

К. П. МОРГУНОВ

ГИДРАВЛИКА

РЕКОМЕНДОВАНО

УМО по образованию

*в области природообустройства и водопользования
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по направлению подготовки
«Природообустройство и водопользование»*



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
2014

ББК 30.123я73

М 79

Моргунов К. П.

М 79 Гидравлика: Учебник. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 288 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1735-3

В учебнике изложены основные положения гидравлики и гидромеханики, приведены примеры течений в трубопроводах, отверстиях и насадках, открытых потоках. Рассмотрены течение через водосливы, фильтрационные течения в грунте, вопросы сопряжения бьефов.

Учебник предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки, входящим в укрупненные группы: «Техносферная безопасность и природообустройство», «Архитектура», «Техника и технологии строительства», «Машиностроение» всех форм обучения, а также студентам других технических направлений и специальностей.

ББК 30.123я73

Рецензенты:

А. Ю. ГРИГОРЬЕВ — доктор технических наук, профессор, декан факультета холодильной техники Института холода и биотехнологий СПбНИИУТМО;

А. В. КУДРЯВЦЕВ — кандидат технических наук, доцент кафедры водопользования и экологии СПбГАСУ.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2014

© К. П. Моргунов, 2014

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2014



ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание предназначено для использования в качестве учебника при изучении курсов «Гидравлика», «Гидромеханика», «Основы гидравлики и теплотехники», а также «Гидравлика и гидропневмопривод» бакалаврами и студентами технических специальностей строительных и транспортных вузов, в частности специальностям «Природообустройство и водопользование» (профиль «Комплексное использование и охрана водных ресурсов»), «Строительство» (профиль «Гидротехническое строительство»), «Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры» (профиль «Кораблестроение») в вузах системы внутреннего водного транспорта. Материал подготовлен на основе курса лекций, читаемых автором на гидротехническом, судомеханическом факультетах и факультете портовой техники и электромеханики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова.

Учебник предназначен для самостоятельной подготовки учащимися по изучаемым курсам. Он также будет полезен в качестве дополнительного материала к конспекту лекций. В зависимости от конкретной структуры курса лекций некоторые из разделов, включенных в настоящее пособие, могут не входить в обязательную программу.



ВВЕДЕНИЕ

Предметом гидравлики как науки является изучение законов равновесия и движения жидкостей и приложение этих законов к решению технических задач.

Естественно, что из жидкостей наибольшее внимание в технике уделяется воде — водоснабжение, орошение, судоходство, гидравлические машины и многие другие отрасли техники объектом своего изучения и использования имеют воду.

Название «*гидравлика*» возникло от греческих слов: «гидро» — жидкость, влага, «аулос» — труба. Однако не следует думать, будто бы единственным предметом гидравлики является течение воды в трубах. Такое узкое понимание соответствовало ее состоянию в прошлом, в настоящее время, помимо изучения движения воды по трубам, гидравлика исследует и другие случаи течения воды:

- течение воды в открытых каналах и естественных руслах;
- перелив воды через плотины;
- истечение воды через отверстия и затворы;
- волны различного типа;
- течение грунтовых вод;
- течение вязких жидкостей (а не только воды)

и многое другое.

То есть изучение течения воды по трубам является важным и существенным, но далеко не единственным разделом и предметом изучения современной гидравлики.

Еще в XVIII в. в гидравлической науке начали оформляться два направления:

- *гидромеханика*, которая с применением строгих научных и математических методов изучала в основном идеальную (невязкую) жидкость;
- собственно *гидравлика*, дисциплина преимущественно прикладного характера, которая, используя зачастую нестрогие, эмпирические методы, давала ответы на практические вопросы жизни и техники.

Понятно, почему так произошло: слишком много трудностей возникает при решении задач о движении реальных жидкостей.

Поэтому прибегали и прибегают к обоснованным упрощениям, чтобы, с одной стороны, используя понятие идеальной жидкости, получать теоретические (математически строгие) результаты, а с другой стороны — рекомендовать практические решения для насущных нужд.

Но тем не менее гидравлика и гидромеханика не изолированы друг от друга. Довольно часто наблюдается процесс взаимопроникновения методов этих разделов науки друг в друга для получения более точных и обоснованных решений. При этом гидромеханика вносит строгость доказательств, а гидравлика — практический дух, широко используя данные опытов и наблюдений для установления основных зависимостей, определения числовых значений различного рода коэффициентов, характеристик свойств жидкостей, прежде всего воды, и их поведения в разных условиях.

Поскольку одно из главных отличий реальной жидкости от идеальной — наличие вязкости — проявляется только при движении, обособление гидромеханики происходит лишь при изучении процессов движения. Рассмотрение же вопросов гидростатики является общим как для гидравлики, так и для гидромеханики.

Методы и уравнения гидромеханики зачастую применяются и для описания процессов движения газовых сред и их взаимодействия с различного рода твердыми телами. Поэтому существуют дисциплины, называемые гидроаэромеханикой или гидроаэродинамикой.

Из сказанного становится ясно, какое важное место занимает гидравлика как научная дисциплина в системе образования специалиста, в особенности инженера водного транспорта. Гидравлика является одной из базовых дисциплин в их специальной подготовке. В свою очередь, при изучении гидравлики мы опираемся на такие общетехнические дисциплины, как физика, высшая математика и теоретическая механика.

На основе законов, изучаемых в курсе гидравлики, развиваются прочие научные дисциплины, имеющие в своем названии составную часть «гидро», такие как гидротехника, гидрология. Для них гидравлика является исходной, базовой дисциплиной.



ГЛАВА 1

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

1.1. СТРУКТУРА ЖИДКОСТИ

С точки зрения физики все тела делятся на твердые, жидкие и газообразные. Жидкости — промежуточная фаза между твердыми телами и газами. При низких температурах и малых удельных объемах свойства жидкостей близки к свойствам твердых тел. А при высокой температуре и большом удельном объеме жидкости имеют свойства, близкие к свойствам газов.

В твердых кристаллических телах молекулы расположены на определенных расстояниях друг от друга, образуя кристаллическую решетку. Тепловые колебания молекулы совершают около устойчивых положений, этим объясняется то, что твердые тела сохраняют форму и объем.

В газах межмолекулярные расстояния велики, силы притяжения малы. Каждая молекула практически не испытывает действия связей с другими молекулами (исключая моменты столкновения). Модель газа, при которой отсутствуют силы притяжения между молекулами, называют *совершенным газом*.

Жидкости по молекулярному строению занимают промежуточное положение между кристаллическими твердыми телами и газами. С точки зрения молекулярного строения тепловые движения молекул жидкости представляют собой колебания около некоторых центров. Если кинетическая энергия отдельных молекул оказывается достаточной

для преодоления межмолекулярных связей, то такие молекулы скачком изменяют свое положение, переходя в другой центр колебаний. То есть некоторое время, называемое «временем оседлой жизни», молекула находится в одной упорядоченной структуре, а совершив переход, оказывается среди нового окружения, никак не предопределенного прежним положением. Именно непрерывно и в большом количестве совершающиеся скачкообразные переходы молекул с места на место и обуславливают такое свойство жидкостей, как текучесть.

Итак, основное свойство жидкой среды — *текучесть*, т. е. легкая подвижность частиц, способность неограниченно деформироваться и приходить в движение под действием малых сил. Именно благодаря текучести жидкость приобретает любую форму, предоставленную ей в пространстве, без нарушения своей структуры.

При приложении к жидкости внешней сдвигающей силы хаотические скачки молекул приобретают преимущественную направленность и возникает течение в направлении действия силы.

Если время действия внешней силы t_c много больше «времени оседлой жизни» молекулы жидкости t_r , то при действии этой силы происходит необратимая деформация жидкого тела и, следовательно, тело ведет себя как текучая среда. Если $t_c \ll t_r$, то тело ведет себя как твердое. Естественно, что с ростом температуры амплитуды теплового колебательного движения молекул возрастают, им легче переместиться из одного положения в другое, «время оседлой жизни» уменьшается и среда становится более текучей.

В случае газообразного состояния вещества отсутствие межмолекулярных связей обуславливает не только текучесть, но и сжимаемость газа. Заметим, что в упорядоченных структурах — твердых и жидких телах — сжимаемость практически отсутствует.

Для упрощения изучения жидкостей в гидравлике их молекулярное строение и движение молекул, как правило, не рассматриваются. В рамках гидравлики жидкость представляется непрерывной сплошной средой, в которой нет разрывов и пустот.

Гипотеза о сплошности жидкой среды была введена в науку Ж. Даламбером и Л. Эйлером в XVIII в. И. Ньютон представлял себе жидкость состоящей «из равных частиц, свободно расположенных на равных расстояниях». Но всегда линейные размеры тех «частиц» жидкости (элементарных объемов), которые мы рассматриваем в рамках гидравлики при выводе закономерностей течения, значительно больше, чем длина свободного пробега молекул жидкости. Это и есть условие *сплошности* жидкости, при выполнении которого жидкость можно считать средой без разрывов и пустот.

С точки зрения механических свойств жидкости и газы имеют много общего. Характер поведения и законы, описывающие состояние и движение среды, для жидкостей и газов во многих случаях одинаковы. Тем не менее в некоторых случаях проявляются особенности их строения. Отметим, при изучении каких явлений следует отличать жидкости от газов.

Первое отличие заключается в том, что газы — это среды, которые обладают свойством легко сжиматься и в которых скорость распространения механических возмущений (скорость звука) значительно меньше, чем в жидкостях. Эту особенность следует учитывать, если рассматриваются случаи, когда скорость движения газа (или скорость движения твердого тела в нем) становится соизмеримой со скоростью звука или превышает ее. Область механики жидкости и газа, в которой возникает необходимость учитывать сжимаемость изучаемой среды, выделена в отдельный раздел, называемый *газовой динамикой*. В рамках этого раздела изучается движение сверхзвуковых самолетов, космических объектов, высокоскоростных паровых и газовых турбин.

Второе отличие жидкости от газа заключается в способности жидкости иметь граничную поверхность между нею и окружающим ее газом. Такая граница называется *свободной поверхностью*.

Эти два отличия свойств жидкости и газа обусловлены разницей их молекулярной структуры. Как уже отмечено, в жидкости существенную роль играет постоянное взаи-

модействие соседних молекул. В газах молекулы взаимодействуют только в моменты столкновения друг с другом, большую часть времени они свободно перемещаются в пространстве. Поэтому вследствие хаотического характера теплового движения молекул газа он стремится равномерно распределиться по всей занимаемой им части пространства. Часть пространства, занимаемая газом, как правило, ограничена твердыми или жидкими границами, если эта часть пространства не замкнута, то объем газа может неограниченно возрастать.

Третье отличие жидкости от газа заключается в том, что в газе можно неограниченно уменьшать давление или повышать температуру, при этом свойства газа меняются непрерывно. В жидкости при уменьшении давления ниже определенного значения образуются паровоздушные пузырьки, т. е. возникают фазовые переходы. Это явление носит название *кавитации* и играет существенную роль в процессах движения жидкостей. При возникновении кавитации качественно меняются свойства текучей среды и характер течения. Аналогичные явления могут иметь место и при повышении температуры жидкости.

Таким образом, основные отличия жидкости от газа — сжимаемость газа, наличие свободных поверхностей и фазовых переходов в жидкостях. Как правило, ограничения, накладываемые этими отличиями, сравнительно легко устанавливаются.

Поэтому собственно жидкости называют *капельными* или *несжимаемыми*. Сжимаемые среды — это газообразные тела.

Для гидравлики наиболее интересны и существенны те свойства жидкостей, которые связаны с проявлением инерции, вязкости и сжимаемости. Иногда учитывают теплоемкость, теплопроводность, объемное тепловое расширение.

Физические свойства реальных жидкостей характеризуются следующими основными физическими характеристиками:

- плотностью;
- сжимаемостью;

- вязкостью;
- температурным расширением;
- поверхностным натяжением.

1.2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

ПЛОТНОСТЬ

В рамках гипотезы сплошности считается, что масса жидкости распределена в объеме занимаемого ею пространства непрерывно и в общем случае неравномерно.

Плотность — это масса единицы объема жидкости, т. е. величина, характеризующая распределение массы тела в пространстве, занятом жидкостью.

Численно плотность однородной среды определяется как

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m — масса жидкости, заключенная в объеме V .

Если среда неоднородна, плотность жидкости в какой-либо точке определяется предельным переходом

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

где Δm — масса малого объема жидкости ΔV , содержащего рассматриваемую точку.

Единица измерения плотности в СИ $[\rho] = M/L^3 = \text{кг}/\text{м}^3$, в технической системе — $\text{кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$.

Наряду с плотностью в гидравлике используется понятие объемного веса.

Объемный вес жидкости — это вес единицы объема жидкости:

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad \text{или} \quad \gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V},$$

где G — вес однородной жидкости в объеме V ; ΔG — вес жидкости в малом объеме ΔV .

Единицы измерения объемного веса в СИ — Н/м³, в технической системе — кГ/м³, Г/см³ и т. д.

Связь плотности и объемного веса просто устанавливается из второго закона Ньютона, записанного для силы тяжести:

$$G = mg; \quad \frac{G}{V} = \frac{m}{V}g \quad \text{или} \quad \gamma = \rho g.$$

СЖИМАЕМОСТЬ

Сжимаемость — это свойство жидкости изменять свой объем под действием внешнего давления. Сжимаемость характеризуется коэффициентом объемной сжимаемости, который представляет собой изменение объема жидкости на единицу изменения давления, отнесенное к единице объема (относительное изменение объема):

$$\beta_V = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp},$$

где V — первоначальный объем жидкости; dV — изменение объема жидкости при увеличении давления на величину dp .

Коэффициент объемной сжимаемости измеряется в СИ в м²/Н (1/Па), в технической системе — в см²/кГ, м²/кГ.

Знак «минус» в формуле для коэффициента объемной сжимаемости обусловлен тем, что увеличению (положительному приращению) давления соответствует уменьшение (отрицательное приращение) объема жидкости.

В жидкостях велико внутримолекулярное давление, поэтому сжимаемость их очень мала. Например, для воды при не очень больших давлениях коэффициент объемной сжимаемости

$$\beta_V \cong \frac{1}{210\,000\,000} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}.$$

Иначе говоря, если на воду, находящуюся при атмосферном давлении, наложить дополнительно еще такое же давление, то объем воды уменьшится на 1/21 000, т. е. практически незаметно. Поэтому воду и другие жидкости

обычно считают несжимаемыми и принимают их плотность постоянной и независимой от давления.

Величина, обратная коэффициенту объемной сжимаемости, называется модулем объемной упругости жидкости:

$$E_0 = \frac{1}{\beta_V}.$$

Представив в формуле для коэффициента объемной сжимаемости $dV = V_1 - V$, где V_1 — объем после изменения давления, получаем

$$\beta_V = -\frac{V_1 - V}{V dp},$$

откуда

$$\beta_V V dp = V - V_1; \quad V_1 = V(1 - \beta_V dp).$$

Так как $V = \frac{G}{\rho}$, где G — вес жидкости, то для плотности после изменения давления получим

$$\rho_1 = \frac{\rho}{1 - \beta_V dp}.$$

ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАСШИРЕНИЕ

Температурное расширение жидкости — это изменение объема при изменении температуры. Его характеризуют коэффициентом температурного расширения:

$$\beta_T = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT},$$

где V — первоначальный объем жидкости; dT — изменение температуры.

Единица измерения коэффициента температурного расширения — $1/\text{град}$ (град^{-1}).

Коэффициент температурного расширения для жидкости — это относительное увеличение объема жидкости при повышении температуры на 1°C и постоянном давлении. Для капельных жидкостей β_T небольшая величина. Она меняется в зависимости от диапазона температуры

и давления. Например, для воды при нормальном атмосферном давлении и температуре 10–20°C коэффициент $\beta_T = 0,00015$ град⁻¹.

Проведем преобразования

$$dV = V_1 - V; \quad \beta_T V dT = V_1 - V; \quad V_1 = V(1 + \beta_T dT)$$

и получим формулу для изменения плотности при изменении температуры

$$\rho_1 = \frac{\rho}{1 + \beta_T dT}.$$

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Силы притяжения молекул внутри объема жидкости взаимно уравниваются и проявляются только на границах — на твердых стенках, на свободной поверхности. На свободной поверхности из-за того, что сила притяжения со стороны молекул воздуха значительно меньше, чем сила взаимного притяжения молекул жидкости, появляется результирующая сила, направленная внутрь объема. Молекулы поверхностного слоя находятся в особом напряженном состоянии, образуется как бы тонкая упругая пленка, возникает *поверхностное натяжение*. Энергия поверхностных молекул отличается от энергии молекул, расположенных в объеме. Суммарная величина этой «поверхностной» энергии E_{π} пропорциональна площади поверхности S раздела сред:

$$E_{\pi} = \sigma S.$$

Коэффициент пропорциональности σ , входящий в эту зависимость, получил название *коэффициента поверхностного натяжения*. Величина его зависит от природы соприкасающихся сред, степени чистоты жидкости и ее температуры.

Коэффициент поверхностного натяжения можно также представить соотношением

$$\sigma = \frac{F}{l},$$

где F — сила поверхностного натяжения; l — длина линии раздела сред.

Из этого определения видно, что коэффициент поверхностного натяжения — это сила, действующая на единицу длины линии раздела сред и направленная по касательной к поверхности жидкости.

Единица измерения поверхностного натяжения в СИ $[\sigma] = \text{Н/м}$, в технической системе — кГ/м .

Величина коэффициента поверхностного натяжения жидкостей небольшая. Например, для воды при температуре $T = +20^\circ\text{C}$ оно составляет около 7 Г/м . Именно поэтому силы поверхностного натяжения в гидравлике обычно не учитываются.

Молекулярное давление, определяющее величину поверхностного натяжения, зависит от кривизны поверхности раздела жидкой и газообразной сред. Оно становится заметным только при малых размерах объемов жидкости, например, в капиллярных трубках. Именно благодаря поверхностному натяжению жидкость, смачивающая поверхность стенок капиллярных трубок, образует вогнутый мениск и подтягивается вверх: силы сцепления между молекулами твердой поверхности стенок и молекулами жидкости выше молекулярных сил взаимодействия внутри жидкости. В случае несмачиваемой поверхности в капиллярной трубке устанавливается выпуклый мениск и жидкость в трубке опускается: силы взаимодействия между стенкой и жидкостью меньше внутренних сил взаимодействия в жидкости.

ВЯЗКОСТЬ

Очень важным для гидравлики физическим свойством жидкости является *вязкость* — свойство жидкости оказывать сопротивление движению слоев жидкости относительно друг друга.

Вследствие молекулярного взаимодействия в жидкости возникают силы внутреннего трения: слой, движущийся быстрее, увлекает за собой слой, движущийся медленнее, а тот, в свою очередь, тормозит слой, движущийся быстрее. Таким образом, вязкость проявляется в виде возникновения силы трения при перемещении (сдвиге) слоев жидкости относительно друг друга. Другими словами,

вязкость — это свойство, обуславливающее возникновение в жидкости при ее движении касательных напряжений.

И. Ньютон предложил гипотезу о том, что сила F вязкости (трения) между двумя соседними слоями жидкости с площадью соприкасания ω равна

$$F = -\mu\omega \frac{dv}{dn},$$

где μ — динамический коэффициент вязкости; dv/dn — поперечный градиент скорости движения жидкости; dv — скорость смещения слоев жидкости относительно друг друга; dn — расстояние между осями соседних слоев жидкости.

Знак «минус» в формуле указывает на то, что сила трения направлена противоположно направлению движения.

Размерность динамического коэффициента вязкости в СИ $[\mu] = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ (Па·с). В системе СГС единица динамической вязкости г/(см·с) называется *пуаз* в честь французского ученого А. Пуазейля.

Динамический коэффициент вязкости (динамическая вязкость) зависит от природы жидкости и температуры. С повышением температуры жидкости коэффициент вязкости μ уменьшается.

Если силу трения между слоями отнести к площади соприкосновения слоев, то полученная удельная сила трения называется *касательным напряжением*:

$$\tau = \frac{F}{\omega} = -\mu \frac{dv}{dn}.$$

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости в гидравлике широко используется *кинематический коэффициент вязкости* ν , представляющий отношение μ к плотности ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

который имеет размерность в СИ и технической системе $[\nu] = L^2/T = \text{м}^2/\text{с}$. До 1980 г. допускалось измерение кинематической вязкости в stokсах (названных так в честь английского гидромеханика Дж. Стокса): 1 Ст = 1 см²/с.

Вязкость играет очень важную роль в процессе движения жидкостей. В природе мало жидкостей, вязкость которых меньше, чем вязкость воды, но существует много жидкостей с большой вязкостью (масла, нефть), есть очень вязкие жидкости (глицерин, патока).

Идеальная жидкость. В гидравлике часто используется и играет большую роль понятие «идеальной» жидкости.

Под идеальной жидкостью понимается жидкость, частицы которой обладают абсолютной подвижностью, т. е. идеальная жидкость не имеет вязкости, не испытывает температурного расширения и абсолютно несжимаема. Введение в рассмотрение подобной научной абстракции вместо реальной жидкости упрощает решение ряда гидравлических задач, позволяет широко использовать математические методы, проводить обобщения и аналогии. Такой подход научно обоснован и является полезным и плодотворным. Конечно, при применении получаемых для идеальной жидкости решений и выводов в конкретных обстоятельствах приходится вносить необходимые поправки и дополнения, которые следуют из практики и учитывают реальные условия. Однако, как показал опыт, получаемые таким образом картины течения достаточно хорошо согласуются с реальными процессами.

ГИДРОСТАТИКА

2.1.
СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ
В ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Раздел гидравлики, изучающий законы равновесия жидкости и нахождения ее в покое, называется *гидростатикой*. Исходя из гипотезы сплошности, будем считать, что жидкость сплошным образом занимает пространство и все искомые характеристики жидкости будут непрерывными функциями координат.

На жидкость и при равновесии, и при движении действуют силы внешние и внутренние.

Внутренние силы — это силы взаимодействия между частицами жидкости. Согласно третьему закону Ньютона, они взаимно уравновешиваются и не влияют на равновесие или процесс движения рассматриваемых объемов жидкости. Поэтому при изучении процессов гидравлики они, как правило, не принимаются во внимание.

Внешние силы — это силы взаимодействия рассматриваемого объема жидкости с окружающей средой. В гидравлике такие силы разделяют на объемные (массовые) и поверхностные.

Объемные силы действуют на каждую частицу жидкости в рассматриваемом объеме. В соответствии со вторым законом Ньютона эти силы пропорциональны массе жидкости или (для однородной жидкости) ее объему. Коэффициент пропорциональности — ускорение частицы:

$$F = a\rho V = am,$$

где a — ускорение движущейся частицы жидкости; ρ — плотность жидкости; V и m — соответственно объем и масса частицы жидкости.

Примеры объемных сил — силы тяжести, силы инерции, электромагнитные силы (если жидкость несет электрический заряд).

Далее мы часто будем использовать понятие единичной массовой силы, т. е. массовой силы, приходящейся на единицу массы жидкости — F/m . Проекции единичной массовой силы на оси декартовых координат будем обозначать через X , Y , Z . Эти величины имеют размерность ускорения. Например, если на жидкость действует сила тяжести, то проекции X , Y равны нулю, а проекция $Z = -g$ (сила действует в отрицательном направлении оси Z).

Поверхностные силы возникают в местах контакта рассматриваемого объема жидкости с соседними поверхностями: со стенками сосуда или трубы, с поверхностью раздела с газообразной средой, с соседними объемами жидкости. Поверхностные силы непрерывно распределены по поверхности жидкой частицы и зависят от площади этой поверхности, но не зависят от объема (массы) частицы. Такие силы обусловлены воздействием на рассматриваемый объем жидкости соседних объемов или соприкасающихся с ним тел (твердых или газообразных). В общем случае поверхностная сила, действующая на некоторую площадку поверхности, направлена под некоторым углом к ней. Значит, ее можно разложить на нормальную и касательную составляющие. Нормальная составляющая — это сила давления, касательная составляющая — сила трения. Приходящаяся на единицу площади поверхностная сила называется *напряжением*.

Нормальное напряжение — это *гидромеханическое* (в частном случае покоя — гидростатическое) *давление* p , касательное напряжение — это *напряжение трения* τ .

$$p = \frac{P}{\omega}; \quad \tau = \frac{F}{\omega},$$

где P — нормальная к площадке поверхностная сила; F — касательная к площадке поверхностная сила; ω — площадь, на которую действуют поверхностные силы.

Эти формулы справедливы, если поверхностные силы равномерно распределены по поверхности площадки ω .

В общем случае неравномерного распределения сил напряжения в конкретной точке поверхности находим, устремляя к нулю рассматриваемую элементарную площадку, т. е. стягивая ее в точку:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}; \quad \tau = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\omega}.$$

Смысл разделения поверхностного напряжения на нормальное и касательное заключается прежде всего в том, что различна их роль в практических задачах. Например, при движении жидкости в трубах нормальное напряжение (давление) определяет прочность стенок, а касательное — сопротивление движению. При обтекании тел касательные напряжения действуют только в узком пограничном слое и быстро уменьшаются с удалением от стенки, в то время как нормальные напряжения (давление) по толщине пограничного слоя практически не меняются. Если выделить какой-то объем за пределами пограничного слоя, то на его поверхности действуют только силы давления. То же самое происходит и в случаях равновесия жидкости — касательные напряжения отсутствуют.

2.2. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Напомним, что в разделе гидростатики исследуется жидкость, находящаяся в состоянии равновесия (или относительного покоя), скорости движения и угловые скорости сдвига равны нулю. В этом случае сопротивляемость жидкости сдвигающим и растягивающим усилиям отсутствует.

Введем понятие гидростатического давления.

Рассмотрим произвольный объем жидкости, находящийся в равновесии (рис. 2.1). Мысленно рассежем его плоскостью BC на две части — I и II. Части I и II взаимодействуют по плоскости раздела. Отбросим мысленно первую часть рассматриваемого объема. При этом для сохранения равновесия второй части суммарное воздействие на нее отсеченной части заменим силой P . Сила воздействия, приходящаяся на площадку раздела, называется силой гид-

ростатического давления. Пусть площадь всей плоскости раздела равна ω . Отношение силы давления P к площади ω — это среднее гидростатическое давление на площади BC :

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{\omega}.$$

Для того чтобы определить давление в некоторой точке A , выделим вокруг нее малую площадку $\Delta\omega$, сила, приходящаяся на эту площадку, — ΔP .

Гидростатическим давлением в точке A называется предел

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta P}{\Delta\omega} \right).$$

Из определения текучести среды следует, что в состоянии покоя касательные напряжения в жидкости равны нулю и в каждой точке произвольно ориентированной в пространстве площадки действуют только нормальные напряжения.

Отсюда вытекает *первое свойство* гидростатического давления: *гидростатическое давление всегда совпадает с направлением внутренней нормали к рассматриваемой площадке.*

Предположим обратное — что сила гидростатического давления направлена не по нормали к поверхности выделенного объема. Тогда ее можно разложить на нормальную и касательную составляющие. Но касательная составляющая вызвала бы скольжение жидкости вдоль поверхности. А мы рассматриваем случай покоящейся жидкости, т. е. неподвижной и находящейся в равновесии. Значит, на поверхности существуют только нормальные составляющие давления. Более того, они направлены внутрь рассматриваемого объема (иначе на поверхности возникли бы растягивающие напряжения, а их жидкости не воспринимают), следовательно, являются сжимающими.

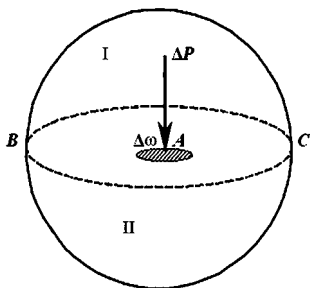


Рис. 2.1

Второе свойство гидростатического давления состоит в следующем: *величина гидростатического давления в данной точке не зависит от направления той площадки, на которую оно действует.*

Направление площадки будем характеризовать направлением нормали к ней. Второе свойство давления означает, что если через одну точку внутри жидкости провести две по-разному ориентированные площадки (рис. 2.2), то гидростатические давления p_1 и p_2 , действующие на этих площадках, по величине будут одинаковы, т. е. $|p_1| = |p_2|$.

Для доказательства второго свойства давления выделим в неподвижной жидкой среде элементарный объем в форме тетраэдра (рис. 2.3) с ребрами, параллельными координатным осям и соответственно равными dx , dy , dz .

Рассмотрим условия равновесия этого объема жидкости, мысленно отбросив окружающую его часть жидкости. В общем случае на тетраэдр действуют следующие силы:

- объемные силы, проекции на оси которых, приходящиеся на единицу массы, будут X , Y , Z ;
- поверхностные силы со стороны отброшенной части жидкости.

Составим уравнение равновесия в проекции, например на ось x .

Проекция на ось x объемных сил, действующих на тетраэдр, будет

$$\frac{1}{6}\rho X dx dy dz.$$

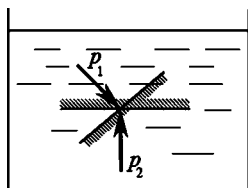


Рис. 2.2

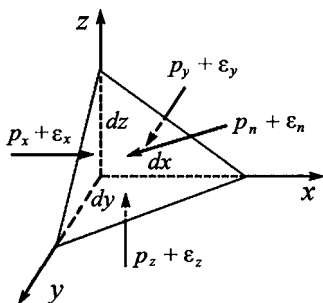


Рис. 2.3

Обозначим давление в центре координат — p , проекции его — p_x, p_y, p_z .

