир.

Мисол. $x = \pm \sqrt{5}$ иррационал сон $x^2 - 5 = 0$ тенгла-
манинг илдизлари, $x = \pm (\sqrt{2} - 1)$ эса $x^2 + 2x - 1 = 0$ тенг-
ламанинг илдизлари бўлади.

Лекин коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган ҳар қандай квадрат тенгламанинг илдизи иррационал сон бўлавермайди.

Чунончи, $x^2 - x + 5 = 0$ тенгламанинг илдизлари $\frac{1 \pm i \sqrt{19}}{2}$ комплекс сонлардир.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан барча рационал сонлар, айрим иррационал ва комплекс сонлар коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган тенгламанинг илдизлари бўлиши келиб чиқади. Шундай сонларни алгебраик сонлар деб аталади. Умумийроқ қилиб айтганда, коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

тенгламанинг илдизи бўлган ҳақиқий ва комплекс сонларга алгебраик сонлар деб аталади.

Шундай қилиб, алгебраик сонларга барча рационал сонлар $(5, -\frac{2}{7}; 0,21(5) \text{ кабилар})$, айрим иррационал сонлар $(\sqrt{2}, -\sqrt[3]{7}, 1+3\sqrt{2} \text{ кабилар})$ ва айрим комплекс сонлар $(3-i, 2-3i, \frac{2}{3}-1,4i \text{ кабилар})$ киради. Нима учун ҳамма иррационал ва ҳамма комплекс сонлар алгебраик сонлар бўла олмаслигини кейинчалик кўрсатамиз.

Алгебраик сонлар биринчи, иккинчи ва умуман n - даражали алгебраик сонлар бўлади.

Агар α алгебраик сон (1) кўринишдаги n - даражали тенгламанинг илдизи бўлиб, даражаси n дан кичик бўлган шундай тенгламанинг илдизи бўлмаса, у n - даражали алгебраик сон дейилади.

Мисоллар. 1) Ҳамма рационал сонлар биринчи даражали алгебраик сондир, чунки $x = \frac{b}{a}$ рационал сон $ax - b = 0$ тенгламанинг илдизидир.

2) $x^2 - 4x + 4 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлган $x = 2$ рационал сонни иккинчи даражали алгебраик сон деб қараш мумкин эмас, чунки $x = 2$ сони $x - 2 = 0$ биринчи даражали тенгламанинг ҳам илдизидир.

3) $x = \sqrt[7]{3}$ сон еттинчи даражали алгебраик сондир, чунки у $x^7 - 3 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлиб, даражаси еттидан кичик бўлган ва коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган тенгламанинг илдизи бўлмайди.

4) $x = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ комплекс сон эса n - даражали алгебраик сондир, чунки $y x^n + 1 = 0$ тенгламанинг илдизидир:

$$\left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}\right)^n + 1 = \cos \pi + i \sin \pi + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

(Муавр формуласига асосан). $n = 5$ бўлганда $x = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ сон 5- даражали алгебраик сон бўлади.

Теорема. m , n - даражали α ва β алгебраик сонларнинг йиғиндиси $\alpha + \beta$, айирмаси $\alpha - \beta$, кўнаймаси $\alpha \cdot \beta$ ва бўлинмаси $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$) кўни билан $m \cdot n$ - даражали алгебраик сон бўлади.

Мисоллар. 1) $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ лар иккинчи даражали алгебраик сонлардир, лекин $\alpha + \beta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ эса 4- даражали алгебраик сондир, чунки $(\alpha + \beta)^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ сони $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ тенгламанинг илдизидир. (Текшириб кўринг.)

2) $\alpha = \sqrt[3]{3}$ ва $\beta = \sqrt[3]{12}$ лар иккинчи даражали алгебраик сонлардир, лекин $\alpha \cdot \beta = \sqrt[3]{36} = \pm 6$ эса биринчи даражали алгебраик сон бўлади.

3) $\alpha = \sqrt[6]{3}$ ва $\sqrt[6]{12}$ лар олтинчи даражали алгебраик сонлар бўлса-да, $\alpha \cdot \beta = \sqrt[6]{36} = \sqrt[3]{6}$ учинчи даражали алгебраик сондир.

Агар $\beta \neq 0$ алгебраик сон бўлса, $\frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$ ҳам алгебраик сон бўлади.

Мисол. $\frac{1}{\sqrt[7]{11}}$ алгебраик сон, чунки $\sqrt[7]{11}$ алгебраик сондир.

Умуман рационал сонлар ва рационал сонлардан алгебраик амаллар ёрдамида ҳосил қилинган сонлар алгебраик сонлардир.

Мисоллар. 1) $\alpha = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2} - \sqrt[3]{7}}{1 + 2\sqrt[6]{11}}}$ алгебраик сондир.

2) $x^3 + 1 = 0$ тенгламанинг илдизлари

$$x = \sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{8} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{8}$$

($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) шаклида ифодаланиб, алгебраник сонлардан иборатдир.

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2)$$

тенгламанинг илдизи α бутун алгебраник сон деб аталади (бунда $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots, a_n$ — бутун рационал сонлар).

Шундай қилиб, ҳамма бутун рационал сонлар бутун алгебраник сонларга киради, чунки улар $x + a = 0$ тенгламанинг илдизидир (a — бутун сон).

Шунингдек, $1+i, 1+\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}$ лар ҳам бутун алгебраник сонга киради, чунки улар мос равишда $x^2 - 2x + 2 = 0, x^2 - 2x + 3 = 0$ ва $x^2 - 3 = 0$ тенгламаларнинг илдизларидир.

Ҳақиқий алгебраник сон шундай рационал ёки иррационал сондирки, у сон коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган тенгламанинг илдизидир. α — бутун алгебраник сон бўлганда $\overline{\alpha}$ ҳам бутун алгебраник сон бўлади.

Алгебраник сонлар назариясида эришилган ютуқлар немис математиклари Куммер, Дедекин ва рус математиги Е. М. Золотарев номлари билан боғлиқдир.

Алгебраник бўлмаган сонлар мавжудми, деган саволга ҳамма сонлар алгебраник сонлардир, деб фикр юритилар эди.

Фақат 1844 йилда француз математиги Ж. Лиувилл алгебраник бўлмаган сонлар мавжуд деган теоремани исбот қилди. Лекин бу теореманинг исботи жуда қийин эди. У олий математика ёрдамида коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган ҳеч қандай тенгламанинг илдизи бўла олмайдиган сонларнинг мавжудлигини исбот қилди. Кейинчалик бундай сонлар трансцендент сонлар деб аталди.

1873 йилда буюк немис математиги Г. Кантор ўзи асослаган тўпламлар назарияси ёрдамида трансцендент сонлар мавжудлигининг оригинал исботини берди. Биз Канторнинг келтирган исботига тўхтаб ўтамиз. Бунинг учун тўпламлар назариясига тегишли айрим маълумотлар билан танишамиз.

Тўпламлар умуман уч хилдир: чекли тўплам, бўш тўплам ва чексиз тўплам.

Мисоллар. 1) Шу бетдаги ҳарфлар тўплами, бутун дунёдаги одамлар тўплами, бизнинг галактикамиздаги юлдузлар тўплами чекли тўплamlардир, чунки уларнинг элементлари сони маълум бир натурал сондан катта эмас. Элементлар сони қанчалиги маълум бўлмаган чекли тўплamlар ҳам мавжуддир. Масалан, $2^{2^{17}} + 1$ нинг натурал бўлувчилари сони маълум эмас, чунки бу соннинг туб ёки мураккаб эканлигини билмаймиз.

2) $x^2 + 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлар сони, 12 натурал соннинг 20 дан катта бўлган бўлувчилар сони бўш тўплamlарга мисол бўлади, чунки $x^2 + 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизи йўқ, 12 нинг эса 20 дан катта бўлган бўлувчиси мавжуд эмас.

3) Натурал сонлар тўплами, жуфт сонлар тўплами, тоқ сонлар тўплами, туб сонлар тўплами чексиз тўплamlарга мисол бўла олади.

Г. Кантор чексиз тўплamlар ҳам худди чекли тўплamlар каби ҳар хил бўлишини кўрсатди.

Биринчи типдаги чексиз тўплamlарга санокли тўплamlар деб аталади. Бундай тўплamlарга ҳамма натурал сонлар тўплами, жуфт сонлар тўплами, тоқ сонлар тўплами, туб сонлар тўплами мисол бўлади. Бундан ташқари рационал сонлар тўплами, алгебраик сонлар тўплами ҳам санокли тўплamlарга мисол бўлади.

Иккинчи типдаги чексиз тўплamlарни саноксиз тўплamlар деб аталади. Уларнинг саноксизлиги шу маънодаки, уларнинг элементларини ҳеч қандай йўл билан натурал сонлар ёрдамида номерлаб бўлмайди.

Исталган кесмадаги барча ҳақиқий нуқталар тўплами ва умуман, барча ҳақиқий сонлар тўплами саноксиз тўплamlарга кирази.

Чексиз тўплamlанинг элементлари сонини натурал сон билан белгилаш мумкин эмас. Бундай тўплamlарнинг элементлари сонини ифодалаш учун кардинал сонлар деб аталган сонлар киритилган (кардинал—чеклидан кейин маънони беради).

Мисол. Санокли тўплamlарнинг элементлари сонини $\aleph_0$ (алеф ноль) кардинал сони билан, ҳақиқий сонлар тўплamlанинг элементлари сонини C (континуум) кардинал сони билан белгилаш қабул қилинган. $2^{\aleph_0} = C$ эканлигини исботлаш мумкин. Шундай қилиб, $C > \aleph_0$ бўлади.

Г. Кантор қуйидаги саволни қўйган эди. Элементлари сони $\aleph_0$ дан катта, лекин C дан кичик бўлган чексиз тўп-

лам мавжудми? Бунга континуум-гипотеза деб аталади. Кўп йиллар давомида бундай тўпламнинг мавжуд ёки мавжуд эмаслиги исботланмасдан келди.

Немис математиги Гильберт 1900 йил Парижда бўлиб ўтган бутун дунё математикларининг кенгашида 23 та ҳал қилинмаган масалани баён қилган эди. Буларнинг биринчиси континуум гипотезаси эди. Фақат 1963 йилга келиб америкалик математик П. Ж. Коэн $\aleph_0$ дан катта ва $\mathfrak{c}$ дан кичик бўлган кардинал соннинг мавжуд ёки мавжуд эмаслигини исботлаш мумкин эмаслигини кўрсатди.

Келтирилган мулоҳазалардан фойдаланиб, алгебраик бўлмаган сонларнинг мавжудлигини осонлик билан исботлаш мумкин.

Агар

X — ҳақиқий сонлар тўпламини,

R — рационал сонлар тўпламини,

I — иррационал сонлар тўпламини

ифодаласа, $X = R + I$ эканлиги аниқдир. Ҳақиқий сонлар тўплами саноксиз тўлам. Рационал сонлар тўплами эса санокли тўлам.

Агар иррационал сонлар тўплами фақат ҳақиқий алгебраик сонлардан иборат бўлса, у ҳолда ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами санокли тўпламни ташкил қилар эди. Демак, иррационал сонлар таркибида алгебраик бўлмаган ҳақиқий сонлар мавжуд (чунки юқорида ҳамма алгебраик сонлар тўплами санокли тўлам эканлиги ҳақида сўз юритган эдик).

Шундай қилиб, трансцендент сонларнинг мавжудлиги ва улар ҳақиқий сонларнинг асосий қисмини ташкил қилганлиги келиб чиқади.

Лиувилл ва Канторлар трансцендент соннинг мавжудлигини назарий томондан исботлаганлар, лекин бирор-та ҳам мисол кўрсатмаганлар. Қадимги замон математикларини доиранинг квадратураси ҳақидаги масала қизиқтирган эди (циркуль ва чизгич ёрдамида берилган доиранинг юзига тенг бўлган квадратнинг ясалиш масаласи).

Агар доиранинг радиуси 1 га тенг бўлса, у ҳолда унинг юзи π га тенг бўлади ҳамда масала циркуль ва чизгич ёрдамида узунлиги π га тенг бўлган кесмачи яшаш масаласига айланади. Кўп олимлар бу масала устида ишлаган бўлсалар-да, лекин ҳеч қандай натижага келолмаганлар. Фақат Л. Эйлер доиранинг квадратураси масаласи ечилмайдиган

масала эканлигини исбот қилган эди ва π^* сони коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган тенгламанинг илди-зи бўлолмаслиги ҳақидаги фикрни баён қилган эди. Лекин π сонининг трансцендент сон эканлигини биринчи марта 1882 йилда француз математиги Линдеман исботлади. 1873 йил-да француз математиги Ш. Эрмит $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1 +$

$+\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$ нинг трансцендент сон эканлигини исботлаган эди. Шунинг ҳам айтиш керакки, e ва π сонларининг иррационал сонлар эканлигини 1761 йилда математик Ламберт исботлаган эди. π ва e сонлар математикада жуда катта аҳамиятга эга. π сони кўпинча геометрияда, e эса анализда учраб туради.

Математик Линдеман $e^{\pi i} = -1$ ва $e^{\pi} = i^{-2i}$ тенгликларни ҳосил қилиш билан e ва π лар орасидаги боғланиш мавжудлигини кўрсатди.

Юқорида айtilган Д. Гильберт гипотезаларининг тартиб билан 7- гипотезаси қуйидагидан иборат:

«Биз арифметикада ташқаридан келган π ва e сонлар-нинг арифметик ҳолатларини исбот қилган бўлсак-да, лекин арифметиканинг ичида бўлган айрим сонларнинг арифметик ҳолатларини билмаймиз. $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{5}}$, 3^{π} , $e^{\sqrt{5}}$, e^{π} лар қандай сон?»

Бу савол кўп йиллар мобайнида жавобсиз бўлиб келмоқ-да эди.

Фақат 1934 йилда совет математиги А. О. Гельфонд (1906 — 1968) жуда катта аҳамиятга эга бўлган қуйидаги теоремани исбот қилди:

Агар $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ алгебраик сон бўлиб, β рационал сон бўлмаган исталган алгебраик сон бўлса, α^{β} шаклдаги сон трансцендент сон бўлади.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган мисолларнинг ҳам-маси ва i^{π} , $(2-i)^{3+i}$, $\pi^{\sqrt{3}+i}$, $\sqrt{5}^{\pi}$ каби сонлар трансцендент сонлар экан.

Шу билан бирга рационал сонларнинг ўнли логарифмла-ри ҳам (агар уларнинг ўзи рационал сон бўлмаса) трансцен-дент сон эканликларини исботлаш мумкин.

* π белги ва трансцендент термини Эйлер томонидан киритилган.

$$\text{Жумладан, } \alpha = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = 0,121122\dots \underbrace{11\dots 1}_{n \text{ та}} \underbrace{22\dots 2}_{n \text{ та}} \dots; \beta = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

кабиларнинг ҳам трансцендент сон эканликларини кўрсатиш мумкин. (α сонига Лиувилл сони дейилади.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2^k-1}} = 0,1 +$

$+ 0,01 + 0,0001 + 0,00000001 + \dots$ сони трансцендент сон эканлиги аниқланди. $z = \alpha + \beta i$ комплекс сон учун α ва β ҳақиқий трансцендент сонлар бўлса, у ҳолда z комплекс трансцендент сон бўлади.

Мисол. $z = 2^{\sqrt{3}} + i\pi$ комплекс трансцендент сондир.

Теорема. Ҳар қандай чексиз ўнли касрнинг шундай ихтиёрий узунликдаги қисмлари мавжудки, улар шу ўнли касрда чексиз кўп марта такрорланади.

Лекин, мисол учун $\sqrt{2}$, π ва e сонларнинг чексиз ўнли каср ёйилмасида қандай сон чексиз кўп марта такрорланишини билмаймиз.

1950 йилда $\sqrt{2}$ нинг вергулдан кейинги 1000 дан ортиқ рақамлари ҳисобланган бўлса-да, бу рақамларнинг бирин-кетин келишлик қонунияти ҳақида ҳеч нарса айта олмаймиз.

π нинг чексиз ўнли каср ёйилмасида 123456789 сонни ҳеч бўлмаганда 1 марта учраши мумкинлигини билмаймиз.

Теорема. $b > 1$ натурал сон бўлиб $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ лар Фибоначчи сонлари бўлса, $E_n = \frac{1}{b^{u_n} + \frac{1}{b^{u_{n+1}} + \dots}}$ трансцендент сон бўлади.

$\theta = 0,1234567891011\dots$ (0 дан кейин бирин-кетин ҳамма натурал сонлар ёзилган) ва $\theta_1 = 0,23571113171923\dots$ (0 дан кейин ҳамма туб сонлар ёзилган) ларнинг трансцендент сонлар эканлиги исботланган.

Трансцендент сонлар ҳақида бугунги кунда ҳал қилинмаган гипотезалар ҳам мавжуддир.

Мисол. $e + \pi$, $e - \pi$, $e \cdot \pi$ ёки $\frac{e}{\pi}$ шаклдаги сонларнинг арифметик ҳолатини ва уларни иррационал сон эканлигини билмаймиз.

Математикада шундай масалалар ҳам учраб турадики, уларни геометрияга ҳам, арифметикага ҳам киритиш мумкин. Бундай масалаларни арифметика ва геометрия чегарасидаги масала деб юритилади. Биз шундай масалаларнинг айримлари билан танишиб ўтамиз.

Фараз қилайлик, бутун текислик ёки бутун фазо томони маълум бирликка тенг бўлган квадратларга, фазо эса кубларга бўлинган бўлсин. Бундай квадратлар ёки тегишли кублар учларини панжара нуқталари деб аталади.

Мана шундай панжара нуқталари билан боғлиқ бўлган айрим қизиқарли масалаларни кўриб ўтамиз. Бундай масалаларнинг айримлари жуда қийинчилик билан ечилган бўлсада, айримлари эса ҳозиргача ҳам ечилмаган.

Бундай масалаларнинг кўплари билан немис математиклари Гаусс, Штейнгауз ва бошқа олимлар шуғулланганлар.

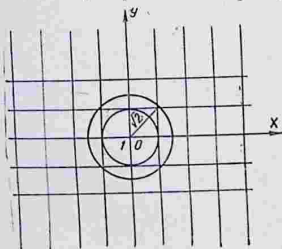
Штейнгауз ҳар қандай натурал n сон учун текисликда панжара нуқталарининг n тасини ўз ичига олувчи доира мавжудми, деган масалани қўйган эди. Ҳар қандай n учун маркази панжара нуқтасида бўлган ва ичида n та панжара нуқталари жойлашган доира мавжуд эмаслигини осонлик билан кўрсатиш мумкин.

Мисол. Маркази панжара нуқтасида, радиуси эса $r \leq 1$ бўлган доира ичида фақат 1 та (доира маркази) панжара нуқтаси мавжуд (27- шаклда «О» нуқта). Агар доира радиуси $\sqrt{2}$ деб олинса, бундай доира ичида 5 та панжара нуқтаси мавжуд бўлади.

Демак, маркази панжара нуқтасида бўлиб ичида фақат 2 та, 3 та, 4 та панжара нуқталари бўлган доира мавжуд эмас.

Ҳар қандай натурал n сон учун радиуси r_n , маркази $p(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ нуқтада бўлган доира мавжудки, бу доира ичида n та панжара нуқталари мавжудлигини исботлаш мумкин.

Юқорида келтирилган p нуқтанинг координаталари-



27- шакл.

дан бири рационал сон, иккинчиси эса иррационал сон. Қуйидаги савол қўйилиши мумкин: марказининг координаталари рационал сонлардан иборат бўлган юқоридаги маънода доира мавжудми?

Математик Шинцель бундай марказли доира мавжуд эмаслигини исботлаган.

Штейнгауз қуйидаги теоремани исботлаган: *Ҳар қандай натурал n сон учун юзи n га ва ичида n та панжара нуқталари бўлган доира мавжуд. Бундай доиранинг маркази панжара нуқтасида бўлмайди.*

Ҳар қандай натурал сон учун доира айланаси устида n та панжара нуқталари бўлган доира мавжудми, деган савол қўйилган эди.

1958 йилда Женевада чиқадиган математикани ўргатиш Халқаро комиссияси журналининг IV томида математик Шинцель қуйидагини исботлади:

Агар $n = 2k + 1$ тоқ сон бўлса, маркази $(\frac{1}{3}, 0)$ да, радиуси эса $r = \frac{5^k}{3}$ га тенг бўлган доира айланаси устида n та панжара нуқталари мавжуд бўлади.

Агар $n = 2k$ бўлса, доиранинг маркази $(\frac{1}{2}, 0)$ да, радиуси эса $r = \frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{2}$ бўлиши керак.

Мисоллар. 1) $n = 3 = 2 \cdot 1 + 1 = 2k + 1$ бўлганда маркази $(\frac{1}{3}, 0)$ да ва радиуси $r = \frac{5^k}{3} = \frac{5}{3}$ га тенг бўлган доира айланаси устида 3 та панжара нуқтаси мавжуд бўлади.

2) $n = 4 = 2 \cdot 2 = 2k$ бўлганда маркази $(\frac{1}{2}, 0)$ ва радиуси $r = \frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ га тенг бўлган доира айланаси устида 4 та панжара нуқталари мавжуд бўлади.

Математик Бровкининг кўрсатишича, ҳар қандай натурал n сон учун ичида n та панжара нуқталари бўлган квадрат мавжуд.

Ҳар қандай натурал n сон учун маркази $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3})$ нуқтада бўлган ва ҳажми 1 куб бирликка тенг бўлган

n та кубларни ўз ичига оладиган шарнинг мавжудлигини исботлаш мумкин.

Математик Кулиновскийнинг исботига кўра, ҳар қандай натурал n сон учун шундай шар мавжудки, унинг сиртида координаталари бутун сонлардан иборат бўлган n та панжара нуқталари бўлади.

Ҳар қандай натурал сон n учун координаталари бутун сонлардан иборат бўлган n та панжара нуқталарини ўз ичига оладиган кубнинг мавжудлигини Брозкин исботлаган.

Қандай радиусли доира айланаси устида камида 1 та панжара нуқтаси мавжуд деган савол қўйилган эди.

Маркази панжара нуқтасида бўлган ва радиуси $r = 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{17}, 3\sqrt{2},$

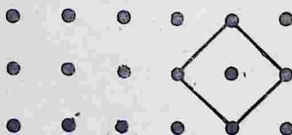
$2\sqrt{5}, 5$ бўлган доира айланаси устида битта панжара нуқтаси ётади. Маркази панжара нуқтасида бўлган доира айланаси устида нечта панжара нуқталари ётиши мумкин, деган саволга қуйидаги теорема исботланган: *Берилган натурал k сон учун маркази панжара нуқтасида бўлган доира айланаси устида $4k$ та панжара нуқтаси жойлашган дои-*

ранинг радиуси $r = \sqrt{5^{k-1}}$ бўлиши керак.

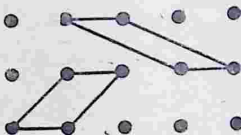
Мисол. $k = 3$ бўлганда $r = 5$ бўлади. Демак, бу ҳолда радиуси 5 га тенг бўлган ва маркази панжара нуқтасида бўлган доира айланаси устида $4k = 4 \cdot 3 = 12$ та панжара нуқтаси ётар экан.

Мунтазам кўпбурчаклардан фақат квадратни текисликда шундай ўрнатиш мумкинки, унинг ҳамма учлари панжара нуқталарида ётган бўлади (28- шакл).

Учлари панжара нуқталарида бўлиб, ичида ва периметрида (учидаги нуқталаридан ташқари) панжара нуқталари ётмаган мунтазам бўлмаган кўпбурчаклардан фақат юзи 1 кв бирликка тенг бўлган параллелограмм мавжуд эканлиги исботланган (29- шакл).

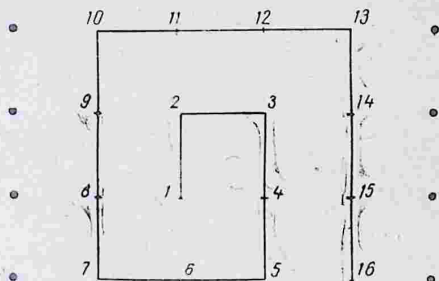


28- шакл.



29- шакл.

Панжара нуқталарини натурал сонлар ёрдамида шундай номерлаш мумкинки, панжаранинг ҳар хил нуқталари ҳар хил натурал сон билан номерланган бўлади (30- шакл).



30- шакл.

Теорема. Учлари панжара нуқталарида бўлган ҳар қандай кўпбурчакнинг юзи S қуйидаги формула билан топилади:

$$S = \left(n + \frac{n_1}{2} - 1 \right)$$

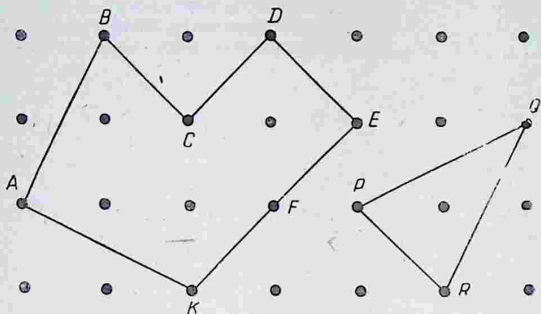
(бунда n — кўпбурчак ичида мавжуд бўлган панжара нуқта-
лари сони, n_1 — кўпбурчак томонларида ётган панжара нуқ-
талари сони).

Мисол. 31- шаклдан:

$$S_{ABCDEFKA} = \left(4 + \frac{7}{2} - 1\right) = 4 + 3,5 - 1 = 6,5 \text{ кв. бирлик.}$$

$$S_{PQR} = \left(1 + \frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2}.$$

Жумладан, учлари панжара нуқталарида бўлиб, томонида панжара нуқтаси бўлмаган (ундаги нуқталаридан ташқари) учбурчакнинг юзи $S = k + \frac{1}{2}$ га тенг (k — учбурчакнинг ичидаги панжара нуқталари сони).

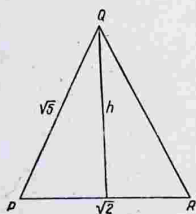


31- шакл.

$S_{PQR} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (32- шакл). Ҳақиқатан ҳам $h = \frac{3}{\sqrt{2}}$,

$S_{PQR} = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$. 1949 йилда Хорват математиги

Д. Блануша Эратосфен галвирининг геометрик тасвирини берган (33- шакл).



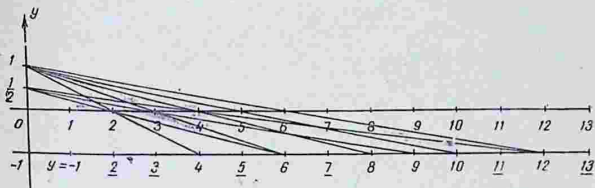
32- шакл.

Агар ордината ўқида $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$

$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ (I) нуқталарни, абсцисса ўқида эса $2, 3, 4, 5, 6, \dots$ (II) нуқталарни жойлаштириб, (I) группадаги исталган нуқтани (II) группа нуқталари билан кетма-кет бирлаштириб, $y = -1$ тўғри чизиги билан кесилган нуқталари аниқланса, у

нуқталарнинг абсциссалари фақат мураккаб сонларга тенг бўлади ва натижада $y = -1$ тўғри чизикда абсциссалари туб сонлардан иборат бўлган бутун нуқталаргина ўчирилмасдан қолади.

(I) группа нуқталарининг координаталари $(\frac{1}{m}, 0)$ билан, (II) группа нуқталарининг координаталари $(n+1, 0)$ билан ифодаланиб, улар орқали ўтувчи тўғри чизикларнинг тенгламаси $\frac{x}{n+1} + my = -1$ бўлади. Бу тўғри чизикнинг $y = -1$ билан кесишган нуқталарининг абсциссалари $x = (m+1)(n+1)$



33- шакл.

(m ва n — натурал сонлар) бўлади. x нинг қиймати мураккабдир. Агар $m = 1$; $n = 1, 2, 3, \dots$ бўлса, $y = -1$ тўғри чизикдаги $4, 6, 8, 10, \dots$ мураккаб натурал сонлари ўчирилади. $m = 2$; $n = 1, 2, 3, \dots$ бўлса, $y = -1$ тўғри чизикдаги $6, 9, 12, 15, \dots$ нуқталар, яъни яна мураккаб сонлар ўчирилади ва ҳоказо.

Шундай қилиб, $y = -1$ чизигида натурал сонлардан фақат тўб сонларгина ўчирилмасдан қолади.

Энди доира айланаси устида рационал нуқталарнинг жойлашиши масаласига тўхтаб ўтамиз.

Доира айланаси устида бирорта ҳам рационал нуқта мавжуд бўлмаган ва маркази панжара нуқтасида бўлган доиралар мавжуд.

Мисол. $x^2 + y^2 = 3$ доира айланаси устидаги (x, y) нуқтанинг координаталари рационал сон бўла олмайди. (Исбот қилинг.)

Шундай доиралар ҳам мавжудки, улар айланаси устида фақат 1 та ёки 2 та рационал нуқталар мавжуд.

Мисоллар. 1) $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$ доира айланаси устида фақат $(0, 0)$ рационал нуқта жойлашган.

2) $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 3$ доира айланасида эса $(1, 0)$ ва $(-1, 0)$ рационал нуқталаргина жойлашган.

Доира айланаси устида фақат 1 та, 2 та ёки чексиз рационал нуқталар жойлашиши мумкинлигини исботлаш мумкин.

1915 йилда Аннинг ва Эрдешлар қуйидаги ажойиб теоремани исботладилар:

Агар текисликда исталган икки нуқтаси орасидаги масофа натурал сон билан ифодаланадиган нуқталарнинг чексизтаси олинган бўлса, у ҳолда бундай нуқталарнинг ҳаммаси бир тўғри чизиқда ётиши керак.

Ҳар қандай натурал n сон учун, орасидаги масофа натурал сон билан ифодаланадиган ва бирор доира айланаси устида жойлашган n та панжара нуқталари мавжуд деган теорема ҳам исботланган.

Арифметика ва геометрия чегарасидаги масалаларга қуйидаги ажойиб масала ҳам киради.

Қирралари, ён ёқларининг диагоналлари ва ўзининг диагоналлари натурал сонлардан иборат бўлган параллелепипед мавжудми?

Бу масалани ҳал қилиш учун шундай (x, y, z) натурал сонлар мавжудлигини исботлаш керакки, $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$, $y^2 + z^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ қийматларининг ҳар бири натурал сон квадратига тенг бўлиши керак. Афсуски, бугунги кунгача бу саволга жавоб йўқ. Лекин $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$ ва $y^2 + z^2$ лар квадратли сон бўладиган x, y, z қийматларнинг чексиз кўплигини исботлаш мумкин.

Мисол.

$$\left. \begin{aligned} x &= 117, \\ y &= 44, \\ z &= 240, \end{aligned} \right\}$$

$$117^2 + 44^2 = 195^2,$$

$$117^2 + 240^2 = 267^2,$$

$$44^2 + 240^2 = 244^2.$$

Эрдеш томонидан қуйидаги гипотеза айtilган: ҳар қандай $n > 1$ натурал сон учун $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ тенгламани қаноатлантирувчи x, y, z натурал сонлар мавжуд.

Облат ва Розатилерларнинг кўрсатишича, Эрдеш гипотезаси ҳамма $1 < n < 141648$ учун ўринлидир.

Серпинский эса $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ тенгламани қаноатлантирувчи x, y, z натурал сонлари исталган натурал n сон учун мавжуд, деган гипотезани айтди. 1958 йилда Палама деган математик бу гипотезани ҳамма $1 < n \leq 922321$ лар учун текшириб тасдиқлади.

Яна қуйидаги масала қўйилган. Берилган квадратни ҳеч бир иккитаси бир-бирини тенг бўлмаган кичик квадратларга ажратиши мумкинми?

1930 йилда И. Крайчин деган математик бу масалага қуйидагича жавоб қилди. «Берилган квадратни, ҳеч қандай иккитаси бир-бирини тенг бўлмаган квадратларга бўлиши мумкин эмас».

1939 йилга келиб немис геометри Р. Шпраг қуйидаги кутилмаган теоремани исботлади:

Ҳар қандай квадратни 55 та такрорланмайдиган квадратга бўлиш мумкин.

55 сони кейинчалик камайтирилди.

1948 йилда англиялик математик Ф. Г. Вилькокс 55 сонини 24 гача камайитириш мумкинлигини исботлади.

Маълум сондаги квадратлардан тўғри бурчакли тўртбурчак тузиш мумкинлиги ҳақидаги масаласи билан ҳам кўп олимлар шуғулланиб келган.

1939 йилда математик Моран томонлари 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 га тенг бўлган квадратлардан тўғри бурчакли тўртбурчак тузиш мумкинлигини кўрсатган эди.

1940 йилга келиб томонлари 1, 2, 5, 7, 9, 16, 25, 33, 36 га тенг бўлган 9 та квадратдан тўғри бурчакли тўртбурчак тузиш мумкинлиги исботланди.

Кейинчалик 9 тадан кам бўлган ҳар хил квадратлардан тўғри бурчакли тўртбурчак тузиш мумкин эмаслиги исботланди.

9, 10, 11, 12 ва 13 та ҳар хил квадратлардан 585 хил йўл билан тўғри бурчакли тўртбурчакни ясаш мумкинлиги исботланди.

Математик А. Г. Стоном томони 1015 га тенг бўлган квадратни қуйидаги 28 та ҳар хил томонли квадратларга ажратиш мумкинлигини кўрсатди: 2, 18, 22, 37, 38, 39, 41, 43, 49, 67, 72, 80, 85, 103, 116, 154, 164, 175, 178, 192, 200, 207, 215, 222, 230, 247, 422, 593.

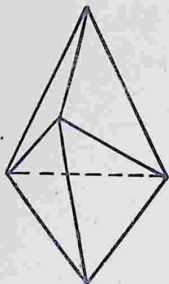
Ф. Г. А. Вилькокс эса томони 175 га тенг бўлган квадратни 24 та такрорланмайдиган

1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30,
31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81

томонли квадратларга бўлиш мумкинлигини кўрсатди. Шу билан бирга квадратлар сони ва уларнинг ўлчовларига нисбатан бундай бўлиш бугунги кунда маълум бўлганларидан энг «тежамли» эканлиги аниқланди.

Тўғри бурчакли параллелепипедни такрорланмайдиган кубларга бўлиш масаласи ҳам қўйилган эди. Ҳеч қандай параллелепипедни такрорланмайдиган кубларга бўлиш мумкин эмаслиги исботланган.

Қандай мунтазам кўпёқларни устма-уст қўйиш натижасида, қавариқ кўпёқ тузиш мумкин.



34- шакл.

Фақат иккита мунтазам пирамидадан (уларнинг тенг бўлиши шарт эмас) қавариқ бипирамидани ясаш мумкинлиги исботланган (34-шакл).

Лекин мунтазам октаэдрлардан қавариқ кўпёқлар ясаш мумкин эмас.

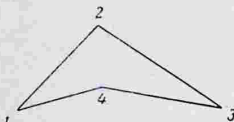
1914 йилда математик Мазуркевич куйидаги теоремани исботлади:

Текисликда шундай нуқталар тўплами мавжудки, текисликдаги тўғри чизикларнинг ҳар бирида улардан фақат иккитаси жойлашиши мумкин.

Венгриялик математик Эрдеш томонидан қўйилган ва ҳозиргача ҳал қилинмаган яна бир масалани кўрамиз.

Маълумки бир тўғри чизикда ётмайдиган 3 та нуқта қавариқ учбурчакнинг учларини ифодалайди. (Ҳар қандай учбурчак қавариқдир.) Учтаси бир тўғри чизикда ётмайдиган тўртта нуқта қавариқ тўртбурчакни ҳосил қилмаслиги мумкин (35-шакл).

Агар текисликдаги 5 та нуқтадан ҳеч қандай 3 таси бир тўғри чизикда ётмаган бўлса, улардан қавариқ тўрт бурчакнинг учларини ташкил этадиган тўрттасини танлаб олиш мумкинлигини исботлаш мумкин.