Тогда давление в центре тяжести грани $dydz$ можем записать как $(p_x + \varepsilon_x)$, где ε_x — малая величина. Аналогично, давление в центре тяжести грани $dxdy$ будет $(p_z + \varepsilon_z)$, в центре тяжести грани $dxdz$ — $(p_y + \varepsilon_y)$, в центре тяжести скошенной грани — $(p_n + \varepsilon_n)$. Поверхностные силы, действующие на грани, получаем, умножая эти давления на площади соответствующих граней.

Поскольку давления на грани $dxdy$ и $dxdz$ перпендикулярны оси x , их проекции на эту ось будут нулевыми, и уравнение равновесия в проекции на ось x будет

$$\frac{1}{2}(p_x + \varepsilon_x)dydz - (p_n + \varepsilon_n)d\omega \cos(n, x) + \frac{1}{6}\rho X dxdydz = 0,$$

где $d\omega$ — площадь скошенной грани тетраэдра; (n, x) — угол между осью x и нормалью к скошенной грани n .

Последним членом уравнения, как бесконечно малой величиной высшего порядка по отношению к другим членам уравнения, можно пренебречь.

Произведение $d\omega \cos(n, x)$ — это проекция скошенной грани на плоскость yz .

Тогда

$$d\omega \cos(n, x) = \frac{1}{2}dydz.$$

С учетом этого из уравнения получаем

$$p_x + \varepsilon_x = p_n + \varepsilon_n.$$

Так как размеры тетраэдра выбраны произвольно, то, уменьшая их (стягивая тетраэдр в точку), будем иметь: $\varepsilon_n \rightarrow 0$; $\varepsilon_x \rightarrow 0$. Из этого следует, что $p_x = p_n$. Рассуждая аналогично для проекций уравнения равновесия на другие оси, в результате получим:

$$p_x = p_n;$$

$$p_y = p_n;$$

$$p_z = p_n.$$

Следовательно,

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Направление n также выбрано произвольно, следовательно, гидростатическое давление не зависит от наклона площадки, на которую оно действует. При этом давление не будет одинаковым в разных точках пространства, занятого жидкостью, гидростатическое давление в точке зависит от ее координат в пространстве:

$$p = f(x, y, z).$$

Законы распределения давления в покоящейся жидкости и рассматриваются в гидростатике.

Заметим, что касательные напряжения в покоящейся жидкости равны нулю независимо от вязкости жидкости, а не только в идеальной жидкости.

Для сохранения сплошности жидкости давление в ней не должно быть меньше некоторого минимума, равного давлению насыщенных паров при данной температуре, т. е.

$$p > p_{\min} = p_{\text{н.п.}}$$

Если это условие не соблюдается, то при понижении давления ниже минимального происходит разрыв сплошности жидкости. Жидкость закипает — при понижении давления в ней начинается образование пузырьков пара. Это явление называется *кавитацией*.

2.3. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Выделим в покоящейся жидкости вокруг точки A элементарный объем в виде параллелепипеда (рис. 2.4) и составим условия его равновесия.

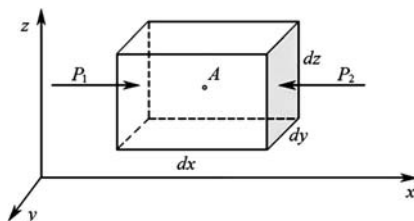


Рис. 2.4

На этот параллелепипед выделенной жидкости действуют поверхностные силы (силы гидростатического давления) и объемные силы.

Примем, что давление в центре параллелепипеда (в точке A) равно p_A .

Тогда давление в центре левой грани p_1 будет

$$p_1 = p_A - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Сила давления на всю левую грань

$$P_1 = p_1 dydz = \left(p_A - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz.$$

Аналогично, сила давления на правую грань

$$P_2 = \left(p_A + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz,$$

где $\frac{\partial p}{\partial x}$ — изменение гидростатического давления по оси x на единицу длины. Знак этой величины определяется направлением перемещения от точки A к соответствующим граням: если перемещение противоположно направлению оси x — знак «минус», если совпадает с направлением оси x — знак «плюс».

Проекция объемных сил на ось x будет равна $\rho X dx dy dz$.

Тогда уравнение равновесия (покоя) выделенного объема жидкости в проекции на ось x можно записать в виде

$$\sum P_x = P_1 - P_2 + \rho X dx dy dz = 0.$$

Подставляя значения P_1 и P_2 и приводя подобные члены, имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho X dx dy dz = 0.$$

Сокращая на объем параллелепипеда $dx dy dz$, получим уравнение для единицы объема жидкости:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Уравнения для других осей запишем по аналогии:

$$\rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$\rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера. В них заключаются необходимые и достаточные условия равновесия жидкости, так как если эти условия выполняются в любой точке жидкости, то каждая частица жидкости находится в равновесии.

Обычно систему дифференциальных уравнений равновесия (уравнения Эйлера) записывают в следующем виде:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Уравнения Эйлера показывают, что в состоянии покоя массовые силы, действующие на каждую частичку жидкости, уравновешиваются поверхностными силами (градиентом давления).

Для вывода основного уравнения гидростатики необходимо проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения равновесия (2.1).

Умножим каждый член первого из уравнений Эйлера на dx , второго и третьего — на dy и dz соответственно и сложим почленно. В результате получим

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (2.2)$$

Очевидно, что правая часть уравнения (2.2) представляет собой полный дифференциал давления dp , поскольку давление является функцией координат $p = f(x, y, z)$. Но если правая часть уравнения есть полный дифференциал, то для того, чтобы уравнение оставалось справедливым, и левая его часть должна быть полным дифферен-

циалом какой-то функции. Тогда в случае однородной несжимаемой жидкости, т. е. когда $\rho = \text{const}$, существует некая функция координат $U = f(x, y, z)$, которая обладает следующим свойством:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z.$$

Силы, для которых такая функция существует, называются силами, имеющими потенциал. Функция U называется силовой потенциальной функцией.

Тогда уравнение равновесия (2.2) можно записать в виде

$$\rho dU = dp. \quad (2.3)$$

Из этого можно сделать вывод, что несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только под действием объемных сил, имеющих потенциал.

Как известно, к таким силам относится, например, сила тяжести. Если на жидкость действует только одна объемная сила — сила тяжести, то можем записать

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Уравнение равновесия тогда примет вид

$$-\rho g dz = dp.$$

Считая $\rho = \text{const}$, интегрируем и получаем

$$-\rho g z = p + \text{const} \quad \text{или} \quad p = -\rho g z - \text{const}.$$

Отсюда видно, что в покоящейся жидкости, на которую действуют только силы тяжести, давление есть функция только одной вертикальной координаты — z . Это уравнение, записанное в виде

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}, \quad (2.4)$$

называют основным уравнением гидростатики.

Константу в уравнении (2.4) определим из граничного условия.

Расположим начало координат на поверхности жидкости, где $p = p_0$, при $z = 0$.

Тогда имеем $\text{const} = -p_0$.

Используем новую переменную — глубину погружения от поверхности жидкости $h = -z$. Тогда окончательно получим уравнение для гидростатического давления:

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (2.5)$$

Таким образом, давление в любой точке жидкости, находящейся под действием силы тяжести, складывается из давления на поверхности и произведения объемного веса жидкости на глубину погружения этой точки. Из уравнения видно, что давление изменяется линейно с глубиной погружения.

2.4.

АБСОЛЮТНОЕ И ИЗБЫТОЧНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Давление, отсчитываемое от абсолютного нуля, называется абсолютным давлением и обозначается $p_{\text{абс}}$. Абсолютный нуль давления означает полное отсутствие сжимающих напряжений.

В открытых сосудах или водоемах давление на поверхности равно атмосферному $p_{\text{атм}}$. Разность между абсолютным давлением $p_{\text{абс}}$ и атмосферным $p_{\text{атм}}$ называется избыточным давлением:

$$p_{\text{изб}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{атм}}.$$

Когда давление в какой-либо точке, расположенной в объеме жидкости, больше атмосферного, т. е. $p_{\text{абс}} > p_{\text{атм}}$, то избыточное давление положительно и его называют *манометрическим*.

Если давление в какой-либо точке оказывается ниже атмосферного, т. е. $p_{\text{абс}} < p_{\text{атм}}$, то избыточное давление отрицательно. В этом случае его называют *разрежением* или *вакуумметрическим* давлением. За величину разрежения или вакуума принимается недостаток до атмосферного давления:

$$\begin{aligned} p_{\text{вак}} &= p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}; \\ p_{\text{изб}} &= -p_{\text{вак}}. \end{aligned}$$

Максимальный вакуум возможен, если абсолютное давление станет равным давлению насыщенного пара, т. е. $p_{\text{абс}} = p_{\text{н.п.}}$

Тогда

$$p_{\text{вак max}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{н.п.}}$$

В случае, если давлением насыщенного пара можно пренебречь, имеем

$$p_{\text{вак max}} = p_{\text{атм}}.$$

Единицей измерения давления в СИ является паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$), в технической системе — техническая атмосфера ($1 \text{ атм} = 1 \text{ кг/см}^2 = 98,1 \text{ кПа}$). При решении технических задач атмосферное давление принимается равным $1 \text{ атм} = 98,1 \text{ кПа}$.

Манометрическое (избыточное) и вакуумметрическое (разрежение) давление часто измеряются с помощью стеклянных, открытых сверху трубок — пьезометров, присоединяемых к месту измерения давления (рис. 2.5).

Пьезометры измеряют давление в единицах высоты подъема жидкости в трубке. Пусть трубка пьезометра присоединена к резервуару на глубине h_1 от поверхности жидкости в нем. Высота подъема жидкости в трубке пьезометра определяется давлением жидкости в точке присоединения. Давление в резервуаре на глубине h_1 определится из основного закона гидростатики в форме (2.5)

$$p_{\text{абс}} = p_0 + \rho g h_1,$$

где $p_{\text{абс}}$ — абсолютное давление в точке присоединения пьезометра; p_0 — абсолютное давление на свободной поверхности жидкости.

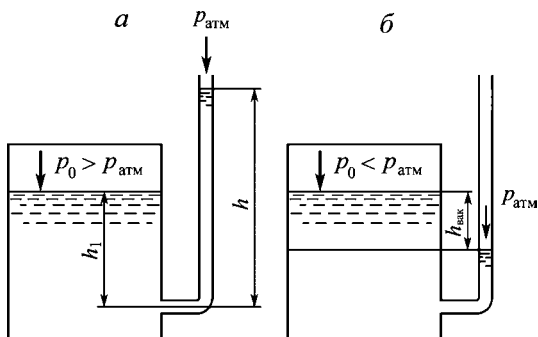


Рис. 2.5

Давление в трубке пьезометра (открытой сверху) на глубине h равно

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{атм}} + \rho gh.$$

Из условия равенства давлений в точке присоединения со стороны резервуара и в пьезометрической трубке получаем

$$h = h_1 + \frac{p_0 - p_{\text{атм}}}{\rho g}. \quad (2.6)$$

Если абсолютное давление на свободной поверхности жидкости больше атмосферного ($p_0 > p_{\text{атм}}$) (см. рис. 2.5а), то избыточное давление будет манометрическим и высота подъема жидкости в трубке пьезометра $h > h_1$. В этом случае высоту подъема жидкости в трубке пьезометра называют *манометрической* или *пьезометрической высотой*.

Манометрическое давление в этом случае определится как

$$p_{\text{ман}} = p_{\text{изб}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{атм}} = \rho gh.$$

Если абсолютное давление на свободной поверхности в резервуаре будет меньше атмосферного (см. рис. 2.5б), то в соответствии с формулой (2.6) высота подъема жидкости в трубке пьезометра h будет меньше глубины h_1 . Величину, на которую опустится уровень жидкости в пьезометре относительно свободной поверхности жидкости в резервуаре, называют *вакуумметрической высотой* $h_{\text{вак}}$ (см. рис. 2.5б).

Рассмотрим еще один интересный опыт. К жидкости, находящейся в закрытом резервуаре, на одинаковой глубине присоединены две вертикальные стеклянные трубки: открытая сверху (пьезометр) и запаянная сверху (рис. 2.6).

Будем считать, что в запаянной трубке создано полное разряжение, т. е. давление на поверхности жидкости в запаянной трубке равно нулю. (Строго говоря, давление над свободной поверхностью жидкости в запа-

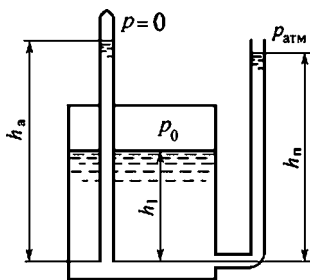


Рис. 2.6

янной трубке равно давлению насыщенных паров, но ввиду его малости при обычных температурах этим давлением можно пренебречь.)

В соответствии с формулой (2.6) жидкость в запаянной трубке поднимется на высоту, соответствующую абсолютному давлению на глубине h_1 :

$$h_a = h_1 + \frac{p_0}{\rho g}.$$

А жидкость в пьезометре, как показано ранее, поднимется на высоту, соответствующую избыточному давлению на глубине h_1 .

Возьмемся к основному уравнению гидростатики (2.4). Величина H , равная

$$H = z + \frac{p}{\rho g}, \quad (2.7)$$

где z — расстояние по вертикали от рассматриваемой точки до некоторой плоскости сравнения, называется *гидростатическим напором* в некоторой точке объема жидкости относительно плоскости сравнения.

Если в выражении (2.7) давление равно избыточному ($p = p_{изб}$), то величина

$$H_p = z + \frac{p_{изб}}{\rho g} \quad (2.8)$$

называется *пьезометрическим напором*.

Как следует из формул (2.7), (2.8), напор измеряется в метрах.

Согласно основному уравнению гидростатики (2.4), как гидростатический, так и пьезометрический напоры в покоящейся жидкости относительно произвольно выбранной плоскости сравнения являются постоянными величинами. Для всех точек объема покоящейся жидкости гидростатический напор одинаков. То же самое можно сказать и про пьезометрический напор.

Это значит, что если к резервуару с покоящейся жидкостью подключить на разной высоте пьезометры, то уровни жидкости во всех пьезометрах установятся на одинаковой высоте в одной горизонтальной плоскости, называемой пьезометрической.

2.5. ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Во многих практических задачах бывает важно определить вид и уравнение поверхности уровня.

Поверхностью уровня или *поверхностью равного давления* называется такая поверхность в жидкости, давление во всех точках которой одно и то же, т. е. на такой поверхности $dp = 0$.

Так как давление является некоторой функцией координат $p = f(x, y, z)$, то уравнение поверхности равного давления будет

$$p = f(x, y, z) = C = \text{const.} \quad (2.9)$$

Придавая константе C разные значения, будем получать различные поверхности уровня. Уравнение (2.9) есть уравнение семейства поверхностей уровня.

Свободная поверхность — это поверхность раздела капельной жидкости с газом, в частности с воздухом. Обычно про свободную поверхность говорят только для несжимаемых (капельных) жидкостей. Понятно, что свободная поверхность является и поверхностью равного давления, величина которого равна давлению в газе (на поверхности раздела).

По аналогии с поверхностью уровня вводят понятие *поверхности равного потенциала* или *экипотенциальной поверхности* — это поверхность, во всех точках которой силовая функция имеет одно и то же значение. То есть на такой поверхности

$$U = \text{const}$$

или

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Тогда уравнение семейства экипотенциальных поверхностей будет иметь вид

$$U(x, y, z) = C,$$

где постоянная C принимает различные значения для разных поверхностей.

Из интегральной формы уравнений Эйлера (2.3) следует, что

$$dU = \frac{1}{\rho} dp.$$

Из этого соотношения можно сделать вывод, что поверхности равного давления и поверхности равного потенциала совпадают, потому что при $dp = 0$ и $dU = 0$.

Важнейшее свойство поверхностей равного давления и равного потенциала состоит в следующем: *объемная сила, действующая на частицу жидкости, находящуюся в любой точке, направлена по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.*

Докажем это свойство.

Пусть частица жидкости из точки с координатами x, y, z переместилась по эквипотенциальной поверхности в точку с координатами $x + dx, y + dy, z + dz$. Работа объемных сил на этом перемещении будет равна

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU.$$

Но, поскольку частица жидкости перемещалась по эквипотенциальной поверхности, $dU = 0$. Значит, работа объемных сил, действующих на частицу, равна нулю. Силы не равны нулю, перемещение не равно нулю, тогда работа может быть равна нулю только при условии, что силы перпендикулярны перемещению. То есть объемные силы нормальны к поверхности уровня.

Обратим внимание на то, что в основном уравнении гидростатики, записанном для случая, когда на жидкость действует только один вид объемных сил — силы тяжести (см. уравнение (2.5))

$$p = p_0 + \rho gh,$$

величина p_0 — обязательно давление на поверхности жидкости. Это может быть давление в любой точке, в которой оно нам известно. Тогда h — это разность глубин (по направлению вертикально вниз) между точкой, в которой давление известно, и точкой, в которой мы хотим его определить. Таким образом, с помощью этого уравнения можно определить значение давления p в любой точке через известное давление в известной точке — p_0 .

Заметим, что величина (ρgh) не зависит от p_0 . Тогда из уравнения (2.5) следует вывод: насколько изменится давление p_0 , настолько же изменится и давление в любой точке объема жидкости p . Поскольку точки, в которых фиксируем p и p_0 , выбраны произвольно, это означает, что *давление, создаваемое в любой точке покоящейся жидкости, передается ко всем точкам занимаемого объема жидкости без изменения величины.*

Как известно, в этом и состоит закон Паскаля.

По уравнению (2.5) можно определить форму поверхностей уровня покоящейся жидкости. Для этого надо положить $p = \text{const}$. Из уравнения следует, что это выполнимо лишь при $h = \text{const}$. Значит, при действии на жидкость из объемных сил только сил тяжести, поверхности уровня представляют собой горизонтальные плоскости. Такой же горизонтальной плоскостью будет и свободная поверхность покоящейся жидкости.

Учитывая вышесказанное, можно сформулировать еще одно свойство гидростатического давления: *гидростатическое давление в любой точке жидкости на одной высоте по всем направлениям одинаково.*

Из этого свойства вытекает и закон сообщающихся сосудов с жидкостью.

Сообщающимися сосудами называются сосуды, соединенные друг с другом таким образом, чтобы жидкость свободно перетекала из одного сосуда в другой.

Закон сообщающихся сосудов гласит: *в открытых сообщающихся сосудах при равновесии жидкости давление на любом горизонтальном уровне одинаково.*

Если в открытые сообщающиеся сосуды налита одинаковая жидкость, то независимо от формы сосудов жидкость в этих сосудах будет находиться на одном уровне (рис. 2.7а).

Если заполнить открытые сообщающиеся сосуды двумя несмешивающимися жидкостями, имеющими плотности ρ_1 и ρ_2 , например ртутью и водой (рис. 2.7б), то жидкость в сосудах распределится таким образом, чтобы давление на любом горизонтальном уровне в обоих сосудах было одинаково. Выберем горизонтальный уровень жидкости AB , ниже которого жидкость однородна (рис. 2.7б).

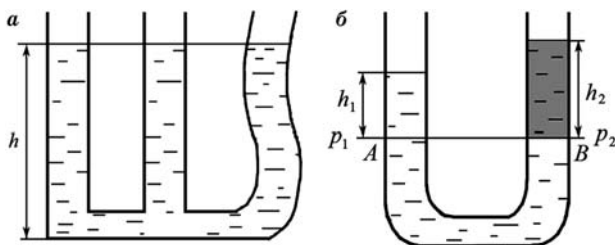


Рис. 2.7

Тогда $p_1 = p_2$.

В соответствии с формулой (2.5) для гидростатического давления в разных сосудах будем иметь

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{\text{атм}} + \rho_1 g h_1; \\ p_2 &= p_{\text{атм}} + \rho_2 g h_2. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) представляет собой условие равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах. Как частный случай из него следует, что если в сообщающиеся сосуды налита одна жидкость (т. е. $\rho_1 = \rho_2$), то уровень жидкости в сосудах будет одинаковым: $h_1 = h_2$.

2.6. ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ

Определим, какую форму принимает поверхность жидкости в равномерно вращающемся сосуде. Свободная поверхность и здесь будет поверхностью уровня, только на этот раз это будет уже не горизонтальная плоскость, поскольку на жидкость из объемных сил действует не только сила тяжести.

При равномерном вращении сосуда с жидкостью поставленную задачу можно рассматривать как гидростатическую, жидкость будет находиться в покое относительно стенок сосуда, т. е. здесь будет наблюдаться случай «относительного покоя». При этом жидкость будет находиться

в равновесии под действием двух объемных сил: силы тяжести и силы инерции — центробежной силы. На каждую частицу жидкости во вращающемся сосуде действуют обе эти силы.

Центробежная сила, действующая на частицу жидкости, находящуюся в некоторой произвольной точке M (рис. 2.8), для кругового движения определится по формуле

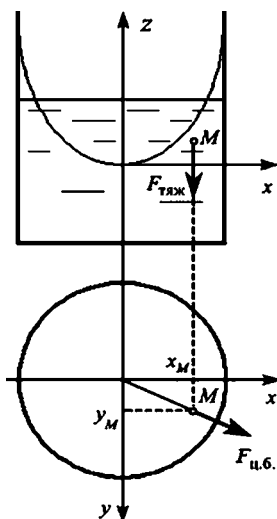


Рис. 2.8

$$F_{ц.б} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r,$$

где r — радиус окружности (расстояние от точки до оси вращения), по которой вращается частица жидкости, находящаяся в точке M ; ω — угловая скорость вращения; m — масса частицы жидкости.

Удельная центробежная сила, т. е. сила, отнесенная к единице массы, будет равна

$$f_{ц.б} = \omega^2 r.$$

Проекции удельной центробежной силы на оси координат определяются как (рис. 2.8)

$$f_{xц.б} = \omega^2 r \cos(r, x) = \omega^2 r \frac{x}{r} = \omega^2 x;$$

$$f_{yц.б} = \omega^2 r \cos(r, y) = \omega^2 r \frac{y}{r} = \omega^2 y;$$

$$f_{zц.б} = 0.$$

Проекции удельной силы тяжести на оси

$$f_{x\text{тяж}} = 0;$$

$$f_{y\text{тяж}} = 0;$$

$$f_{z\text{тяж}} = -g.$$

Суммарно для проекций удельных объемных сил, действующих на частицу жидкости, получаем

$$X = \omega^2 x;$$

$$Y = \omega^2 y;$$

$$Z = -g.$$

Вспомним дифференциальное уравнение равновесия жидкости

$$\rho dU = dp$$

или

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp.$$

Подставим в него значения проекций объемных сил:

$$\rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) = dp.$$

Проинтегрируем уравнение, считая ρ величиной постоянной. Имеем

$$\rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g z \right) = p + \text{const}$$

или

$$\rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z = p + \text{const}.$$

Заметим, что при вращении жидких частиц по круговым траекториям

$$(x^2 + y^2) = r^2.$$

Для определения константы интегрирования сформулируем граничные условия. Обратим внимание на то, что при вращении свободная поверхность жидкости примет симметричную вогнутую форму. Расположим начало координат в низшей точке свободной поверхности. На свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному.

Тогда граничное условие формулируется так: при $x = y = z = 0$ давление $p = p_{\text{атм}}$.

Определяя из этого условия константу интегрирования, получим

$$\text{const} = -p_{\text{атм}}.$$

Уравнение для определения давления примет вид

$$p = p_{\text{атм}} + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z. \quad (2.11)$$

По этой формуле можно вычислить давление в любой точке внутри объема жидкости, находящейся в сосуде, вращающемся с постоянной угловой скоростью.

Как определить форму свободной поверхности жидкости? Свободная поверхность является поверхностью уровня, т. е. поверхностью равного давления. Давление во всех ее точках равно атмосферному $p = p_{\text{атм}}$. Используя это условие, из уравнения (2.11) получаем

$$\rho \frac{\omega^2 r_{\Pi}^2}{2} = \rho g z_{\Pi},$$

где индекс «п» относится к координатам точек, находящихся на поверхности жидкости.

Окончательно имеем

$$z_{\Pi} = \frac{\omega^2}{2g} r_{\Pi}^2. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) дает зависимость вертикальной координаты точек, расположенных на свободной поверхности жидкости, от расстояния до оси вращения: $z_{\Pi} = f(r)$. Это и есть уравнение свободной поверхности жидкости, находящейся в равномерно вращающемся сосуде. Видно, что форма свободной поверхности — параболоид вращения с вертикальной осью симметрии.

2.7. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

Выведем формулу для определения силы суммарного гидростатического давления P , действующего на плоскую стенку произвольного очертания, расположенную под поверхностью жидкости под произвольным углом α к горизонту (рис. 2.9). Выделим на рассматриваемой стенке элементарную площадку $d\omega$.

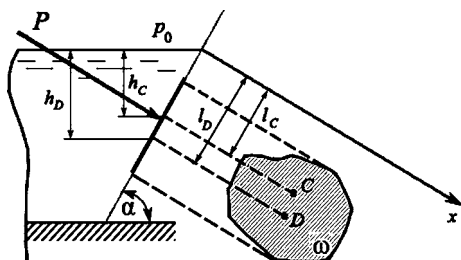


Рис. 2.9

Силу давления на элементарную площадку $d\omega$, расположенную на глубине h , можно записать в виде

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega = p_0 d\omega + \rho gh d\omega,$$

где p_0 — давление на поверхности жидкости.

Если l — координата в плоскости стенки, то $h = l \sin \alpha$.

Тогда

$$dP = p_0 d\omega + \rho g l \sin \alpha d\omega. \quad (2.13)$$

Чтобы найти величину силы давления, действующей на всю площадь ω , нужно проинтегрировать элементарную силу dP , действующую на площадку $d\omega$, по площади ω :

$$P = p_0 \int_{\omega} d\omega + \rho g \sin \alpha \int_{\omega} l d\omega.$$

Интеграл $\int_{\omega} l d\omega = S$ является статическим моментом площади стенки ω относительно оси x , которая представляет собой линию пересечения наклонной плоскости стенки с поверхностью жидкости. Этот момент можно представить как

$$S = \int_{\omega} l d\omega = l_C \omega,$$

где l_C — координата центра тяжести рассматриваемой площадки.

Тогда, учитывая, что

$$l_C = \frac{h_C}{\sin \alpha},$$

где h_C — глубина погружения центра тяжести площадки, получим

$$P = p_0 \omega + \rho g \sin \alpha l_C \omega = p_0 \omega + \rho g h_C \omega, \quad (2.14)$$

или

$$P = (p_0 + \rho g h_C) \omega = p_C \omega,$$

где p_C — давление в центре тяжести стенки.

Таким образом, полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади стенки на гидростатическое давление p_C в центре тяжести этой площадки.

Внешнее давление p_0 передается всем точкам площадки ω одинаково, поэтому его равнодействующая будет приложена в центре тяжести площадки. А давление жидкости распределится по площадке неравномерно.

Точка приложения равнодействующей сил гидростатического давления называется *центром давления*.

Найдем координату центра давления на площадке ω . Будем считать для простоты, что на стенку действуют только силы избыточного давления, т. е.

$$p_0 = 0.$$

Обозначим центр давления буквой D . Тогда его координата по стенке будет l_D . Вспомним теорему механики о том, что момент равнодействующей силы (в нашем случае — гидростатического давления) относительно оси (возьмем ось Ox) равен сумме моментов составляющих сил, т. е.

$$Pl_D = \int_{\omega} dPl.$$

Из формулы (2.13) определим величину dP и с учетом того, что $p_0 = 0$, получим

$$Pl_D = \rho g \sin \alpha \int_{\omega} l^2 d\omega = \rho g \sin \alpha J_x,$$

где J_x — момент инерции площадки ω относительно оси x .

Отсюда

$$l_D = \frac{\rho g \sin \alpha}{P} J_x.$$

Подставим в эту формулу значение P из выражения (2.14) и, учитывая, что $p_0 = 0$, получим

$$l_D = \frac{\rho g \sin \alpha}{\rho g \sin \alpha \omega l_C} J_x.$$

Выразим момент инерции относительно оси x (J_x) через момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести площадки ω и параллельной оси x — J_C :

$$J_x = J_C + \omega l_C^2.$$

Тогда окончательно имеем

$$l_D = l_C + \frac{1}{\omega l_C} J_C. \quad (2.15)$$

Из этой формулы видно, что l_D всегда будет больше l_C , т. е. центр давления лежит глубже, чем центр тяжести площадки ω . Величина $e = \frac{J_C}{\omega l_C}$ имеет размер длины и называется *эксцентриситетом давления*. Эксцентриситет давления уменьшается с увеличением глубины погружения площадки.

Если площадь ω имеет ось симметрии, перпендикулярную оси x , то формула (2.15) полностью определяет положение центра давления. В случае несимметричной фигуры нужно отыскать вторую координату центра давления в направлении, параллельном оси x . Построим ось y , перпендикулярную оси x , и проведем все расчеты и рассуждения, аналогичные вышеприведенным, относительно этой оси. Получим

$$x_D = x_C + \frac{J_{xyC}}{\omega y_C},$$

где $J_{xyC} = \int_{\omega} xy d\omega$ — центробежный момент инерции площадки ω относительно осей x и y .

Следует иметь в виду, что центробежный момент инерции может быть и положительным, и отрицательным, в зависимости от расположения оси y .

В предыдущих рассуждениях принято, что давление на поверхности жидкости p_0 равно нулю. Если оно отличается от нуля, то учесть его можно так: точкой приложения силы внешнего давления на площадку будет центр тяжести этой площадки; точкой приложения избыточного давления является центр давления. Зная две этих силы и точки их приложения, можно найти общий центр давления на площадку, при этом полная сила давления на площадь ω будет равна сумме внешнего и избыточного давлений.

2.8. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ

В общем случае какой угодно криволинейной поверхности, расположенной внутри жидкости, действие сил гидростатического давления на такую поверхность приводится к равнодействующей и моменту пары сил. В част-

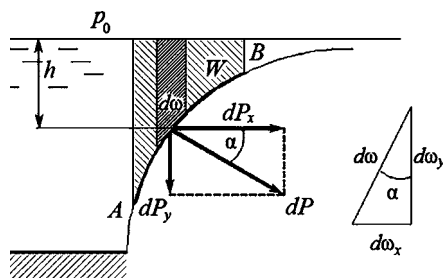


Рис. 2.10

ном случае наиболее распространенных в технике цилиндрической и сферической поверхностей сила давления сводится (в силу симметрии) к одной равнодействующей силе. Определим эту силу для цилиндрической поверхности, расположенной в толще жидкости (рис. 2.10).

Выделим на рассматриваемой цилиндрической поверхности малый элемент площади $d\omega$, кривизной которого можно пренебречь.

Тогда для случая плоской стенки формула нами уже выведена:

$$dP = pd\omega = (p_0 + \rho gh)d\omega.$$

Разложим эту силу на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$dP_y = dP \sin \alpha = (p_0 + \rho gh)d\omega \sin \alpha;$$

$$dP_x = dP \cos \alpha = (p_0 + \rho gh)d\omega \cos \alpha.$$

Из рисунка 2.10 видно, что проекции элементарной площадки на соответствующие оси координат выразятся следующим образом:

$$d\omega \sin \alpha = d\omega_x;$$

$$d\omega \cos \alpha = d\omega_y.$$

Следовательно,

$$dP_y = (p_0 + \rho gh)d\omega_x;$$

$$dP_x = (p_0 + \rho gh)d\omega_y.$$

Для нахождения силы, действующей на всю площадку, проинтегрируем силы, действующие на элементарные площадки.

Горизонтальная составляющая

$$P_x = \int_{\omega_y} (p_0 + \rho gh) d\omega_y = p_0 \omega_y + \rho g \int_{\omega_y} h d\omega_y. \quad (2.16)$$

Интегрирование проводится по площади проекции всей цилиндрической поверхности AB на вертикальную плоскость, обозначим ее ω_y . Второе слагаемое в формуле (2.16) — это статический момент площади ω_y относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Представим его в виде

$$S = \int_{\omega_y} h d\omega = h_C \omega_y,$$

где h_C — глубина погружения центра тяжести площадки ω_y .

Тогда

$$P_x = (p_0 + \rho gh_C) \omega_y.$$

Вертикальная составляющая

$$P_y = \int_{\omega_x} (p_0 + \rho gh) d\omega = p_0 \omega_x + \rho g \int_{\omega_x} h d\omega_x, \quad (2.17)$$

где ω_x — проекция цилиндрической поверхности AB на горизонтальную плоскость. Подынтегральное произведение $h d\omega_x$ во втором слагаемом формулы (2.17) представляет собой элементарный объем, заштрихованный на рисунке 2.10, а значение интеграла равно всему объему жидкости W , находящемуся над поверхностью AB (на рисунке он показан крупной штриховкой). Жидкость, находящаяся в объеме W , называется *телом давления*.

Таким образом,

$$P_y = p_0 \omega_x + \rho g W.$$

Полная сила P гидростатического давления на цилиндрическую поверхность определяется составляющими P_x и P_y , складываемыми по правилу параллелограмма:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

Направление силы P определится углом β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_y}{P_x}.$$

Для цилиндрической поверхности сила P всегда проходит через центр кривизны (ось цилиндра), так как все элементарные составляющие перпендикулярны поверхности стенки и проходят через ее центр тяжести.

При практическом определении вертикальной составляющей силы гидростатического давления существует правило, по которому находится объем тела давления. Объем тела давления ограничен самой цилиндрической поверхностью, двумя вертикальными плоскостями, проходящими через концы цилиндрической поверхности до свободной поверхности жидкости (в случае нахождения жидкости внутри цилиндра, рисунок 2.11а) или до ее продолжения (в случае нахождения жидкости вне цилиндра, рисунок 2.11б). Из рисунка видно, что в первом случае объем тела давления находится внутри жидкости (действительное тело давления), а во втором — вне ее (фиктивное тело давления). Направления вертикальных составляющих оказываются противоположными, а величина их равна весу жидкости, находящейся в теле давления.

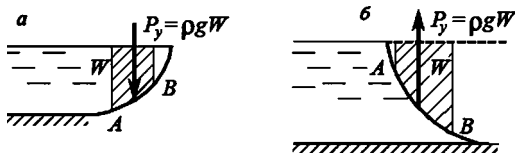


Рис. 2.11

2.9.

СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА СФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Для того чтобы определить силу давления жидкости, действующую на стенку сферической формы, расположен-

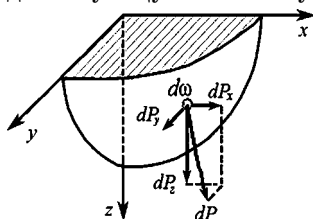


Рис. 2.12

ную под поверхностью жидкости (рис. 2.12), будем находить проекции этой силы на три оси P_x , P_y , P_z и затем равнодействующую по формуле

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

Сила давления на элементарную площадку $d\omega$, которую можно считать плоской, определится как

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho g z) d\omega.$$

Учитывая то, что координата z — это глубина погружения площадки $d\omega$, разложим эту силу на проекции по осям:

$$dP_x = (p_0 + \rho g h) d\omega \cos(n, x);$$

$$dP_y = (p_0 + \rho g h) d\omega \cos(n, y);$$

$$dP_z = (p_0 + \rho g h) d\omega \cos(n, z),$$

где n — нормаль к сферической поверхности в месте расположения элементарной площадки $d\omega$.

Определим проекции элементарной площадки на координатные плоскости:

$$d\omega \cos(n, x) = d\omega_{yz};$$

$$d\omega \cos(n, y) = d\omega_{xz};$$

$$d\omega \cos(n, z) = d\omega_{xy}.$$

Значки-индексы при ω обозначают координатные плоскости, на которые проектируется площадка $d\omega$.

Подставляя эти выражения в формулы для dP_x , dP_y , dP_z , получим

$$dP_x = (p_0 + \rho g h) d\omega_{yz};$$

$$dP_y = (p_0 + \rho g h) d\omega_{xz};$$

$$dP_z = (p_0 + \rho g h) d\omega_{xy}.$$

Проинтегрируем по соответствующим проекциям сферической поверхности ω на координатные плоскости и получим

$$P_x = p_0 \int_{\omega_{yz}} d\omega_{yz} + \rho g \int_{\omega_{yz}} d\omega_{yz} h = p_0 \omega_{yz} + \rho g S_y = p_0 \omega_{yz} + \rho g \omega_{yz} h_C;$$

$$P_y = p_0 \int_{\omega_{xz}} d\omega_{xz} + \rho g \int_{\omega_{xz}} d\omega_{xz} h = p_0 \omega_{xz} + \rho g S_x = p_0 \omega_{xz} + \rho g \omega_{xz} h_C;$$

$$P_z = p_0 \int_{\omega_{xy}} d\omega_{xy} + \rho g \int_{\omega_{xy}} d\omega_{xy} h = p_0 \omega_{xy} + \rho g W,$$

где S_y и S_x — статические моменты площадей ω_{yz} и ω_{xz} относительно осей x и y соответственно (напомним, что $S = h\omega$); h_C — глубина погружения центров тяжести этих площадей; W — объем, образованный сферической поверх-

ностью и плоскостями координат, это тело давления для сферического случая.

В случае если ищем вертикальную составляющую давления на *часть* сферической поверхности, то объем W образуется заданной частью сферической поверхности и вертикальными образующими, проведенными через ее контур.

2.10. ЗАКОН АРХИМЕДА

Рассмотрим теперь погруженное в жидкость тело произвольной формы (рис. 2.13).

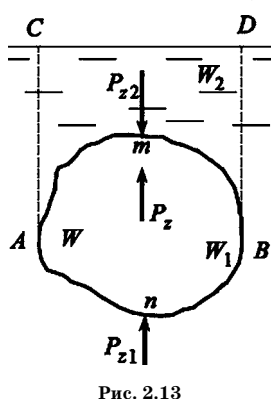


Рис. 2.13

Определим силы давления на него в проекциях на оси координат. Горизонтальные составляющие силы давления на тело P_x будут одинаковы с обеих сторон тела, поскольку проекция его боковой криволинейной поверхности на вертикальную плоскость ω_{yz} , взятая справа и слева, будет одна и та же. Аналогично этому будут одинаковы и горизонтальные составляющие P_y в направлении оси y (проекция поверхности на плоскость ω_{xz}). Значит, горизонтальные со-

ставляющие сил гидростатического давления взаимно уравниваются и не влияют на состояние погруженного тела.

Вертикальные же составляющие будут различны. Действительно, сила давления на нижнюю часть тела — P_{z1} — действует на поверхность AnB , направлена вертикально вверх и равна

$$P_{z1} = \rho g W_1,$$

где W_1 — объем, ограниченный поверхностью $ACDBn$.

Сила давления на верхнюю часть тела P_{z2} , т. е. на поверхность AmB , направлена вниз и равна

$$P_{z2} = \rho g W_2,$$

где W_2 — объем, ограниченный поверхностью $ACDBm$.

Результирующая вертикальная составляющая силы давления будет равна их разности:

$$P_z = P_{z1} - P_{z2} = \rho g(W_1 - W_2) = \rho gW, \quad (2.18)$$

где W — объем тела.

Полученная формула (2.18) выражает закон Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость, действует направленная вверх выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом.*

Из закона Архимеда следует условие плавания тел:

- если вес тела больше выталкивающей силы $G > \rho gW$, то тело тонет;
- при $G < \rho gW$ тело всплывает;
- когда $G = \rho gW$, тело находится во взвешенном состоянии.

Здесь следует сделать оговорку: поскольку сила давления действует по нормали к поверхности жидкости, то в случае, если тело (например, судно) плавает на поверхности потока жидкости, имеющего уклон $i = \sin \alpha$, подъемная сила (сила давления) будет направлена не вертикально, а по нормали к свободной поверхности и будет равна весу вытесненного объема жидкости, умноженному на $\cos \alpha$.

Еще одно интересное приложение — давление на дно тела, лежащего на нем и плотно соприкасающегося частью своей поверхности с дном (рис. 2.14). Здесь также учтем наличие над поверхностью жидкости атмосферного давления $p_{\text{атм}}$. Тогда для случая, изображенного на рисунке, сила давления тела на дно водоема будет

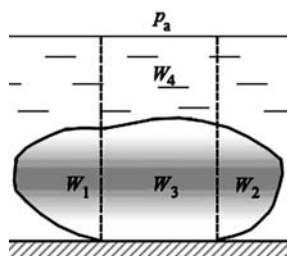


Рис. 2.14

$$P = g(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{в}})(W_1 + W_2) + \rho_{\text{т}}gW_3 + \rho_{\text{в}}gW_4 + p_{\text{атм}}\omega K, \quad (2.19)$$

где $\rho_{\text{т}}$ — плотность материала тела; $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды; W_1 и W_2 — объемы частей тела, нависающих над дном; W_3 — объем средней части тела, опирающейся на дно; W_4 — объем столба воды над опирающейся частью тела; ω — площадь соприкосновения тела с дном.

Поправочный коэффициент $K < 1$ вводится потому, что соприкасание обычно не является полным.

Полученное соотношение (2.19) будет приближенным, так как в действительности между телом и дном образуется пленка жидкости и в ней могут возникнуть силы гидростатического давления на тело.

2.11. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛ

Способность плавающего тела при нарушении равновесия возвращаться в положение равновесия при устранении причин, вызывающих отклонение, называется *устойчивостью* плавающего тела. Понятие устойчивости может быть применено как к телам, полностью погруженным в жидкость (находящимся в подводном положении), так и к телам, плавающим на поверхности жидкости.

На тело, находящееся в жидкости, действуют сила тяжести и гидростатическая (архимедова) выталкивающая сила со стороны жидкости. Точка приложения силы тяжести тела — центр тяжести. Точкой приложения выталкивающей силы является центр давления D . Центр давления в общем случае не совпадает с центром тяжести тела C . Центр давления — это центр тяжести объема жидкости, вытесненной погруженной в жидкость частью тела. Его положение зависит от формы подводной части тела. Положение центра тяжести самого плавающего тела зависит от распределения в нем масс. В случае плавания судна положение центра тяжести определяется совокупностью масс корпуса судна, надстроек, установленного оборудования, груза, топлива, людей. Меняя расположение оборудования или груза, можно изменить положение центра тяжести судна.

Определим условия устойчивого плавания тел.

Рассмотрим случай подводного плавания тел (рис. 2.15).

В положении равновесия (рис. 2.15а) центр давления D и центр тяжести C находятся на одной вертикали.

При нарушении равновесного положения устойчивость плавающего тела зависит от взаимного расположения центра давления и центра тяжести:

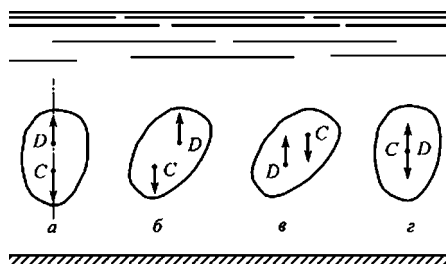


Рис. 2.15

- если центр давления D расположен выше центра тяжести C (рис. 2.15б), то выталкивающая сила и сила тяжести создают момент сил, стремящийся вернуть тело в положение равновесия; следовательно, равновесие тела будет устойчивым;
- если центр давления D расположен ниже центра тяжести C (рис. 2.15в), пара сил создает момент, увеличивающий отклонение тела от положения равновесия (опрокидывающий момент); устойчивость отсутствует;
- если точки приложения выталкивающей силы и силы тяжести совпадают (рис. 2.15г), момента сил не возникает, тело продолжает находиться в положении безразличного равновесия, однако в исходное положение оно не возвращается.

Таким образом, устойчивостью при подводном плавании тело обладает только в случае, когда центр тяжести тела расположен ниже центра давления.

Для тел (судов), плавающих на поверхности жидкости, различают продольную и поперечную устойчивость. Различие заключается в плоскости отклонений из положения равновесия: при продольной устойчивости суда возвращаются в прямое положение из отклонений, происходящих в продольной диаметральной плоскости, т. е. из *дифферента*, при поперечной устойчивости отклонения происходят в поперечной диаметральной плоскости, суда возвращаются в прямое положение из *крена*.

Рассмотрим условия поперечной устойчивости. Будем считать, что грузы на судне закреплены неподвижно, поэтому при крене судна положение его центра тяжести по

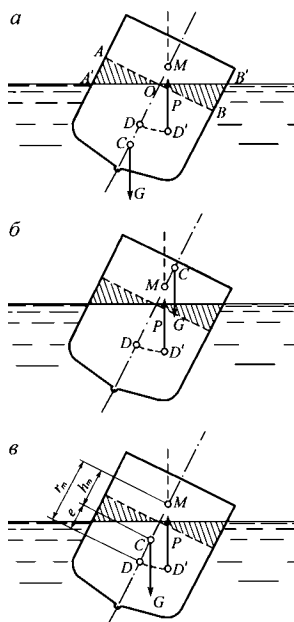


Рис. 2.16

отношению к корпусу остается неизменным. Иначе обстоит дело с центром давления. Напомним, что центр давления — это центр тяжести объема жидкости, вытесненной погруженной в жидкость частью тела, его положение зависит от формы подводной части тела. При крене судна меняется форма подводной его части и соответственно изменяется положение центра давления (рис. 2.16). Как видно из рисунка 2.16а, при наклоне судна грузовая ватерлиния AB переходит в положение $A'B'$. При этом клинообразный объем OAA' корпуса судна переходит из подводного положения в надводное, а равный ему объем OBV' уходит под поверхность воды. Общий объем вытесненной жидкости при этом не меняется, однако правая (погрузившаяся) половина корпуса вытесняет теперь жидкости больше, чем левая, симметрия нарушается. Поэтому центр давления D смещается с оси симметрии корпуса судна в сторону погрузившейся части (в точку D'). При малых углах крена ($10-15^\circ$) смещение центра давления происходит таким образом, как если бы центр давления переместился по дуге окружности с центром в точке M , лежащей на оси корпуса судна.

Эта точка называется *метацентром*. При малых углах крена положение метацентра определяется пересечением линии действия архимедовой силы P с осью симметрии корпуса.

Если центр тяжести судна C расположен ниже центра давления D (рис. 2.16а), при крене судна сила тяжести и подъемная сила образуют пару сил, которые стремятся возвратить судно в равновесное положение, судно устойчиво.

Если центр тяжести располагается не только выше центра давления, но и выше метacentра (рис. 2.16б), сила тяжести и подъемная сила образуют пару, которая стремится перевернуть судно. Условия устойчивости не выполняются.

Если центр тяжести судна расположен выше центра давления, но ниже метacentра (рис. 2.16в), образующаяся при крене пара сил возвращает судно в первоначальное положение, устойчивость обеспечена.

Таким образом, для обеспечения устойчивости судна требуется выполнение следующего условия: центр тяжести судна должен располагаться ниже метacentра.

У реальных судов при нормальных условиях работы обеспечивается именно случай, когда центр тяжести располагается выше центра давления, но ниже метacentра.

Расстояние между метacentром и центром давления r_m (рис. 2.16в) называется метacentрическим радиусом, превышение метacentра над центром тяжести судна h_m называется метacentрической высотой. Напомним (формула (2.15)), что расстояние между центром тяжести и центром давления называется эксцентриситетом давления e .

Тогда условие устойчивости судна можно записать следующим образом:

$$e < r_m,$$

т. е. эксцентриситет давления должен быть меньше метacentрического радиуса.

Иначе говоря,

$$h_m = r_m - e > 0,$$

метacentрическая высота должна быть величиной положительной.

Зная метacentрическую высоту и водоизмещение судна (определяемое величиной выталкивающей силы P), можно для каждого малого угла крена определить величину момента, возвращающего судно в положение равновесия:

$$M_m = Ph_m \sin \alpha,$$

где α — угол крена; M_m — метacentрический момент.

Для углов крена бóльших 15° пользоваться этой формулой нельзя, так как при больших углах метацентр уже не лежит на оси симметрии плавающего тела. Зависимость метацентрического момента от угла крена при больших α определяют опытным путем и представляют в виде графика.

В случаях продольной устойчивости, т. е. возвращения плавающих судов в прямое положение из дифферента, оказывается, что метацентрический радиус r_m всегда бывает большим, поэтому продольная устойчивость плавающих судов всегда обеспечивается.

ГИДРОДИНАМИКА

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Гидродинамика — это раздел гидравлики, в котором изучаются закономерности движения жидкости.

Гидродинамика, или динамика жидкости, существенно отличается от динамики твердого тела. Отдельные частицы твердого тела жестко связаны друг с другом, а в движущейся жидкой среде такие связи отсутствуют, жидкая среда состоит из множества частиц, движущихся одна относительно другой. Законы гидродинамики, определяющие закономерности движения жидкости, сложнее законов покоящейся жидкости. В покоящейся жидкости существует лишь одна характерная величина — гидростатическое давление. При движении состояние жидкости определяется не только давлением, но и величинами и направлением скоростей и ускорений отдельных частиц жидкости. Скорости в данной точке пространства, занятого движущейся жидкостью, являются в общем случае функциями координат этой точки и времени.

Задача гидродинамики — установление связи в движущемся потоке между давлением и кинематическими характеристиками потока. Величины скорости и давления могут изменяться в зависимости от времени и координат рассматриваемой точки.

Вспомним введенное ранее понятие *идеальной жидкости* — это такая воображаемая жидкость, которая совершенно лишена вязкости. В такой невязкой идеальной

жидкости возможен лишь один вид внутренних напряжений — нормальные напряжения сжатия, т. е. *гидромеханическое давление* или просто давление. Давление в движущейся идеальной жидкости обладает теми же свойствами, что и в неподвижной жидкости:

- на внешней поверхности жидкости давление направлено по внутренней нормали;
- в любой точке внутри жидкости давление по всем направлениям одинаково.

При рассмотрении движения жидкости различают установившееся и неустойчивое движение.

Если скорость и давление зависят только от координат, т. е. в любой точке потока несжимаемой жидкости эти величины с течением времени остаются неизменными, то такое движение называется *установившимся*. При установившемся движении скорость и давление являются функцией только координат точки:

$$u = f(x, y, z) \text{ и } p = f(x, y, z).$$

Пример установившегося движения — течение воды по трубопроводу при постоянном напоре.

Если давление и скорость в потоке зависят не только от координат, но и от времени, т. е.

$$u = f(t, x, y, z) \text{ и } p = f(t, x, y, z),$$

то такое движение называется *неустановившимся*.

Примерами неустановившегося движения могут быть разгон или торможение жидкости в трубах при включении (выключении) насосов, истечение воды при опорожнении резервуара через отверстие и т. п.

Установившееся движение бывает равномерным и неравномерным.

Равномерным называется движение, при котором скорости жидкости не меняются и с течением времени, и по длине потока, т. е. в сходственных точках поперечных сечений скорости одинаковы по всей длине потока.

Если при движении скорости жидкости, не изменяясь во времени, меняются по длине потока, то такое установившееся движение называется *неравномерным*. Такой

характер движения бывает при сужении или расширении потока в реке, на повороте, в конфузорах и диффузорах.

Напорным называется такое движение, при котором поток со всех сторон ограничен твердыми, жесткими направляющими стенками. Обычно это движение жидкости в трубах при полном их заполнении (водопроводы, нефтепроводы). Такое движение происходит за счет избыточного давления, создаваемого насосом или водонапорным баком.

Движение, при котором поток лишь частично ограничен твердыми стенками и имеет свободную поверхность, называется *безнапорным*. Например, течение в реках, водосливных лотках, канализационных трубах. Давление на свободной поверхности обычно равно атмосферному. Движение в таких потоках происходит за счет геометрического уклона русла, т. е. под действием силы тяжести.

Введем еще некоторые определения.

Совокупность или геометрическое место точек, через которые последовательно проходит жидкая частица при своем движении, называется *траекторией* частицы.

При установившемся движении траектории частиц жидкости являются неизменными во времени.

При неустановившемся течении траектории различных частиц, проходящих через данную точку пространства, могут иметь разную форму.

Линия тока — это линия, касательная к которой в любой точке совпадает с направлением вектора скорости частиц жидкости в данный момент времени (рис. 3.1).

Из определения понятно, что если некая кривая является линией тока, то это справедливо лишь для данного момента времени. Со временем линия тока меняет форму.

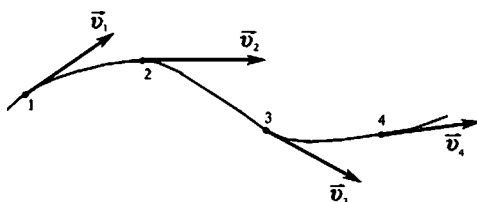


Рис. 3.1

Через каждую точку пространства может проходить лишь одна линия тока, которая с течением времени может изменять свою форму и свое положение. Совокупность линий тока для какого-то момента времени рассматриваемого движения называется спектром линий тока.

При установившемся движении линии тока не меняются во времени.

Более того, при установившемся движении линии тока и траектории движения частиц совпадают.

Действительно, пусть в некоторой точке пространства скорость жидкой частицы в момент t_0 имеет значение u_0 . Построим линию тока, проходящую через эту точку. Отложим на векторе u_0 малый отрезок Δs_1 и из его конца построим вектор u_1 , соответствующий этой точке пространства. Затем на этом векторе отложим отрезок Δs_2 и аналогично построим вектор u_2 и т. д. (рис. 3.2).

Подчеркнем, что все построение выполняется для одного фиксированного момента времени t_0 , поэтому сейчас безразлично, является ли течение установившимся или неустановившимся. Если отрезки Δs_i примем достаточно малыми, то приближенно получим кривую, близкую к линии тока.

Попробуем построить так же траекторию жидкой частицы, которая в момент времени t_0 находилась в исходной точке. Из этой точки за малое время Δt_1 частица проходит путь Δs_1 . Приближенно его можно считать совпадающим с направлением вектора u_0 . Если движение установившееся, то скорость в конце отрезка Δs_1 будет такой же, как и в момент времени t_0 . Тогда далее частица начнет перемещаться по направлению вектора u_1 и пройдет путь Δs_2 и т. д. Оче-

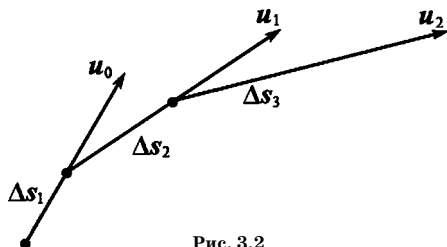


Рис. 3.2

видно, что при установившемся движении траектория совпадет с линией тока. Если же движение неустановившееся, то за время Δt_1 , за которое частица пройдет отрезок Δs_1 , скорость в конце отрезка изменится и не будет равна u_1 ни по величине, ни по направлению. Тогда из конца отрезка Δs_1 жидкая частица пойдет по другой траектории, не совпадающей с линией тока.

Возьмем для фиксированного момента времени в жидкой среде замкнутый контур l (рис. 3.3). Каждая точка этого контура, представляющая собой жидкую частицу, в последующие моменты времени перемещается в пространстве, заполненном жидкостью.

Часть жидкости, ограниченная поверхностью траекторий точек замкнутого контура, называется *струей*.

Проведем через каждую точку контура l линию тока (рис. 3.4). Совокупность этих линий тока образует трубчатую поверхность, выделяющую часть жидкой среды и называемую *трубкой тока*.

В случае установившегося движения траектории совпадают с линиями тока и, следовательно, трубка тока совпадает со струей.

Если уменьшать размеры замкнутого контура, то часть потока, заключенная внутри трубки тока, станет *элементарной струйкой*, т. е. такой струйкой, в поперечном сечении которой скорости можно считать одинаковыми.

При установившемся движении:

- элементарная струйка не меняет своей формы и ориентации в пространстве;
- нормальные составляющие скорости на линии тока равны нулю, следовательно, перетекания жидкости через боковую поверхность данной струйки нет и трубку тока можно рассматривать как трубку с непроницаемыми стенками;

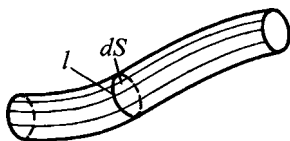


Рис. 3.3

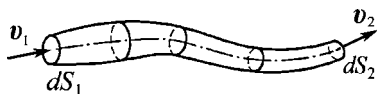


Рис. 3.4

- нормальные сечения струйки dS_1 , dS_2 (см. рис. 3.4) малы, но не одинаковы в разных сечениях, поэтому пучок линий тока внутри трубки может сгущаться и расширяться;
- так как поперечные сечения струйки малы, скорости во всех точках таких сечений можно считать одинаковыми, однако при переходе от одного сечения к другому они изменяются.

При дальнейшем стремлении поперечных размеров струйки к нулю она в пределе стягивается в линию тока.

Перетекания жидкости из одной струйки тока в другую нет, элементарная струйка представляет собой самостоятельный элементарный поток. Таким образом, жидкость втекает во входное отверстие струйки тока и вытекает через выходное, не проникая через ее боковые поверхности. Потоки конечных размеров можно рассматривать как совокупность элементарных струек, т. е. предполагать течение струйным. Из-за различия скоростей струйки будут как бы скользить одна по другой, но перемешиваться не будут.

Введение таких представлений дает возможность использовать для элементарной струйки математический аппарат дифференциального исчисления и интегрирования по всему сечению потока для получения уравнений и закономерностей движения жидкости.

Движение жидкости, при котором линии тока являются строго параллельными прямыми, будем называть *параллельноструйным*. На практике часто встречаются течения, отличные от параллельноструйных.

Плавноизменяющееся движение — это движение, близкое к параллельноструйному, при котором радиус кривиз-

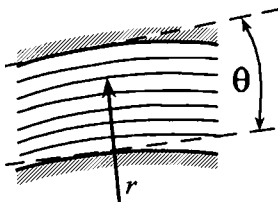


Рис. 3.5

ны линий тока достаточно велик, а угол, образованный крайними линиями тока рассматриваемого потока (или элементарной струйки), близок к нулю (угол θ , рисунок 3.5).

Назовем *живым сечением* потока поверхность, проведенную

перпендикулярно линиям тока и находящуюся внутри потока. Поскольку распределение скоростей в потоках в общем случае неравномерно, линии тока в них не параллельны друг другу и живые сечения представляют собой криволинейные поверхности. Например, при движении жидкости в конически расходящейся трубе (рис. 3.6), когда поток состоит из расходящихся элементарных струек, живое сечение представляет собой криволинейную поверхность ABC . Если линии тока в потоке будут параллельными (течение параллельноструйное), живое сечение будет плоским.

Живое сечение может быть ограничено твердыми стенками полностью или частично.

Величина живого сечения определяется его площадью. Однако условия течения жидкости зависят не только от площади живого сечения, но и от его формы. На рисунке 3.7 представлены поперечные сечения двух каналов. Хотя живые сечения обоих каналов представляют собой прямоугольники с равновеликими площадями, очевидно, что условия движения жидкости по ним будут разными из-за неодинакового отношения глубины к ширине потока.