35- шакл.

Умуман, текисликда ҳеч қандай учтаси бир тўғри чизикда ётмайдиган 5 та, 6 та, 7 та, 8 та нуқталарни шундай жойлаштириш мумкинки, уларнинг ҳеч қандай 5 таси қавариқ бешбурчакнинг учларини

ташкил қилмайди. Лекин бундай нуқталарнинг сонини 9 та ёки ундан ортиқ бўлса, улардан камида қандайдир 5 таси қавариқ бешбурчакнинг учларини ташкил қилишини исботлаш мумкин.

Бундай масала қўйилади: текисликда ҳеч қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган нуқталарнинг камида нечтасидан қавариқ олтибурчакнинг учларини ташкил қилувчи 6 тасини танлаб олиш мумкин. Венгриялик математик Эрдеш бундай нуқталар энг камида 17 та бўлиши кераклигини исботлади.

Бу масалани умумийлаштириш мақсадида Эрдеш $3 = 2^1 + 1$; $5 = 2^2 + 1$; $9 = 2^3 + 1$; $17 = 2^4 + 1$ дан фойдаланиб, ҳозиргача исботланмаган қуйидаги гипотезани айтди:

Текисликда ҳеч қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган нуқталарнинг камида $2^{n-2} + 1$ таси мавжудки, улардан қавариқ n бурчакнинг учларини ташкил қилувчи n тасини танлаб олиш мумкин.

Мисол.

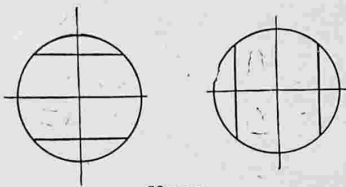
$n = 3$ бўлганда	бундай нуқталарнинг сони	$2^{3-2} + 1 = 3$,
$n = 4$		$2^{4-2} + 1 = 5$,
$n = 5$		$2^{5-2} + 1 = 9$,
$n = 6$		$2^{6-2} + 1 = 17$,
$n = 7$		$2^{7-2} + 1 = 33$.

Доира ичига чизилган мунтазам $2n$ бурчакнинг учларини кўпбурчак ичида ҳосил бўлган кесмалар бир-бири билан кесишмайдиган қилиб неча хил туташтириш мумкин?

Бундай туташтиришлар сони $F(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ га тенглигини исботлаш мумкин.

Мисол. $n = 1$ бўлганда $F(1) = \frac{1}{2} C_2^1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, яъни агар диаметрни мунтазам иккибурчак деб қаралса, туташтиришлар сони $F(1) = 1$ бўлади (36-шакл).

$$n = 2 \text{ бўлганда } F(2) = \frac{1}{1+2} C_4^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 2.$$



36-шакл.

$n = 3$ бўлганда $F(3) = \frac{1}{4} \cdot C_6^3 = 5$ ва ҳоказо. Бундан фойдаланиб, қуйидаги масалани ҳал қиламиз:

Мунтазам $(n+2)$ бурчакни унинг диагоналлари ёрдамида кўпбурчак ичида бир-бири билан кесишмайдиган учбурчакларга неча хил йўл билан ажратиш мумкин?

Бундай ажратишлар сони $\Phi(n) = \frac{1}{n+2} C_{2n}^n$ га тенглиги ҳисобланган.

Мисол. $n = 3$ бўлганда мунтазам $2 \cdot 3 = 6$ бурчакни

$$\Phi(3) = \frac{1}{3+1} C_6^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5$$

хил йўл билан бир-бири билан кесишмайдиган учбурчакларга ажратиш мумкин.

$n = 4$ бўлганда мунтазам $2 \cdot 4 = 8$ бурчакни $\Phi(4) = \frac{1}{4} C_8^4 = 14$ хил йўл билан учбурчакларга ажратиш мумкин ва ҳоказо.

Гаусс сонларининг арифметикаси

Буюк немис математиги К. Ф. Гаусс $z = a + bi$ кўринишдаги комплекс сонларнинг исталган a ва b рационал сонлар учун хусусий ҳолини кўриб, уларнинг арифметикасини яратди. Бундай кўринишдаги комплекс сонларга кейинчалик Гаусс сонлари деб ном берилди.

a ва b бутун рационал сонлар бўлганда $z = a + bi$ га бутун Гаусс сони деб аталади.

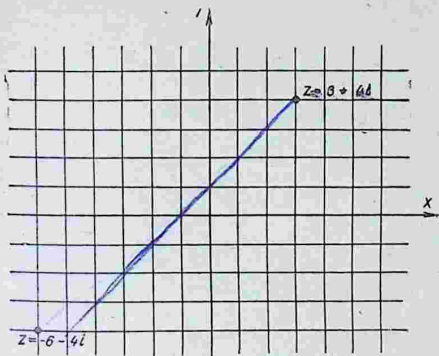
Мисол. $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = -3i$; $z_3 = 5$ лар бутун Гаусс сонларидир.

Шундай қилиб, ҳар қандай бутун рационал сон бутун Гаусс сони бўлади.

Агар текисликни координата ўқларига параллел бўлган тўғри чизиқлар билан томонни 1 бирликка тенг бўлган квадратларга бўлиб чиқилса, бундай квадратларнинг учлари бутун Гаусс сонларининг геометрик тасвирини беради (37-шакл).

$z = a + bi$ комплекс соннинг нормаси деб $N(z) = a^2 + b^2$ манфий бўлмаган сонга айтилади. Бутун Гаусс сонининг нормаси ҳам манфий бўлмаган бутун сон бўлади. Одатдагидек, комплекс соннинг нормаси берилган ва унга қўшма бўлган комплекс соннинг кўпайтмасига тенг бўлади:

$$z = a + bi; \bar{z} = a - bi; z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = N(z).$$



37- шакл.

Мисол. $N(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$; $z = 1 - 2i$;
 $\bar{z} = 1 + 2i$; $\bar{z} \cdot z = (1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5 = N(z)$. $z_1 =$
 $= a + bi$, $N(z_1) = a^2 + b^2$; $z_2 = c + di$, $N(z_2) = c^2 + d^2$; $z_1 \cdot z_2 =$
 $= (ac - bd) + (ad + bc)i$; $N(z_1 \cdot z_2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 =$
 $= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$.

Демак, кўпайтманинг модули кўпайтувчилар модулларининг кўпайтмасига тенг бўлади. Бу хоссага норманинг мультипликативлик хоссаси дейилади.

Мисол. $z_1 = 1 - i$, $N(z_1) = 2$; $z_2 = 2 + i$, $N(z_2) = 5$;
 $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(2 + i) = (2 + 1) + (1 - 2)i = 3 - i$; $N(z_1 \cdot z_2) = 10$.

z — бутун Гаусс сони бўлганда, $N(z)$ манфий бўлмаган бутун рационал сон бўлади. Лекин ҳар қандай манфий бўлмаган бутун C сон қандайдир бутун Гаусс сонининг нормаси бўлиши шарт эмас, чунки бунинг учун $C = N(z) = a^2 + b^2$ бўлиши керак. Ҳолбуки, ҳар қандай бутун сон бу шартни қаноатлантирмаслиги мумкин.

Мисоллар. 1) 7, 11, 15 лар ҳеч қандай бутун Гаусс сонларининг нормаси бўла олмайди, чунки улар икки бутун соннинг квадратлари йиғиндисига тенг эмас.

2) 5, 10, 13 лар эса $1 \pm 2i$, $1 \pm 3i$, $2 \pm 3i$ бутун Гаусс сонларининг нормаларидир.

Теорема. Тоқ t соннинг $t = x^2 + y^2$ бўлиши учун $t = 4k+1$ бўлиши керак.

$t = x^2 + y^2$ дан $x = 2n$ жуфт сон; $y = 2m+1$ тоқ сон келиб чиқади, демак $t = (2n)^2 + (2m+1)^2 = 4(n^2 + m^2 + 1) + 1 = 4k+1$.

Норма қуйидаги хоссаларга эга:

1) $N(\alpha) = 0$ бўлса, $\alpha = 0$ бўлади ва аксинча.

$\alpha = a+bi$; $N(\alpha) = a^2 + b^2 = 0$, демак $a = b = 0$, яъни $\alpha = 0$. Агар $\alpha = 0$ бўлса, $a = b = 0$ ва $N(\alpha) = 0$ бўлади.

2) $N\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{N(\alpha_1)}{N(\alpha_2)}$, бунда $\alpha_2 \neq 0$.

Бутун Гаусс сонлар арифметикаси бутун рационал сонлар арифметикасининг хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга.

Агар $\beta = \alpha \cdot \gamma$ тенглигида β , α , γ лар бутун Гаусс сонлари бўлса, бу ҳолда β — бутун Гаусс сони, γ ёки α — бутун Гаусс сонига бўлинади ва $\beta : \gamma$ ёки $\beta : \alpha$ каби ёзилади.

Мисол. $3-i = (2+i)(1-i)$, $(3-i):(2+i)$ ёки $(3-i):(1-i)$.

Бутун Гаусс сонларининг мультипликативлик хоссасидан $\beta : \gamma$ бўлганда $N(\beta) : N(\gamma)$ эканлиги келиб чиқади.

Мисол. $(3-i) : (1-i)$,

$$N(3-i) = 10, N(1-i) = 2, 10:2.$$

Изоҳ. $N(\beta) : N(\gamma)$ дан $\beta : \gamma$ келиб чиқмаслиги мумкин.

Мисол. $\beta = 1+2i$, $N(\beta) = 5$; $\gamma = 1-2i$, $N(\gamma) = 5$; $N(\beta) : N(\gamma)$. Лекин β сони γ га бўлинмайди. Чунки, агар $1+2i = (1-2i) \cdot (x-iy)$ деб олинса,

$$\begin{cases} x-2y = 1 \\ -(2x+y) = 2 \end{cases}$$
 системанинг илдизи x ва y лар бутун сон эмас.

Бутун рационал сонлар тўпламида $+1$ ва -1 лар тривиал (очиқдан-очиқ) маълум бўлувчилардир; бутун комплекс сонлар учун бундай тривиал бўлувчилар фақат ± 1 , $\pm i$ эканлигини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, ϵ — бутун Гаусс сони исталган бутун Гаусс сонининг бўлувчиси бўлсин. Жумладан $1:\epsilon$ (ϵ сони бу ҳолда 1 нинг бўлувчиси дейилади). $N(1) : N(\epsilon)$ ёки $1 : N(\epsilon)$. $\epsilon = x+iy$ бўлганда $N(\epsilon) = 1$ ни ҳисобга олинса, $x^2 + y^2 = 1$ бўлади.

Демак, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0, \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0, \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1, \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

бўлади ва бундан $\epsilon = x+iy = +1, -1, +i, -i$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, исталган z — бутун Гаусс сони учун $z = 1 \cdot z$; $z = -1 \cdot (-z)$; $z = i - (-iz)$; $z = -i (iz)$ бўлади.

Бутун Гаусс сонлари учун умумий бўлувчи, энг катта умумий бўлувчи, умумий бўлинувчи, энг кичик умумий бўлинувчи, ўзаро туб Гаусс бутун сонлари ва туб бутун сонлар тушунчалари мавжуддир.

Бутун Гаусс сонлар тўпламида бўлиш амали ҳамма вақт бажарилмайди.

Агар бутун Гаусс сони бутун Гаусс сонига бўлинмаса, бу ҳолда бутун рационал сонлар тўпламида ўринли бўлган, қолдиқли бўлиш теоремаси бажарилади.

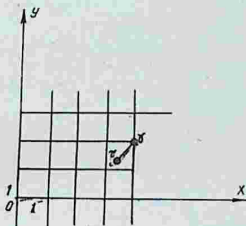
Теорема. Агар β — бутун Гаусс сони $\alpha \neq 0$ бутун Гаусс сонига бўлинмаса, бу ҳолда шундай γ ва δ бутун Гаусс сонлари мавжудки, $\beta = \alpha\gamma + \delta$ ўринли бўлиб, $N(\delta) < N(\alpha)$ бўлади.

Исбот.

Комплекс текисликнинг исталган τ нуқтаси учун шундай γ бутун комплекс нуқта топиладики, $N(\tau - \gamma) < 1$ бўлади (38- шакл). $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$

бўлсин. Бундай τ учун γ ни топамиз ва $\delta = \beta - \alpha\gamma$ деб оламиз. $\delta = \alpha(\frac{\beta}{\alpha} - \gamma) = \alpha(\tau - \gamma)$; $N(\delta) = N(\alpha) \cdot N(\tau - \gamma) < N(\alpha)$; чунки $N(\tau - \gamma) < 1$. Шундай қилиб, $\beta = \alpha\gamma + \delta$ бўлиб, $N(\delta) < N(\alpha)$ бўлади.

Изоҳ. Ҳар қандай $z = a + ib$ комплекс сонни $z = v + z_1$ шаклида ёзиш мумкин. Бунда v — бутун Гаусс сони, z_1 шундай комплекс сонки, $N(z_1) < N(z)$.



38- шакл.

$$\text{Мисол. } z = \frac{5}{2} - \frac{11}{3}i = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(3 + \frac{2}{3}\right)i = (2 - 3i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)i;$$

$$N(z) = \frac{25}{4} + \frac{121}{9} = 19\frac{25}{36};$$

$$N(z_1) = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{9 + 16}{36} = \frac{25}{36};$$

$$N(z_1) < N(z).$$

Энди қолдиқли бўлишга доир мисол келтираамиз:

$\beta = 11 + 2i$ ва $\alpha = 7 - i$ учун қолдиқли бўлиш бажарилсин.

$$\frac{11 + 2i}{7 - i} = \frac{(11 + 2i)(7 + i)}{50} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i = 1 + \frac{1}{2}(1 + i);$$

$$11 + 2i = (7 - i) \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + i) \cdot (7 - i) = (7 - i) \cdot 1 + (4 + 3i),$$

$$N(4 + 3i) = 25; N(7 - i) = 50, 25 < 50.$$

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

1) $17 - 3i$ ни $8 + 5i$ га бўлиш бажарилсин.

2) $14 + 3i$ ни $1 - 2i$ га бўлиш бажарилсин.

$\beta : \alpha$ ва $\gamma : \alpha$ бўлганда α сони N, β ва γ ларнинг умумий бўлувчиси дейилади. Албатта бу ҳолда $N(\beta) : N(\alpha), N(\gamma) : N(\alpha)$ бўлиши шарт.

Мисол. $\beta = 2 + 4i; \gamma = -1 + 3i$ лар учун $\alpha = 1 + i$ умумий бўлувчидир, чунки $\frac{\beta}{\alpha} = 3 + i; \frac{\gamma}{\alpha} = -1 + 2i; N(\beta) = 20; N(\gamma) = 10; N(\alpha) = 2$ ва $20 : 2, 10 : 2$ бўлади.

β ва γ — бутун Гаусс сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси деб, қуйидаги икки шартни бажарувчи δ бутун Гаусс сонига айтилади:

1) δ сони β ва γ ларнинг умумий бўлувчиси бўлиши керак.

2) δ сони β ва γ ларнинг ҳар қандай бошқа умумий бўлувчисига бўлиниши керак.

Изоҳ. $\delta = (\gamma, \beta)$ бўлганда $\epsilon \cdot \delta$ ҳам ($\epsilon = \pm 1, \pm i$) β ва γ ларнинг эна катта умумий бўлувчиси бўлади. Шунинг учун $\delta, -\delta, i\delta, -i\delta$ ларнинг исталгани β ва γ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси бўлади.

Энди берилган бутун Гаусс сонларининг энг катта умумий бўлувчисини топиш билан шуғулланамиз.

1) Агар $\beta : \gamma$ бўлса, $(\beta, \gamma) = \gamma$ бўлади.

Мисол. $\beta = 9 + 7i, \gamma = 2 + 3i$.

Бу ҳолда $((9 + 7i), (2 + 3i)) = 2 + 3i$.

2) Агар β — бутун Гаусс сони, γ — бутун Гаусс сонига бўлинмаса, у ҳолда (β, γ) Евклид алгоритми ёрдамида топилади.

β ва γ бутун Гаусс сонларининг энг катта умумий бўлувчиси Евклид алгоритми бўйича кетма-кет бўлишдаги энг охирги нормаси нолдан фарқли бўлган қолдиқдир:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \gamma\alpha + \delta \\ \gamma &= \delta\alpha_1 + \delta_1 \\ \delta &= \delta_1\alpha_2 + \delta_2 \\ &\dots \\ \delta_{k-1} &= \delta_k\alpha_{k+1} + \delta_{k+1} \\ \delta_k &= \delta_{k+1}\alpha_{k+2} \end{aligned} \right\} (*)$$

(*) $N(\alpha) > N(\delta) > N(\delta_1) > N(\delta_2) > \dots$ лар натурал сонлар бўлиб, борган сари камаяди. Шунинг учун $\delta_k = \delta_{k+1} \cdot \alpha_{k+2}$ ва $N(\delta_{k+2}) = 0$. $\delta_{k+1} = (\beta, \gamma)$ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун, λ сони β ва γ ларнинг қандайдир умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда $\delta_{k+1} : \lambda$ эканлигини кўрсатиш етарлидир.

(*) даги кетма-кет бўлиш схемасидан $\beta : \lambda, \gamma : \lambda$ бўлгани учун $\delta : \lambda$ бўлиши кўринади. Кейинги тенгликдан $\delta_1 : \lambda$, ундан кейингисидан $\delta_2 : \lambda$ ва ҳоказо $\delta_{R+1} : \lambda$ келиб чиқади. Энг катта умумий бўлувчининг таърифига асосан $(\beta, \gamma) = \delta_{k+1}$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Мисоллар. 1) $\beta = 11 - 27i, \gamma = 9 - 2i$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси топилсин.

Қолдиқли бўлиш алгоритмига асосан:

$$\begin{aligned} 11 - 27i &= (9 - 2i)(2 - 3i) + (-1 + 4i), \\ 9 - 2i &= (-1 + 4i) \cdot (-1 + 2i). \end{aligned}$$

Демак, $(\beta, \gamma) = -1 + 4i$ га тенг.

2) $\beta = 13 + i, \gamma = 5 - 10i$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси топилсин.

$$\begin{aligned} 13 + i &= (5 - 10i)i + (3 - 4i), \\ 5 - 10i &= (3 - 4i) \cdot 2 + (-1 - 2i), \\ 3 - 4i &= (-1 - 2i) \cdot (1 + 2i). \end{aligned}$$

Демак, $(\beta, \gamma) = -1 - 2i$.

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

1) $\beta = -13 - 21i, \gamma = 11 - 3i$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси топилсин.

2) $\beta = 35 + 4i, \gamma = 5 - 14i$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси топилсин.

Агар β ва γ бутун Гаусс сонларининг энг катта умумий бўлувчиси тривиал бўлувчилардан бири бўлса ($\epsilon = \pm 1, \pm i$), бундай бутун Гаусс сонларига ўзаро туб Гаусс сонлари дейилади.

Мисоллар. 1) $\beta = 1 - i$, $\gamma = 1 - 2i$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси i .

2) $\beta = 11 - 2i$, $\gamma = 2 + 3i$ ларнинг энг катта умумий бўлувчиси 1. (Ҳисоблаб кўринг.)

Агар α ва β_1 , α ва β_2 лар ўзаро туб бўлса, α ва $\beta_1 \cdot \beta_2$ ҳам ўзаро туб бўлади.

$\beta : \alpha$ ва $\beta : \gamma$ бўлганда β бутун Гаусс сони α ва γ бутун Гаусс сонларининг умумий бўлинувчиси дейилади.

$$\text{Мисоллар. } \left. \begin{array}{l} \beta = 7 - 9i, \\ \alpha = 2 - 3i, \\ \gamma = -1 + i \end{array} \right\} \text{ лар учун } \left. \begin{array}{l} \beta : \alpha = -1 + 3i, \\ \beta : \gamma = 1 - 8i, \end{array} \right.$$

демак, $7 + 9i$ сони $(2 - 3i)$ ва $(-1 + i)$ ларнинг умумий бўлинувчисиدير.

α ва γ бутун Гаусс сонларининг энг кичик умумий бўлинувчиси деб қуйидаги шартларни бажарувчи Δ бутун Гаусс сонига айтилади.

Агар μ бутун Гаусс сони α ва γ ларнинг исталган умумий бўлинувчиси бўлса, $\mu : \Delta$ бўлади.

$[\alpha, \gamma] = \Delta - \alpha$ ва γ ларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси.

Бутун Гаусс сонларининг энг кичик умумий бўлинувчиси бутун рационал сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш каби топилади.

Қуйидаги қоида ўринлидир:

$[\alpha, \gamma] = \frac{\alpha \cdot \gamma}{(\alpha, \gamma)}$, яъни α ва γ бутун Гаусс сонларининг энг кичик умумий бўлинувчиси α ва γ лар кўпайтмасини уларнинг энг катта умумий бўлувчисига бўлган нисбатига тенгдир.

Мисол. $\gamma = 11 - 27i$, $\alpha = 9 - 2i$ ларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси топилсин.

$$\begin{aligned} [\alpha, \gamma] &= \frac{(11 - 27i)(9 - 2i)}{(\alpha, \gamma)} = \frac{45 - 265i}{-1 + 4i} = -65 + 5i \\ -65 + 5i &= (11 - 27i) \cdot (-1 - 2i), \\ -65 + 5i &= (9 - 2i) \cdot (-7 - i). \end{aligned}$$

Энди туб Гаусс сони тушунчасига ўтамыз.

Агар $\pi \neq 0$ бутун Гаусс сонининг ҳар қандай $\pi = \tau \cdot \sigma$ ёйилмасида (τ ва σ — бутун Гаусс сонлари) τ ёки σ лардан бири 1 нинг бўлувчиси бўлса, у ҳолда π сонига туб Гаусс сони дейилади. (Бирининг бўлувчилари бўлган $\epsilon = \pm 1, \pm i$ туб Гаусс сони ҳисобланмайди.) Акс ҳолда (яъни τ ва σ ларнинг ҳеч бири бирининг бўлувчиси бўлмаса) π ни мураккаб Гаусс сони дейилади.

Туб Гаусс сонини бошқача ҳам таърифлаш мумкин:

Агар $\pi \neq 0$ учун $N(\pi) > 1$ бўлиб, π нинг ҳар қандай $\pi = \tau \cdot \sigma$ — бутун Гаусс сонлар кўпайтмаси шаклидаги ёйилмасида $N(\tau)$ ва $N(\sigma)$ лар $N(\pi)$ дан кичик бўла олмаса, у ҳолда у туб Гаусс сони, $N(\tau)$ ва $N(\sigma)$ лар $N(\pi)$ дан кичик бўлса, π мураккаб Гаусс сони дейилади.

Шундай қилиб, π туб Гаусс сони бўлганда у фақат $\epsilon = \pm 1, \pm i$ тривиал бўлувчиларга эга, π мураккаб Гаусс сони бўлганда у $\epsilon = \pm 1, \pm i$ тривиал бўлувчилардан ташқари, яна бошқа бутун Гаусс сони бўлувчиларига эга бўлади.

Шундай савол қўямиз:

Ҳар қандай туб рационал соннинг туб Гаусс сони бўлиши шартми?

Қуйидаги теоремалар ўринлидир:

1-теорема. 2 туб сони туб Гаусс сони эмас.

$2 = -i(1+i)^2$ эканлигини осонлик билан кўриш мумкин. $1+i$ туб Гаусс сонидир: $N(1+i) = 1^2 + 1^2 = 2$. Фараз қиламиз, $(1+i) : \delta$ бўлсин, $N(1+i) : N(\delta)$ ёки $2 : N(\delta)$. Демак, $N(\delta) = 1$ ва $\delta = 1$ ёки $N(\delta) = 2$, бу ҳолда $N\left(\frac{1+i}{\delta}\right) = \frac{2}{2} = 1$.

Шунинг учун $\frac{1+i}{\delta} = \pm 1$ ёки $\pm i$; $\frac{1+i}{\epsilon} = \delta$, яъни $1+i$ нинг фақат $\epsilon = \pm 1, \pm i$ бўлувчилари мавжуд. Шунинг учун $1+i$ туб Гаусс сонидир.

2-теорема. $p = 4k+3$ шаклдаги туб рационал сонлар туб Гаусс сонларидир.

$\delta = x+iy$ ва $p : \delta$ бўлсин. $N(p) : N(\delta)$ ёки $p^2 : N(\delta)$ демак, 1) $N(\delta) = 1$; 2) $N(\delta) = p^2$; 3) $N(\delta) = p$. $N(\delta) = 1$ бўлганда $\delta = 1$; $N(\delta) = p^2$ бўлганда $N\left(\frac{p}{\delta}\right) = \frac{N(p)}{N(\delta)} = \frac{p^2}{p^2} = 1$, $\frac{p}{\delta} = \epsilon$, яъни $\delta = \epsilon = \pm 1, \pm i$,

$N(\delta) = p$ бўлганда $x^2 + y^2 = p$ тоқ бўлгани учун $x = 2k_1$; $y = 2k_2 + 1$ ёки $4k_1^2 + (2k_2 + 1)^2 = p$, яъни $p = 4n + 1$ кўринишдаги сон. Лекин шартга кўра $p = 4n + 3$ кўринишдаги сондир. Шунинг учун $\delta = \epsilon$ ва p туб Гаусс сони бўлади.

$p = 4n + 1$ туб рационал сон туб Гаусс сони эмаслигини исботлаш мумкин (бунинг исботини келтирмаймиз).

Мисоллар. 1) $p = 13 = 4 \cdot 3 + 1$ туб рационал сон туб Гаусс сони эмас, ҳақиқатан $p = 13 = (3 - 2i) \cdot (3 + 2i) = 3^2 + 2^2$.

2) $p = 23 = 4 \cdot 5 + 3$ сони иккита бутун рационал сонларнинг квадратига ажралмайди, у туб Гаусс сонидир.

$N(p) = N(\pi) \cdot N(\gamma) = p^2$, демак, $N(\pi) = N(\gamma) = p$ ёки $N(\pi) = p^2$; $N(\gamma) = 1$, $N(\gamma) = 1$, $\gamma = 1$ нинг бўлувчисидир, яъни

$\gamma = \pm 1, \pm i$. Демак, $\pi = p$, $\pi = -p$, $\pi = -ip$, $\pi = i \cdot p$.

$N(\pi) = p = \pi \cdot \bar{\pi}$, $p = \pi \cdot \gamma$, $\bar{\pi} = \gamma$, демак, бу ҳолда p — туб рационал сон икки туб қўшма Гаусс сонларининг кўпайтмасидан иборат: $p = \pi \cdot \bar{\pi}$.

Мисоллар. 1) $p = 5 = (2 - i) \cdot (2 + i) = 4k + 1$ — туб рационал сон. Лекин 5 — туб Гаусс сони эмас.

2) $\pi_1 = 1 + 2i$ — туб Гаусс сонидир, чунки $N(\pi_1) = 5$ туб рационал сон.

3) $\pi_2 = 4 + 3i$ — туб Гаусс сонидир, чунки $N(\pi_2) = 25 = 5^2$ — туб рационал соннинг квадрати.

4) $\pi_3 = 9 + 7i$, $N(\pi_3) = 81 + 49 = 130 \neq p^2$, демак π_3 мураккаб Гаусс сони.

Энди бутун рационал сонлар учун ўринли бўлган асосий теореманинг бутун Гаусс сонлари учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Ҳар қандай $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \varepsilon$ бутун Гаусс сони туб Гаусс сонлар кўпайтмасига ёйилади ва бундай ёйилма биргина бўлади.

Исбот. 1) Агар α туб Гаусс сони бўлса, бу ҳолда теорема исбот қилинган бўлади. Агар α мураккаб бутун Гаусс сони бўлса, унинг шундай тривиал бўлмаган энг кичик нормали η_1 туб Гаусс бўлувчиси мавжуд бўладики, $\alpha = \eta_1 \cdot \alpha_1$ ва $N(\alpha_1) < N(\alpha)$ бўлади.

Агар α_1 туб Гаусс сони бўлса, бу ҳолда α иккита туб Гаусс сонлар кўпайтмасидан иборат бўлади. Агар α_1 мураккаб Гаусс сони бўлса, у ҳолда ҳам $\alpha_1 = \eta_2 \cdot \alpha_2$ бўлиб, η_2 туб Гаусс сони учун $N(\alpha_2) < N(\alpha_1)$ бўлади ва шунинг учун $\alpha = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha_2$ бўлади.

Шу тарзда давом эттирсак, $\alpha = \eta_1 \cdot \eta_2 \dots \eta_k$ бўлади. Бундан η_k ҳам туб Гаусс сони бўлади.

2) Энди теореманинг иккинчи қисmini исботлаймиз.

Фараз қиламиз, $\alpha = \theta_1 \cdot \theta_2 \dots \theta_e$ бўлсин, бунда θ_i туб Гаусс сони.

Демак: $\eta_1 \cdot \eta_2 \dots \eta_k = \theta_1 \cdot \theta_2 \dots \theta_e$. Бу тенгликнинг чап томони η_1 га бўлинади ва шунинг учун $(\theta_1 \cdot \theta_2 \dots \theta_e) \cdot \eta_1$ бўлиши керак.

Ҳамма θ ва η лар туб Гаусс сонлари бўлгани учун $\theta_i = \eta_i \cdot \epsilon$ бўлади. Натижада $\eta_1 \cdot \eta_2 \dots \eta_k = \theta_1 \cdot \theta_2 \dots \eta_1 \cdot \theta_2 \dots \eta_k \cdot \epsilon \dots \theta_e$ бўлади. Ҳар иккала томонни η_1 га қисқартирсак, юқоридаги мулоҳазалардан $k = l$ ва θ лар η лардан бирининг бўлувчилари билан фарқ қилиши мумкинлигини кўрамиз. Натижада α нинг икки хил ёйилмасига эмас, балки бу ёйилмалар фақат ϵ қийматлари билан фарқ қиладиган ҳолатга келамиз.

Теорема исбот қилинди.

$\alpha = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3$ ва $\alpha = -\pi_3 \cdot i\pi_2 \cdot i\pi_1$ ларни α нинг икки хил туб кўпайтувчилар ёйилмаси деб ҳисоблаш мумкин эмас, чунки $-\pi_3$, $i\pi_2$ ва $i\pi_1$ ларнинг исталгани π_1 , π_2 , π_3 ларнинг бири ва 1 нинг бўлувчилари кўпайтмасидан ҳосил бўлади.

Мисол. $\alpha = 11 - 3i$ сон мураккаб Гаусс сони бўлади, чунки

$$N(\alpha) = 11^2 + 3^2 = 121 + 9 = 130 \neq p^2,$$

$$\alpha = (1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (2 + 3i),$$

$$\alpha = (-2 - 3i) \cdot (1 - 2i) \cdot (1 + i).$$

Лекин бу ёйилмалар икки хил ёйилма эмас, чунки $-2 - 3i = -1 \cdot (2 + 3i)$, $2 - i = -i \cdot (1 - 2i)$, $1 - i = -i \cdot (1 + i)$.

Бундай Гаусс сонларига ассоциативланган сонлар дейилади. Умуман β ихтиёрий Гаусс сони бўлса, β , $-\beta$, $i\beta$, $-i\beta$ лар ассоциативланган Гаусс сонлари дейилади.

Энди берилган мураккаб Гаусс сонини туб Гаусс сонлар кўпайтмаси шаклида ифодалаш техникаси билан танишамиз.

Бунинг учун мураккаб Гаусс сонининг нормасини туб рационал кўпайтувчиларга ажратиб, ҳар бир бундай кўпайтувчига тегишли туб Гаусс сонини аниқлаш kifодидир.

Мисоллар. 1) $z = 7 + 9i$ лар туб кўпайтувчиларга ажратилсин. $N(z) = 49 + 81 = 130$, z — мураккаб Гаусс сони.

$130 = z \cdot \bar{z} = (7 - 9i) \cdot (7 + 9i) = 2 \cdot 5 \cdot 13$, $2 = -(1 + i)^2 = (1 - i) \times (1 + i)$, $5 = 4n + 1 = 1^2 + 2^2 = (1 - 2i) \cdot (1 + 2i) = (2 - i) \cdot (2 + i)$, $13 = 4n + 1 = 2^2 + 3^2 = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = (3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$. Демак, $(7 - 9i) \cdot (7 + 9i) = i(1 - i)^2 \cdot (2 - i) \cdot (2 + i) \cdot (3 - 2i) \times (3 + 2i)$. $1 - i$, $2 - i$, $2 + i$, $3 - 2i$, $3 + 2i$ кўпайтувчилар туб Гаусс сонлари, чунки уларнинг нормаси туб рационал сондир. $\frac{7 - 9i}{1 - i} = 8 - i$ бутун Гаусс сони, лекин $\frac{7 - 9i}{(1 - i)^2}$ бутун Гаусс сони эмас. Демак, $1 - i$ сони $7 - 9i$ нинг таркибига биринчи даражада кирган бўлади.

$8 - i$ эса $2 + i$ га бўлиниб, $2 - i$ га бўлинмайди: $\frac{8-i}{2+i} = 3 - 2i$. Демак, $7 - 9i = (1 - i) \cdot (2 + i) \cdot (3 - 2i)$, $7 + 9i = i(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 + 2i) = (1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (-2 + 3i)$.

2) $z = 5 \pm 11i$ кўпайтувчиларга ажратилсин.

$$N(z) = 25 + 121 = 146 = 2 \cdot 73$$

$146 = z \cdot \bar{z} = (5 + 11i) \cdot (5 - 11i) = 2 \cdot 73$, $2 = -i(1 + i)^2$, $73 = 4 \cdot 18 + 1 = 3^2 + 8^2 = (3 - 8i) \cdot (3 + 8i)$. $3 - 8i$ ва $3 + 8i$ ларнинг нормаси 73 — туб рационал бўлгани учун улар туб Гаусс сонларидир.

Шундай қилиб,

$$(5 + 11i)(5 - 11i) = i(1 - i)^2(3 + 8i)(3 - 8i),$$

$$\frac{5 + 11i}{1 - i} = -3 + 8i. \text{ Лекин } \frac{5 + 11i}{(1 - i)^2} \text{ бутун Гаусс сони эмас.}$$

Демак, $1 - i$ туб Гаусс сони $5 + 11i$ нинг таркибига биринчи даражада кирган бўлади.

Шундай қилиб,

$$5 + 11i = (1 - i) \cdot (-3 + 8i),$$

$$5 - 11i = (1 - i) \cdot (3 + 8i) \cdot (-i) = -(1 + i) \cdot (3 + 8i).$$

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

1) $7 \pm 11i$ ва $3 \pm 13i$ лар туб кўпайтувчиларга ажратилсин.

2) $15 \pm 3i$ туб кўпайтувчиларга ажратилсин.

Учлари $\pm 50 \pm 50i$ нуқталарда бўлган квадрат ичида

$$Q - Q_2 = Q_2 - Q_3 = Q_3 - Q_4 = \dots = Q_{s-1} - Q_s = (1 + i)^s$$

бўлган $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ туб Гаусс сонлари мавжудлиги исботланган. Бунда $s = 2, 3, 4, \dots$, $s = 2$ бўлганда $Q_1 - Q_2 = (1 + i) \cdot 2$ эгизак туб Гаусс сонлар жуфтлиги ҳосил бўлади.

Энди ҳар қандай сонлар арифметикасида арифметиканинг асосий теоремаси ўринли эмаслигини кўрсатамиз.

1) $1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, \dots$ (1)

$(4k - 1)$ шаклдаги чексиз прогрессиядаги исталган икки элемент кўпайтмаси яна $(4k + 1)$ шаклида бўлиб, шу кетма-кетликка тегишли бўлади, аммо йиғиндиси $(4k + 1)$ шаклдаги элемент бўлмайди.

Агар (1) кетма-кетликнинг элементи шу системада кўпайтувчиларга ажралмаса, уни псевдо туб сон ва шу системада кўпайтувчиларга ажралса, уни мураккаб сон деб атаймиз.