Длина линии поперечного сечения, по которой жидкость соприкасается с твердой границей потока, называется *смоченным периметром*. При напорном течении жидкости,

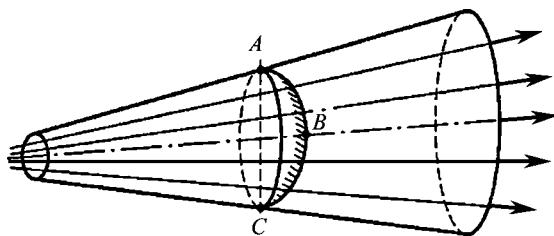


Рис. 3.6

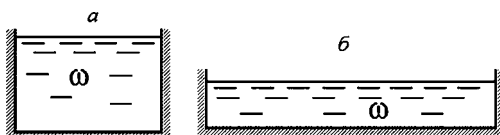


Рис. 3.7

когда поток со всех сторон ограничен твердыми стенками, смоченный периметр будет равен полному периметру живого сечения. В случае безнапорного течения часть периметра поперечного сечения потока, приходящаяся на свободную поверхность жидкости, не включается в расчет смоченного периметра.

Для трубы радиуса r , полностью заполненной жидкостью, смоченный периметр равен (рис. 3.8а)

$$\chi = 2\pi r = \pi d.$$

В случае безнапорного течения в канале прямоугольного поперечного сечения (рис. 3.8б)

$$\chi = b + 2h.$$

Отношение площади сечения потока жидкости ω к смоченному периметру χ называется *гидравлическим радиусом* R .

Для напорного потока в круглой трубе (рис. 3.8а)

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}.$$

Для безнапорного потока (рис. 3.8б)

$$R = \frac{bh}{b + 2h}.$$

Из этой формулы понятно, что гидравлический радиус канала a на рисунке 3.7 больше гидравлического радиуса канала b .

Расходом называют количество жидкости (в объемных или весовых единицах), протекающее через поперечное (живое) сечение потока в единицу времени. В зависимости от того, в каких единицах определяется количество

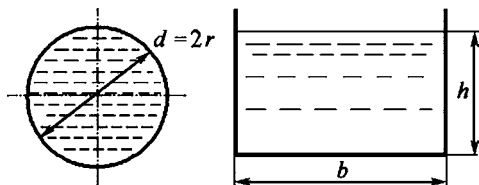


Рис. 3.8

жидкости, различают объемный Q , весовой Q_v и массовый Q_m расходы. Зависимость между ними следующая:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{Q_v}{\rho g} = \frac{Q_m}{\rho},$$

где V — количество (объем) жидкости; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

В гидравлике чаще всего используют объемный расход, далее под термином «расход» будем понимать именно объемный расход, если специально не оговорим иное.

Рассмотрим движение жидкости на участке элементарной струйки (рис. 3.9). Частичка жидкости перемещается от сечения 1 к сечению 2 за промежуток времени dt , проходя при этом расстояние l . Поскольку стенки трубки тока непроницаемы для движущейся жидкости, количество жидкости, прошедшее через сечение 1 за время dt , будет равным объему цилиндра:

$$dV = l d\omega,$$

где $d\omega$ — площадь живого сечения струйки.

Элементарный объемный расход, т. е. количество жидкости, проходящее в единицу времени через живое сечение элементарной струйки, определится как

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{l d\omega}{dt} = \frac{l}{dt} d\omega = u d\omega.$$

Если рассматривать поток жидкости как совокупность элементарных струек, то общий расход потока определится как сумма элементарных расходов отдельных струек:

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega.$$

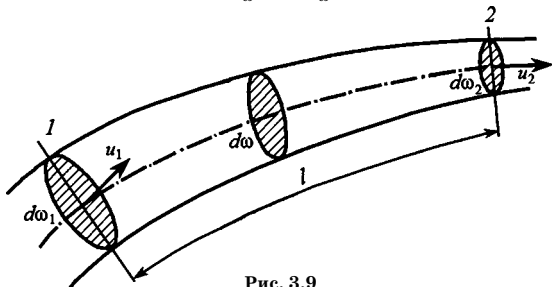


Рис. 3.9

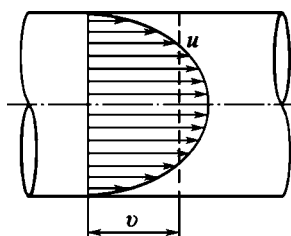


Рис. 3.10

Чтобы вычислить расход по этой формуле, нужно знать распределение скорости движения жидкости во всех точках живого сечения (рис. 3.10).

Чтобы упростить расчеты для практического применения, вводится понятие средней скорости потока. Средняя скорость в сечении v — это скорость, с которой данное сечение должны проходить все частицы жидкости, чтобы расход Q для этого сечения был равен действительному расходу при неравномерном распределении скоростей по сечению.

Тогда уравнение расхода для полного потока запишется как

$$Q = \int_{\omega} u d\omega = v\omega,$$

где v — средняя по сечению скорость жидкости.

Среднюю скорость тогда можно определить как

$$v = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega}.$$

Средняя скорость по живому сечению — абстрактное понятие, введенное для упрощения изучения движения жидкости.

3.2. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Уравнение неразрывности как для элементарной струйки, так и для всего потока — это математическое выражение условия сплошности потока при установившемся течении жидкости.

Выделим в потоке элементарную струйку (рис. 3.11).

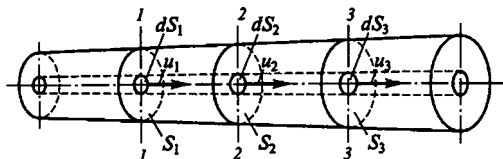


Рис. 3.11

Рассмотрим участок между сечениями 1–1 и 2–2. За время dt внутрь этого участка через сечение 1–1 войдет количество жидкости, равное объему цилиндра с площадью основания dS_1 и образующей $u_1 dt$. Через сечение 2–2 за это же время вытечет объем жидкости, равный $u_2 dt dS_2$. Отметим следующие обстоятельства:

- через боковые поверхности элементарной струйки жидкость не проникает (таково свойство трубки тока);
- жидкость несжимаема и в ней отсутствуют пустоты и разрывы.

Это означает, что будет справедливым равенство

$$u_1 dt dS_1 = u_2 dt dS_2,$$

откуда

$$u_1 dS_1 = u_2 dS_2. \quad (3.1)$$

Для других сечений будут справедливы такие же соотношения:

$$u_1 dS_1 = u_2 dS_2 = u_3 dS_3 = \dots = u_n dS_n = \text{const} = dQ.$$

Уравнение (3.1) и выражает условие неразрывности элементарной струйки, из него следует, что через все сечения струйки проходит одинаковый расход жидкости. Из уравнения понятно, что

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dS_2}{dS_1},$$

т. е. скорости течения в разных сечениях элементарной струйки обратно пропорциональны площадям этих сечений.

Для полного потока уравнение неразрывности можно получить, проинтегрировав уравнение (3.1) по площадям соответствующих сечений полного потока (см. рис. 3.11):

$$\int_{S_1} u_1 dS_1 = \int_{S_2} u_2 dS_2.$$

Используя понятие средней скорости по сечению

$$\int_{S_1} u_1 dS_1 = v_1 S_1; \quad \int_{S_2} u_2 dS_2 = v_2 S_2,$$

можно записать

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (3.2)$$

Так как сечения $1-1$ и $2-2$ выбраны произвольно, то и для любых других сечений это равенство будет справедливым:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v_3 S_3 = \dots = v_n S_n = \text{const} = Q. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) и есть уравнения неразрывности полного потока. Они показывают, что объемный расход несжимаемой жидкости при установившемся движении остается постоянным вдоль всего потока.

Из уравнения (3.2) следует, что средние скорости потока обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

3.3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

3.3.1. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Выделим при установившемся течении в движущейся жидкости элементарную струйку и отметим в ней два сечения — $1-1$ и $2-2$ (рис. 3.12). Площади этих сечений — ω_1 и ω_2 , вертикальные координаты их центров тяжести относительно некоторой плоскости отсчета — z_1 и z_2 соответственно.

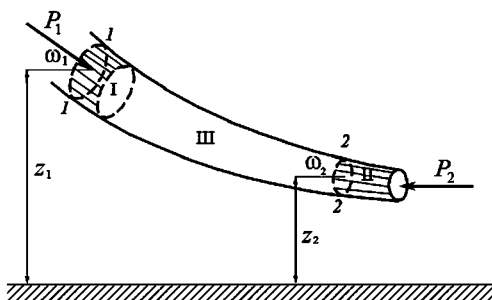


Рис. 3.12

В момент времени t жидкость находится между сечениями 1–1 и 2–2. Она занимает объем, состоящий из отсеков I и III (рис. 3.12). Через промежуток времени dt жидкость переместится в новое положение и будет занимать объем, состоящий из отсеков III и II.

В соответствии с теоремой механики приращение кинетической энергии системы за какой-то промежуток времени равно работе внешних сил за этот промежуток времени. При переходе из начального положения (жидкость занимает объем отсеков I и III) в последующее (отсеки II и III) при установившемся движении кинетическая энергия общего отсека III останется неизменной, поэтому приращение кинетической энергии произойдет за счет изменения энергии отсеков I и II:

$$\Delta E_{\text{кин}} = E_{\text{II+III}} - E_{\text{I+III}} = E_{\text{II}} - E_{\text{I}} = \frac{m_2 u_2^2}{2} - \frac{m_1 u_1^2}{2}.$$

Массы жидкости в отсеках определяются как

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho V_1 = \rho \omega_1 u_1 dt = \rho q dt; \\ m_2 &= \rho V_2 = \rho \omega_2 u_2 dt = \rho q dt, \end{aligned}$$

где

$$q_1 = q_2 = q = \omega_1 u_1 = \omega_2 u_2 = \omega u$$

— расход жидкости в струйке.

Оказывается, массы отсеков I и II равны, поэтому в дальнейшем индексы у обозначения массы опускаем.

Тогда

$$\Delta E = \rho q \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) dt. \quad (3.4)$$

Из внешних сил работу совершают поверхностные силы давления и массовые силы, в рассматриваемом случае это силы тяжести.

Из сил давления могут совершить работу только силы, действующие на торцевые сечения ω_1 и ω_2 , — это силы P_1 и P_2 . Силы давления, действующие на боковые поверхности струйки, направлены перпендикулярно оси потока, и их работа равна нулю. Работа сил давления

$$P_1 u_1 dt - P_2 u_2 dt = p_1 \omega_1 u_1 dt - p_2 \omega_2 u_2 dt = q(p_1 - p_2) dt. \quad (3.5)$$

Работа сил тяжести состоит в том, что отсек I переместится в отсек II, поскольку отсек III остается на месте.

Массы и, следовательно, веса отсеков одинаковы, поэтому работу сил тяжести можно записать как (вес равен mg)

$$\rho g q(z_1 - z_2)dt. \quad (3.6)$$

Приравнявая изменение кинетической энергии (3.4) сумме работ внешних сил (3.5) и (3.6), находим

$$\rho q \left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) dt = q(p_1 - p_2)dt + \rho g q(z_1 - z_2)dt.$$

Разделим все члены этого уравнения на $(\rho g q dt)$. Таким образом, отнесем уравнение к единице веса протекающей жидкости. Получим

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \text{const}$$

или

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const}. \quad (3.7)$$

Это и есть уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости. Все члены уравнения имеют линейную размерность.

Из вывода понятен физический смысл уравнения Бернулли — оно является частным случаем закона сохранения энергии, а именно — отражает сохранение энергии частиц жидкости, движущихся вдоль линии тока.

Все члены уравнения (3.7) являются удельными энергиями, т. е. энергиями, отнесенными к единице веса протекающей жидкости. Член $u^2/(2g)$ характеризует удельную кинетическую энергию частицы, член $p/(\rho g)$ — потенциальную энергию давления, а z — потенциальную энергию положения, которая равна высоте расположения частиц над условно выбранной плоскостью сравнения. Все вместе в сумме они дают *полную (механическую) удельную энергию* жидкой частицы.

Таким образом, из уравнения Бернулли следует, что при движении частиц идеальной жидкости по длине элементарной струйки полная механическая энергия частиц (сумма удельных энергий) не изменяется.

Члены уравнения Бернулли имеют и другие названия, связанные с их линейной размерностью.

Член $u^2/(2g)$ называется *скоростным напором*; $p/(\rho g)$ — *пьезометрическим напором* или пьезометрической высотой; z — *геометрическим напором* или геометрической высотой.

Геометрический смысл уравнения Бернулли заключается в том, что сумма высот скоростного, пьезометрического и геометрического напоров есть величина постоянная.

Зачастую два члена уравнения Бернулли, характеризующие потенциальную энергию, объединяют в один, обозначив

$$\frac{p}{\rho g} + z = z^*.$$

Тогда уравнение Бернулли запишется так:

$$\frac{u^2}{2g} + z^* = \text{const.} \quad (3.8)$$

Напомним, что уравнение Бернулли выведено нами для идеальной жидкости (без учета вязкости). При рассмотрении реальной, т. е. вязкой, жидкости в балансе энергии необходимо учесть еще и потери энергии, обусловленные возникновением сил трения. Однако опыт показал, что, если силы трения малы по сравнению с массовыми силами, уравнение Бернулли для идеальной жидкости можно использовать для решения некоторых задач движения реальной жидкости.

3.3.2. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ТЕХНИКЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

ВОДОМЕР ВЕНТУРИ

В качестве примера использования уравнения Бернулли рассмотрим работу так называемого *пьезометрического водомера* (водомера Вентури). Он представляет собой сужение на трубопроводе, в которое включены пьезометры (рис. 3.13).

Пусть известны диаметры труб d_1 и d_2 в сечениях и отметки свободной поверхности в пьезометрах z_1^* и z_2^* .

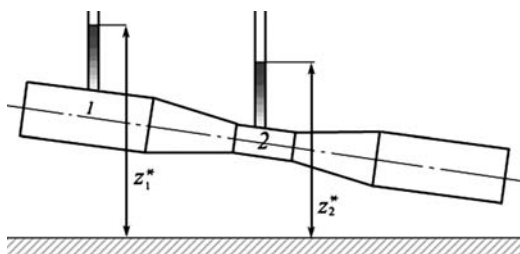


Рис. 3.13

Требуется найти расход Q жидкости, протекающей по трубопроводу, пренебрегая потерями.

Уравнение Бернулли для первого и второго сечений потока

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2.$$

Очевидно, что

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = z_1^* \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = z_2^*.$$

Обозначив разность $z_1^* - z_2^* = h$, получим

$$\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = h.$$

Подставляя

$$u_1 = \frac{Q}{\omega_1} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{Q}{\omega_2},$$

будем иметь

$$\frac{Q^2}{2g\omega_2^2} - \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} = h \quad \text{или} \quad \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right) = h.$$

Обозначив отношение площадей $\frac{\omega_1}{\omega_2} = m_1$, определим расход

$$Q = \omega_1 \sqrt{\frac{2gh}{m_1^2 - 1}}.$$

Если мы хотим выразить расход через параметры второго сечения, то, рассуждая аналогично, находим

$$Q = \omega_2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - m_2^2}},$$

где $m_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Иногда для учета потерь в эти формулы вводят коэффициент $\mu < 1$ (порядка 0,97–0,99).

Измеряют расход жидкости, протекающей по трубопроводу, также с помощью *диафрагмы*, устанавливаемой в сечении трубы. Принцип измерения тот же: при резком изменении диаметра проходного сечения меняется скорость течения. В соответствии с уравнением Бернулли изменяется давление, и разность пьезометрических напоров измеряется либо пьезометрами, либо дифференциальным манометром (рис. 3.14).

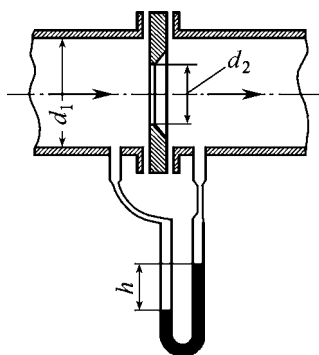


Рис. 3.14

ТРУБКА ПИТО

Устройство, называемое «трубка Пито», используется для измерения скоростей потока жидкости.

В некоторой точке потока установим две трубки (рис. 3.15): обычную трубку пьезометра и открытую сверху трубку, нижний конец которой изогнут навстречу течению так, что его ось совпадает с направлением скорости. Диаметры трубок должны быть значительно меньше характерных размеров потока, чтобы не вносить больших искажений в распределение скоростей.

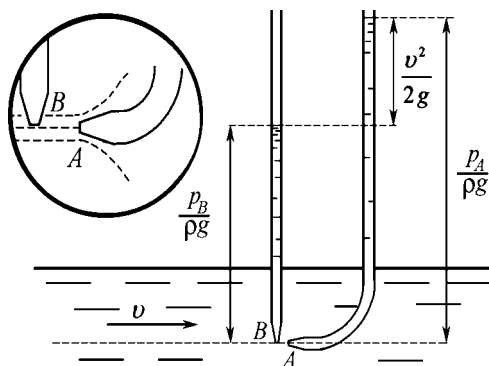


Рис. 3.15

Составим уравнение Бернулли для двух сечений: проходящего через точку B — нижний конец пьезометра и проходящего через точку A — носик изогнутой трубки:

$$\frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + z_B = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + z_A.$$

Расположим нижний конец пьезометра и носик изогнутой трубки на одной горизонтали, тогда $z_A = z_B$. Носик изогнутой трубки является критической точкой, линия тока упирается в него, и скорость потока в этой точке равна нулю (укрупненная врезка на рисунке 3.15).

Тогда уравнение Бернулли приобретет вид

$$\frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_A}{\rho g}.$$

Правая часть этого уравнения характеризует высоту подъема жидкости в изогнутой трубке. Из уравнения видно, что эта высота будет больше высоты столба жидкости в пьезометре на величину скоростного напора в точке B — у нижнего конца пьезометра. Сближая пьезометр и изогнутую трубку, можно определить значения скорости в непосредственной близости от носика трубки. Обозначив

$\frac{p_A}{\rho g} - \frac{p_B}{\rho g} = h$, получим $\frac{v_B^2}{2g} = h$, откуда

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

Действительная конструкция прибора для измерения скорости потока жидкости — трубки Пито — показана на рисунке 3.16.

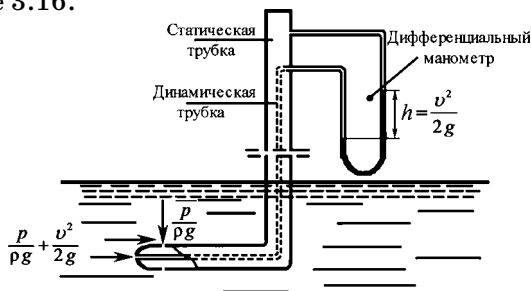


Рис. 3.16

Две трубки помещены в один корпус. Центральная динамическая трубка воспринимает полный напор $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$, а наружная статическая трубка — только пьезометрический напор, так как скорость потока направлена по касательной к плоскости отверстий. Обе трубки подключены к дифференциальному манометру, который определяет разность напоров в трубках h , равную скоростному напору.

СТРУЙНЫЕ НАСОСЫ (ЭЖЕКТОРЫ)

Водоструйные насосы (эжекторы) из-за простоты конструкции и безопасности работы получили весьма разнообразное применение.

Схема струйного насоса приведена на рисунке 3.17. Для работы водоструйного насоса необходим еще один насос, который подает под большим давлением рабочий расход воды Q_p . Из рабочего трубопровода 1 вода поступает в сопло 2, где из-за уменьшения площади сечения еще больше ускоряется. На выходе из сопла, благодаря значительному возрастанию скорости, давление в струе становится ниже атмосферного. За счет создающегося таким образом вакуума по всасывающей трубе 4 засасывается дополнительный расход жидкости $Q_{вс}$. В камере 3 оба потока смешиваются и поступают в расширяющуюся трубу. Здесь скорость потока уменьшается, и кинетическая энергия в значительной части переходит в потенциальную энергию

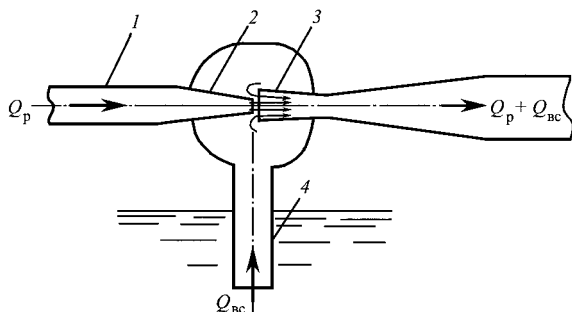


Рис. 3.17

давления, под действием которого суммарный расход жидкости ($Q_p + Q_{вс}$) перемещается далее по напорному трубопроводу. Давление, развиваемое водоструйным насосом, меньше давления, создаваемого рабочим насосом, но расход больше. Всасываемый расход $Q_{вс}$ может быть равен рабочему расходу Q_p и даже превосходить его в 1,5–2 раза.

На том же принципе основано действие пневматических перегрузочных устройств для сыпучих грузов. Примером эжектора может служить и бытовой пульверизатор, в котором поток воздуха подсасывает и распыляет жидкость.

СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПРИ СУЖЕНИИ РУСЛА

Рассмотрим, что происходит с уровнем воды в реке или канале, если русло сужается по естественным причинам или при создании искусственных сооружений (мостовые опоры, вход в шлюз и пр.).

Участок сужения изображен на рисунке 3.18 (*a* — вид в плане, *б* — участок сужения в разрезе).

Выберем два сечения, проходящих по поверхности жидкости: сечение 1–1 на достаточном удалении от места

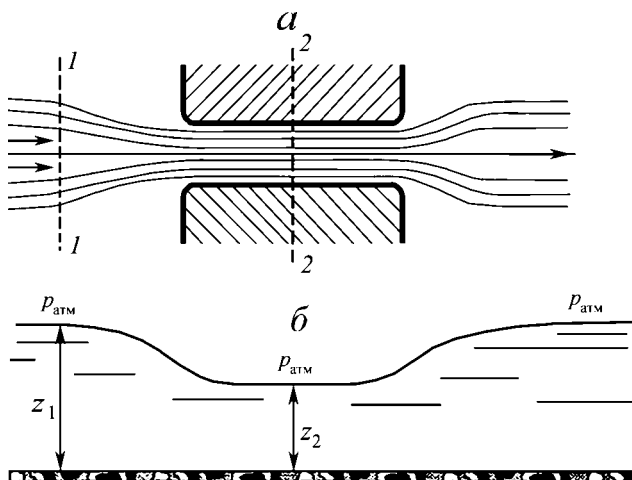


Рис. 3.18

сужения, сечение 2–2 непосредственно в месте сужения. На поверхности воды в обоих сечениях давление равно атмосферному:

$$p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}.$$

Тогда уравнение Бернулли для этих сечений запишется так:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2,$$

где z_1 и z_2 — расстояния от поверхности жидкости до горизонтального дна (глубина).

Поскольку расход воды в реке (канале) постоянен, очевидно, что $v_2 > v_1$, а следовательно, $z_2 < z_1$, т. е. в узком месте происходит понижение уровня движущейся жидкости.

То же явление наблюдается в реках на стремнинах и в водоворотах. Этим же объясняется и просадка уровня при входе судов в камеры шлюзов.

3.3.3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

При движении реальной вязкой жидкости в ней возникают силы трения. Часть энергии системы расходуется на преодоление сил трения, необратимым образом при этом преобразуясь в тепловую энергию. Тепловая энергия безвозвратно теряется — рассеивается в окружающее пространство. Поэтому, чтобы применить уравнение Бернулли к процессам в реальной жидкости, в уравнении сохранения энергии нужно учесть эти потери энергии.

Энергия потока в первом сечении

$$E_1 = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1.$$

Энергия потока во втором сечении

$$E_2 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2.$$

Энергия потока во втором сечении будет меньше энергии потока в первом сечении как раз на величину потерь:

$$E_1 - E_2 = h_{\text{пот}}$$

или

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{\text{пот.}}$$

Если мы решим распространить уравнение Бернулли от элементарной струйки на целый поток, то нужно учитывать следующее обстоятельство. Удельную кинетическую энергию целого потока можно вычислить по формуле

$$E_{\text{кин}} = \frac{v^2}{2g},$$

где $v = \frac{q}{\omega}$ — средняя скорость в поперечном сечении потока.

В действительности скорости в поперечном сечении потока, как уже обсуждалось выше, существенно отличаются друг от друга: у стенок и дна они малы, к центру потока увеличиваются. Поэтому кинетическая энергия, рассчитанная по средней скорости потока, не равна сумме кинетических энергий элементарных струек, составляющих этот поток. Сумма энергий оказывается больше, и в первый член уравнения Бернулли приходится вводить поправочный коэффициент α , называемый коэффициентом кинетической энергии:

$$\alpha = \frac{\sum E_{\text{струй}}}{E_{\text{кин}}} = \frac{\int_{\omega} \frac{m_i u_i^2}{2}}{\frac{M v^2}{2}}.$$

Так как $m_i = \rho u_i d\omega dt$ — масса отдельных струек, а $M = \rho v \omega dt$ — масса всего потока жидкости, то имеем

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega}.$$

Отметим, что чем больше v — средняя скорость в сечении, тем коэффициент α ближе к единице.

В обычных условиях при турбулентном течении в трубах и открытых каналах α меняется в пределах 1,02–1,12, поэтому для турбулентных течений обычно принимают $\alpha \approx 1,0$.

Для ламинарных течений, имеющих большую неравномерность распределения скоростей по сечению, принимается $\alpha = 2,0$.

Что касается таких членов уравнения Бернулли, как пьезометрический напор $p/(\rho g)$ и геометрический напор z , то о них можно сказать следующее.

При распределении давления в поперечном сечении потока по гидростатическому закону можно отнести эти члены к любой точке потока в этом сечении, обычно их относят к центру тяжести. Предположение о гидростатическом законе распределения давления справедливо для параллельноструйного или плавно меняющегося движения и несправедливо в потоках, имеющих значительную кривизну. При значительной кривизне потока эти величины относятся к динамической оси потока, а при отклонении от оси необходимо вводить поправку, учитывающую влияние центробежных сил на распределение давления.

Таким образом, в случае параллельноструйного или плавноизменяющегося движения при обобщении уравнения Бернулли на целый поток реальной жидкости запись этих членов не изменяется. И тогда уравнение Бернулли для целого потока реальной (вязкой) жидкости при установившемся движении записывается в виде

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{\text{пот}}$$

или

$$\frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + h_{\text{пот}} = \text{const.} \quad (3.9)$$

В такой форме записи все члены уравнения Бернулли имеют линейную размерность, представляя собой напоры или высоты.

Попробуем представить уравнение Бернулли в виде линейной диаграммы (рис. 3.19).

Геометрический напор z отсчитывается от условной плоскости сравнения $0-0$ до оси потока. Далее вверх откладываются отрезки, равные пьезометрическому напору $\frac{p}{\rho g}$ и скоростному напору $\frac{\alpha v^2}{2g}$. Концы соответствующих

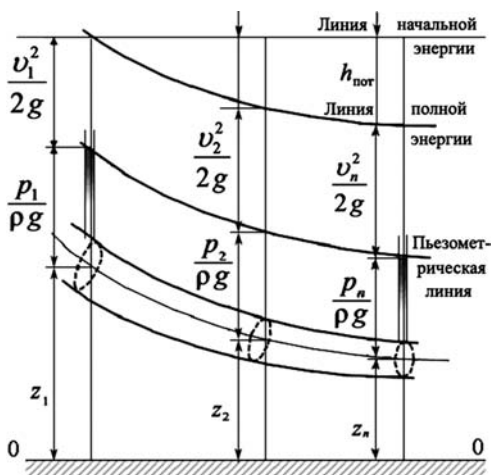


Рис. 3.19

отрезков в разных сечениях по длине потока соединяются линиями. Так получаются пьезометрическая линия и линия полной энергии. Константа в правой части уравнения Бернулли, характеризующая начальный запас энергии, соответствует горизонтальной линии начальной энергии. Расстояние между линиями начальной и полной энергии представляет собой потерянный напор $h_{\text{пот}}$.

Построенная диаграмма наглядно иллюстрирует преобразование удельной энергии потока при его движении, показывает переход одного вида энергии в другой. Так, например, при расширении поперечного сечения потока происходит увеличение потенциальной энергии давления (пьезометрического напора), а кинетическая энергия (скоростной напор) уменьшается. При уменьшении сечения наблюдаем обратную картину.

Важно заметить, что линия полной энергии для реальной жидкости может только падать по длине потока из-за непрерывного увеличения потерь. А пьезометрическая линия может повышаться и понижаться в зависимости от кинетической энергии потока.

Падение полной энергии на единицу длины потока выражается формулой

$$i = \frac{\left(\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right)}{l} = \frac{h_{\text{пот}}}{l}$$

и называется *гидравлическим уклоном*.

Следовательно, величина гидравлического уклона характеризует уменьшение полной удельной энергии потока на единицу длины.

Понятие уклона можно ввести и для пьезометрической линии, это будет *пьезометрический уклон*:

$$i^* = \frac{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right)}{l} = \frac{z_1^* - z_2^*}{l}.$$

Пьезометрический уклон может быть как положительным, так и отрицательным. В частном случае равномерного движения, когда скорость по длине потока постоянна, очевидно, что $i = i^*$. Такая картина имеет место, например, при напорном движении жидкости в трубах.

Положительные значения гидравлического и пьезометрического уклонов соответствуют падению полной энергии или пьезометрической линии.

При движении вязкой жидкости в трубах возникают дополнительные силы сопротивления. Частицы жидкости, прилегающие к поверхности трубы, тормозятся (прилипают). Из-за наличия вязкости такое торможение передается следующим слоям. В результате в трубе устанавливается распределение скорости движения жидкости, при котором скорость по мере удаления от оси трубы к стенкам постепенно уменьшается. Равнодействующая сил сопротивления направлена в сторону, противоположную движению, и параллельна направлению движения. Эта сила является силой гидравлического трения.