$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, \dots$ лар псевдо туб сон, $25 = 5^2$ эса мураккаб сон, чунки унинг каноник ёйилмасига (1) даги 5 сони киради.

(1) кетма-кетликдаги сонлар тўпламида арифметиканинг асосий теоремаси ўринли эмас:

$693 = 4 \cdot 173 + 1 = 21 \cdot 33 = 9 \cdot 77$ — икки хил кўпайтувчиларга ажралди, у кўпайтувчилар псевдо туб сонлардир.

2) $z = x + i\sqrt{-5y}$ шаклдаги комплекс сонлар тўпламида (x, y — бутун рационал сонлар) қўшиш, айириш ва кўпайтириш амаллари ўринлидир.

Ҳамма бутун рационал сонлар тўплами $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламининг хусусий ҳолидир ($y = 0$). Бутун рационал сонлар тўпламидагидек, бундай сонлар тўпламида норма, бўлиш тушунчаси, бирлик, мураккаб, туб сон тушунчалари бир хилдир. Лекин $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламида фақат ± 1 тривиал бўлувчилар мавжуд: $x^2 + 5y^2 = 1$ тенглама фақат $x = 1$ ва $x = -1$ $y = 0$ } бутун ечимларга эга ва шунинг учун $\epsilon = x + i\sqrt{5y} = -1$ бўлади.

2, 3, $1 + i\sqrt{5}$ сонлар $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламидаги туб сонлар, агар δ сонини 2 нинг бўлувчиси деб олинса, яъни $2 = \delta \cdot \delta_1$; $\delta = \alpha + i\beta\sqrt{5}$, $N(2) = 4 = N(\delta) \cdot N(\delta_1)$ бўлса, $4 : N(\delta)$ бўлади. Бу ҳолда 1) $N(\delta) = 2$, 2) $N(\delta) = 4$, 3) $N(\delta) = 1$ бўлиши керак.

1) $N(\delta) = 2$, $\alpha^2 + 5\beta^2 = 2$ тенгламанинг α ва β бутун ечимлари мавжуд эмас;

2) $N(\delta) = 4$, $N(\frac{2}{\delta}) = \frac{N(2)}{N(\delta)} = \frac{4}{4} = 1$. Бу ҳолда δ ва 2 лар ассоциацияланувчи сонлар бўлади;

3) $N(\delta) = 1$ бўлса, $\delta = \pm 1$ бўлади. Демак, 2 сон $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламидаги туб сон эканлиги аниқланди, худди шу йўл билан 3 нинг ҳам шу сонлар тўпламида туб сон эканлиги аниқланади.

$1 + i\sqrt{5}$ соннинг ҳам $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламидаги туб сон эканлигини кўрсатамиз.

$(1 + i\sqrt{5}) : \delta$ бўлсин. $N(1 + i\sqrt{5}) = 6 : N(\delta)$. Демак, 1) $N(\delta) = 3$, 2) $N(\delta) = 2$, 3) $N(\delta) = 6$, 4) $N(\delta) = 1$. Агар $\delta = \alpha + i\beta\sqrt{5}$ шаклдаги сон бўлса, $N(\delta) = \alpha^2 + 5\beta^2$ бўлади.

$\alpha^2 + 5\beta^2 = 3$, $\alpha^2 + 5\beta^2 = 2$ тенгламалар α ва β бутун ечимларга эга эмас. Агар $N(\delta) = 6$ бўлса, $N(\frac{1 + i\sqrt{5}}{\delta}) = \frac{6}{6} = 1$ бўлиб, $1 + i\sqrt{5}$ ва δ ассоциацияланувчи сонлар бўлади. $N(\delta) = 1$ бўлганда $\delta = \pm 1$ бўлади. Шундай қилиб,

$1 \pm i\sqrt{5}$ сонлар $\delta = \pm 1$ тривиал бўлувчилардан ташқари бўлувчига эса эмас, улар $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламидаги туб сонлардир.

$x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламида шу шаклдаги u ва v сонларнинг $u \cdot v$ кўпайтмаси π туб Гаусс сонига бўлиниб, уларнинг ҳар бири туб u ва v сонларига бўлинмаслиги ҳам мумкин. (Бу аҳвол рационал сонлар тўпламида бўлиши мумкин эмас.)

Мисол. $2 \cdot 3 = 6 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$; $2 \cdot 3 = 6$ сони $1 \pm i\sqrt{5}$ ларга бўлинади (уларни туб сон эканлигини юқорида кўрсатдик). Лекин 2 ва 3 сонлари $1 \pm i\sqrt{5}$ сонларига бўлинмайди:

$$\frac{2}{1 \pm i\sqrt{5}} = \frac{2(1 \pm i\sqrt{5})}{6} = \frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Бу сонлар $x + iy\sqrt{5}$ шаклдаги сонлар эмас, чунки $\frac{1}{3}$ ва $\frac{\sqrt{5}}{3}$ лар бутун рационал сонлар эмас.

Шундай қилиб, $6 = 6 + 0 \cdot i\sqrt{5}$ шаклдаги сон $6 = 2 \cdot 3$ ва $6 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5})$ шаклдаги икки хил туб кўпайтувчиларга ажралади.

Бундан $x + iy\sqrt{5}$ сонлар тўпламида арифметиканинг асосий теоремаси ўринли эмаслиги келиб чиқади.

АЙРИМ ҚИЗИҚАРЛИ СОНЛАР

Пифагор ўзининг шогирдлари билан ўтказиладиган учрашувларнинг бирида: «Ҳар қандай соннинг ўзига яраша ажойиблиги бор», — деб айтган экан. Шу учрашувга қатнашган Пифагорнинг шогирдларидан бири: «Бўлмаса айтингчи, 17 туб соннинг қандай ажойиблиги бор?» — деб сўраган. Пифагор қуйидагича жавоб берган: «17 жуда ҳам ажойиб сондир. У иккита квадратларнинг ва иккита тўртинчи даражаларнинг йиғиндисидан иборат:

$$17 = 1^2 + 4^2 = 1^4 + 2^4.$$

17 дан олдин келган 16 нинг ва кейин келган 18 нинг ҳам ажойиб хоссалари бор: 16 тўла квадрат ва тўла тўртинчи даражалардан иборат бўлса, 18 эса икки марта тўла квадрат бўлиши билан бирликда периметри ва юзи

18 кв. бирликка тенг бўлган тўғри тўртбурчак мавжуддир (39- шакл). 18 дан ташқари бошқа сонлар бундай хоссага эга эмас». Албатта бунда Пифагор фақат натурал сонларнигина кўзда тутган.

Биз бунда айрим сонларнинг ажойиб хоссаларини баён қиламиз.

1) Агар биринчи ҳади ва айирмаси 15873 га тенг бўлган тўққиз ҳадли прогрессиянинг ҳамма ҳадларини кетма-кет 7 сонига кўпайтирилса, қуйидаги сонлар ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{ll} 15873 \cdot 7 = 111111, & 95238 \cdot 7 = 666666, \\ 31746 \cdot 7 = 222222, & 111111 \cdot 7 = 777777, \\ 47619 \cdot 7 = 333333, & 126984 \cdot 7 = 888888, \\ 63492 \cdot 7 = 444444, & 142857 \cdot 7 = 999999, \\ 79365 \cdot 7 = 555555 \end{array}$$

2) Агар $7^2 = 49$ соннинг рақамлари орасига 48 ёзилиб, қуйидаги йўл билан сонлар тузилса, натижада ҳамма вақт квадратли сон ҳосил бўлади:

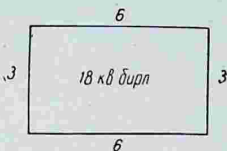
$$\begin{array}{l} 49 = 7^2, \\ \underline{44}89 = 67^2, \\ \underline{4448}89 = 667^2, \\ \underline{444488}89 = 6667^2 \text{ ва ҳ. к.} \end{array}$$

3) 9 сони билан боғлиқ бўлган ажойиботлар ҳам мавжуд:

$$\begin{array}{l} 9 \cdot 7 = 63, \\ 99 \cdot 77 = 7623, \\ 999 \cdot 777 = 776223, \\ 9999 \cdot 7777 = 77762223 \text{ ва ҳ. к.} \end{array}$$

Бу қийматларнинг учинчисидан бошлаб ҳар бир кейинги кўпайтмани ҳосил қилиш учун олдинги кўпайтмадаги биринчи 7 олдига яна 7 ёзиб, 3 олдига эса 2 ни ёзиш кифоядир.

4) 9 сони билан боғлиқ бўлган қуйидаги сонли пирамидалар мавжуд:



39- шакл.

$$\begin{aligned}
1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\
12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\
123 \cdot 9 + 4 &= 1111 \\
1234 \cdot 9 + 5 &= 11111 \\
12345 \cdot 9 + 6 &= 111111 \\
123456 \cdot 9 + 7 &= 1111111 \\
1234567 \cdot 9 + 8 &= 11111111 \\
12345678 \cdot 9 + 9 &= 111111111
\end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned}
9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\
98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\
987 \cdot 9 + 5 &= 8888 \\
9876 \cdot 9 + 4 &= 88888 \\
98765 \cdot 9 + 3 &= 888888 \\
987654 \cdot 9 + 2 &= 8888888 \\
9876543 \cdot 9 + 1 &= 88888888 \\
98765432 \cdot 9 + 0 &= 888888888 \\
987654321 \cdot 9 - 1 &= 8888888888
\end{aligned}$$

5) $9^2 = 81$ дан фойдаланиб, исталганча 9 лардан иборат бўлган соннинг квадрaтини ёзиш мумкин: 81 сонидaги 8 олдига 9 лар сонидан 1 та кам 9 ва 1 олдидa ўшaнчa ноль ёзиш кифоядир:

$$\begin{aligned}
9^2 &= 81 \\
99^2 &= 9801 \\
999999^2 &= 999998000001
\end{aligned}$$

6) Фақат бирлардан иборат бўлган сонларнинг квадратларини қуйидаги пирамидал жадвал ёрдамида ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
11^2 &= 121 \\
111^2 &= 12321 \\
1111^2 &= 1234321 \\
11111^2 &= 123454321 \\
111111^2 &= 12345654321 \\
1111111^2 &= 1234567654321 \\
11111111^2 &= 123456787654321 \\
111111111^2 &= 12345678987654321
\end{aligned}$$

7) Агар 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 арифметик прогрессиянинг ҳамма ҳадларини мос равишда 37 га купайтирилса, 111, 222, 333, 444, ... , 999 ажойиб арифметик прогрессия ҳосил бўлади.

Агар 37 ни ўзининг рақамлари йиғиндисига кўпайтирилса, рақамларининг кублар йиғиндисига ҳосил бўлади ва агар 37 ни рақамлар кўпайтмасига орттирилса, рақамларининг квадратлар йиғиндисига ҳосил бўлади:

$$37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3,$$

$$37 + 3 \cdot 7 = 3^2 + 7^2.$$

Ҳамда $37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$.

Гори шаҳридаги ҳаваскор математик А. Хабалашвили ўз рақамларининг кублари йиғиндисига тенг бўлган қуйидаги уч хонали сонлар мавжудлигини ва рақамлари йиғиндисига билан рақамлари кўпайтмасининг кўпайтмасига тенг бўлган иккита уч хонали сонлар мавжудлигини кўрсатди:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3,$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3,$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3,$$

$$135 = (1 + 3 + 5) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$144 = (1 + 4 + 4) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4.$$

(Яна шундай сонлар борми?)

Москвалик математик В. Ульянов:

$$1233 = 12^2 + 33^2, \quad 234256 = (2 + 3 + 4 + 2 + 5 + 6)^2,$$

$$8833 = 88^2 + 33^2, \quad 52521875 = (5 + 2 + 5 + 2 + 1 + 8 + 7 + 5)^2$$

$$81 = (8 + 1)^2,$$

сонлар мавжудлигини кўрсатди.

Инженер Киберов (Харьков шаҳри)

$$2427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4,$$

$$1306 = 1^1 + 3^2 + 0^3 + 6^4,$$

$$1676 = 1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4$$

тенгликларнинг ўринлилигини кўрсатди.

Шундай натурал сонлар жуфтлиги мавжудки, уларнинг йиғиндисига ва кўпайтмасига фақат рақамларининг жойланиш тартиби билар фарқ қилади:

$$\begin{array}{ll} 9 + 9 = 18 & \text{ва} \quad 9 \cdot 9 = 81, \\ 24 + 3 = 27 & \text{ва} \quad 24 \cdot 3 = 72, \end{array}$$

$47+2=49$	ва	$47 \cdot 2=94,$
$263+2=265$	ва	$263 \cdot 2=526,$
$497+2=499$	ва	$497 \cdot 2=994.$

Шундай икки хонали сонлар жуфтлиги мавжудки, уларнинг кўпайтмаси қуйидаги ажойиб хоссага эга (уларнинг ҳосил бўлишига эътибор беринг):

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24,$	$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36,$
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36,$	$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48,$
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48,$	$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39,$
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26,$	$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48,$
$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69,$	$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69.$

Шундай хоссали икки хонали сонларнинг яна 4 та жуфтлиги мавжуд. Уларни топинг,

234256 сони қуйидаги ажойиб хоссаларга эга:

1) $234256 = (2 + 3 + 4 + 2 + 5 + 6)^4,$

2) $23 + 42 + 56 = 121 = 11^2.$

3) $65 + 24 + 32 = 121 = 11^2.$

Бундай хоссага эга бўлган бошқа сонлар маълум эмас. 1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 18, 21, 22, 23 сонларни 6 тадан қилиб икки бўлакка ажратилса, ҳар бир бўлакдаги сонларнинг биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва бешинчи даражалари йиғиндилари тенгдир:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22 = 72,$$

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2 = 1288,$$

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$

$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$

$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Яна шундай хоссали сонлар мавжудми?

$$(m-11)^n + (m-6)^n + (m-5)^n + (m+5)^n + (m+6)^n + (m+11)^n = (m-10)^n + (m-9)^n + (m-1)^n + (m+1)^n +$$

$+(m+9)^n + (m+10)^n$ дан исталган m ва $n = 1, 2, 3, 4, 5$ лар учун чексиз шундай сонларни топиш мумкинлиги аниқланган.

$a^n + (a+4b+c)^n + (a+b+2c)^n + (a+9b+4c)^n + (a+6b+5c)^n + (a+10b+6c)^n = (a+b)^n + (a+c)^n + (a+6b+2c)^n + (a+4b+4c)^n + (a+10b+5c)^n + (a+9b+6c)^n$ айният ҳам a, b, c ларнинг исталган бутун қийматлари ва $n = 1, 2, 3, 4, 5$ лар учун юқорида келтирилган хоссали сонлар ҳосил қилади.

Қуйидаги формула ёрдамида жуда ажойиб сонлар туркуми ҳосил бўлади:

Агар $x_1, x_2, \dots, x_n$ ва $y_1, y_2, \dots, y_n$ бутун сонлар учун $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ ўринли бўлса, $(10x_1 + y_1)^2 + (10x_2 + y_2)^2 + \dots + (10x_n + y_n)^2 = (10y_n + x_n)^2 + (10y_{n-1} + x_{n-1})^2 + \dots + (10y_1 + x_1)^2$ бўлади. Бу тенгликни қавсларни очиш йўли билан исботлаш мумкин.

Мисол. $4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2$ дан фойдаланиб, $48^2 + 53^2 + 62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2$, $43^2 + 52^2 + 68^2 = 86^2 + 25^2 + 34^2$ ларни ҳосил қилиш мумкин.

Бу икки хонали сонлар учун келтирилган тенгликлар ажойиб хоссага эга: ўнг томондаги сонлар чап томондагиларнинг рақамларини ўрин алмаштиришдан ҳосил бўлган ва улар тенглик ишорасига нисбатан симметрик жойлашган.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ва 8 сонлардан юқоридагига ўхшаган сонлар группаларини ҳосил қилишга уриниб кўринг-чи?

8) Энди қуйидагиларни кўрамиз.

Маълумки, агар оддий қисқармас касрнинг махражи 10 билан ўзаро туб бўлса, бундай оддий касрлар соф даврий касрга айланади.

Мисол. $\frac{1}{7} = 0, (142857)$.

Бунда давр узунлиги (даврдаги рақамлар сони) 6 га тенг. Махражи 7 га тенг бўлган тўғри қисқармас касрлар сони 6 га тенг.

Қолган тўғри оддий касрлар $\frac{1}{7}$ нинг давр узунлигидан қуйидагича ҳосил бўлади:

$$\frac{1}{7} = 0, (142857), \quad \frac{6}{7} = 0, (857142),$$

$$\frac{3}{7} = 0,(428571), \quad \frac{4}{7} = 0,(571428),$$

$$\frac{2}{7} = 0,(285714), \quad \frac{5}{7} = 0,(714285).$$

Ҳар бир кейинги касрнинг даврини топиш учун олдинги каср давридаги биринчи рақамни охирига ўтказиш кифоя.

$\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ касрларнинг суратлари бирни 7 га бўлгандаги кетма-кет қолдиқлардан ҳосил бўлган. Иккинчи мисол сифатида махражи 13 га тенг бўлган ҳамма тўғри касрларни кўриб чиқамиз. Бундай касрлар 12 та. Лекин уларнинг давр узунлиги 6 га тенгдир. Шунинг учун улар $12:6 = 2$ гурппага бўлинади.

I гурппа касрларга

$$\frac{2}{13} = 0,(153846), \quad \frac{11}{13} = 0,(846153),$$

$$\frac{7}{13} = 0,(538461), \quad \frac{6}{13} = 0,(461538),$$

$$\frac{5}{13} = 0,(384615), \quad \frac{8}{13} = 0,(615384)$$

касрлар киради. Қолганлари эса иккинчи гурппага киради. Уларнинг ҳам давр узунлиги 6 га тенг бўлиб, юқоридагилардан бошқача бўлади.