Для преодоления силы гидравлического трения и поддержания поступательного движения жидкости необходимо, чтобы на жидкость действовала сила, направленная в сторону ее движения и равная (или большая) силе сопротивления, т. е. необходимо затрачивать энергию. Энергия, необходимая для преодоления сил сопротивления, и есть потерянная энергия, учитываемая уравнением Бернулли.

Потери удельной энергии, их еще называют потери напора или гидравлические потери, зависят от формы и размеров русла, скорости течения, вязкости жидкости и шероховатости стенок трубопровода.

3.4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Для получения дифференциальных уравнений движения воспользуемся уравнениями равновесия Эйлера в виде (2.1), а также принципом Даламбера, который заключается в следующем: если в систему уравнений равновесия прибавить силы инерции, взятые с обратным знаком, то эти уравнения будут описывать уже процесс движения жидкости.

Силы давления и массовые силы в уравнениях Эйлера отнесены к единице массы. Если выражение для силы инерции $I = ma = m \frac{dv}{dt}$ отнести к единице массы, то получим в проекциях на оси координат

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad j_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad j_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений движения невязкой жидкости, называемая также системой Эйлера, будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Напомним, что равномерное движение — это частный случай установившегося движения, характеризующийся тем, что по длине потока площадь трубы $\omega = \text{const}$, а так как расход тоже постоянный, т. е. $Q = \text{const}$, то и скорость

потока $v = \text{const.}$ Несмотря на такую, казалось бы, простоту, этот частный случай широко реализуется и для равномерных потоков в трубопроводах, и для неравномерного медленно меняющегося движения.

Рассмотрим равновесие отсека жидкости, движущейся в трубопроводе (рис. 3.20).

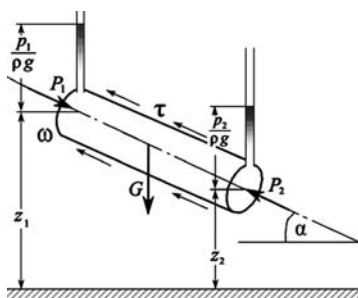


Рис. 3.20

Как известно, равномерное прямолинейное движение — это один из случаев равновесия. А согласно первому закону Ньютона, если тело находится в равновесии, то сумма всех сил, действующих на него, равна нулю.

Будем считать, что весь механизм трения сосредоточен на поверхности соприкосновения потока со стенками трубопровода, внутреннее трение в массиве жидкости учитывать не будем.

Тогда силы трения на стенках будут равны

$$T = \tau \chi l,$$

где τ — касательное напряжение трения; χ — смоченный периметр; l — длина рассматриваемого отсека.

Помимо сил трения на рассматриваемый отсек действуют силы давления P_1 и P_2 — по оси движения, а также сила тяжести жидкости в отсеке $G = \rho g \omega l$.

Составим уравнение равновесия, т. е. равенства нулю сил, действующих на жидкость, в проекции на ось движения:

$$P_1 - P_2 + G \sin \alpha - T = 0$$

или

$$p_1 \omega - p_2 \omega + \rho g \omega l \frac{z_1 - z_2}{l} - \tau \chi l = 0,$$

где

$$\frac{z_1 - z_2}{l} = \sin \alpha.$$

Разделим это уравнение на $\rho g \omega$. Получим

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{\omega} l$$

или

$$\frac{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)}{l} = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{\omega}.$$

Левая часть равенства

$$\frac{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)}{l} = i^*$$

— пьезометрический уклон.

Отношение

$$\frac{\omega}{\chi} = R$$

— гидравлический радиус.

Окончательно получаем

$$\frac{\tau}{\rho g} = Ri^*. \quad (3.11)$$

В случае равномерного движения пьезометрический уклон равен гидравлическому.

Тогда получаем

$$\frac{\tau}{\rho g} = Ri. \quad (3.12)$$

Это и есть основное уравнение равномерного движения жидкости.

ГЛАВА 4

РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Еще в середине девятнадцатого века, изучая движение воды в цилиндрических трубах, исследователи заметили, что если скорость течения превышает некоторое предельное значение, характер течения внезапно изменяется. С достаточной ясностью и полнотой этот процесс был изучен экспериментально в опытах О. Рейнольдса в 1883 г. Он наблюдал движение подкрашиваемых струек жидкости в стеклянных трубках (рис. 4.1).

В зависимости от скорости течения, которая регулировалась краном на выходе из трубки, от температуры жидкости и диаметра трубки наблюдалось два режима течения жидкости:

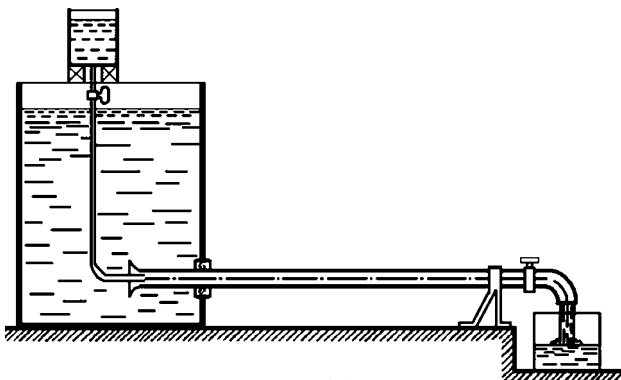


Рис. 4.1

- при небольших скоростях течение слоистое, упорядоченное, когда отдельные слои жидкости, не перемешиваясь, как бы скользят друг по другу;
- при увеличении скорости характер течения почти внезапно изменяется, слои перемешиваются, частицы жидкости, сохраняя общее направление течения, движутся по весьма сложным зигзагообразным траекториям.

При малых скоростях струйка краски протягивается вдоль всей трубочки, не перемешиваясь с окружающей жидкостью, — это ламинарный режим.

При увеличении скорости течения жидкости струйка краски начинает искривляться, а при дальнейшем увеличении скорости — теряет четкие очертания и размывается по всей трубе, равномерно окрашивая всю жидкость, — это турбулентный режим.

О. Рейнольдс пришел к заключению, что момент перехода одного режима в другой, или критерий, разграничивающий эти два режима, зависит от скорости движения жидкости, характерного размера потока (например, диаметра трубки) и физических свойств жидкости. Взяв в качестве характеристики физических свойств жидкости кинематический коэффициент вязкости ν и учитывая то обстоятельство, что критерий не должен зависеть от размерности входящих в него величин (т. е. быть универсальным), О. Рейнольдс получил для этого критерия выражение

$$Re = \frac{vd}{\nu}, \quad (4.1)$$

где v — средняя (характерная) скорость течения; d — диаметр (характерный размер) трубы.

Критерий (4.1) играет очень большую роль при анализе течения реальных (вязких) жидкостей и называется *числом Рейнольдса*.

В своих опытах по исследованию режимов равномерного течения жидкости О. Рейнольдс пришел к заключению, что существует некоторое критическое значение числа (4.1), при котором происходит переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. При значении числа Рейнольдса, близком к 2000, ламинарность течения на-

чинает нарушаться. При дальнейшем изучении вопроса оказалось, что существуют два критических значения числа Рейнольдса — нижнее ($Re_{кр}^{нижн}$) и верхнее ($Re_{кр}^{верх}$).

Если для потока число Re меньше нижнего критического, т. е. $Re < Re_{кр}^{нижн}$, то течение всегда будет безусловно ламинарным.

Если для потока число Re больше верхнего критического, т. е. $Re > Re_{кр}^{верх}$, то течение всегда турбулентное.

А если значение числа Re находится между этими значениями, т. е. $Re_{кр}^{нижн} < Re < Re_{кр}^{верх}$, то возможен тот или другой режим в зависимости от местных условий движения — условий входа потока в трубу, состояния стенок, наличия внешних возмущений и т. п.

В технических расчетах для трубопроводов в качестве критерия перехода от ламинарного режима течения к турбулентному принимают некоторое среднее значение критического числа Рейнольдса. Для круглых труб принимают $Re_{кр} = 2300$, т. е. при $Re < 2300$ режим считается ламинарным, а при $Re > 2300$ — турбулентным.

Заметим, что значение критического числа Рейнольдса не зависит от рода жидкости, что делает его универсальным критерием.

Как видно из выражения для числа Рейнольдса, ламинарное течение осуществляется:

- при малых скоростях течения;
- в тонких трубках;
- при больших вязкостях жидкости (масла, мазуты).

Турбулентные течения широко распространены в природе и технике (пожалуй, больше, чем ламинарные). Турбулентным является движение воздуха в атмосфере, течение воды в реках, каналах и водопроводных трубах, движение воды в гидравлических машинах.

4.2. ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Определим распределение скорости и расход жидкости при ламинарном движении ее в круглой цилиндрической трубе.

При течении жидкости в трубе различают начальный, или входной, участок и участок установившегося течения. Если вход в трубу из резервуара выполнен достаточно плавным, то в начальном сечении распределение скоростей практически равномерное, эпюра скорости представляет собой прямоугольник (рис. 4.2). По мере продвижения жидкости по начальному участку на стенках за счет сил трения возникает торможение. При дальнейшем движении жидкости по трубе тормозящее действие стенок распространяется на все большую толщину потока.

На начальном участке поток имеет все уменьшающееся ядро, в котором сохраняется равномерное распределение скоростей, и пристеночный пограничный слой, где скорости распределены неравномерно. Вниз по течению размеры ядра убывают, толщина пограничного слоя растет до почти полного смыкания на оси трубы. Далее начинается участок установившегося движения, который мы, собственно, и рассмотрим.

В соответствии с формулой Ньютона, сила гидравлического трения в жидкости равна

$$F = -\mu \omega \frac{dv}{dn}.$$

Для круглой цилиндрической трубы запишем ее в цилиндрической системе координат в виде

$$F = -\mu \pi r^2 \frac{dv}{dr},$$

где r — текущий радиус цилиндрического слоя.

Отнеся силу к единице площади, получим напряжение

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}.$$

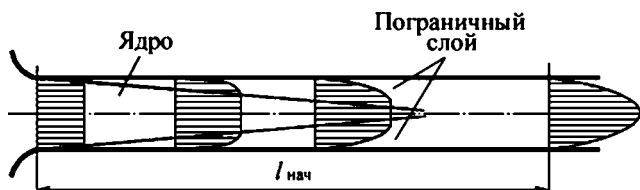


Рис. 4.2

С другой стороны, в соответствии с основным уравнением равномерного движения жидкости (формула (3.12)), имеем для напряжения трения

$$\frac{\tau}{\rho g} = Ri \quad \text{или} \quad \tau = \rho g Ri.$$

Тогда

$$\rho g Ri = -\mu \frac{dv}{dr}.$$

Вспоминая, что гидравлический радиус для круглой трубы $R = \frac{r}{2}$, и, разделяя переменные, получим

$$dv = -\frac{\rho g}{\mu} i \frac{r}{2} dr.$$

Интегрируем:

$$v = -\frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} i \int r dr = -\frac{1}{4} \frac{\rho g}{\mu} i r^2 + \text{const.}$$

Постоянную интегрирования определяем из граничных условий: при $r = r_0$ (т. е. на стенке трубы) должны выполняться условия прилипания и скорость жидкости должна быть равна нулю, $v = 0$.

Тогда

$$\text{const} = \frac{1}{4} \frac{\rho g}{\mu} i r_0^2.$$

Подставляя значение постоянной интегрирования в формулу для определения скорости, получаем

$$v = \frac{1}{4} \frac{\rho g}{\mu} i (r_0^2 - r^2). \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что скорости в поперечном сечении трубы распределяются по параболическому закону. Наибольшая скорость будет при $r = 0$, т. е. в центре трубы:

$$v_{\max} = \frac{1}{4} \frac{\rho g}{\mu} i r_0^2. \quad (4.3)$$

При ламинарном движении скорости малы, скоростные напоры (слагаемые в уравнении Бернулли, характеризующие кинетическую энергию жидкости) тоже малы, поэтому можно считать, что полная удельная энергия

жидкости определится только двумя членами уравнения Бернулли: $\frac{P}{\rho g} + z = z^*$.

Тогда вместо полного гидравлического уклона $i = \frac{h_{\text{пот}}}{l}$ можно ввести величину h/l , понимая под h запас энергии в первом сечении относительно второго, равный $z_1^* - z_2^*$. Этот запас часто называют действующим напором.

Тогда формула для скорости запишется в виде

$$v = \frac{1}{4} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l} (r_0^2 - r^2). \quad (4.4)$$

Выведем теперь формулу для расхода.

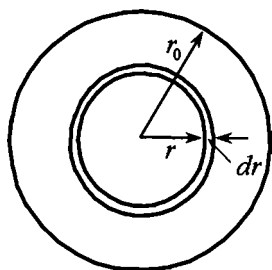


Рис. 4.3

Выделим в сечении потока элементарное кольцо, образованное двумя concentric окружностями, радиусы которых отличаются на малую величину dr (рис. 4.3). Расход жидкости через сечение этого кольца

$$dQ = v d\omega = v 2\pi r dr.$$

Подставим в эту формулу выражение для скорости (4.4):

$$dQ = \frac{1}{4} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr.$$

Для определения полного расхода через сечение трубы проинтегрируем это выражение по r в пределах от 0 до r_0 :

$$Q = \frac{\pi}{2} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{8} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l} r_0^4. \quad (4.5)$$

Среднюю скорость вычислим по формуле $v_{\text{cp}} = \frac{Q}{\omega}$:

$$v_{\text{cp}} = \frac{\pi}{8} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l} r_0^4 : \pi r_0^2 = \frac{1}{8} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l} r_0^2. \quad (4.6)$$

Сравнивая с v_{max} из (4.3), видим, что $v_{\text{cp}} = 0,5 v_{\text{max}}$.

При переходе ламинарного течения в турбулентное характер распределения скоростей по сечению трубы из-

меняется. Если при ламинарном течении распределение скорости по сечению имеет параболический характер, то при турбулентном течении эпюра скоростей из-за перемешивания потока выравнивается, приближаясь к прямоугольной. Так как при турбулентных течениях скорость в каждой точке потока непрерывно пульсирует по величине и направлению (в определенных пределах), то для построения эпюр скоростей и при технических расчетах используются осредненные по времени значения скоростей.

Заметим еще, что при переходе от ламинарного к турбулентному течению не весь поток полностью турбулизируется: около стенок остается тонкий — так называемый пограничный — слой, в котором течение остается ламинарным.

Таким образом, получается, что при турбулентном движении $v_{\text{ср}} = (0,8-0,9)v_{\text{max}}$.

Определим связь средней скорости движения жидкости при ламинарном и турбулентном режимах течения в трубопроводе с потерей напора.

Учитывая, что $i = h/l$, для ламинарного режима из формулы (4.6) получим

$$i = 8 \frac{\mu}{\rho g r_0^2} v_{\text{ср}}.$$

Из этой формулы видно, что потери напора при ламинарном течении пропорциональны первой степени скорости.

При турбулентном же течении, как показывают исследования, потери напора пропорциональны скорости в степени m , меняющейся от 1,75 до 2,00. Таким образом, общий характер зависимости потерь напора от скорости можно выразить так:

- при ламинарном режиме $h_{\text{пот}} = k_1 v$;
- при турбулентном режиме $h_{\text{пот}} = k_2 v^m$,

где k_1 и k_2 — соответствующие коэффициенты пропорциональности.

Отметим, что общий случай движения вязкой жидкости описывается дифференциальными уравнениями Навье–Стокса:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} - \nu \nabla^2 v_x; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt} - \nu \nabla^2 v_y; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} - \nu \nabla^2 v_z. \end{cases}$$

Оператор Лапласа ∇^2 предполагает следующую операцию над своим переменным аргументом:

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Уравнения Навье–Стокса отличаются от уравнений Эйлера для идеальной жидкости наличием членов с вязкостью $\nu \nabla^2 v$. В уравнениях Навье–Стокса четыре неизвестных — три проекции скорости и давление. Привлекая уравнение неразрывности в дифференциальной форме, получаем замкнутую систему для нахождения неизвестных. Но общего решения эти уравнения не имеют, их можно решить лишь для некоторых частных случаев. Например, формула (4.2) и есть частное решение для установившегося ламинарного течения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

4.3. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Турбулентное движение характеризуется непрерывным перемешиванием частиц жидкости. Частицы, движущиеся преимущественно в продольном направлении по потоку, имеют и поперечные перемещения, траектории их движения чрезвычайно сложны.

Турбулентное движение по существу является неустановившимся, так как скорости в любой точке потока непрерывно и постоянно изменяются во времени, т. е. пульсируют по величине и направлению относительно среднего значения (рис. 4.4).

Такие пульсации скорости и являются самым характерным свойством турбулентного течения. У стенок, огра-

ничивающих поток, пульсации затухают, так как поперечные перемещения частиц затруднены. Частицы движутся по извилистым траекториям почти параллельно стенкам либо течение переходит в ламинарный режим.

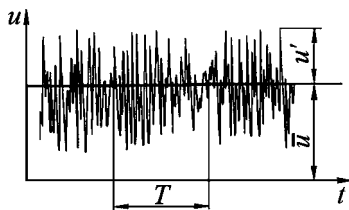


Рис. 4.4

Скорость жидкой частицы в данной точке в данный момент времени называют *мгновенной*. При изучении турбулентного потока пользуются понятием осредненной скорости. *Осредненная скорость* — это средняя скорость в данной точке, взятая за период времени, существенно больший периодов пульсаций, но меньший характерных времен изменения параметров потока:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt,$$

где T — период осреднения; u — мгновенная скорость в точке.

Отклонение мгновенной скорости от ее осредненного значения называется *пульсацией* скорости — u' (рис. 4.4).

Как отмечено выше, при вполне развитом турбулентном течении $v_{cp} = (0,8-0,9)v_{max}$. Эпюра скорости при турбулентном течении в трубе приведена на рисунке 4.5.

Формула для потери напора при развитом турбулентном режиме течения имеет вид $h_{пот} = kv^m$, где m следует принять равным 2.

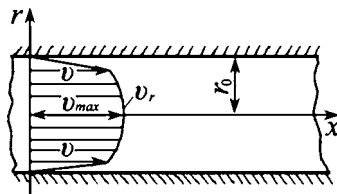


Рис. 4.5

Тогда

$$h_{пот} = kv^2.$$

Поскольку потери напора при движении жидкости обусловлены внутренним трением, то и характер поведения касательных напряжений в потоке будет таким же, т. е. пропорциональным квадрату скорости:

$$\tau = \psi v^2,$$

где ψ — коэффициент пропорциональности.

Используя основное уравнение движения жидкости (3.12), можно записать

$$\frac{\tau}{\rho g} = Ri \quad \text{или} \quad \frac{\Psi}{\rho g} v^2 = Ri,$$

откуда

$$v^2 = \frac{\rho g}{\Psi} Ri.$$

Определяем отсюда скорость

$$v = \sqrt{\frac{\rho g}{\Psi}} \sqrt{Ri}.$$

Введем новый коэффициент C , обозначив $C = \sqrt{\frac{\rho g}{\Psi}}$. Тогда окончательно получим

$$v = C \sqrt{Ri}. \quad (4.7)$$

Это — формула Шези для средней скорости равномерного турбулентного течения жидкости. Она была выведена на еще в XVIII в.

Коэффициент C имеет размерность $[C] = \frac{L^{1/2}}{T} = \frac{M^{1/2}}{c}$.

Изначально считали, что коэффициент C — величина постоянная или меняющаяся в небольших пределах — примерно 40–50. Однако выяснилось, что коэффициент C меняется в значительных пределах и зависит от формы и размеров поперечного сечения потока и от шероховатости стенок.

Было предложено много формул для определения C , главным образом — эмпирических, т. е. базирующихся на экспериментальном материале.

Широко применяется и дает хорошие результаты формула Н. Н. Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (4.8)$$

где n — коэффициент шероховатости, который берется по специальной шкале, y — показатель степени, зависящий от n и от R и колеблющийся от 1/6 до 1/5.

Для формулы (4.8) составлены таблицы, дающие значение y или сразу C в зависимости от R и n .

В частности, положив в формуле (4.8) $y = 1/6$, получим формулу Маннинга:

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}. \quad (4.9)$$

Эта формула широко применяется при расчетах открытых потоков.

Удовлетворительные результаты дает формула А. А. Сабанеева

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23n}{\sqrt{R}}},$$

где n берется по той же шкале шероховатости.

Нужно отметить, что все формулы для C применимы с достаточной надежностью для поверхностей с шероховатостью в пределах от $n = 0,011$ до $n = 0,025$.

Для очень гладких поверхностей ($n < 0,01$) и очень шероховатых ($n > 0,025$) формула Шези и другие обычно используемые формулы не дают соответствия характеру движения и механизму образования потерь.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

5.1. СТРУКТУРА ПОТОКА

Потери удельной энергии (напора), или, как их часто называют, гидравлические потери, зависят от формы, размеров русла, скорости течения и вязкости жидкости, а иногда и от абсолютного давления в ней. Вязкость жидкости, хотя и является первопричиной всех гидравлических потерь, но далеко не всегда оказывает самое существенное влияние на их величину. Гидравлические потери делятся на две основные группы:

- *линейные потери*, их еще называют распределенными потерями или потерями трения; они связаны с внутренним трением в движущейся жидкости;
- *местные потери*, обусловленные преодолением различных местных сопротивлений и препятствий (краны, задвижки, повороты, тройники и пр.).

При протекании жидкости через местные сопротивления искривляются линии тока, изменяется поле скоростей, зачастую может произойти отрыв потока. Возникают области, заполненные мелкими или крупными вихрями. На рисунке 5.1 приведены примеры местных сопротивлений: 1 — задвижка, 2 — диафрагма, 3 — колено.

На рисунке 5.2 приведены эпюры осредненных скоростей до и после диафрагмы. Видно наличие вихрей, изменение направления потока в пристеночном слое.

При поворотах потока возникают центробежные силы, вызывающие отклонение распределения давления по сечению от гидростатического закона. У стенки с большим

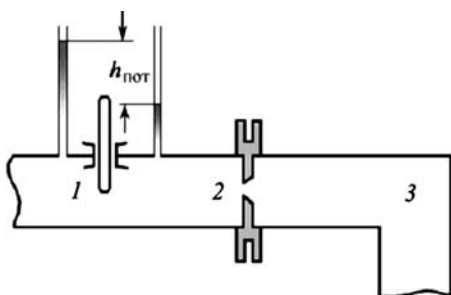


Рис. 5.1

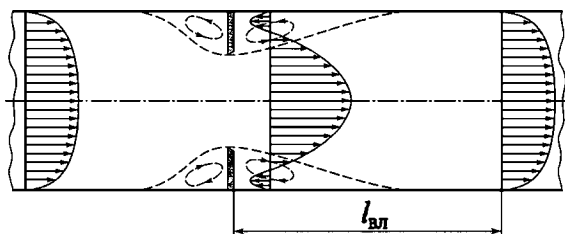


Рис. 5.2

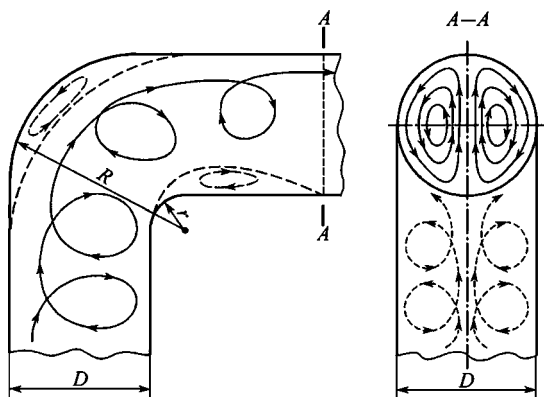


Рис. 5.3

радиусом R давление увеличивается, у стенки с меньшим радиусом r — уменьшается. В результате возникают вторичные вращательные течения, поперечная циркуляция в виде парного вихря (рис. 5.3).

Движение в области вихрей при турбулентном режиме неустойчиво, оно характеризуется повышенной пульсацией, происходит обмен частицами жидкости между вихревыми зонами и основным потоком. Отдельные вихри из вихревой области периодически уносятся вниз по течению, на их место поступают новые частицы жидкости. Уносимые по течению вихри дробятся, с удалением от местного сопротивления пульсации затухают. На каком-то расстоянии от места расположения местного сопротивления поток окончательно стабилизируется. Если сохраняются условия равномерного движения (постоянный расход, форма и площадь живого сечения), дальнейшее движение жидкости происходит в равномерном режиме.

Длина участка, на котором поток, измененный местным сопротивлением, восстанавливает свои характеристики, называется длиной влияния местного сопротивления — $l_{\text{вл}}$ (см. рис. 5.2). В общем случае длина влияния зависит от типа местного сопротивления и прямо пропорциональна числу Рейнольдса.

Таким образом, причинами потерь энергии на местных сопротивлениях являются искривления линий тока, образование вихревых областей и их взаимодействие с основным транзитным потоком, а также вторичные течения.

5.2. ПОТЕРИ НАПОРА

Гидравлические потери принято выражать в долях кинетической энергии потока (скоростного напора).

Как показывает опыт и как мы уже отмечали ранее, во многих (но не во всех) случаях гидравлические потери приблизительно пропорциональны квадрату скорости течения жидкости, поэтому в гидравлике принят общий способ выражения гидравлических потерь полного напора в виде

$$h_{\text{пот}} = \zeta \frac{v^2}{2g}. \quad (5.1)$$

где ζ — безразмерный коэффициент сопротивления, показывающий, какая часть кинетической энергии потока

затрачивается на преодоление того или иного гидравлического сопротивления.

Это выражение называют формулой Вейсбаха.

При расчете величины местных потерь по формуле (5.1) в качестве v принимают среднюю по сечению скорость в трубе, в которой установлено местное сопротивление. Обычно принимается средняя скорость за местным сопротивлением. Если же диаметр трубы и, следовательно, скорость в ней изменяются по длине, то выбирают наибольшую скорость, а значит, наименьший диаметр.

Каждое местное сопротивление характеризуется своим значением ζ , которое можно считать постоянным для данной формы местного сопротивления.

Потери на трение (линейные потери) также можно рассчитывать по формуле (5.1). Но понятно, что потери на трение возрастают пропорционально длине трубы. Поэтому при расчетах линейных потерь удобно коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{тр}}$ связать с длиной трубы, например по зависимости

$$\zeta_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d}.$$

Тогда формула потери напора на трение в жидкости примет вид

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (5.2)$$

Это выражение носит название формулы Вейсбаха–Дарси.

Безразмерный коэффициент λ называют *коэффициентом потерь на трение по длине*, или коэффициентом Дарси. Оценим величину коэффициента λ для случая ламинарного движения жидкости в цилиндрической круглой трубе. В этом случае расход жидкости определится формулой (4.5):

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h_{\text{тр}}}{l} r_0^4.$$

Преобразуем эту формулу:

$$h_{\text{тр}} = Q \frac{\mu}{\rho g} \frac{8}{\pi} \frac{l}{r_0^4}.$$

Учитывая, что для трубы круглого поперечного сечения

$$r_0 = \frac{d_0}{2}; \quad Q = \frac{\pi d_0^2 v}{4}; \quad \mu = \nu \rho,$$

получаем

$$h_{\text{тр}} = \frac{\pi d_0^2 v}{4} \frac{\nu}{g} \frac{8}{\pi} \frac{16l}{d_0^4} = \frac{32\nu l v}{g d_0^2} = \frac{64\nu}{v d} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (5.2), можем заметить, что коэффициент потерь на трение для ламинарного режима равен

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (5.3)$$

Оценим теперь величину коэффициента λ для случая турбулентного движения жидкости в трубе. В соответствии с формулой Шези

$$v = C\sqrt{Ri}.$$

Учитывая, что $i = \frac{h_{\text{тр}}}{l}$, получим

$$h_{\text{тр}} = \frac{v^2 l}{C^2 R},$$

где R — гидравлический радиус, для круглой трубы он равен $R = d/4$.

Умножив и разделив на $2g$, получим

$$h_{\text{тр}} = \frac{8g}{C^2} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Сравнивая это выражение с (5.2), видим, что для турбулентного режима течения в круглой трубе

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) справедлива для полностью развитого турбулентного течения.

Для течения с неполностью развитой турбулентностью также можно определить соответствующим образом коэффициент λ . То есть формула (5.2) является универсальной, может быть использована как для ламинарного, так и для турбулентного (развитого и неразвитого) режимов течения жидкости.

Если в трубе имеется несколько местных сопротивлений, расположенных друг от друга на расстояниях, превышающих длину влияния и, значит, не влияющих друг на друга, общую величину потерь напора определяют суммированием потерь на каждом из местных сопротивлений:

$$h_{\text{мест}} = \sum_i h_{\text{мест}, i} = \sum_i \zeta_i \frac{v_i^2}{2g}.$$

Такой метод простого суммирования потерь называют методом наложения потерь.

Если местные сопротивления расположены друг от друга на расстоянии, меньшем длины влияния, такие два смежных сопротивления рассматривают как одно сложное местное сопротивление и определяют суммарный коэффициент его сопротивления и суммарные потери напора.

В общем случае наличия и местных потерь напора и потерь напора на трение итоговые потери напора определяются как их сумма:

$$h_{\text{пот}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{мест}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g},$$

где $\sum \zeta$ — сумма коэффициентов местных сопротивлений.

5.3. ГРАФИКИ И. И. НИКУРАДЗЕ

Исследования, проведенные И. И. Никурадзе в 1932–1933 гг., показали, что в общем случае коэффициент λ зависит от числа Re и от так называемой *относительной шероховатости*.

Относительная шероховатость — отношение некоторой средней (как правило, условной) высоты выступов шероховатости к диаметру трубы, т. е. Δ/d .