Шундай қилиб, II гурппа касрларга

$$\frac{1}{13} = 0,(076923), \quad \frac{12}{13} = 0,(923076),$$

$$\frac{10}{13} = 0,(769230), \quad \frac{3}{13} = 0,(230769),$$

$$\frac{9}{13} = 0,(692307), \quad \frac{4}{13} = 0,(307692)$$

касрлар киради.

Махражи 11 га тенг бўлган тўғри касрлар 5 гурппага бўлиниб, уларнинг давр узунлиги 2 га тенг эканлигини ҳисоблаб кўриш мумкин:

$$\begin{array}{lll} \text{I} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{11} = 0,(09), \\ \frac{10}{11} = 0,(90); \end{array} \right. & \text{II} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{11} = 0,(18), \\ \frac{9}{10} = 0,(81); \end{array} \right. & \text{III} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{11} = 0,(27), \\ \frac{8}{11} = 0,(72); \end{array} \right. \\ \text{IV} \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{11} = 0,(36), \\ \frac{7}{10} = 0,(63); \end{array} \right. & \text{V} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{11} = 0,(45); \\ \frac{6}{11} = 0,(54). \end{array} \right. & \end{array}$$

Махражи 61 га тенг бўлган оддий касрларнинг давр узунлиги қанчага тенг?

Ҳисоблаб кўриб, бундай касрларнинг давр узунлиги 60 га тенглигини топиш мумкин. Умуман, $\frac{1}{p}$ шаклдаги оддий касрнинг (p — туб сон) ўнли касрга айлантиришдаги давр узунлиги ($p - 1$) нинг бўлувчиси бўлади.

Яна бир неча мисол келтирамиз:

$\frac{1}{29} = 0, (034482758620\ 7896551724317931)$. $\frac{k}{1913}$ нинг давр узунлиги 1912 га тенглигини кўрсатиш мумкин ($k < 1913$ натурал сон):

$$\frac{1}{1913} = 0, (0005227391531... 9012023),$$

$$\frac{1912}{1913} = 0, (9994772608468... 0987976).$$

9) Агар 1 дан 9 гача бўлган кетма-кет сонлардан ҳосил бўлган сонни (8 дан ташқари) 9, 18, 27, 36, 45, 63, 72, 81 арифметик прогрессиянинг ҳадларига кетма-кет кўпайтирсак, натижада 9 та бир хил рақамлардан иборат бўлган сонлар ҳосил бўлади:

$$12345679 \cdot 9 = 111111111$$

$$12345679 \cdot 18 = 222222222$$

$$12345679 \cdot 27 = 333333333$$

$$12345679 \cdot 36 = 444444444$$

$$12345679 \cdot 45 = 555555555$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$12345679 \cdot 81 = 999999999$$

10) Қуйидаги сонли пирамида ҳам мавжуд:

$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$

$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$

$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$

$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$

$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$

$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$

$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

Қуйидаги ажойиб тескари кўпайтмалар ҳам мавжуд:

$$\begin{array}{ll} 12 \cdot 12 = 144 & \text{ва} \quad 21 \cdot 21 = 441, \\ 13 \cdot 13 = 169 & \text{ва} \quad 31 \cdot 31 = 961, \\ 102 \cdot 102 = 10404 & \text{ва} \quad 201 \cdot 201 = 40401, \\ 103 \cdot 103 = 10609 & \text{ва} \quad 301 \cdot 301 = 90601, \\ 112 \cdot 112 = 12544 & \text{ва} \quad 211 \cdot 211 = 44521, \\ 122 \cdot 122 = 14884 & \text{ва} \quad 221 \cdot 221 = 48841. \end{array}$$

Икки хонали ҳар хил сонлардан иборат бўлган тескари кўпайтмалар қуйидаги тенгликдан ҳосил бўлади:

$$(10x + y) \cdot (10a + b) = (10y + x) \cdot (10b + a)$$

(бунда $ax = by$ бўлиши шарт).

Бундай тескари кўпайтмалардан фақат 14 жуфтигина мавжуд.

$$\begin{array}{ll} 12 \cdot 42 = 21 \cdot 24, & 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26, \\ 12 \cdot 63 = 21 \cdot 36, & 13 \cdot 93 = 31 \cdot 39, \\ 12 \cdot 84 = 21 \cdot 48, & 14 \cdot 82 = 41 \cdot 28, \\ 23 \cdot 64 = 32 \cdot 46, & 26 \cdot 93 = 62 \cdot 39, \\ 23 \cdot 96 = 32 \cdot 69, & 34 \cdot 86 = 43 \cdot 68, \\ 24 \cdot 63 = 42 \cdot 36, & 36 \cdot 84 = 63 \cdot 48, \\ 24 \cdot 84 = 42 \cdot 48, & 46 \cdot 96 = 64 \cdot 69. \end{array}$$

$(10^n x + y) \cdot (10^n a + b) = (10^n y + x) \cdot (10^n b + a)$ тенгликдан $ax = by$ шартга асосан кўп хонали тескари кўпайтмаларни ҳосил қилиш мумкин,

Мисол. $12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$ дан

$$102 \cdot 402 = 201 \cdot 204,$$

$$1002 \cdot 4002 = 2001 \cdot 2004 \text{ ларни ҳосил қиламиз.}$$

$(100a + 10b + c) \cdot (100x + 10y + z) = (100c + 10b + a) \times$
 $\times (100z + 10y + x)$ тенгликдан, $ax = cz$ ва $y = b \cdot \frac{x-z}{c-a}$
 шартларга асосан, уч хонали тескари кўпайтмалар ҳосил бўлади.

$$\begin{array}{l} 213 \cdot 936 = 639 \cdot 312, \\ 223 \cdot 966 = 669 \cdot 322, \\ 233 \cdot 996 = 699 \cdot 332, \\ 963 \cdot 246 = 642 \cdot 369, \\ 993 \cdot 266 = 662 \cdot 399. \end{array}$$

Қуйидаги кўп хонали тескари кўпайтмалар ҳам мавжуд:

$$4626 \cdot 9396 = 6939 \cdot 6264,$$

$$2246 \cdot 9633 = 3369 \cdot 6422,$$

$$43421 \cdot 24868 = 86842 \cdot 12434.$$

Москвалик ҳаваскор математик А. Беспрозванный тескари квадратларнинг 4 жуфтини топган:

$$13^2 = 169.$$

$$31^2 = 961,$$

$$113^2 = 12769,$$

$$311^2 = 96721,$$

$$1113^2 = 1238769,$$

$$3111^2 = 9678321,$$

$$11113^2 = 123498769,$$

$$31111^2 = 967894321,$$

Юқорида келтирилган тескари квадратлар 3 рақами билан бошланади ёки 3 рақами билан тугалланади. Бошқа рақамлари эса бирлардан иборат.

2 рақами билан бошланиб, 2 рақами билан тугалландиган ва бошқа рақамлари бирлардан иборат бўлган тескари квадратларнинг 12 жуфти топилган; уларнинг энг кичик жуфти $12^2 = 144$ ва $21^2 = 441$ бўлиб, энг катта жуфти эса $1111112^2 = 1234569876544$ ва $2111111^2 = 4456789654321$ лар эканлиги ҳисобланган.

Кўп хонали тескари квадратларнинг қуйидагилари топилган:

$$122^2 = 14884,$$

$$221^2 = 48841,$$

$$1122^2 = 1258884,$$

$$2211^2 = 4888521,$$

$$1212^2 = 1468944,$$

$$2121^2 = 4498641,$$

$$11122^2 = 123698884,$$

$$22111^2 = 488896321.$$

Шундай кўпайтмалар мавжудки, унда 0 дан 9 гача бўлган ҳамма бир хонали сонлар қатнашади.

$$2 \cdot 3485 = 1 \cdot 6970,$$

$$8 \cdot 1735 = 20 \cdot 694,$$

$$4 \cdot 1957 = 38 \cdot 206,$$

$$3 \cdot 4158 = 6 \cdot 2079,$$

$$7 \cdot 1406 = 38 \cdot 259,$$

$$6 \cdot 1485 = 30 \cdot 297,$$

$$2 \cdot 4589 = 13 \cdot 706,$$

$$9 \cdot 2754 = 81 \cdot 306,$$

$$5 \cdot 2968 = 40 \cdot 371,$$

Қуйидаги тескари тенглик ҳам мавжуд:

$$96 - 76 - 54 + 32 + 1 = 1 + 23 - 45 - 67 + 89.$$

$\sqrt{321489} = 567$ ва $\sqrt{729316} = 854$ тенгликларда 1 дан 9 гача ҳамма рақамлар қатнашган.

11) 1948 йилда француз математикларидан бири Америкада чиқадиган математик журналларнинг бирига хат ёзиб, қуйидаги масалани баён қилган эди: Шундай натурал n сон топилсинки, унинг учун $n^3 = 19\,000\,458\,461\,599\,776\,807\,277\,716\,631$ бўлиб, бу 29 хонали соннинг рақамларини бошидан охирига биттадан ўтказиш натижасида ҳосил қилинадиган 28 та 29 хонали сонларнинг ҳаммаси ҳам n га бўлинсин.

Қўп изланишлар натижасида $n = 2\,668\,423\,111$ эканлиги аниқланди.

12) Тошкентлик студент Н. Н. Головин ўзининг рақамларининг факториаллари йиғиндисига тенг бўлган иккита соннинг мавжудлигини кўрсатди:

$$1) 145 = 1! + 4! + 5!,$$

$$2) 40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$$

$0! = 1$ деб қабул қилинади. ($1! = 1$ ва $2! = 2$ бу ҳисобга кирмайди.)

13) 376 ва 625 уч хонали сонларнинг квадрати, куби, тўртинчи даражалари ва умуман исталган n - даражалари шу сонлар билан тугалланади:

$$376^2 = 141376,$$

$$625^2 = 390625,$$

$$376^3 = 53157376,$$

$$625^3 = 244140625.$$

Қуйидаги теорема ҳам исботланган:

Агар қандайдир n хонали соннинг квадрати у соннинг биринчи даражаси билан тугалланса, у ҳолда унинг исталган даражаси ҳам шу сон билан тугалланади. (Исботланг.)

Мисол. $76^2 = 5776$, шунинг учун 76^k ҳам 76 билан тугалланади.

14) 2 билан тугалланадиган шундай сонлар мавжудки, агар охиридаги 2 ни соннинг бошига ўтказиб ёзилса, аввалгисидан 2 марта ортиқ бўлган сон ҳосил бўлади. Бу соннинг $n = 105263157894736842$ эканлигини аниқлаш мумкин. Шуниси ажойибки, агар топилган n ни кетма-кет икки марта, уч марта, тўрт марта ва ҳоказо марта ёзилса ҳам, яна шундай хоссали сон ҳосил бўлади.

Шундай сон ҳам мавжудки, агар унда 4 ни охиридан бошига ўтказиб ёзилса, аввалгисидан 4 марта ортиқ сон ҳосил бўлади:

$$102564 \text{ ва } 410256.$$

Бу сонни ҳам кетма-кет бир неча марта ёзганда ай-
тилган хосса ўз кучини сақлайди.

Охирги рақамини бошига ўтказиб ёзишда ўзидан 3 мар-
та кичик сон ҳосил бўладиган иккита сон мавжуд:

$$428571, 857142.$$

Шундай сонлар ҳам мавжудки, уларни 4 га бўлиш учун
берилган сонни охиридан бошига қараб ёзиб қўйиш кифоя-
дир:

$$8712 : 4 = 2178.$$

Агар 8712 ни бир неча марта кетма-кет ёзилса ҳам,
юқорида келтирилган хосса сақланади:

$$8712871287128712 : 4 = 2178217821782178.$$

225 ни биринчи ҳади 1 га тенг бўлган учта арифметик
прогрессияларга ажратиш мумкин:

$$225 = 1 + 75 + 149,$$

$$225 = 1 + 23 + 45 + 67 + 89,$$

$$225 = 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43 + 49.$$

Худди шу йўл билан 225 ни 7 та ҳадли арифметик про-
грессияга ажратиш мумкинми? (Ўйлаб кўринг.)

228 ни биринчи ҳади 18 га тенг бўлган бир неча
арифметик прогрессияларга ажратиш мумкин:

$$228 = 18 + 44 + 70 + 96,$$

$$228 = 18 + 26 + 34 + 42 + 50 + 58,$$

$$228 = 18 + 21 + 24 + 27 + 30 + 33 + 36 + 39.$$

228 ни биринчи ҳади 18 га тенг бўлган бошқа шундай
прогрессияларга ажратиб ёзишга уриниб кўринг-чи!

Натурал сонлар кетма-кетлигидан фойдаланиб, квадрат-
лар жадвалини тузиш мумкин:

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10$$

$$1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19$$

$$0 \ 1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \ 36 \ 49 \ 64 \ 81$$

Кублар жадвалини эса қуйидаги йўл билан тузиш
мумкин:

6 12 18 24 30 36 42
 1 7 19 37 61 91 127
 0 1 8 27 64 125 116 343

Натурал сонларнинг кубларини туб сонлардан фойдаланиб, қуйидаги йўл билан ҳам тузиш мумкин:

Натурал сонлар кетма-кетлигидан бирор p туб сонга каррали бўлган ҳамма сонларни ўчириб, қолганларидан қуйидаги йўл билан янги кетма-кетлик тузамиз: аввал бирини ёзамиз ва ҳар бир кейинги ҳадини топиш учун олдинги ҳадларнинг йиғиндисини оламиз; ҳосил бўлган янги кетма-кетликдан ҳам аввал танлаб олинган p га каррали бўлган сонларни ўчириб, қолганларидан юқорида келтирилган йўл билан янги кетма-кетлик тузамиз ва ҳоказо. Агар шу метод p марта такрорланса (охирги марта ўчириш ўтказилмаса), натижада фақат натурал сонларнинг кублари ҳосил бўлади.

Мисол. $p = 3$;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

кетма-кетликдан 3 га каррали элементлар ўчирилса,

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, ...

ҳосил бўлади ва ундан янги кетма-кетлик тузамиз:

1, 3, 7, 12, 19, 27, 37, 48, 61, 75, 91, 108, 127, Бу кетма-

кетликдан ҳам $p = 3$ га каррали бўлган элементлар ўчирилса ва кўрсатилган метод билан янги кетма-кетлик тузилса,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 123, ...

кублар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

Натурал сонлар кубларининг арифметик прогрессия элементлари йиғиндиси шаклидаги ажойиб ёйилмалари мавжуддир:

$$1 = 1^3 = 1$$

$$2 + 6 = 2^3 = 3 + 5$$

$$3 + 9 + 15 = 3^3 = 6 + 9 + 12$$

$$4 + 12 + 20 + 28 = 4^3 = 10 + 14 + 18 + 22$$

$$5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 5^3 = 15 + 20 + 25 + 30 + 35$$

Бу жадвалнинг чап томонида ёзилган прогрессияларнинг биринчи ҳадлари 1, 2, 3, 4, 5, ... натурал сонлар кетма-кетликларидан, ўнг томонида ёзилган прогрессияларнинг биринчи ҳадлари 1, 3, 6, 10, 15, ... учбурчакли сонлардан иборат. Қуйидаги ёйилма ҳам мавжуд:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 \text{ ва ҳ. к.}$$

Бу сонли пирамиданинг тузилишига эътибор беринг.

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ (*) тенгликни қаноатлантирувчи a, b, c, d, e, f натурал сонларни топиш осон эмас.

Москвалик инженер Н. Катин шундай сонларнинг 6 та сини топди-ки, уларнинг биттадан олдинги рақамларини ташлашдан ҳосил бўлган сонлар ҳам, биттадан кейинги рақамларини ташлашдан ҳосил бўлган сонлар ҳам (*) тенгликни қаноатлантиради:

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 761943^2 + 323787^2$$

$$23789^2 + 61945^2 + 42864^2 = 42868^2 + 61943^2 + 23787^2$$

$$3789^2 + 1945^2 + 2864^2 = 2868^2 + 1943^2 + 3787^2$$

$$789^2 + 945^2 + 864^2 = 868^2 + 943^2 + 787^2$$

$$89^2 + 45^2 + 64^2 = 68^2 + 43^2 + 87^2$$

$$9^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 3^2 + 7^2$$

ва

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 761943^2 + 323787^2$$

$$12378^2 + 56194^2 + 64286^2 = 24286^2 + 76194^2 + 32378^2$$

$$1237^2 + 5619^2 + 6428^2 = 2428^2 + 7619^2 + 3237^2$$

$$123^2 + 561^2 + 642^2 = 242^2 + 761^2 + 323^2$$

$$12^2 + 56^2 + 64^2 = 24^2 + 76^2 + 32^2$$

$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 7^2 + 3^2$$

Шунингдек,

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 761943^2 + 323787^2$$

$$2378^2 + 6194^2 + 4286^2 = 4286^2 + 6194^2 + 2378^2$$

$$37^2 + 19^2 + 28^2 = 28^2 + 19^2 + 37^2$$

$$81 = (8 + 1)^2,$$

$$512 = (5 + 1 + 2)^3,$$

$$2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4,$$

$$17210368 = (1 + 7 + 2 + 1 + 0 + 3 + 6 + 8)^5,$$

$$68719476736 = (6 + 8 + 7 + 1 + 9 + 4 + 7 + 6 + 7 + 3 + 6)^6,$$

$$\begin{aligned}
 & 6722988818432; \quad 248155780268521; \quad 3904305912313344 \\
 & \text{лар ҳам мос равишда ўзининг рақамлари йиғиндисининг} \\
 & 7, 8, 9\text{- даражаларига тенг. Буларни ҳам Н. Катин топган.} \\
 & 5627710113660432398319244384765625 = \\
 & = 562 - 77 + 10 - 11 + 36 - 60 + 43 - 2 \cdot 3 + 98 - 31 + \\
 & \quad + 92 - 44 + 38 - 47 + 65 - 62 + 5
 \end{aligned}$$

каби ажойиб ёйилма ҳам мавжуд.

Бахтли билет деган масала ҳаммага танишдир: 6 хонали номерлардан иборат билетлар учун жуфт ва тоқ ўринда жойлашган рақамлар йиғиндисини тенг бўлса, уларни бахтли билет деб аталади.

Мисол. 134101 бахтлидир: $1 + 4 + 0 = 3 + 1 + 1$.