Технические трубы — это трубы с естественной шероховатостью, обусловленной материалом стенок, технологией изготовления, условиями и продолжительностью эксплуатации. Понятно, что абсолютные значения величин выступов шероховатости не могут являться полной характеристикой шероховатости поверхностей — у раз-

личных поверхностей выступы имеют различную конфигурацию и разное распределение по поверхности. Поэтому вводится понятие эквивалентной шероховатости. *Эквивалентная шероховатость* — это высота выступа воображаемой равнозернистой шероховатости, при которой потери напора и значения коэффициента Дарси такие же, как и для реальной шероховатости.

В своих опытах И. И. Никурадзе использовал латунные трубы различного диаметра (от 10 до 100 мм). Для создания разной шероховатости на внутреннюю поверхность труб лаком приклеивался слой песчинок примерно одинакового диаметра — Δ . В опытах значения относительной шероховатости Δ/d изменялись от $1/500$ до $1/15$. Числа Рейнольдса в опытах Никурадзе изменялись в диапазоне $Re = 500-10^6$.

По результатам опытов Никурадзе были построены графики зависимости коэффициента λ от числа Re и от относительной шероховатости в логарифмических координатах (рис. 5.4).

На графиках можно выделить следующие характерные зоны:

1. Зона ламинарного течения, где $\lambda = 64/Re$, потери $h_{пот} = k_1 v$ зависят от скорости в первой степени и шероховатость не влияет на величину λ . Линии на графике для

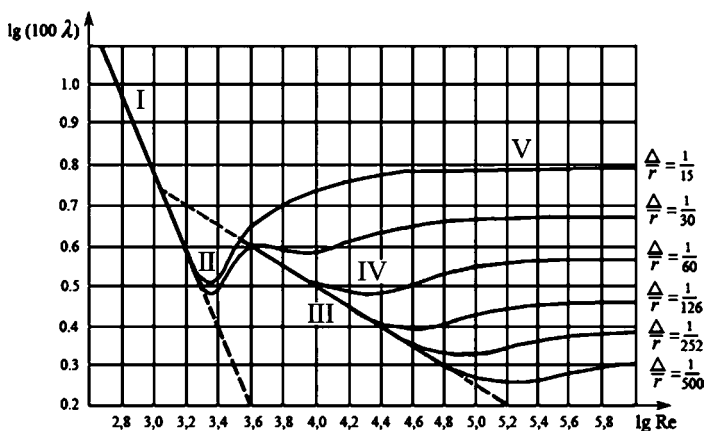


Рис. 5.4

разных значений относительной шероховатости в этой зоне практически совпадают.

2. Зона, переходная от ламинарного к турбулентному течению, $Re = 2000-3000$. В этой зоне тоже $\lambda = f(Re)$, но конкретный вид этой зависимости не достаточно определен. Критическое число Рейнольдса перехода от ламинарного к турбулентному течению от шероховатости практически не зависит, графики отклоняются от прямой приблизительно при одном и том же числе $Re_{кр}$.

В этой зоне применимы, например, такие эмпирические зависимости для определения коэффициента потерь:

$$\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}} \quad \text{или} \quad \lambda = 1,47 \cdot 10^{-5} Re.$$

3. Зона, соответствующая началу турбулентного течения, но при еще небольших значениях Re . Шероховатость на величину λ практически не влияет, поэтому эта зона называется зоной «гидравлически гладких труб». В этой зоне также $\lambda = f(Re)$, а потери напора пропорциональны скорости в степени 1,75: $h_{пот} = k_{III} v^{1,75}$. Коэффициент λ в этой зоне можно определить из формул

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0,80; \quad \lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (\text{для } Re \leq 10^5).$$

При увеличении Re и в этой зоне начинает сказываться шероховатость — кривые для более шероховатых труб начинают отклоняться от прямой, соответствующей закону сопротивления гладких труб.

4. Зона турбулентного течения, переходная от «гидравлически гладких труб» к зоне «шероховатых» труб. В этой зоне λ зависит и от Re , и от относительной шероховатости. Здесь коэффициент λ можно определить из формулы

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta}{3,7d} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Потери напора в этой зоне пропорциональны скорости в степени между 1,75 и 2,0.

5. Зона развитого турбулентного течения — зона «шероховатых труб» или зона «квадратичного сопротивления». Здесь λ не зависит от Re , а зависит только от относительной

шероховатости Δ/d . Потери напора пропорциональны квадрату скорости $h_{\text{пот}} = k_v v^2$.

Коэффициент λ в этой зоне можно определять по зависимостям

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{\left[2 \lg \left(\frac{3,7d}{\Delta} \right) \right]^2}.$$

Во всех трех зонах с турбулентным течением для определения коэффициента потерь на трение можно использовать формулу Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

Таким образом, для всех трех турбулентных зон влияния шероховатости оценивается следующим образом.

Турбулентный поток можно представить состоящим из основной турбулентной зоны и пристенного (пограничного) слоя, в котором течение происходит в ламинарном режиме. При турбулентном течении с небольшим значением числа Re толщина ламинарного пограничного слоя превышает высоту шероховатостей. Шероховатость, как бы прикрытая этим слоем, не оказывает влияния на сопротивление.

С увеличением Re толщина пограничного слоя уменьшается и становится меньше размера Δ . Шероховатость частично выступает из пограничного слоя и начинает влиять на сопротивление потока.

При больших числах Re пограничный слой становится очень тонким, шероховатости почти полностью выступают из него, бугорки обтекаются турбулентным потоком с вихреобразованиями за каждым бугорком, этим и объясняется квадратичный закон сопротивления.

В справочниках, составленных для определения значений коэффициента потерь λ , приведены значения «эквивалентной шероховатости» для различных материалов труб — стали, чугуна, бетона и пр. Кроме того, в справочниках даются и значения коэффициентов местного сопротивления ζ для конкретных конструкций местных сопротивлений.

5.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Мы уже заметили, что местные сопротивления зависят от конкретной формы и конфигурации элементов трубопровода, в которых происходят изменение скорости течения жидкости, отрыв потока от стенок русла, возникновение вихреобразования. В общем случае коэффициенты потерь определяют опытным путем, с учетом того, что при турбулентном режиме течения эти коэффициенты определяются в основном формой местных сопротивлений и очень мало зависят от изменения абсолютных размеров русла, скорости потока и вязкости жидкости, т. е. от числа Re .

Для некоторых простейших местных сопротивлений, таких как расширения, сужения и повороты русла (как внезапные, так и постепенные), выражения для коэффициентов потерь могут быть рассчитаны теоретически.

5.4.1. ВНЕЗАПНОЕ РАСШИРЕНИЕ ТРУБОПРОВОДА

При внезапном расширении трубопровода (или русла канала) поток срывается с угла и расширяется не внезапно, как сама труба, а постепенно, причем в кольцевом пространстве между потоком и стенкой образуются вихри, которые и являются причиной потерь энергии, т. е. возникновения сопротивления (рис. 5.5). Выделим в потоке, движущемся по трубопроводу с внезапным расширением, два сечения:

- сечение 1–1 — в месте внезапного расширения;
- сечение 2–2 — на некотором удалении от места внезапного расширения.

Обозначим параметры в сечении 1–1 индексом «1»: ω_1 — площадь сечения трубы; v_1 — скорость течения жидкости; p_1 — давление.

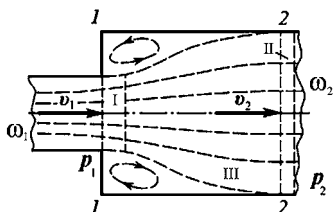


Рис. 5.5

Соответствующие параметры в сечении 2–2 (ω_2 , v_2 , p_2) — индексом «2».

Сделаем следующие исходные предположения.

1. Потери на трение на участке расширения трубы между сечениями 1–1 и 2–2 незначительны, ими можно пренебречь.

2. Давление в сечении 1–1 действует по всему сечению ω_2 , так как хотя труба и расширилась, но параметры (скорость и давление) измениться еще не успели.

Воспользуемся теоремой механики (теоремой Эйлера) о том, что изменение количества движения системы материальных точек в проекции на ось движения равно импульсу действующих сил (импульс тела равен импульсу силы), т. е. $\Delta(mv) = \Delta(Ft)$.

Из рисунка 5.5 видно, что жидкость, занимавшая в начальный момент времени суммарный объем отсеков I и III, через промежуток времени δt переместится и займет объем отсеков II и III. Очевидно, что изменение количества движения произойдет только за счет разницы его в отсеках II и I, так как отсек III является общим для обоих моментов времени и за время δt количество движения жидкости в нем не изменится.

Тогда имеем

$$\Delta(mv) = \alpha_2 m_2 v_2 - \alpha_1 m_1 v_1,$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты количества движения, учитывающие неравномерность распределения скоростей в сечениях 1–1 и 2–2. Поскольку мы рассматриваем случай развитого турбулентного движения в трубе (тем более с учетом угловых завихрений), то, как условились при выводе уравнения Бернулли для реальной жидкости, для турбулентного движения можно принять $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Учтем также, что

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \omega_1 v_1 \delta t$$

и, соответственно,

$$m_2 = \rho V_2 = \rho \omega_2 v_2 \delta t.$$

Тогда

$$\Delta(mv) = \rho(\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2) \delta t.$$

При расчете импульса сил, действующих на выделенный объем жидкости (между сечениями 1-1 и 2-2), проекции на ось движения будут иметь только силы продольного давления, потому что силы тяжести и силы давления на боковую поверхность трубы перпендикулярны оси движения жидкости и проекции на нее не дают.

Тогда импульс сил будет

$$(p_1\omega_1 - p_2\omega_2)\delta t.$$

Вспомним наше второе исходное предположение о том, что давление p_1 действует по всему сечению ω_2 . Тогда для импульса сил можно записать

$$(p_1\omega_1 - p_2\omega_2)\delta t = (p_1 - p_2)\omega_2\delta t.$$

Таким образом, у нас получится уравнение

$$\rho(\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2)\delta t = (p_1 - p_2)\omega_2\delta t.$$

Заменим в этом уравнении (из условия сохранения массы)

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

и получим

$$\rho(\omega_2 v_2^2 - \omega_2 v_2 v_1)\delta t = (p_1 - p_2)\omega_2\delta t.$$

Разделим обе части этого равенства на $\rho g \omega_2 \delta t$:

$$\frac{1}{g}(v_2^2 - v_2 v_1) = \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2). \quad (5.5)$$

Составим теперь уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2, с учетом того, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и геометрическая высота центра тяжести сечения отсчитывается от оси движения, т. е. $z_1 = z_2 = 0$.

Тогда

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_{\text{пот}}.$$

Выразим отсюда потери напора $h_{\text{пот}}$:

$$h_{\text{пот}} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{v_2^2}{2g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2).$$

Последний член этого уравнения заменим, используя формулу (5.5):

$$\begin{aligned} h_{\text{пот}} &= \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{g}(v_2^2 - v_2 v_1) = \\ &= \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2}{2g}. \end{aligned}$$

Применяя в числителе формулу сокращенного умножения, окончательно получим

$$h_{\text{пот}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (5.6)$$

Полученный результат можно сформулировать так: *потеря напора при внезапном расширении русла (трубопровода) равна напору, определенному по разности скоростей (или напору потерянной скорости).*

Это положение называют теоремой Борда, а формулу (5.6) называют формулой Борда–Карно.

Приведем формулу (5.6) к общему виду формулы для гидравлических сопротивлений, т. е. к виду — $h_{\text{пот}} = \zeta \frac{v^2}{2g}$:

а) оставим в формуле (5.6) только скорость v_2 :

$$h_{\text{пот}} = \frac{\left(v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} - v_2\right)^2}{2g} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g},$$

видим, что в этом случае коэффициент сопротивления будет

$$\zeta_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2; \quad (5.7)$$

б) выразим коэффициент сопротивления через скорость v_1 :

$$h_{\text{пот}} = \frac{\left(v_1 - v_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2}{2g} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g},$$

в этом случае коэффициент сопротивления будет

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2. \quad (5.8)$$

Эти зависимости хорошо подтверждаются опытом и широко используются в расчетах.

Для частного случая, когда площадь ω_2 существенно больше площади ω_1 , т. е. когда жидкость по трубе подводится к очень большому резервуару, из формулы (5.8) имеем $\zeta_1 = 1$ и $h_{\text{пот}} = \frac{v_1^2}{2g}$, т. е. в этом случае теряется весь скоростной напор (вся кинетическая энергия, которой обладает движущаяся жидкость).

Потеря напора при внезапном расширении расходуется исключительно на вихреобразование, связанное с отрывом потока от стенок.

5.4.2. ПОСТЕПЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ РУСЛА

Постепенно расширяющаяся труба называется *диффузором* (рис. 5.6). При течении в диффузоре скорость уменьшается, давление вниз по потоку соответственно увеличивается, происходит преобразование кинетической энергии в энергию давления. Частицы двигающейся жидкости преодолевают нарастающее давление за счет кинетической энергии. Кинетическая энергия убывает вдоль оси диффузора и, что важно, от оси к стенкам. Слои жидкости вдоль стенки обладают такой малой кинетической энергией, что порой не в состоянии преодолеть встречное повышенное давление — они останавливаются или даже начинают двигаться обратно. Это вызывает противоток, вихреобразование и даже отрыв потока. Интенсивность этих

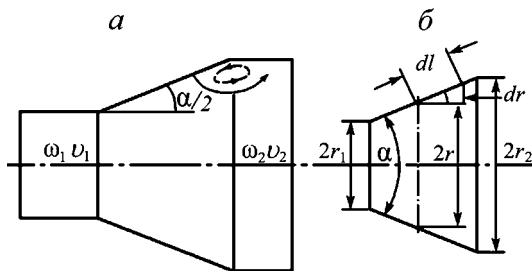


Рис. 5.6

процессов возрастает с увеличением угла расширения диффузора (угла α), следовательно, при увеличении угла расширения диффузора растут и потери на вихреобразование.

Кроме того, в диффузоре имеются обычные потери на трение, подобные тем, что возникают в трубах постоянного сечения.

Поэтому полную потерю напора в диффузоре $h_{\text{пот}}$ представим как сумму двух слагаемых:

$$h_{\text{пот}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{расш}}.$$

Определим слагаемые в этой формуле.

Потерю напора на трение рассчитаем следующим образом. Рассмотрим круглый диффузор с прямолинейной образующей и углом α при вершине (рис. 5.6б). Радиус входного отверстия — r_1 , выходного — r_2 . По длине диффузора радиус изменяется, соответственно меняется и скорость течения жидкости. Возьмем элементарный отрезок диффузора длиной по образующей dl , запишем для него выражение для потери напора.

По формуле Вейсбаха–Дарси для всего участка трубы

$$h_{\text{тр}} = \lambda_{\text{т}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Тогда для элементарного отрезка

$$dh_{\text{тр}} = \lambda_{\text{т}} \frac{dl}{2r} \frac{v^2}{2g},$$

где r — текущий радиус сечения, v — средняя скорость в этом сечении.

Из геометрии (рис. 5.6б) следует, что

$$dl = \frac{dr}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Так как расход при течении вдоль диффузора сохраняется, то

$$v = v_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2,$$

где r_1 и v_1 — соответственно радиус трубы и скорость в начале диффузора.

Подставим определенные таким образом значения dl и v в выражение для $dh_{\text{тр}}$ и проинтегрируем в пределах от r_1 до r_2 , т. е. по всей длине диффузора. Считаем коэффициент $\lambda_{\text{т}}$ постоянным.

$$dh_{\text{тр}} = \lambda_{\text{т}} \frac{dr}{2r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g},$$

откуда

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda_{\text{т}}}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{v_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^5} = \frac{\lambda_{\text{т}}}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4\right] \frac{v_1^2}{2g}.$$

Введем понятие степени расширения диффузора:

$$n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2.$$

Тогда

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda_{\text{т}}}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_1^2}{2g}. \quad (5.9)$$

Потери напора на расширение (на вихреобразование) имеют в диффузоре ту же природу, что и в трубопроводе с внезапным расширением сечения, но по сравнению с внезапным расширением они меньше. Обычно вводят поправочный коэффициент k , меньший единицы, и, используя формулы (5.6) и (5.8), получают

$$h_{\text{расш}} = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = k \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (5.10)$$

Так как в диффузоре по сравнению с внезапным расширением торможение как бы смягченное, коэффициент k называют *коэффициентом смягчения*.

Для углов конусности диффузора $\alpha = 5-20^\circ$ значение коэффициента k принимают приближенно:

$$k = \sin \alpha.$$

Тогда, используя формулы (5.9) и (5.10), можно записать

$$h_{\text{пот}} = \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{\lambda_{\text{т}}}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \sin \alpha \right] \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g}.$$

Коэффициент сопротивления диффузора можно выразить формулой:

$$\zeta_{\text{диф}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{\lambda_{\text{т}}}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \sin \alpha. \quad (5.11)$$

Видим, что коэффициент сопротивления диффузора зависит от угла α , коэффициента $\lambda_{\text{т}}$ и степени расширения n .

Выясним, как $\zeta_{\text{диф}}$ зависит от угла α при постоянных $\lambda_{\text{т}}$ и степени расширения n (постоянство n означает постоянство отношения r_1 и r_2).

В формуле (5.11) первое слагаемое обусловлено трением, второе — расширением. При увеличении α первая составляющая $\zeta_{\text{диф}}$ уменьшается, так как диффузор становится короче, а вторая составляющая увеличивается. При уменьшении α вихреобразование (вторая составляющая) уменьшается, но возрастает трение, так как диффузор удлиняется.

Функция $\zeta_{\text{диф}} = f(\alpha)$ имеет минимум при некотором наивыгоднейшем оптимальном значении угла α (рис. 5.7). Это значение можно найти, продифференцировав по α зависимость коэффициента сопротивления от угла раствора диффузора, приравняв производную к нулю и решив полученное уравнение относительно α .

Расчеты дают следующее оптимальное значение угла α :

$$\alpha_{\text{опт}} = \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \frac{\lambda_{\text{т}}}{4}}.$$

При использовании типовых (обычных) значений $\lambda_{\text{т}} = 0,015-0,025$ и $n = 2-4$, расчет дает значение $\alpha_{\text{опт}} = 6^\circ$.

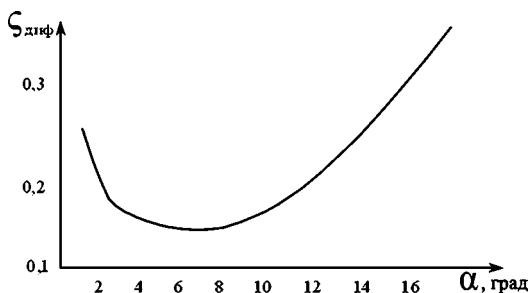


Рис. 5.7

Для сокращения длины диффузора можно принимать несколько большие углы α — от 7° до 9° .

Такие же значения оптимального угла α можно рекомендовать и для квадратных диффузоров. Для плоских диффузоров (прямоугольных с расширением в одной плоскости) оптимальный угол больше и составляет $10\text{--}12^\circ$.

Иногда габариты конструкций не позволяют использовать диффузоры с оптимальными углами. Тогда возможно применение диффузора с криволинейной образующей (рис. 5.8а). Такой диффузор обеспечивает постоянный градиент давления вдоль оси ($dp/dx = \text{const}$), т. е. равномерное нарастание давления (при прямой образующей градиент давления убывает вдоль диффузора). Уменьшение потери энергии в таких диффузорах тем больше, чем больше угол α . Кроме того, поток в таких диффузорах отличается устойчивостью, т. е. меньше тенденций к отрыву потока.

Возможно также применение ступенчатого диффузора — обычного диффузора с прямолинейной образующей и оптимальным углом и следующего за ним внезапного расширения (рис. 5.8б). Диффузор с оптимальным углом существенно снижает скорости течения, и поэтому последующее внезапное расширение не вызывает больших потерь энергии. Общее сопротивление такой составной конструкции значительно меньше, чем у обычного диффузора такой же длины и с той же степенью раскрытия.

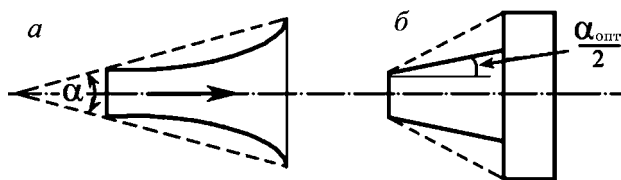


Рис. 5.8

5.4.3.

ВНЕЗАПНОЕ СУЖЕНИЕ РУСЛА (ТРУБЫ)

Внезапное сужение вызывает меньшую потерю энергии, чем внезапное расширение с таким же соотношением площадей. Потери при этом обусловлены:

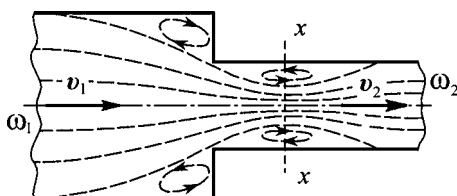


Рис. 5.9

- трением потока при входе в более узкую трубу;
- потерями на вихреобразование.

Вихри образуются потому, что поток не обтекает входной угол, а срывается с него и сужается. Кольцевое пространство вокруг суженной части заполняется завихренной жидкостью (рис. 5.9).

Далее поток расширяется, и при расширении происходит потеря напора, определяемая формулой Борда (5.6):

$$h_{\text{пот}} = \frac{(v_x - v_2)^2}{2g}.$$

Тогда полная потеря напора будет

$$h_{\text{сужен}} = \zeta_0 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{(v_x - v_2)^2}{2g} = \zeta_{\text{сужен}} \frac{v_2^2}{2g},$$

где ζ_0 — коэффициент потерь, обусловленный трением потока при входе в узкую трубу и зависящий от соотношения площадей и Re ; v_x — скорость потока в суженном месте; $\zeta_{\text{сужен}}$ — коэффициент сопротивления внезапного сужения.

Для практических расчетов удобно пользоваться полуэмпирической формулой И. Е. Идельчика

$$\zeta_{\text{сужен}} = \frac{\left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

где $n = \Omega_1/\Omega_2$ — степень сужения.

Из формулы И. Е. Идельчика следует, что в частном случае при $n = \Omega_1/\Omega_2 = \infty$, т. е. при выходе из очень большого резервуара в трубу (при отсутствии закругления), коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{сужен}} = \zeta_{\text{вх}} = 0,5$.

Значительно уменьшить потерю напора при входе в трубу можно закруглением входного угла (входной кромки).

5.4.4. ПОСТЕПЕННОЕ СУЖЕНИЕ ТРУБЫ

Коническая сходящаяся труба называется *конфузором* (рис. 5.10).

В конфузоре течение жидкости происходит при увеличении скорости и падении давления вниз по потоку. Поэтому причин для вихреобразования и срыва потока (как в диффузоре) нет. В конфузоре есть лишь потери на трение, следовательно, сопротивление его всегда меньше, чем у такого же диффузора.

Потерю напора в конфузоре можно подсчитать так же, как мы это делали для диффузора: выразить потерю напора для элементарного отрезка и проинтегрировать по всему объему.

Тогда в результате получим

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda_{\text{т}}}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_2^2}{2g}.$$

Небольшие вихреобразования и отрыв потока от стенок с одновременным сжатием потока могут возникнуть лишь на выходе из конфузора в месте соединения конической части с цилиндрической. Чтобы этого не происходило, рекомендуется коническую часть плавно сопрягать с цилиндрической или коническую часть заменить криволинейной, плавно переходящей в цилиндр. Такое решение допускает значительную степень сужения при малой длине вдоль оси, потери при этом небольшие. Такое плавное сужение называется *соплом*. Коэффициент сопротивления сопла находится примерно в пределах $\zeta = 0,03-0,1$ в зависимости от степени и плавности сужения и числа Re (чем больше Re , тем меньше ζ).

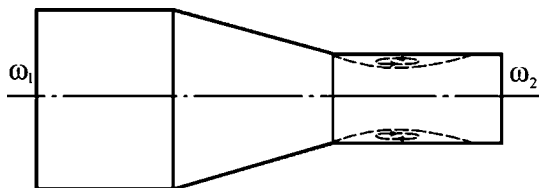


Рис. 5.10

5.4.5. ВНЕЗАПНЫЙ ПОВОРОТ РУСЛА

Внезапный поворот трубы или русла в гидравлике называют также *коленом* (рис. 5.11).

Колено обычно вызывает значительные потери энергии, так как происходят отрыв потока и вихреобразование, причем эти потери тем больше, чем больше угол δ — угол поворота колена.

Потерю напора рассчитывают по общей формуле

$$h_{\text{пот}} = \zeta_{\text{колена}} \frac{v_2^2}{2g}.$$

Коэффициент сопротивления колена круглого сечения возрастает с увеличением δ очень круто и при $\delta = 90^\circ$ достигает единицы (рис. 5.12).

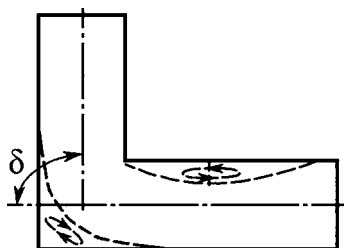


Рис. 5.11

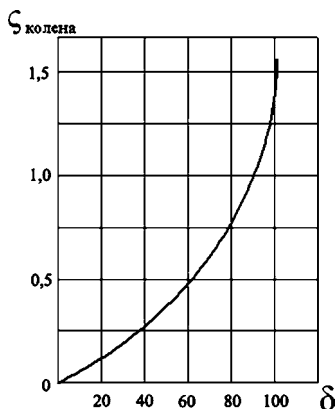


Рис. 5.12

5.4.6. ПОСТЕПЕННЫЙ ПОВОРОТ ТРУБЫ

Постепенный поворот трубы (русла) или закругленное колено называется *отводом* (рис. 5.13).

Плавность поворота значительно уменьшает интенсивность вихреобразования, а следовательно, и сопротивление отвода по сравнению с коленом. Это уменьшение тем больше, чем больше относительный радиус кривизны от-

вода R/d , и при достаточно большом его значении срыв потока и связанное с ним вихреобразование устраняются полностью.

Коэффициент сопротивления отвода $\zeta_{\text{отвода}}$ зависит от отношения R/d , угла δ , а также от формы поперечного сечения трубы.

Для круглых отводов с углом $\delta = 90^\circ$ и $R/d \geq 1$ при турбулентном течении можно пользоваться эмпирической формулой

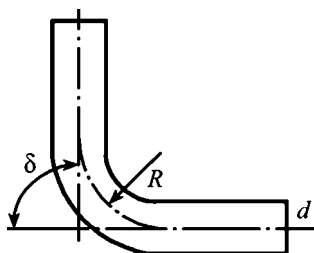


Рис. 5.13

$$\zeta_{\text{отвода}}^* = 0,051 + 0,19 \frac{d}{R}.$$

Для углов $\delta \leq 70^\circ$ коэффициент сопротивления

$$\zeta_{\text{отв}} = 0,9 \zeta_{\text{отвода}}^* \sin \delta,$$

а при $\delta \geq 100^\circ$

$$\zeta_{\text{отв}} = \left(0,7 + \frac{\delta}{90} 0,35 \right) \zeta_{\text{отвода}}^*.$$

Эти коэффициенты учитывают лишь дополнительное сопротивление, обусловленное кривизной русла. Потери на трение учитываются обычным образом, т. е. длина отвода включается в общую длину трубопровода, по которой рассчитываются потери на трение.



ГЛАВА 6

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

6.1. ДЛИННЫЕ И КОРОТКИЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Практически все трубопроводы на своем основном протяжении имеют цилиндрическую или призматическую форму. Поэтому установившееся движение жидкости в них обычно бывает равномерным. Неравномерным движение может быть лишь на участках местных сопротивлений, на которых движение, как правило, нельзя считать и плавноизменяющимся.

Каждый трубопровод обладает гидравлическими сопротивлениями, обуславливающими соответствующие потери напора при движении жидкости. Во всех трубопроводах есть потери на трение. Что касается местных сопротивлений, то в одних трубопроводах они могут быть большими, а в других настолько малыми, что при расчетах ими можно пренебречь. Поэтому при гидравлических расчетах трубопроводов принято различать два вида трубопроводов — длинные и короткие.

Гидравлически *длинными* называются такие трубопроводы, у которых в общей сумме потерь энергии преобладают потери на трение, распределенные по длине, а доля местных потерь настолько мала, что ею можно пренебречь при гидравлических расчетах.

К гидравлически *коротким* относят трубопроводы, в которых сумма местных потерь сравнима с величиной потерь на трение и при расчетах необходимо учитывать и потери напора на трение, и потери напора на местных сопротивлениях.

Как видно из этих определений, смысл названия трубопровода не определяется его длиной, а зависит от количества и характера имеющихся в нем местных сопротивлений.

Обычно вопрос о том, к какому виду относится трубопровод, заранее достаточно очевиден. К длинным трубопроводам практически всегда относятся магистральные водопроводы. К коротким принадлежат трубы под насыпями, всасывающие трубы насосных установок, трубопроводы со значительным количеством запорной арматуры и т. д. Если изначально вопрос, к какому виду отнести изучаемый трубопровод, непонятен, приходится считать его коротким и делать выводы только по результатам предварительного гидравлического расчета. Если сумма потерь напора на местных сопротивлениях окажется меньше 5% от потерь по длине, то трубопровод можно считать длинным.

Вне зависимости от того, к какому виду относится рассматриваемый трубопровод, при его расчете возникают три основных типа задач:

1) заданы диаметр d , длина трубопровода l и расход движущейся жидкости Q — требуется определить напор H , необходимый для пропускания заданного расхода;

2) заданы диаметр d и длина трубопровода l , а также действующий напор H — требуется определить расход Q ;

3) заданы длина трубопровода l , расход Q и действующий напор H — требуется определить необходимый диаметр трубопровода d .

Для решения всех этих типов задач необходимо получить зависимость, связывающую размеры трубопровода (длину l и диаметр d) с напором H и расходом Q .

Необходимость учитывать местные потери напора существенно осложняет расчет коротких трубопроводов. Поэтому вначале целесообразно ознакомиться с основами расчета длинных труб.

6.2. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

6.2.1. РАСЧЕТ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА

Движение жидкости в трубопроводе определяется разностью двух напоров: напора перед входом в трубопровод и напора на выходе из него. Однако если плоскость сравнения совместить со свободной поверхностью жидкости в пьезометре, присоединенном к выходному сечению, то удельная потенциальная энергия выходного сечения по отношению к плоскости сравнения будет равна нулю. В большинстве практических задач кинетическая энергия в выходном сечении либо очень мала, либо не представляет интереса для расчета. Таким образом, основная величина, определяющая движение жидкости в трубопроводе, — напор в начальном сечении относительно уровня жидкости в пьезометре, присоединенном к выходному сечению. Этот напор и называется расчетным напором трубопровода.

Величину расчетного напора можно оценить следующим образом. В общем виде разность энергий входного и выходного сечений

$$H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right).$$

Обычно жидкость входит в трубопровод из бака или водоема настолько больших размеров, что скорость перед входом можно считать пренебрежимо малой, $v_1 \approx 0$. Кинетической энергией на выходе, как уже отмечено, также можно пренебречь. Кроме того, если оба сечения сообщаются с атмосферой (как обычно и бывает), то $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$.

Тогда

$$H = z_1 - z_2,$$

т. е. в этом простом случае расчетный напор есть разность геометрических высот центров тяжести входного и выходного сечений трубопровода.

Рассмотрим для начала схему расчета *простого* трубопровода, т. е. трубопровода, не имеющего ответвлений.

Таким трубопроводом можно подавать воду из одного напорного бака в другой либо из канала (водоема) к пункту, где вода из водопровода вытекает непосредственно в атмосферу.

Труба длиной l и диаметром d может быть горизонтальной или наклонной, по ней протекает расход Q (рис. 6.1).

Составим уравнение Бернулли для двух сечений: одно из них $1-1$ совпадает со свободной поверхностью воды в баке, другое $2-2$ проведено через выходное отверстие трубопровода. Плоскость сравнения $0-0$ проведем через центр выходного сечения трубы. Уравнение Бернулли запишется как

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\text{пот}}.$$

Плоскость сравнения проведена через центр выходного сечения, т. е. $z_1 = H$, $z_2 = 0$. Давление в обоих сечениях равно атмосферному: $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$. Уровень жидкости в баке остается постоянным, поэтому $v_1 = 0$.

Для длинных трубопроводов кинетическая энергия жидкости в выходном сечении всегда очень мала по сравнению с величиной потерь, ею можно пренебречь так же, как пренебрегаем местными потерями. С учетом всего этого из уравнения Бернулли получаем

$$H = h_{\text{пот}}. \quad (6.1)$$

Это соотношение означает, что практически весь имеющийся напор затрачивается на преодоление сопротивления

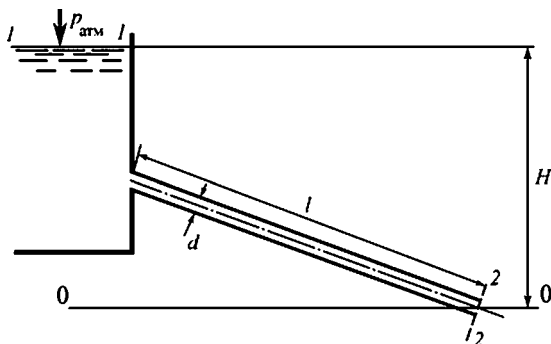


Рис. 6.1

трения по длине трубопровода. Чтобы узнать требуемую величину напора, следует вычислить потери энергии по длине трубопровода. На этом положении и основывается расчет длинных трубопроводов.

Потери, распределенные по длине трубопровода, можно рассчитать по формуле (5.2) (формуле Вейсбаха–Дарси):

$$h_{\text{пот}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Скорость движения жидкости по трубопроводу при полностью развитом турбулентном режиме течения, т. е. в случае квадратичного сопротивления, определяется формулой (4.7) — формулой Шези:

$$v = C\sqrt{Ri}.$$

Тогда расход жидкости определится как

$$Q = \omega v = \omega C\sqrt{Ri} = K\sqrt{i}.$$

Комплекс $K = \omega C\sqrt{R}$ выражает величину расхода жидкости, который может пропустить рассматриваемая труба при гидравлическом уклоне, равном единице. Эту величину называют *модулем расхода* трубы. Вспоминая выражение для гидравлического уклона i при установившемся течении

$$i = \frac{h_{\text{пот}}}{l}$$

и используя обозначение модуля расхода, можем получить формулу, связывающую потери энергии и расход жидкости:

$$h_{\text{пот}} = \frac{Q^2}{K^2} l. \quad (6.2)$$

Модуль расхода трубы связан с ее диаметром и степенью шероховатости. Используя формулу Маннинга (4.9) для коэффициента C и с учетом значения гидравлического радиуса для круглых труб ($R = d/4$), можем записать

$$K = \omega C\sqrt{R} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{n} \left(\frac{d}{4}\right)^{1/6} \left(\frac{d}{4}\right)^{1/2} \approx \frac{1}{10,08} \frac{\pi}{n} d^{8/3}.$$

Для выпускаемых промышленностью труб стандартных диаметров (сортамента) значения модуля расхода K рассчитаны и сведены в гидравлические справочники.

Таким образом, основные формулы для всех трех типов задач, возникающих при расчетах простого трубопровода, могут быть получены из формулы (6.2) с учетом формулы (6.1), т. е. использования в качестве расчетного напора величины потерь энергии:

$$H = \frac{Q^2}{K^2} l; \quad (6.3)$$

$$Q = K \sqrt{\frac{H}{l}}; \quad (6.4)$$

$$K = Q \sqrt{\frac{l}{H}}. \quad (6.5)$$

Порядок расчетов для задач первого типа (определения потребного напора) следующий.

1. По известному диаметру трубы рассчитываются площадь поперечного сечения и средняя скорость течения:

$$v = \frac{Q}{\omega}.$$

2. Вычисляется число Рейнольдса:

$$Re = \frac{vd}{\nu}.$$

3. В соответствии с материалом и состоянием (новый или бывший в эксплуатации) трубопровода по гидравлическим таблицам определяется его шероховатость.

4. По рассчитанному числу Re и шероховатости из графиков Никурадзе определяется, какой случай сопротивления по длине имеет место. Это позволит выбрать вид формулы для расчета коэффициента C .

5. Рассчитывается или определяется из гидравлических таблиц значение модуля расхода K .

6. При известных Q , l и K по формуле (6.3) находится величина напора. Зачастую найденную таким образом величину H несколько увеличивают (на 2–5%) для запаса на неучтенные местные потери.

В задачах второго типа (определение расхода) изначально нельзя вычислить скорости, рассчитать число Рейнольдса и определить закон сопротивления по длине трубы. В задачах третьего типа (расчет необходимых диаметров) неизвестны также изначальные характеристики шерохо-

ватости трубопровода. Такие задачи решаются путем последовательных приближений, при котором предварительные расчеты проводят, задаваясь некоторыми начальными значениями неизвестных параметров. После получения результата производится коррекция начальных предположений, и расчеты повторяются. При использовании возможностей современной вычислительной техники эти методы не вызывают принципиальных трудностей.

Если же рассматриваются трубопроводы с заведомо большой скоростью течения и значительной шероховатостью, то это позволяет уверенно предположить наличие квадратичного закона сопротивления. Тогда, применяя формулы Шези, Павловского или Маннинга, можно решать такие задачи без подбора.

6.2.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТРУБОПРОВОДОВ

Пусть трубопровод состоит из нескольких участков различного диаметра и длины. При отсутствии ответвлений его можно рассматривать как простой трубопровод, состоящий из отдельных участков.

Для нахождения потерь по длине или расчетного напора необходимо вычислить по отдельности потери энергии на каждом участке и сложить их:

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} h_{\text{пот } i} = h_{\text{пот } 1} + h_{\text{пот } 2} + \dots + h_{\text{пот } n},$$

где n — число участков трубопровода.

С учетом того, что расход жидкости на всех участках при отсутствии ответвлений и водозабора одинаков, используя формулу (6.3), получаем

$$H = Q^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{K_i^2} = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \dots + \frac{l_n}{K_n^2} \right). \quad (6.6)$$

Формула для расхода будет иметь вид

$$Q = \sqrt{\frac{H}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{K_i^2}}}. \quad (6.7)$$

Величину l/K^2 , характеризующую сопротивление отдельных участков трубопровода, называют *модулем сопротивления* трубы. Модуль сопротивления численно равен величине потерь энергии при расходе, равном единице, поэтому его также называют *удельным сопротивлением* трубы.

Сумма $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{K_i^2}$ представляет собой суммарный модуль сопротивления всего трубопровода.

При расчете составного трубопровода могут встретиться те же три типа задач, что и при расчетах труб постоянного диаметра. Для решения первых двух задач — определения H и Q — используются формулы (6.6) и (6.7). Третья задача определена, только если ищется диаметр одного из участков трубопровода, а диаметры остальных участков известны. Должна быть известна и длина этого участка. Тогда из формулы (6.6) получим

$$H = Q^2 \left(\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{l_i}{K_i^2} + \frac{l_m}{K_m^2} \right),$$

где m — номер участка, диаметр которого неизвестен.

Отсюда для удельного сопротивления m -го участка получим

$$\frac{l_m}{K_m^2} = \frac{H}{Q^2} - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{l_i}{K_i^2}$$

и для модуля расхода

$$K_m = \sqrt{\frac{l_m}{\frac{H}{Q^2} - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{l_i}{K_i^2}}}.$$

Определив K по таблицам из гидравлических справочников, находим диаметр участка трубопровода.

6.2.3. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТРУБОПРОВОДОВ

Рассмотрим задачу параллельной работы нескольких трубопроводов. На рисунке 6.2 приведен пример параллельного соединения трех трубопроводов.

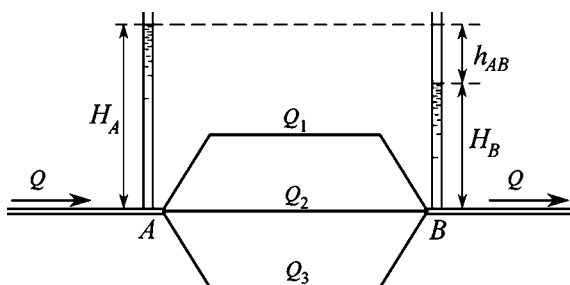


Рис. 6.2

Потери напора в отдельных трубах при параллельном их соединении складывать нельзя. Если в точках A и B (рис. 6.2) подключить пьезометры, то разность их показаний определяет потери напора между этими узлами:

$$h_{AB} = H_A - H_B,$$

а с другой стороны, и потери напора на каждом из параллельно соединенных участков трубопроводов:

$$h_{AB} = h_{\text{пот } 1} = h_{\text{пот } 2} = h_{\text{пот } 3}.$$

Для определения расходов в отдельных ветвях параллельного соединения можно использовать уравнение (6.4):

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_1 \sqrt{\frac{h_{AB}}{l_1}}; \\ Q_2 &= K_2 \sqrt{\frac{h_{AB}}{l_2}}; \\ Q_3 &= K_3 \sqrt{\frac{h_{AB}}{l_3}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Очевидно, что суммарный расход определится как

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Тогда

$$Q = K_1 \sqrt{\frac{h_{AB}}{l_1}} + K_2 \sqrt{\frac{h_{AB}}{l_2}} + K_3 \sqrt{\frac{h_{AB}}{l_3}}.$$

Для трубопровода, состоящего из n параллельных ветвей, можно записать

$$Q = \sqrt{h_{AB}} \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\sqrt{l_i}}.$$

Зная характеристики ветвей трубопровода K_i и l_i , а также суммарный расход жидкости Q , по этой формуле определяем потери напора между узлами A и B :

$$h_{AB} = \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\sqrt{l_i}} \right)}. \quad (6.9)$$

Затем по формулам (6.8) можно рассчитать расходы по каждой ветви параллельного соединения трубопроводов.

Для заданного напора к параллельному соединению прибегают при необходимости увеличения пропускной способности трубопровода.

6.3. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОРОТКИХ ТРУБОПРОВОДОВ

Принципиальный подход к расчету коротких трубопроводов тот же, что и к расчету длинных: необходимо составить уравнение Бернулли для сечения, проведенного через питающий водоем, и конечного сечения трубопровода.

При этом, конечно, необходимо учитывать особенности, отличающие баланс энергии в коротких трубопроводах от баланса энергии в длинных трубах. Наиболее важное отличие состоит в том, что существенное место в балансе энергии коротких трубопроводов составляют потери энергии на местных сопротивлениях. Кроме того, при расчетах коротких трубопроводов, как правило, нельзя пренебрегать кинетической энергией потока в выходном сечении трубы. Если жидкость вытекает из трубы в атмосферу, то кинетическая энергия учитывается в балансе энергии как скоростной напор, если жидкость вытекает из трубы под уровень жидкости в водоеме, то кинетическая энергия в выходном сечении «теряется» и входит в сумму местных потерь:

$$H = h_{\text{пот}} + \frac{\alpha_{\text{вых}} v_{\text{вых}}^2}{2g}. \quad (6.10)$$

Короткий трубопровод может иметь участки с разными диаметрами, и полная величина потерь энергии по дли-

не представляет в этом случае сумму потерь на отдельных участках.

Рассмотрим трубопровод без разветвлений, состоящий из n участков различного диаметра, на каждом из которых имеется некоторое количество местных сопротивлений. Для определения потерь напора, как по длине, так и местных, используем формулу Вейсбаха (5.1). При этом следует помнить, что потери на трение по длине и потери на местных сопротивлениях рассчитываются по скоростям движения жидкости на тех участках трубопровода, на которых эти сопротивления возникают. Тогда, суммируя потери напора на рассматриваемом трубопроводе, запишем

$$h_{\text{пот}} = \sum_{i=1}^n \left[\zeta_{\text{тр } i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_{j=1}^{m_i} \left(\zeta_{\text{мест } j} \frac{v_i^2}{2g} \right) \right], \quad (6.11)$$

где n — число участков трубопровода; m_i — количество местных сопротивлений на i -ом участке трубопровода; $\zeta_{\text{тр } i}$ и $\zeta_{\text{мест } j}$ — соответствующие коэффициенты сопротивления.

Обратим внимание на то обстоятельство, что при отсутствии утечек и отбора жидкости из трубопровода, а именно такой случай и рассматривается, расход жидкости на всех участках будет одинаковым, т. е.

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_n = Q.$$

С другой стороны,

$$Q_i = \omega_i v_i;$$

$$v_i = \frac{Q}{\omega_i}.$$

Для проведения расчетов удобно с использованием этой формулы выразить скорости на участках трубопровода через скорость на каком-то одном участке. Обычно все скорости выражаются через скорость на последнем (выходном) участке. Такой участок называют «приведенным». Скорость на любом участке трубопровода можно выразить через скорость $v_{\text{пр}}$ и площадь $\omega_{\text{пр}}$ на приведенном участке:

$$v_i = \frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega_i} v_{\text{пр}}.$$

Тогда можно записать

$$h_{\text{пот}} = \frac{Q^2}{2g\omega_{\text{пр}}^2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\zeta_{\text{тр}i} + \sum_{j=1}^{m_i} \zeta_{\text{мест}j} \right) \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{\omega_i^2} \right]. \quad (6.12)$$

Подставляем выражение (6.12) в формулу (6.10):

$$H = \frac{Q^2}{2g\omega_{\text{пр}}^2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\zeta_{\text{тр}i} + \sum_{j=1}^{m_i} \zeta_{\text{мест}j} \right) \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{\omega_i^2} \right] + \frac{\alpha_{\text{пр}} Q^2}{2g\omega_{\text{пр}}^2}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\left(\zeta_{\text{тр}i} + \sum_{j=1}^m \zeta_{\text{мест}j} \right) \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{\omega_i^2} \right] + \alpha_{\text{пр}}}} \omega_{\text{пр}} \sqrt{2gH}.$$

Обозначим

$$\mu_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\left(\zeta_{\text{тр}i} + \sum_{j=1}^m \zeta_{\text{мест}j} \right) \frac{\omega_{\text{пр}}^2}{\omega_i^2} \right] + \alpha_{\text{пр}}}}.$$

Коэффициент $\mu_{\text{пр}}$ называется *приведенным коэффициентом расхода*, отнесенным к некоторому (в нашем случае — к выходному) участку трубопровода. Тогда окончательно получаем

$$Q = \mu_{\text{пр}} \omega_{\text{пр}} \sqrt{2gH}. \quad (6.13)$$

С помощью этой формулы можно решить любую из трех основных типов задач гидравлического расчета трубопровода.

В качестве примера рассмотрим трубопровод, состоящий из двух участков труб диаметром d_1 и d_2 и соответствующих длин l_1 и l_2 . На конце второго участка установлена короткая коническая насадка, имеющая выходное отверстие диаметром d_3 . Трубопровод подключен к резервуару, в котором поддерживается постоянный уровень жидкости (рис. 6.3).

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений:

- сечение 0–0, проходящее по поверхности уровня в резервуаре;
- выходное сечение насадка 3–3.

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + h_{\text{пот}}.$$

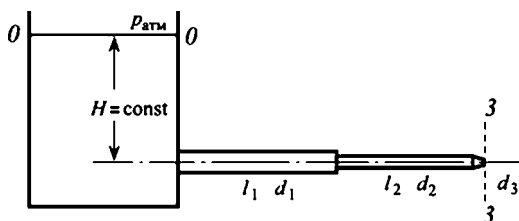


Рис. 6.3

Так как уровень жидкости в резервуаре постоянен ($H = \text{const}$), то $v_0 = 0$, кроме того, резервуар открыт, т. е. $p_0 = p_{\text{атм}}$, истечение происходит в атмосферу, значит, $p_3 = p_{\text{атм}}$.

Тогда

$$\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g}.$$

Если в качестве плоскости сравнения взять ось трубопровода, то $z_0 = H$, $z_3 = 0$. В итоге получаем

$$H = \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{\text{пот}}. \quad (6.14)$$

Оценим потери напора. Они будут складываться из потерь напора на трение на первом и втором участках и потерь на местных сопротивлениях. Местными сопротивлениями в нашем примере будут

- вход в трубу из резервуара,
- внезапное сужение трубопровода на стыке первого и второго участков,
- коническая насадка.

Их коэффициенты сопротивления обозначим соответственно $\zeta_{\text{вх}}$, $\zeta_{\text{вн.с}}$, $\zeta_{\text{нас}}$.

Перепишем уравнение (6.14), раскрывая $h_{\text{пот}}$:

$$H = \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + \zeta_{\text{вх}} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{\text{вн.с}} \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{\text{нас}} \frac{v_3^2}{2g}.$$

Так как расход жидкости на всех участках одинаков, то

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2 = v_3 \omega_3.$$

Выразим скорости на участках трубопровода через скорость на выходе v_3 :

$$v_1 = v_3 \frac{\omega_3}{\omega_1} \quad \text{и} \quad v_2 = v_3 \frac{\omega_3}{\omega_2}.$$

Тогда

$$H = \left[\alpha_3 + \zeta_{\text{вх}} \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + \zeta_{\text{вн.с}} \left(\frac{\omega_3}{\omega_2} \right)^2 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \left(\frac{\omega_3}{\omega_2} \right)^2 + \zeta_{\text{нас}} \right] \frac{v_3^2}{2g}.$$

Выражение в квадратных скобках (помимо коэффициента α_3) можно рассматривать как суммарный коэффициент сопротивления трубопровода, приведенный к выходному сечению 3–3. Он называется приведенным коэффициентом сопротивления $\zeta_{\text{пр}}$.

Итак, получаем

$$H = (\alpha_3 + \zeta_{\text{пр}}) \frac{v_3^2}{2g}.$$

Отсюда выражаем скорость

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3 + \zeta_{\text{пр}}}} \sqrt{2gH},$$

и, следовательно, расход

$$Q = v_3 \omega_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{\alpha_3 + \zeta_{\text{пр}}}} \sqrt{2gH}.$$

Выражение $\frac{1}{\sqrt{\alpha_3 + \zeta_{\text{пр}}}}$ обозначается через $\mu_{\text{пр}}$, это и есть приведенный коэффициент расхода.

Тогда окончательно имеем

$$Q = \mu_{\text{пр}} \omega_3 \sqrt{2gH}. \quad (6.15)$$

Можно в приведенном коэффициенте расхода выразить (привести) параметры через другую скорость (v_1 или v_2). Тогда в формулу (6.15) войдет та площадь, к которой приводится коэффициент расхода.

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

7.1. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ МАЛОЕ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ

В современной гидравлической аппаратуре имеется большое количество форсунок, жиклеров, дросселей и других элементов, работающих по типу отверстий в тонкой или толстой стенках. Поэтому для расчетов режимов работы элементов гидроаппаратуры необходимо изучение закономерностей таких течений.

Рассмотрим несколько случаев истечения жидкости из резервуаров через отверстия или *насадки* (короткие трубки разной формы) в атмосферу или в пространство, заполненное той же жидкостью. В этих случаях в процессе истечения запас потенциальной энергии, которым обладает жидкость в резервуаре, превращается (с определенными потерями) в кинетическую энергию струи или капель. Основной вопрос при рассмотрении таких случаев истечения — определение скорости истечения и расхода жидкости для различных форм отверстий и насадок.

Рассмотрим большой резервуар с жидкостью (рис. 7.1), свободная поверхность которой находится при атмосферном давлении $p_{\text{атм}}$. На глубине H от поверхности жидкости в стенке резервуара устроено малое круглое отверстие диаметром d_0 . Отверстие можно считать *малым*, если его диаметр значительно (в несколько раз) меньше напора H .

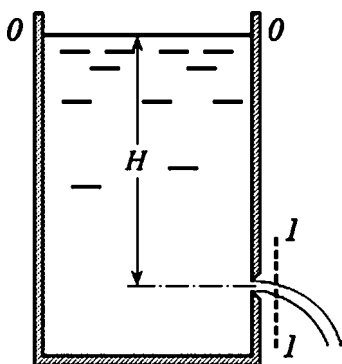


Рис. 7.1

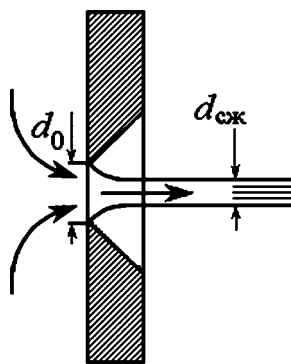


Рис. 7.2

В случае, когда толщина стенки меньше диаметра отверстия, стенка считается *тонкой*.

Частицы жидкости внутри резервуара приближаются к отверстию из всего прилегающего объема, двигаясь ускоренно. У кромки отверстия струя отрывается от стенки и несколько сжимается (рис. 7.2). Сжатие происходит потому, что движение плавно переходит от разнонаправленного (в резервуаре) к осевому (в истекающей струе). Цилиндрическую форму струя принимает на расстоянии $0,5-0,7d_0$ от стенки, в дальнейшем сжатия не происходит.

Степень сжатия характеризуется коэффициентом сжатия ε , равным отношению площади сжатой струи к площади отверстия:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{\text{сж}}}{\omega_0} = \left(\frac{d_{\text{сж}}}{d_0} \right)^2.$$

Если отверстие малое, то, как показывают исследования, коэффициент сжатия не зависит от напора перед отверстием и его размера.

Для определения необходимых нам величин — расхода и скорости в струе — запишем уравнение Бернулли для движения жидкости, выбрав в качестве одного сечения $0-0$ плоскость свободной поверхности резервуара, а в качестве другого сечения $1-1$ — сжатое сечение струи:

$$z_0 + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = z_{\text{сж}} + \frac{\alpha v_{\text{сж}}^2}{2g} + \frac{p_{\text{сж}}}{\rho g} + h_{\text{пот}}.$$

Так как площадь свободной поверхности резервуара много больше площади отверстия, то можно считать, что уровень свободной поверхности не снижается и $v_0 = 0$, т. е. истечение происходит при постоянном напоре H . Давление на свободной поверхности резервуара и на поверхности сжатой струи равно атмосферному:

$$p_0 = p_{\text{сж}} = p_{\text{атм}}.$$

В качестве плоскости сравнения выберем ось струи. Тогда

$$z_0 = H; \quad z_{\text{сж}} = 0.$$

Потери напора определяются как

$$h_{\text{пот}} = \zeta \frac{v_{\text{сж}}^2}{2g},$$

где ζ — коэффициент сопротивления отверстия.

Учитывая все это, получим

$$\frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + H = \frac{\alpha v_{\text{сж}}^2}{2g} + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + \zeta \frac{v_{\text{сж}}^2}{2g},$$

откуда

$$H = (\alpha + \zeta) \frac{v_{\text{сж}}^2}{2g}.$$

Тогда скорость $v_{\text{сж}}$

$$v_{\text{сж}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gH}.$$

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}. \quad (7.1)$$

Параметр φ называется *коэффициентом скорости*.

Получаем

$$v_{\text{сж}} = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (7.2)$$

Найдем расход жидкости через отверстие:

$$Q = v_{\text{сж}} \omega_{\text{сж}} = \varphi \omega_{\text{сж}} \sqrt{2gH}.$$

Используя определение коэффициента сжатия, получаем

$$Q = \varphi \varepsilon \omega_0 \sqrt{2gH}.$$

Величина $\varphi\varepsilon = \mu$ — это и есть коэффициент расхода.

Тогда

$$Q = \mu \omega_0 \sqrt{2gH}. \quad (7.3)$$

Оценим численные значения коэффициентов, входящих в эти выражения.

Для развитого турбулентного течения в струе профиль скоростей в сжатом сечении близок к прямоугольному и $\alpha = 1$.

Тогда

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}.$$

Коэффициент сопротивления отверстия можно принять равным $\zeta = 0,06$, а коэффициент сжатия струи — $\varepsilon = 0,64$. Отсюда получим $\varphi = 0,96$ и $\mu = 0,62$.

Заметим, что при истечении без сжатия струи $\mu = \varphi$.

Выражения (7.2) и (7.3) и служат для решения основной задачи расчета — определения скорости и расхода при истечении жидкости через малое круглое отверстие в тонкой стенке.

Обратим внимание на следующие особенности смысла коэффициентов скорости φ и расхода μ .

В случае истечения из отверстия идеальной жидкости трение и завихрения отсутствуют, поэтому $\zeta = 0$, а $\alpha = 1$, следовательно, из (7.1) получаем $\varphi = 1$, и скорость истечения идеальной жидкости по (7.2) будет

$$v_{ид} = \sqrt{2gH}.$$

Тогда при течении реальных жидкостей из формулы (7.2) получим

$$\varphi = \frac{v_{сж}}{\sqrt{2gH}} = \frac{v_{реаль}}{v_{ид}},$$

т. е. коэффициент скорости есть отношение реальной скорости истечения к скорости идеальной жидкости. Действительная скорость истечения всегда несколько меньше идеальной из-за сопротивления, значит, коэффициент скорости всегда меньше единицы.

Из формулы (7.3) получаем для коэффициента расхода выражение

$$\mu = \frac{Q}{\omega_0 \sqrt{2gH}}.$$

Заметим, что $\sqrt{2gH}$ — это скорость истечения идеальной жидкости, а произведение ее на площадь отверстия ω_0 дает расход жидкости, который был бы, если бы отверстие не имело сопротивления и не было бы сжатия. На самом деле сжатие будет даже и у идеальной жидкости. Но тем не менее получаем, что коэффициент расхода есть отношение реального расхода к некому теоретическому идеализированному расходу при течении без сжатия и без сопротивления.

$$\mu = \frac{Q_{\text{реаль}}}{Q_{\text{ид}}}.$$

Действительный расход также всегда меньше теоретического и, следовательно, коэффициент расхода всегда меньше единицы вследствие влияния двух факторов — сжатия струи и наличия сопротивления.

Все безразмерные коэффициенты, введенные в рассмотрение:

- сжатия ϵ ;
- сопротивления ζ ;
- скорости φ ;
- расхода μ

— зависят от типа отверстия или насадки, от сил тяжести и поверхностного натяжения, а также от основного критерия гидродинамического подобия — числа Re . Для малого отверстия ($H/d \geq 10$) влияние сил тяжести практически не проявляется. Заметное влияние сил поверхностного натяжения наблюдается только при малых напорах.

Получим формулы траектории струи, вытекающей из отверстия, т. е. формулы, связывающие горизонтальную (абсциссу x) и вертикальную (ординату y) координаты частицы, движущейся в центре тяжести струи. Как известно из кинематики движущейся точки,

$$x = vt; \quad y = \frac{gt^2}{2},$$

кроме того, при истечении из отверстия $v = \varphi\sqrt{2gH}$.

Проведем некоторые преобразования:

$$x = t\varphi\sqrt{2gH}; \quad t = \frac{x}{v} = \frac{x}{\varphi\sqrt{2gH}};$$

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{gx^2}{2v^2} = \frac{gx^2}{2\varphi^2 2gH} = \frac{x^2}{4\varphi^2 H};$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}; \quad x = vt = \varphi \sqrt{\frac{2y}{g}} \sqrt{2gH} = 2\varphi \sqrt{Hy};$$

$$y = \frac{x^2}{4\varphi^2 H} = \frac{gx^2}{4\varphi^2 gH} = \frac{gx^2}{2(\varphi \sqrt{2gH})^2} = \frac{gx^2}{2v^2};$$

$$v = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}}.$$

Таким образом, получены следующие зависимости для расчета траектории струи:

$$x = 2j\sqrt{Hy}; \quad y = \frac{x^2}{4j^2 H}; \quad v = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}}.$$

7.2.