000000 дан 999999 гача бўлган 6 хонали сонлар орасида нечта бахтли номерлар бор?

Бахтли сонлар сони $2(1^2 + 3^2 + 6^2 + 10^2 + 15^2 + 21^2 + 28^2 + 36^2 + 45^2 + 55^2 + 63^2 + 69^2 + 73^2 + 75^2) = 55252$ га тенглигини ҳисоблаш мумкин. Қуйидаги савол қўйилади: 1 дан N гача кетма-кет жойлашган натурал сонларни ёзишда нечта рақам сарф қилинади?

Агар N нинг ёзилишида сарф қилинган рақамлар сони n та бўлса, у ҳолда 1 дан N гача бўлган натурал сонларнинг ёзилишида $k = (N + 1)n - \frac{10^n - 1}{9}$ та рақам сарф қилиниши исботланган,

Мисол. $N = 7654$ бўлсин.

$$k = (7654 + 1) \cdot 4 - \frac{10^4 - 1}{9} = 30620 - 1111 = 29509 \text{ та рақам.}$$

1 дан 9999...9 гача бўлган натурал сонларнинг ёзилишида (...54321)·9 та рақам сарф қилинади. (...54321)·9 сонни ҳосил қилиш учун ўнгдан чапга, 999...9 сонидан нечта 9 лар бўлса, ўшанча кетма-кет натурал сонларни ёзиш kifоя.

Мисол. 1 дан 9999999999 гача кетма-кет жойлашган натурал сонларнинг ёзилишида $(10987654321) \cdot 9 = 98888888889$ та рақам сарф қилинади.

Такрорланмайдиган рақамлардан тузилган 4938271605 сонни 9 га бўлганда ўрта рақамига нисбатан симметрик сон ҳосил бўлади:

$$4938271605 : 9 = 548696845.$$

Шундай сонлардан ҳозиргача фақат икkitасини биламиз:

$$2165904378 : 9 = 240656042,$$

$$2934815607 : 9 = 326090623.$$

Ҳар бирида ноль рақами учрамайдиган шундай иккита бутун сон мавжудки, уларнинг кўпайтмаси 10^9 нинг даражаларини беради.

$$512 \cdot 1953125 = (10^9)^1, \\ 262144 \cdot 814697265625 = (10^9)^2 = 10^{18}.$$

Шундай кўпайтмалардан яна тузиш мумкин. Ўзингиз ўйлаб кўринг-чи?

Рақамлари ҳар хил бўлган 10 хонали сонларнинг қанчасини тузиш мумкин?

Бундай 10 хонали сонлар 3265920 та бўлиши ҳисоблаб топилди. (Қандай қилиб?)

100 дан 200 гача бўлган натурал сонларни ($128 = 2^7$ дан ташқари) кетма-кет натурал сонлар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин:

$$\begin{array}{ll} 100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22 & 104 = 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 13 + 14 \\ 101 = 50 + 51 & 105 = 52 + 53 \\ 102 = 33 + 34 + 35 & \dots \\ 103 = 51 + 52 & \end{array}$$

(Қолганларини ўзи гиз ёзишга уриниб кўринг-чи?)

100 000 000 000 000 001 ва 2 000 000 000 000 000 000 сонлар орасида фақат $2^{60} = 1152921504606848976$ соннинг кетма-кет натурал сонлар йиғиндиси шаклида ифодаланмаслиги аниқланган.

Шундай касрлар ҳам борки, уларнинг квадратлар ва кублар йиғиндиси тенгдир:

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{10}{9}\right)^3, \\ \left(\frac{5}{14}\right)^2 + \left(\frac{25}{14}\right)^2 = \left(\frac{5}{14}\right)^3 + \left(\frac{25}{14}\right)^3.$$

Яна шундай касрларни топинг-чи?

91 ва 1 дан 9 гача бўлган кетма-кет натурал сонларга кўпайтириш натижасида шундай 3 хонали сонларни ҳосил қиламизки, уларнинг юзлар хонаси 0 дан 8 гача, ўнлар хонаси 9 дан 1 гача ва бирликлар хонаси эса 1 дан 9 гача кетма-кет жойлашган натурал сонлардан иборат бўлади:

$$\begin{array}{ll} 91 \cdot 1 = 091, & 91 \cdot 6 = 546, \\ 91 \cdot 2 = 182, & 91 \cdot 7 = 637, \\ 91 \cdot 3 = 273, & 91 \cdot 8 = 728, \\ 91 \cdot 4 = 364, & 91 \cdot 9 = 819, \\ 91 \cdot 5 = 455, & \end{array}$$

Ҳамма хоналари жуфт сонлардан иборат бўлиб, тўла квадратни берадиган тўрт хонали сонларнинг фақат тўрттаси мавжуддир:

$$4624 = 68^2,$$

$$6084 = 78^2,$$

$$6400 = 80^2,$$

$$8404 = 92^2,$$

Шундай сонлар ҳам мавжудки, ўзи тўла кубдан иборат бўлиб, унинг рақамлар йиғиндиси эса шу тўла кубнинг даража асосига тенгдир. Улар қуйидагилардир:

$$512 = 8^3, \quad 5 + 1 + 2 = 8;$$

$$4913 = 17^3, \quad 4 + 9 + 1 + 3 = 17;$$

$$5832 = 18^3, \quad 5 + 8 + 3 + 2 = 18;$$

$$17576 = 26^3, \quad 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26;$$

$$19687 = 27^3, \quad 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27.$$

Ўқувчи $\frac{16}{64}$ касрни «қисқартиришда» $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ тўғри натижани ҳосил қилган. Шундай тўғри натижага келтирадиган «қисқартириш»лардан қуйидагиларини ҳам келтириш мумкин:

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{195}{995} = \frac{1}{9}, \quad \frac{2566}{6665} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{28}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{266}{665} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{49}{98} = \frac{4}{8}, \quad \frac{1999}{9995} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{166}{664} = \frac{1}{4}$$

Бундай касрлардан яна бир нечтасини ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{16}{64} = \frac{1616}{6464} = \frac{161616}{646464} = \dots$$

ёки

$$\frac{16}{64} = \frac{16016}{64064} = \frac{1600016}{6400064} = \dots$$

Юқоридаги ҳолда ҳатто нолларга ҳам «қисқартириш» мумкин.

Москвалик инженер Катин қуйидаги ажойиб «қисқартириш» ларнинг ўринли эканлигини кўрсатган:

$$\frac{3844}{7831} = \frac{344}{731}, \quad \frac{143185}{17018560} = \frac{1435}{170560}, \quad \frac{4251935343}{91819355185} = \frac{4255343}{91855185}$$

Бу мисолларда ўчирилган сонларни такрорлаб ёзилса ҳам шундай хоссали касрлар ҳосил бўлади:

$$\frac{355544}{755531} = \frac{344}{731}, \quad \frac{143181818185}{17018181818560} = \frac{1435}{170560}.$$

Ленинградлик О. Недзвецк ва унинг қизи Таниялар қуйидаги ажойиб касрларни топишган:

$$\begin{aligned} \frac{2199978}{8799912} &= \frac{21978}{87912} = \frac{2178}{8712} & \frac{4399956}{6599934} &= \frac{43956}{65934} = \frac{4356}{6534} \\ \frac{3299967}{7699923} &= \frac{32967}{76923} = \frac{3267}{7623} & \frac{1099989}{9899901} &= \frac{10989}{98901} = \frac{1089}{9801} \end{aligned}$$

Бу касрларнинг яна бир ажойиблиги шундаки, уларнинг махражлари суратларининг тескари тартибда ёзилганига тенг.

Москвалик Н. Катин ва М. Греклар қуйидаги шаклдаги касрларни «қисқартириш» мумкинлигини исботладилар:

$$\frac{\overbrace{abmm \dots mcd}^{n \text{ та}}}{\overbrace{dcmm \dots mba}^{n \text{ та}}} = \frac{\overbrace{abmm \dots mcd}^{(n-1) \text{ та}}}{\overbrace{dcmm \dots mba}^{(n-1) \text{ та}}} = \dots = \frac{abcd}{dcba}$$

Бунда $a+c=b+d$, $a < d$, $m=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Мисол.

$$\frac{10888578}{87888501} = \frac{108878}{878801} = \frac{1078}{8701}$$

$a+c=b+d$, $a < d$ шартлар назарга олинса, бундай касрлардан 120 та эканлигини ҳисоблаш мумкин. Қитобхон, сиз ҳам шундай касрлардан бир нечасини топинг-чи?

$$\frac{\overbrace{amm \dots mb}^{n \text{ та}}}{\overbrace{bmm \dots ma}^{n \text{ та}}} = \frac{\overbrace{amm \dots mb}^{(n-1) \text{ та}}}{\overbrace{bmm \dots ma}^{(n-1) \text{ та}}} = \dots = \frac{ab}{ba}, \quad \begin{aligned} a+b &= m; \\ a &< b. \end{aligned}$$

«Қисқартириш»лар ўтказиш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{1998}{8981} &= \frac{198}{891} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}, & \frac{273}{728} &= \frac{327}{872} = \frac{3}{8} \\ \frac{244}{427} &= \frac{424}{742} = \frac{4}{7}, & \frac{187}{819} &= \frac{248}{981} = \frac{2}{9}, & \frac{384}{637} &= \frac{438}{783} = \frac{4}{3} \\ \frac{427}{247} &= \frac{442}{724} = \frac{4}{7}, & \frac{548}{684} &= \frac{5}{6}, & \frac{284}{847} &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Шундай мисоллардан яна ўйлаб топинг-чи?

$991n^2 + 1$ ифода ҳеч қандай n учун тўлиқ квадрат бўла олмайди, деган фикр мавжуд эди. Лекин кейинчалик бундай n лар жуда кўп бўлиб, уларнинг энг кичиги

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$$

эканлиги аниқланди.

Совет математиги Н. Т. Чеботарев қуйидаги гипотезани қўйган эди:

$x^n - 1$ ифодани кўпайтувчиларга ажратганда кўпайтувчилар коэффициентларининг абсолют қийматлари бирдан фарқли бўлиши мумкин-ми? Математик В. К. Ивановнинг кўрсатишича, $x^n - 1$ ифодаларни ҳамма $n < 105$ лар учун кўпайтувчиларга ажратганда, ҳамма кўпайтувчилар коэффициентларининг абсолют қиймати бирга тенг бўлиб, $n = 105$ учун эса бу хосса бузилади. $x^{105} - 1$ ни кўпайтувчиларга ажратганда кўпайтувчилардан бири

$$\begin{aligned} & x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + \\ & + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - \\ & - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + \\ & + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

эканлиги ҳисобланди.

Энди ўжар тенгликлар деб аталган тенгликлар билан танишиб ўтамиз.

Шундай тенгликлар мавжудки, уларнинг рақамларида айрим ўзгартиришлар қилинса, тенглик ишораси ўзгармайди. Бундай тенгликлар ўжар тенгликлар деб аталади.

$$\text{Мисол. } 123789 + 561945 + 642864 = 242868 + 761943 + 323787.$$

Ҳар бир қўшилувчи квадратга оширилса, тенглик ишораси ўзгармайди:

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 761943^2 + 323787^2.$$

Ҳар бир қўшилувчидаги тоқ ўринда турган рақамлар ўчирилса ёки ҳар бир қўшилувчидаги битта ёки бир нечта рақамларни бошидан охирига ўтказилса, тенглик ишораси ўзгармайди:

$$279 + 695 + 484 = 488 + 693 + 277,$$

$$279^2 + 695^2 + 484^2 = 488^2 + 693^2 + 277^2,$$

$$378912 + 194556 + 286464 = 286824 + 194376 + 378732,$$

$$378912^2 + 194556^2 + 286464^2 = 286824^2 + 194376^2 + 378732^2.$$

Юқорида келтирилган ўжар тенгликларни А. Марин (Москва области). П. Цагаевлар (Оржоникидзе шаҳри) топишган.

Олтин кесим деб аталган кесим билан боғлиқ бўлган ажойиб сонлар ҳам мавжуд. Математик Г. С. М. Коксетер ўзининг «Геометрияга кириш» деган китобида буюк астроном Кеплернинг қуйидаги сўзларини келтирган:

«Геометрия фани асосан иккита катта бойликка эга: бири олтин билан баҳоланадиган Пифагор теоремаси бўлса, иккинчиси эса қимматбаҳо тош билан баҳоланадиган олтин кесимдир».

AB кесимнинг «олтин кесими» деъл уни шундай икки a ва b бўлақларга бўлинишини айтиладики (40-шакл), бу бўлақлар қуйидаги нисбатда бўлади:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

бунда $b = 1$ бўлганда $\frac{a+1}{a} = a$ ва $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ бўлади.



40-шакл.

$a = \varphi = 1,61803398 \dots$ иррационал сони олтин сон деб аталган.

$$\frac{1}{\varphi} = 0,61803398 \dots \varphi = 1 = \frac{1}{\varphi} \text{ ва}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Пифагорчиларнинг яратган фигураси — пентаграммнинг кесмалари олтин нисбатда бўлади (41-шакл):



41-шакл.

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN}{NC}.$$

Доира радиусини ички чизилган мунтазам унбурчак томонига бўлган нисбати φ га жуда яқин эканлигини кўрсатиш мумкин. Яна бир ажойиб масала билан танишиб ўтамиз.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлардан учинчи тартибли детерминант тузиш мумкин. Бу детерминантнинг қиймати юқорида ёзилган рақамларнинг жойлашиш тартибига боғлиқ.

$$\text{Мисол. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Биринчи 9 та натурал сонлардан тузилган учинчи тартибли детерминантларнинг энг кичик қиймати 0 ва энг катта қиймати

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 412 \text{ эканлиги исботланган.}$$

Шундай савол қўйилади: 0 дан 412 гача ҳамма натурал сонларни берадиган бундай детерминантларни топиш мумкинми?

Айрим математик ишқибозлар бу йўналишда кўп ҳисоблашларни олиб борганлар. Харьковлик инженер В. И. Қибирев 9 000 га яқин бундай детерминантларни ҳисоблаб, 324, 329, 355, 357, 358, 362, 364, 365, 367, 373, 375, 378, 381, 383, 386, 387, 394, 397, 399, 401, 403, 406, 409, 411 ларга тегишли 24 та детерминантни тополмаган.

Шуниси ажойибки, айрим детерминантларнинг қиймати шу детерминантда ажойиб шаклда жойлашган:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 327, \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 9 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 328,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 359, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 341, \begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 369.$$

Натурал 30 сони билан боғлиқ бўлган қуйидаги ажойиб хосса ўринлидир: $n=10$ бўлганда n дан кичик ва n билан ўзаро туб бўлган сонлар 1, 3, 7, 9 бўлиб, улардан 9 мураккаб сондир. Шундай натурал n сонлар мавжудки, ундан кичик бўлган ва u билан ўзаро туб бўлган сонларнинг ҳаммаси ҳам (албатта 1 дан ташқари) тубдир.

Мисол. $n=18$ бўлган 5, 7, 11, 13, 17 лар 18 билан ўзаро туб бўлиб, ўзлари ҳам туб сонлардир.

Шундай хоссалар сонлар 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24 ва 30(*)

лар эканлигини текшириб кўриш мумкин. 30 дан катта бўлган шундай сонлар топилмаган. Кейинчалик исботландики, (*) кетма-кетлиқнинг энг катта элементи 30 экан, яъни, агар $n > 30$ бўлса, бу ҳолда n дан кичик ва n билан ўзаро туб бўлган сонлар орасида ҳамма вақт мураккаб сон мавжуд бўлади.

$\pi \approx 3,141592653589793238464243383271502884 \dots$ сони ҳақида

Айлана узунлигини унинг диаметрига нисбатини ифода-лаш учун π ишораси қабул қилинган.

Бу белги биринчи марта 1706 йилда англиялик математик У. Жонс томонидан киритилган бўлса-да, лекин математикада тўлиқ ишлатилиши Л. Эйлернинг бу соҳада қилган ишларидан бошланди (1736 йилда).

π сонининг мумкин қадар кўпроқ ўнли улушларини ҳисоблашда, қадимги замондан бошлаб, ҳар хил олимлар иш олиб боришган.

Вавилонда (бизнинг эрамиздан икки минг йил олдин) $\pi \approx 3$ деб қабул қилинган. Қадимги юнонда (бизнинг эрамиздан икки минг йил олдин) $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,16049 \dots$ деб қабул қилинган.

Қадимги юнон олими Архимед (бизнинг эрамиздан 3 аср олдин) $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ лигини аниқлаган. $\frac{22}{7}$ эса Архимед сони деб юритилади.

Бизнинг эрамизнинг 263-йилида яшаган Хитой математиги Лю-Ху-Эй $3,1401 < \pi < 3,1427$ эканлигини кўрсатган.

Хитой астрономи Цзу-Чун-Чжи (430—501) эса $\pi \approx \frac{355}{113} = 3,1415929 \dots$ эканлигини аниқлади.

Жумладан, $\pi \approx \frac{355}{113} = \frac{377-22}{120-7}$ шаклида ёзилса, π учун $\frac{377}{120}$ ни Птоломей, $\frac{22}{7}$ ни эса Архимед кўрсатганлари кўринади.

$\pi \approx \frac{377}{120}$ ни эса Лиция сони деб юритилади. XV асрда яшаган самарқандлик олим Жамшид ибн-Маъсуд ал-Қаши π нинг 17 та ўнли улушини топган.

XVII асрда яшаган математик Лудольф π нинг 35 та ўнли улушларини ҳисоблаб топган.

Кейинчалик 1699 йилда π нинг 72 та ўнли улушлари, 1719 йилда π нинг 127 та ўнли улушлари, 1841 йилда π нинг 208 та ўнли улушлари, 1853 йилда π нинг 261 та

Ўнли улушлари қаторлар назариясидан фойдаланиб топилди. 1853 йилдан 1873 йилгача ўтган 20 йил мобайнида математик Вильям Шенкс π сонининг 707 та ўнли улушларини топган, 1947 йилга келиб π нинг 808 та ўнли улушлари топилди.

1949 йилнинг июнь ойида электрон ҳисоблаш машинаси ёрдамида π нинг 1120 та ўнли улушлари топилди. Ўша йилнинг сентябрь ойида электрон ҳисоблаш машинаси 70 соат тўхтовсиз ишлаб, π нинг 2037 та ўнли улушларини, 1955 йилда электрон ҳисоблаш машинаси 13 минутда π нинг 3093 та ўнли улушларини ва ниҳоят, 1958 йил январь ойида 100 минут тўхтовсиз ишлаб, π нинг 10 000 та ўнли улушларини аниқлади.

1961 йилнинг июль ойида англиялик математиклар Д. Шенкс ва Ж. Вренчлар π нинг 100 265 та ўнли улушларини ҳисоблаш учун программа тузиб, 8 соат 13 минутда бу программани муваффақиятли бажардилар. π нинг 16000 ўнли улушларини диққат билан текшириш натижасида 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ва 0 рақамларнинг жойлашишида ҳеч қандай тартиб бузилмаганлигини кўрамиз, унда ҳар бир рақам тахминан 10% жойни эгаллаган.

π нинг ўнли улушларида бирор маълум рақамнинг чекли ёки чексиз марта учрашини билмаймиз.

Мисол. π нинг ўнли улушлари ичида 5 рақамининг чекли марта ёки чексиз марта учрашини билмаймиз.

π сони ҳеч қандай квадрат тенгламанинг илдизи бўлмаслиги аниқдир.

Лекин $15x^2 - 78x + 97 = 0$ ва $19x^2 - 39x - 65 = 0$ тенгламаларнинг илдизларидан бири мос равишда $x \approx 3,14160$ ва $x = 3,14158805$ эканликлари ҳисобланган. Бу қийматлар π нинг асл қийматига яқиндир.

π ни чексиз узлуксиз касрга ёйганда қуйидаги каср ҳосил бўлиши кўрсатилган:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{14 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}}}$$

Бу узлуксиз касрнинг тегишли муносиб касрлари ҳисобланса, π учун қуйидаги рационал яқинлашишларни топиш мумкин:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33109}, \dots$$

$$1,49^{288} \approx \pi, \sqrt[3]{31} \text{ нинг қиймати } 3,1413 \dots$$

ёки ҳажми 31 куб см бўлган кубнинг қирраси 0,001 ~~ини~~лик билан π ни ифодалайди.

π нинг қаторлар ёрдамида ифодалари ҳам ~~мавжуддир~~
1593 йилда Вьет

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \dots$$

ифодани кўрсатган. Математик Валлис ўзининг «~~Чиселлар~~ арифметикаси» китобида

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

ни кўрсатган.

Шотландиялик математик Жеймс Григори ва ~~кейинча~~лик 1673 йилда француз математиги Лейбниц

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

қаторини кўрсатган.

$$e = 2,718281828459045 \dots \text{ сони ҳақида}$$

Шотландиялик математик Непер $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ифода-

нинг мавжудлигини исботлаб, уни e ҳарфи билан белгиланган. Ўтган бўлимларнинг бирида аввало e нинг иррационал, кейинчалик эса трансцендент сон эканлиги кўрсатилган эди.

Маълумки, ҳар хил асосли логарифмлар мавжуддир. Агар логарифмнинг асоси e —Непер сонига тенг деб олинса, бундай логарифмга натурал логарифм деб аталиб, N сонининг натурал логарифми $\ln N$ орқали белгиланади.

1622 йилда англиялик математик Ж. Слейдел биринчи марта 1 дан 1000 гача бўлган сонларнинг натурал логарифмлари жадвалини тузган.

e сонининг ўнли улушлари ҳам худди π сонига ўхшаб аста-секинлик билан ҳисоблаб узайган.

1961 йилда электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида 8 соат-у 13 минут давомида тўхтовсиз ишлаб, e сонининг 100625 та ўнли улушлари аниқланган.

$$27x^2 - 55x + 50 = 0$$

ва

$$35x^2 - 83x - 33 = 0$$

тенгламаларнинг илдизларидан бири мос равишда $x \approx 2,71829$ ва $x \approx 2,71828582$ лар эканликлари ҳисобланган. Бу қийматлар e нинг қийматига яқиндир. e ни чексиз уз-
луксиз каср шаклида ҳам ифодалаш мумкин:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

Бу ёйилмани биринчи марта Л. Эйлер кўрсатган.

e ни рационал сонлар ёрдамида яхлитлаш мумкин:
ками билан:

$$\frac{2}{1}; \frac{8}{3}; \frac{19}{7}; \frac{106}{39}; \frac{1264}{465}; \dots \quad (1)$$

ортиғи билан:

$$\frac{3}{1}; \frac{11}{4}; \frac{87}{32}; \frac{193}{71}; \dots \quad (2)$$

Агар бу қийматлар сонлар ўқига жойлаштирилса, қуйидаги ҳолатни кўришимиз мумкин (42-шакл). (1) ва (2) рационал сонлар кетма-кетлигининг лимити e сонини беришини исботлаш мумкин.



42-шакл.

Фарея сонлари. Англиялик математик Фарея 1816 йилда қуйидагича ҳосил қилинадиган каср сонлар билан шуғулланган. Кейинчалик бундай сонлар Фарея сонлари деб аталган.

$[0, 1]$ кесмага тегишли ва махражлари $b \leq n$ бўлган $\frac{a}{b}$ қисқармас касрларнинг ўсувчи кетма-кетлик шаклида ёзилганига Фарея кетма-кетлиги деб аталади.

$n=1, 2, 3, 6$ лар учун тегишли Фарея кетма-кетликлари қуйидагилардир:

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{1} \right\}, \quad \Phi_2 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1} \right\},$$

$$\Phi_3 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1} \right\},$$

$$\Phi_6 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{1}{1} \right\}.$$

Φ_n га тегишли Фарей кетма-кетлигини тузиш учун махражлари n дан катта бўлмаган ҳамма қисқармас тўғри касрларни ўсувчи кетма-кетлик шаклида ёзиш кифоядир. Φ_n билан n -тартибли Фарей кетма-кетлиги ва уларнинг элементлари Фарей сонлари деб аталади.

Фарей сонлари қуйидаги хоссаларга эга:

1) Ҳар қандай иккита ёнма-ён жойлашган $\frac{a}{b}$ ва $\frac{a_1}{b_1}$ Фарей сонлари учун $a_1b - ab_1 = 1$ бўлади. (Текшириб кўринг.)

2) Ҳар қандай учта кетма-кет жойлашган $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ Фарей сонлари учун $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a+a_2}{b+b_2}$ тенглик ўринлидир. (Текшириб кўринг.) $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ Фарей сонларидан ҳосил қилинган $\frac{a+c}{b+d}$ Фарей сонига $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ ларнинг медианти деб аталади.

Медианта тушунчасидан фойдаланиб, Φ_n — Фарей кетма-кетлиги берилганда, Φ_{n+1} кетма-кетликни тузиш мумкин. Бунини қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

Φ_6 дан фойдаланиб, Φ_7 тузилсин.

Φ_6 да махражларининг йиғиндиси 7 га тенг бўлган қўшни Фарей сонларини ёзиб чиқамиз: $\frac{0}{1}$ ва $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$ ва $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$ ва $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ ва $\frac{1}{1}$. Φ_6 да бу қўшни сонлар орасига уларнинг медианталари қўйилиб чиқилса, Φ_7 ҳосил бўлади:

$$\Phi_7 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{1}{1} \right\}$$

Худди шу йўл билан Φ_7 дан фойдаланиб, Φ_8 ни тузиш мумкин. Φ_8 ва Φ_9 — Фарей кетма-кетликларини тузинг.

Фарей сонларидан фойдаланиб, иррационал сонларни оддий касрлар ёрдамида энг қулай яхлитлаш мумкин. Бунини кўрсатиш учун қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз:

$\alpha = \ln 10 = 2,30258 \dots$ махражи $n \leq 100$ бўлган касрлар ёрдамида яхлитлансин:

$\ln 10$ нинг каср қисми $\alpha_1 = 0,30258 \dots$ иррационал сонни $[0, 1]$ га тегишли: $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$; 0 ва $\frac{1}{2}$ лар ва уларнинг медиантаси $\frac{1}{3}$ сони Φ_3 га тегишли: $0 < \alpha_1 < \frac{1^2}{3^2}$; $\frac{0}{1}$

ва $\frac{1}{3}$ ларнинг медиантаси $\frac{1}{4}$ сони α_1 дан $\frac{1}{3}$ га қараганда узоқроқ жойлашган, шунинг учун $\frac{1}{4} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{3}$ ларнинг медиантаси $\frac{2}{7}$; бу медианта α_1 га $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{3}$ ларга қараганда яқинроқ жойлашган, шунинг учун $\frac{2}{7} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$; буларнинг медиантаси бўлган $\frac{3}{10}$ сони α_1 га $\frac{2}{7}$ га қараганда яқинроқ, шунинг учун $\frac{3}{10} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$; медианта $\frac{4}{13}$ сони, учун $\frac{3}{10} < \alpha_1 < \frac{4}{13}$ ни ҳосил қиламиз.

$\frac{3}{10}$ ва $\frac{4}{13}$ ларнинг медиантаси $\frac{7}{23}$ учун эса $\frac{3}{10} < \alpha_1 < \frac{7}{23}$ бўлади. Шу йўл билан α_1 га энг яқин ва махражлари $n \leq 100$ бўлган $\frac{10}{33}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{23}{76}$ медианталарни топамиз.

Шундай қилиб, $\ln 10 = 2 + \alpha_1$ ни ҳисобга олиб:

$$2, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{16}{7}, \frac{23}{10}, \frac{53}{23}, \frac{76}{33}, \frac{99}{43}, \frac{175}{76}$$

ларни ҳосил қиламиз. (Қасрлар махражлари ўсиб бориш тартиби билан ёзилган.)

$e = 2,71828 \dots$ ни махражи $n \leq 90$ бўлган қасрлар ёрдамида юқорида келтирилган усул билан яхлитланг.

БЕРНУЛЛИ ВА ЭЙЛЕР СОНЛАРИ

Бернулли сонлари деб қуйидаги йўл билан ҳосил бўладиган ва ҳаммаси рационал сонлардан иборат бўлган B_n сонларига айтилади:

$$B_n = n! D_n = n! (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$B_0 = 1$ деб қабул қилинади.

Бу формула ёрдамида Бернулли сонларини ҳисоблаш мумкин бўлса-да, n қанча катта бўлса, шунга тегишли B_n ни топиш шунча қийинроқ бўлади.

Мисол.

$$B_2 = 2!(-1)^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 2! \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6},$$

$$B_3 = 3!(-1)^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = -6 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right) = -6 \cdot 0 = 0.$$

$B_4, B_5, B_6, \dots$ ларни ҳисоблаш учун тегишли тўртинчи, бешинчи, олтинчи ва ҳоказо тартибли детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Маълумки, юқори тартибли детерминант қийматларини аниқлаш жуда катта ҳисоблашларни талаб қилади. Шунинг учун қуйидаги рекуррент формуладан фойдаланиш жуда ҳам қулайдир:

$$B_0 C_{n+1}^0 + B_1 C_{n+1}^1 + B_2 C_{n+1}^2 + \dots + B_n C_{n+1}^n = 0$$

ёки $(1+B)^{n+1} - B^{n+1} = 0$. Бунда бином формуласи ёрдамида $(1+B)^{(n+1)}$ ёйилганда B нинг даража кўрсаткичлари индекслари билан алмаштирилади.

Мисол. $(1+B)^{(3)} = 1 + 3B_1 + 3B_2 + B_3$.

B_1, B_2, B_3 лар тартиб билан биринчи, иккинчи, учинчи Бернулли сонларини кўрсатади. Энди $B_0 = 1$ эканлиги эътиборга олинса, $n=1, 2, 3, \dots$ учун қуйидаги тенгликлар ҳосил бўлади:

$$B_0 + 2B_1 = 0, \quad B_1 = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2};$$

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{3} B_0 - B_1 = -\frac{1}{6};$$

$$B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0; \quad B_3 = -\frac{1}{4} B_0 - B_1 - \frac{3}{2} B_2 = 0;$$

$$B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{5} B_0 - B_1 - 2B_2 - 2B_3 = -\frac{1}{30};$$

$$B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0,$$

$$B_5 = -\frac{1}{6} B_0 - B_1 - \frac{5}{2} B_2 - \frac{10}{3} B_3 - \frac{5}{3} B_4 = 0;$$

$$B_0 + 7B_1 + 21B_2 + 35B_3 + 35B_4 + 21B_5 + 7B_6 = 0,$$

$$B_6 = -\frac{1}{7} B_0 - B_1 - 3B_2 - 5B_3 - 5B_4 - 3B_5 = \frac{1}{42}.$$

Шундай қилиб,

$$B_0 = 1; B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}; B_3 = 0;$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}; B_5 = 0; B_6 = \frac{1}{42}.$$

Юқоридаги йўл билан таърифланган Бернулли сонлари учун B_1 дан ташқари ҳамма тоқ номерли Бернулли сонлари нолга тенг.

Айрим ҳолларда $(-1)^{m-1} B_m$ Бернулли сонлари ўрнига B_m сонлар олиниб, тоқ номерли сонлар назарга олинмай, Бернулли сонларини янгидан $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \dots$ қилиб номерлаб чиқиб, бу сонлар билан иш кўрилади. Шундай қилиб, янги номерлаш натижасида $B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = \frac{691}{2730}, \dots$ Бернулли сонлари ҳосил қилинади. Мана шу шаклдаги Бернулли сонлари натурал сонларнинг k - даражалари йиғиндисини формуласида қатнашган бўлади:

$$1^k + 1^k + 3^k + \dots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + \frac{k}{2!} B_1 n^{k-1} - \frac{k(k-1)(k-2)}{4!} B_2 n^{k-3} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{6!} B_3 n^{k-5} - \dots$$

k нинг жуфт ва тоқлигига қараб ўнг томонда n ёки n^2 -ҳадигача ёзилади.

$$\text{Мисол. } k=1 \text{ учун } 1+2+3+\dots+n = \frac{n^{1+1}}{1+1} + \frac{n^1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

$$k=2 \text{ учун } 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{2}{2!} B_1 n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. $k=3$ бўлганда

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3}{2!} B_1 n^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} n^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ни ҳосил қиламиз ва ҳоказо.

Бернулли сонлар жадвали мавжуд. Ундан фойдаланиб, натурал сонларнинг исталган даражалар йиғиндисини топиш мумкин.

Энди Эйлер сонлари ҳақида гапирамиз.

$$E_0 = 1,$$

$$\frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!} = 0,$$

$$\frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2! \cdot 2!} + \frac{E_4}{4!} = 0,$$

$$\frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4! \cdot 2!} + \frac{E_4}{2! \cdot 4!} + \frac{E_6}{6!} = 0,$$

...

тенгламаларни қаноатлантирувчи E_{2k} сонларига Эйлер сонлари дейилади. Шундай қилиб, юқорида келтирилган тенгламаларни ечиб,

$$E_0 = 1; E_2 = -1; E_4 = 5; E_6 = 61; E_8 = 1385; \dots$$

қийматлар топилади.

Умуман $E_0, E_2, E_4, E_6, \dots, E_{2n-2}$ Эйлер сонлари маълум бўлганда, E_{2n} Эйлер сони

$$E_0 + C_{2n}^2 E_2 + C_{2n}^4 E_4 + \dots + C_{2n}^{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0 \quad (*)$$

тенгламадан топилади.

Ҳамма Эйлер сонлари бутун сонлардир. Мисол учун $E_{10} = 0$ ни топиш талаб қилинсин.

(*) формулада $n=5$ деб олиб,

$$E_0 + C_{10}^2 E_2 + C_{10}^4 E_4 + C_{10}^6 E_6 + C_{10}^8 E_8 + E_{10} = 0$$

тенгликдан $E_{10} = -65521$ ни ҳосил қиламиз

тирилган E_0, E_2, E_4, E_6, E_8 қийматлардан

Қуйидаги формула Эйлер ва Бернулли сонлари

ни боғланишни кўрсатади:

$$E_{2k} = \frac{(4B-1)^{2k+1} - (4B-3)^{2k-1}}{2(2k+1)}$$

(ўнг томонда бином формуласи ёрдамида қавслар индекслар ораси даража кўрсаткичлар B нинг тегишли рақамларни алмаштирилади).

Энди Эйлер ўзгармаси ҳақида маълумот

$$1740 \text{ йилда Л. Эйлер } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

нинг қиймати доимий сонга тенглигини исботлади. C сонларини бу сон Эйлер ўзгармаси деб аталиб, C билан белгилади.

C нинг бир неча ўнли улушлари маълум:

$$C = 0,5772 \dots$$

Лекин C нинг рационал ёки иррационал сон лум эмас.

МУНДАРИЖА

Кириш	3
Туб сонлар	5
Мерсенн сонлари	34
Мукаммал сонлар	44
Бахтли, қулай, дўст ва туғма сонлар	50
Эгизак туб сонлар	56
Ферма сонлари	61
Пифагор сонлари	70
Кўп бурчакли ёки фигурали сонлар	87
Уч бурчакли сонлар	87
Тўрт бурчакли (квадрат) сонлар	92
Беш бурчакли (пентагонал) сонлар	94
Олти бурчакли сонлар	98
n бурчакли сонлар	99
Пирамидал сонлар	102
Сохрли квадратлар	105
Арифметик прогрессиядаги туб сонлар ҳақида	117
Паскаль сонлари	122
Лейбницнинг гармоник учбурчаги	132
Фибоначчи сонлари	133
Арифметикадаги айрим аддитив масалалар	143
1. Гольдбах-Эйлер гипотезаси	144
2. Варинг гипотезаси	148
Улкан ва митти сонлар	162
Алгебранк ва трансцендент сонлар	172
Арифметика ва геометрия чегарасида	180
Гаусс сонларининг арифметикаси	190
Айрим қизиқарли сонлар	202
$\pi=3,141592653589793238464243383271502884$ сони ҳақида	223
$e=2,718281828459045$. . . сони ҳақида	226
Бернулли ва Эйлер сонлари	229

815-816

10

151

423.

„УЧИТУВЧИ“