ИСТЕЧЕНИЕ ПОД УРОВЕНЬ (ЗАТОПЛЕННОЕ ОТВЕРСТИЕ)

Часто приходится иметь дело со случаями, когда истечение из резервуара происходит не в атмосферу, а в пространство, затопленное той же жидкостью. Такое истечение называется истечением под уровень или истечением через затопленное отверстие (рис. 7.3).

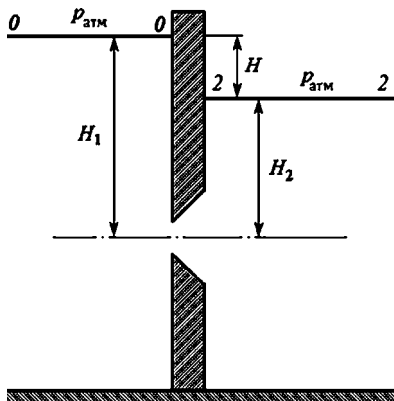


Рис. 7.3

Уравнение Бернулли, записанное для сечений 0-0 и 2-2 и плоскости сравнения, проходящей через ось отверстия, будет

$$\frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + H_1 = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + H_2 + \sum h_{\text{пот}}.$$

Потери складываются из сопротивления отверстия и сопротивления истечения сжатой струи, т. е.

$$\sum h_{\text{пот}} = \zeta \frac{v^2}{2g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = (\zeta + \alpha) \frac{v^2}{2g},$$

где ζ — коэффициент сопротивления отверстия, имеющий примерно то же значение, что и при истечении в атмосферу; v — скорость истечения в сжатом сечении струи.

Тогда

$$H = H_1 - H_2 = (\zeta + \alpha) \frac{v^2}{2g}.$$

Откуда

$$v = \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH};$$

$$Q = v\omega_0 = \varepsilon\varphi\omega_0\sqrt{2gH} = \mu\omega_0\sqrt{2gH}.$$

Таким образом, при истечении через затопленное отверстие имеем те же расчетные формулы, что и при истечении в атмосферу, только расчетный напор H в этом случае представляет собой разность гидростатических напоров по обе стороны стенки. Скорость и расход в этом случае не зависят от высоты расположения отверстия. Коэффициенты сжатия и расхода при истечении под уровень можно принимать те же, что и при истечении в воздух.

7.3.

ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ НАСАДКИ

В технических приложениях часто встречаются случаи истечения через короткие патрубки, присоединенные к отверстию без закругления входной кромки. Длина таких трубок-насадок составляет несколько (3–4) диаметров отверстия. Аналогичные течения могут возникать в случае сверления отверстия в толстой стенке резервуара. Истечение из отверстий в толстых стенках в гидравличе-

ском отношении аналогично по своей природе истечению из насадок.

Насадки могут быть цилиндрическими внешними (рис. 7.4а) и внутренними (рис. 7.4б), отверстия и насадки помимо цилиндрической формы могут быть конически расходящимися (рис. 7.4в), конически сходящимися (рис. 7.4г) или их комбинацией.

Истечение через цилиндрическую насадку в атмосферу может происходить двояко.

Первый режим: струя после входа в насадку сжимается примерно так же, как и при истечении из отверстия в тонкой стенке. Затем, вследствие взаимодействия с окружающей ее завихренностью, струя расширяется и из насадки выходит полным сечением. Этот режим течения называют *безотрывным* (рис. 7.5а).

Так как на выходе из насадки диаметр струи равен диаметру отверстия, то $\epsilon = 1$ и, следовательно, $\mu = \phi$.

Осредненные значения коэффициентов для этого режима истечения маловязких жидкостей (а значит, для больших значений Re) следующие:

$$\mu = \phi = 0,8; \zeta = 0,5.$$

В суженном сечении струи, там, где скорость увеличена, давление понижено по сравнению с давлением в резервуаре перед насадкой и с давлением на выходе, т. е. там образуется вакуум. При этом чем больше напор, под которым происходит истечение, и, следовательно, чем больше расход через насадку, тем меньше давление в суженном месте струи. При некотором критическом напоре происходит

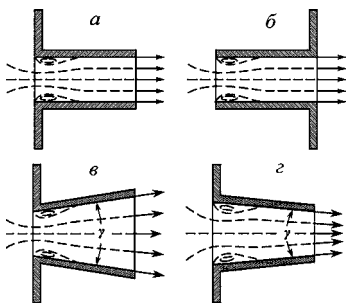


Рис. 7.4

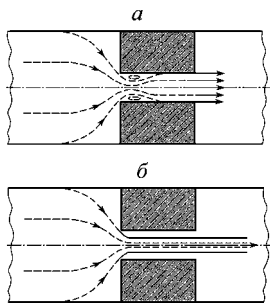


Рис. 7.5

смена режимов течения, переход от безотрывного течения ко второму режиму.

Во втором режиме струя после сжатия на входе уже не расширяется, а сохраняет цилиндрическую сжатую форму и перемещается внутри насадки, не соприкасаясь со стенками (рис. 7.5б). Истечение становится таким же, как из отверстия в тонкой стенке с такими же значениями коэффициентов.

При этом в обоих режимах расчетная формула для расхода через насадки остается та же, что и для отверстия:

$$Q = \mu \omega_0 \sqrt{2gH}.$$

Формулы для расчета скорости и расхода на выходе из цилиндрических насадок могут быть использованы и для определения скорости и расхода из насадок других видов, однако необходимо выбрать соответствующие значения коэффициентов скорости φ и расхода μ . Значения коэффициентов определяются по результатам экспериментальных исследований насадок. Так, например, сравнение истечений из внешних цилиндрической и конически расходящейся насадок дает следующие результаты. При малом угле конусности ($\gamma = 5-7^\circ$) сопротивления в насадках приблизительно одинаковы. Казалось бы, и коэффициенты скорости должны быть близки. На самом деле скорость на выходе из внешней цилиндрической насадки почти в два раза больше.

Для улучшения свойств цилиндрической насадки (уменьшения сопротивления и повышения коэффициента расхода) можно закруглить входную кромку или устроить на входе в цилиндрическую насадку коническую часть с углом около 60° . Чем больше радиус закругления, тем выше коэффициент расхода и ниже коэффициент сопротивления. В пределе, при радиусе кривизны, равном

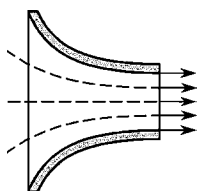


Рис. 7.6

толщине стенки, цилиндрическая насадка приближается к соплу. Сопло очерчивается приблизительно по форме естественно сжимающейся струи (рис. 7.6). Благодаря этому обеспечиваются безотрывность течения внутри насадки и параллельноструйность в выходном сече-

нии. Сопло имеет коэффициент расхода, близкий к единице, и очень малые потери. Коэффициент сжатия $\varepsilon = 1$. Значение коэффициента сопротивления сопла то же, что и при плавном сужении, т. е. $\zeta = 0,03-0,1$, соответственно $\mu = \varphi = 0,99-0,96$.

7.4. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПРЯМОУГОЛЬНОЕ ОТВЕРСТИЕ И ВОДОСЛИВ

Рассмотрим истечение через большое (широкое) прямоугольное отверстие (рис. 7.7).

Верхняя кромка отверстия расположена на глубине H_1 , а нижняя — на глубине H_2 от свободной поверхности жидкости. Ширина отверстия (перпендикулярно плоскости чертежа) — b .

Элементарный расход через малый прямоугольный элемент площади можно записать как

$$dQ = \mu d\omega \sqrt{2gH} = \mu b dh \sqrt{2gH}.$$

Для того чтобы найти расход через все отверстие, проинтегрируем выражение для элементарного расхода по h в пределах от H_1 до H_2 , считая μ постоянным:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}).$$

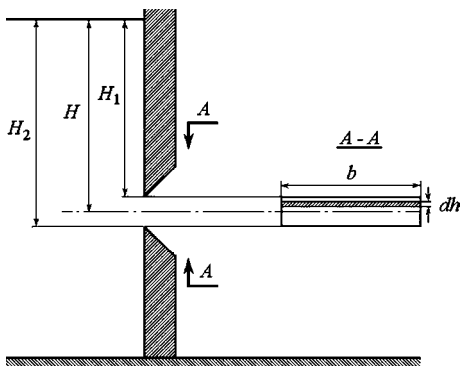


Рис. 7.7

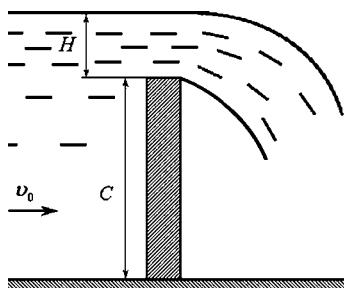


Рис. 7.8

Это формула для расхода через прямоугольное отверстие. Но эта формула, как правило, не имеет самостоятельного значения. Она важна как исходная для получения формулы для прямоугольного водослива с тонкой стенкой. Такой водослив получается, если в рассмотренной схеме положим $H_1 = 0$ (рис. 7.8).

Обозначим $H_2 = H$. Назовем величину $\frac{2}{3}\mu = m$ коэффициентом расхода для водослива.

Тогда

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}. \quad (7.4)$$

Значение m в первом приближении можно получить, принимая как для малого круглого отверстия $\mu = 0,62$. Тогда $m \approx 0,42$.

В наших рассуждениях мы не учитывали скорость подхода воды к водосливу v_0 и высоту водослива C . С учетом этих величин можно уточнить формулу (7.4).

7.5.

ИСТЕЧЕНИЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

Рассмотрим опорожнение открытого в атмосферу сосуда произвольной формы через донное отверстие или насадку с коэффициентом расхода μ (рис. 7.9).

В этом случае истечение будет проходить при переменном, постепенно уменьшающемся напоре. Если напор, а следовательно, и скорость истечения будут меняться медленно, то движение в каждый момент времени можно рассматривать как установившееся (квазистационарное) и можно применять для решения уравнение Бернулли.

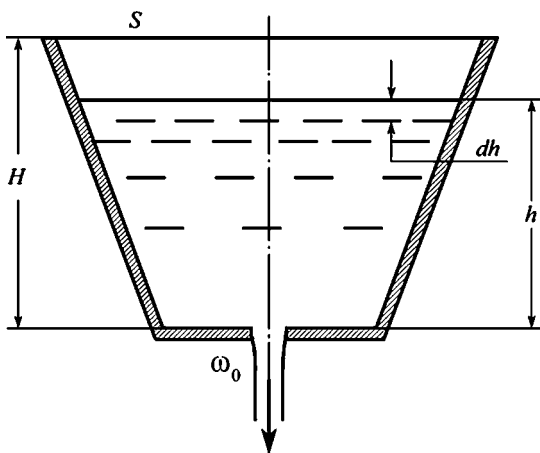


Рис. 7.9

Обозначим переменную площадь свободной поверхности жидкости S , переменную высоту уровня жидкости, отсчитываемую от дна, — h , площадь отверстия в дне — ω_0 . Тогда для бесконечно малого промежутка времени dt справедливо уравнение сохранения объемов

$$Sdh = -Qdt \quad \text{или} \quad Sdh = -\mu\omega_0\sqrt{2gh}dt.$$

Знак «минус» в формуле возникает потому, что положительному приращению dt соответствует отрицательное приращение dh .

Время полного опорожнения сосуда высотой H найдем, интегрируя это уравнение по переменной высоте уровня в пределах высоты всего сосуда (считаем $\mu = \text{const}$):

$$t = -\frac{1}{\mu\omega_0\sqrt{2g}} \int_{h=H}^{h=0} S \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Этот интеграл можно сосчитать, если известен закон изменения площади свободной поверхности S по высоте резервуара. В частности, для призматического сосуда $S = \text{const}$, получаем

$$t = \frac{S}{\mu\omega_0\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2S}{\mu\omega_0\sqrt{2g}} \sqrt{H} = \frac{2SH}{\mu\omega_0\sqrt{2gH}}. \quad (7.5)$$

Числитель этой формулы равен удвоенному объему сосуда, а знаменатель представляет собой расход в начальный момент времени при опорожнении, т. е. при напоре, равном H . Следовательно, время опорожнения сосуда в два раза больше времени истечения такого же объема жидкости при постоянном напоре H .

7.6. ВЫРАВНИВАНИЕ УРОВНЕЙ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРАХ

Рассмотрим процесс выравнивания уровней жидкости в двух резервуарах, соединенных между собой трубопроводом, площадь сечения которого ω_0 (рис. 7.10).

На трубопроводе расположен затвор. Изначально уровень жидкости в одном резервуаре (левом на рисунке 7.10) находится на высоте z_1 относительно некоторой плоскости сравнения, а уровень жидкости в другом резервуаре — на высоте z_2 , разность уровней (начальный напор) — H . Предположим, что в некоторый момент времени затвор мгновенно открывается. Жидкость начнет переливаться из одного резервуара в другой. За некоторый малый промежуток времени dt уровень жидкости в одном из резервуаров понизится на dz_1 , а уровень жидкости в другом резервуаре повысится на dz_2 .

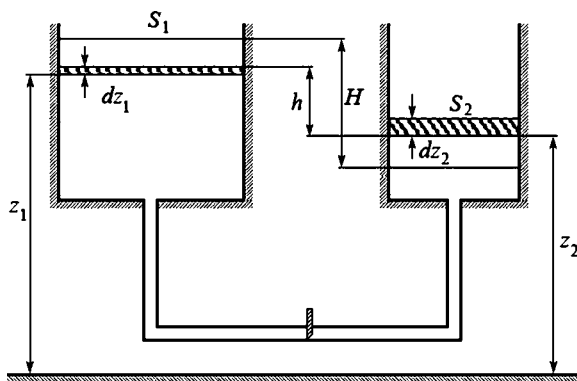


Рис. 7.10

Условие баланса объемов жидкости в резервуарах за промежуток времени dt запишется как

$$dQdt = -S_1 dz_1 = S_2 dz_2,$$

где S_1 и S_2 — площади поверхности жидкости в резервуарах; dQ — расход жидкости в трубопроводе.

Знак «минус» указывает на понижение уровня жидкости в первом резервуаре.

Это уравнение можно представить в виде двух равенств:

$$-S_1 dz_1 = S_2 dz_2; \quad (7.6)$$

$$S_2 dz_2 = dQdt. \quad (7.7)$$

Действующий напор в каждый момент времени будет равен (см. рис. 7.10)

$$h = z_1 - z_2.$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$dh = dz_1 - dz_2.$$

Выразим dz_1 из равенства (7.6):

$$dz_1 = -dz_2 \frac{S_2}{S_1}.$$

Тогда

$$dh = -dz_2 \frac{S_2}{S_1} - dz_2 = -dz_2 \frac{S_1 + S_2}{S_1},$$

откуда

$$dz_2 = -\frac{S_1}{S_1 + S_2} dh.$$

Подставим полученное выражение в уравнение (7.7):

$$dQdt = -\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} dh = -Adh,$$

где введено обозначение $A = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}$ — приведенная площадь поверхностей жидкости в резервуарах.

С другой стороны, расход жидкости, протекающей по трубопроводу, определяется формулой (6.13). Используя ее, для движения жидкости по трубопроводу при действующем текущем значении напора, равном h , можно записать

$$dQdt = \mu \omega_0 \sqrt{2gh} dt.$$

Сравнивая два последних равенства, получим

$$\mu\omega_0\sqrt{2gh}dt = -Adh,$$

откуда

$$dt = -\frac{Adh}{\mu\omega_0\sqrt{2gh}}.$$

Интегрируя это соотношение в пределах времени от 0 до t и соответствующих этим моментам времени напоров H и h , получим

$$t = \frac{2A}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}). \quad (7.8)$$

Интегрируя, мы считали коэффициент расхода μ постоянным.

Формула (7.8) позволяет определить время выравнивания уровней жидкости в резервуарах. Это время T наступает, когда текущий напор h становится равным нулю.

Тогда

$$T = \frac{2A}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}\sqrt{H}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть наполнение второго резервуара происходит из подводящего канала, имеющего $S_1 \rightarrow \infty$. В этом случае

$$A = \lim_{S_1 \rightarrow \infty} \frac{S_2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} = S_2,$$

и время наполнения резервуара

$$T = \frac{2S_2\sqrt{H}}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}.$$

В случае опорожнения первого резервуара в канал с $S_2 \rightarrow \infty$ получим

$$A = \lim_{S_2 \rightarrow \infty} \frac{S_2}{\frac{S_1}{S_2} + 1} = S_1;$$

$$T = \frac{2S_1\sqrt{H}}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}.$$

Получаем формулу, аналогичную формуле (7.5) для опорожнения резервуара при переменном напоре.

В случае если $S_1 = S_2 = S$, то $A = S/2$ и

$$T = \frac{S\sqrt{H}}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}.$$

В действительности время открытия затвора на трубопроводе не равно нулю. Пусть время открытия затвора равно t_0 . Процесс расчета времени выравнивания уровней жидкости в резервуарах усложнится. Время выравнивания будет складываться из двух периодов:

- первый — от $t = 0$ до $t = t_0$, в это время коэффициент расхода μ будет изменяться во времени по мере открытия затвора;
- второй — от $t = t_0$ до $t = T$, в этот период $\mu = \text{const}$.

Для первого периода, используя формулу (7.8), можно записать

$$\int_0^{t_0} \mu(t) dt = \frac{2A(\sqrt{H} - \sqrt{h_0})}{\omega_0\sqrt{2g}},$$

где h_0 — напор, соответствующий моменту времени t_0 .

Поскольку $\mu(t)$ определяется, как правило, эмпирическим путем, интеграл в левой части этого равенства вычисляется численно или одним из приближенных методов.

Для второго периода при постоянном значении μ будет справедлива формула

$$T - t_0 = \frac{2A\sqrt{h_0}}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}.$$

Таким образом, время полного выравнивания уровней жидкости в резервуарах

$$T = t_0 + \frac{2A\sqrt{h_0}}{\mu\omega_0\sqrt{2g}}. \quad (7.9)$$

В практических расчетах время открытия затвора t_0 обычно задается. Тогда из формулы (7.8) при известном начальном напоре H и времени t_0 находится значение h_0 и затем из уравнения (7.9) находится время выравнивания T .



ГЛАВА 8

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДАХ

8.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Гидравлическим ударом называют резкое изменение давления, возникающее в напорном трубопроводе при внезапном изменении скорости потока жидкости.

Строго говоря, гидравлический удар представляет собой колебательный процесс, возникающий в упругом трубопроводе с жидкостью при внезапном изменении ее скорости. Процесс протекает очень быстро и характеризуется чередованием повышений и понижений давления, связанных с упругими деформациями жидкости и стенок трубопровода.

При резком уменьшении скорости движения воды (гидравлическом ударе), например, в стальных трубопроводах при уменьшении скорости на 1 м/с давление возрастает приблизительно на 1–1,2 МПа. Из-за этого могут возникать осложнения в нормальной работе трубопровода вплоть до разрыва стенок и, как следствие, аварии оборудования насосных станций.

Рассмотрим процесс возникновения и существования гидравлического удара.

Пусть при движении жидкости по трубопроводу со скоростью v_0 мгновенно закрылся кран, перекрывающий трубопровод (рис. 8.1а). Частицы жидкости, натолкнувшись на закрытый кран, останавливаются, и их кинетическая энергия переходит в работу деформации стенок трубы и частиц жидкости. Стенки трубы при этом несколько растягиваются, а жидкость сжимается в соответствии с по-

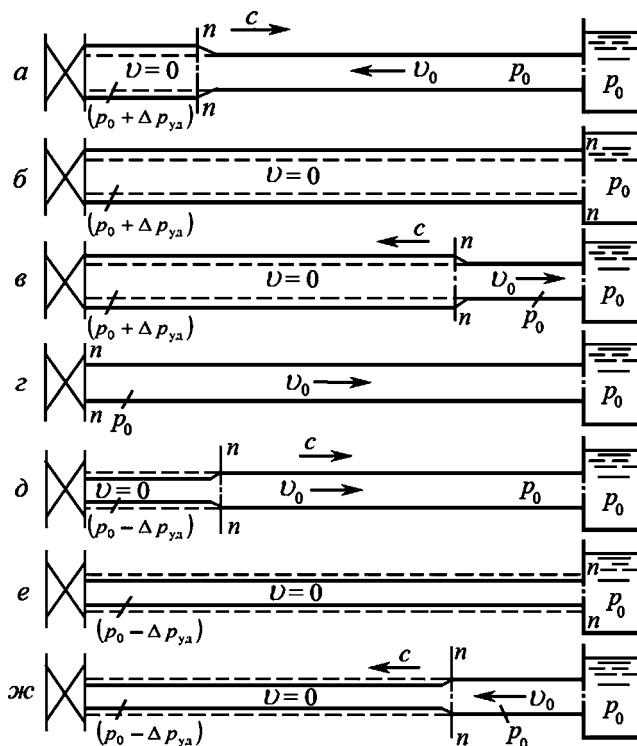


Рис. 8.1

вышением давления $\Delta p_{уд}$. Пренебрегать сжимаемостью жидкости, как мы делали при рассмотрении других явлений гидравлики, в этом случае нельзя, потому что малая сжимаемость жидкости и является причиной возникновения большого ударного давления.

На остановившиеся частицы жидкости у закрытого крана набегают соседние частицы, они тоже останавливаются, теряя скорость.

В результате в трубопроводе возникает узкая переходная область (сечение $n-n$ на рисунке 8.1а), соответствующая границе остановившейся жидкости, в которой давление жидкости меняется на величину $\Delta p_{уд}$. Эта область называется ударной волной, и она перемещается прочь от закрытого крана со скоростью c , называемой скоростью ударной

волны. Когда ударная волна дойдет до конца трубопровода (до напорного резервуара, насоса), жидкость окажется остановленной и сжатой во всем трубопроводе, стенки трубопровода по всей длине окажутся растянутыми, ударное повышение давления $\Delta p_{\text{уд}}$ распространится на всю длину трубы (рис. 8.1б).

Такое состояние не является равновесным. Под действием перепада давления $\Delta p_{\text{уд}}$ частицы жидкости устремятся из трубы в резервуар, такое движение начнется с сечения, прилегающего к резервуару. Сечение $n-n$, определяющее скачок давления (ударную волну), начнет перемещаться в обратном направлении — к закрытому крану. Двигается оно также со скоростью c , оставляя за собой жидкость с давлением p_0 (рис. 8.1в). Жидкость и стенки трубы являются упругими, работа их деформации при возвращении к исходному состоянию переходит в кинетическую энергию жидкости, и жидкость начинает двигаться с первоначальной скоростью v_0 , но направленной в противоположную сторону.

Когда фронт волны дойдет до закрытого крана, вся жидкость в трубопроводе стремится двигаться в резервуар со скоростью v_0 . Из-за этого у закрытого крана возникает разрежение (жидкость стремится оторваться от крана), в результате которого возникает отрицательная ударная волна с давлением $(p_0 - \Delta p_{\text{уд}})$. Эта ударная волна движется от закрытого крана со скоростью c , оставляя за собой сжавшиеся стенки трубы и расширившуюся (из-за снижения давления) жидкость (рис. 8.1д). Кинетическая энергия жидкости снова переходит в работу деформации, но противоположного знака. Сжавшаяся труба (рис. 8.1е) после прохода отрицательной ударной волны также не находится в равновесном состоянии. Происходит выравнивание давления в трубе и резервуаре, при этом возникает движение жидкости из резервуара по трубе со скоростью v_0 (рис. 8.1ж).

Как только отраженная от конца трубы, противоположного закрытому крану, ударная волна под давлением $\Delta p_{\text{уд}}$ достигнет крана, возникает ситуация, аналогичная моменту закрытия крана. Весь цикл гидравлического удара повторится. Опыты показывают, что возможны 10–15 повто-

рений полных циклов, из-за трения в трубе и рассеивания энергии в резервуаре происходит постепенное уменьшение давления $\Delta p_{уд}$ и затухание удара.

На рисунке 8.2 приведена диаграмма изменения давления в некоторой точке сечения трубопровода. Пунктирными линиями показано теоретическое изменение давления, сплошными — действительная картина изменения давления в зависимости от времени.

Такая картина изменения давления будет лишь в случае, когда скачок давления $\Delta p_{уд}$ меньше первоначального давления жидкости в трубопроводе p_0 . Тогда при снижении первоначального давления на $\Delta p_{уд}$ давление в трубе остается положительным.

Если же начальное давление p_0 невелико ($p_0 < \Delta p_{уд}$), то снижение его на $\Delta p_{уд}$ невозможно, абсолютное давление у закрытого крана падает до нуля ($p_{изб} \approx -0,1$ МПа), жидкость отрывается от крана, возникает кавитация и образуется паровая каверна.

В связи с этим нарушается периодичность процесса, и характер изменения давления во времени получается примерно таким, как показано на рисунке 8.3.

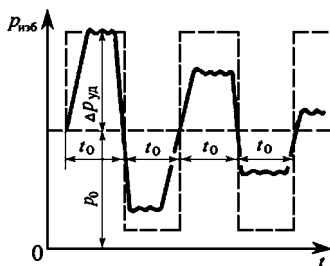


Рис. 8.2

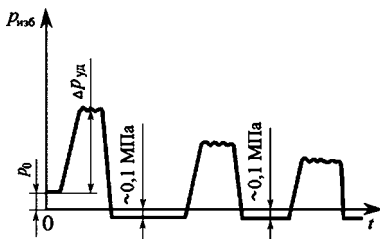


Рис. 8.3

8.2. РАСЧЕТ ПОВЫШЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Величину повышения давления $\Delta p_{уд}$ при гидравлическом ударе в трубопроводе можно определить, рассматривая элементарное перемещение ударной волны dx за время dt (рис. 8.4).

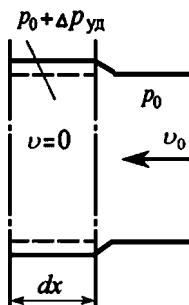


Рис. 8.4

Применим к элементу трубы dx теорему об изменении количества движения:

$$[(p_0 + \Delta p_{\text{уд}}) - p_0] S dt = S \rho (v_0 - 0) dx.$$

Тогда скорость распространения ударной волны

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}}{\rho v_0},$$

откуда получаем

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho v_0 c. \quad (8.1)$$

Выражение (8.1), определяющее величину повышения давления при гидравлическом ударе, называют формулой Жуковского.

Скорость ударной волны c нам пока неизвестна, поэтому попробуем определить ударное давление $\Delta p_{\text{уд}}$ из того условия, что кинетическая энергия жидкости переходит в работу деформации: растяжения стенок трубы и сжатия жидкости.

Кинетическая энергия жидкости в трубе радиусом r , длиной l , движущейся со скоростью v_0 , будет

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{\rho \pi r^2 l v_0^2}{2}. \quad (8.2)$$

Работа деформации равна потенциальной энергии деформированного тела и составляет половину произведения силы на удлинение. Из рисунка 8.5а видно, что работа по растяжению стенок трубы совершается силами давления на пути Δr .

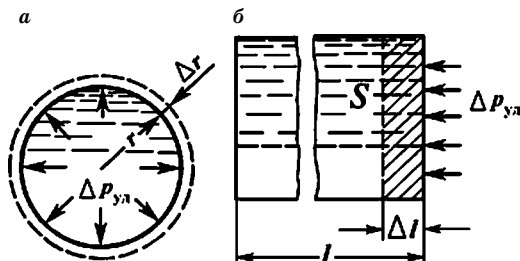


Рис. 8.5

Такая работа будет равна

$$A_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}} 2\pi r l \Delta r}{2}.$$

Нормальное напряжение в материале стенки трубы σ связано с давлением $\Delta p_{\text{уд}}$ и толщиной стенки δ соотношением

$$\sigma = \frac{\Delta p_{\text{уд}} r}{\delta}. \quad (8.3)$$

По закону Гука

$$\sigma = \frac{2\pi[(r + \Delta r) - r]}{2\pi r} E_{\text{тр}} = \frac{\Delta r}{r} E_{\text{тр}}, \quad (8.4)$$

где $E_{\text{тр}}$ — модуль упругости материала стенок трубы.

Выразим из уравнения закона Гука (8.4) величину Δr :

$$\Delta r = \frac{r\sigma}{E_{\text{тр}}},$$

а величину σ возьмем из уравнения (8.3).

Тогда работа деформации стенок трубы будет равна

$$A_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r^3 l}{\delta E_{\text{тр}}}. \quad (8.5)$$

Работу сжатия жидкости объемом V представим как работу сил давления на пути Δl (рис. 8.5б):

$$A_{\text{ж}} = \frac{S \Delta p_{\text{уд}} \Delta l}{2} = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{уд}} \Delta V.$$

Связь между относительным изменением объема жидкости и вызвавшим это изменение давлением определяется, как известно, модулем упругости K (обратным коэффициенту объемной сжимаемости):

$$\Delta p_{\text{уд}} = K \frac{\Delta V}{V}.$$

Приняв за V объем жидкости в трубе, получим выражение для работы сжатия жидкости:

$$A_{\text{ж}} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r^2 l}{K}. \quad (8.6)$$

Окончательно уравнение энергий запишем, объединяя формулы (8.2), (8.5) и (8.6):

$$\frac{\rho \pi r^2 l v_0^2}{2} = \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r^3 l}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi r^2 l}{K}.$$

Решая его относительно $\Delta p_{\text{уд}}$, находим

$$\Delta p_{\text{уд}} = \frac{\rho v_0}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho r}{\delta E_{\text{тр}}}}}. \quad (8.7)$$

Сравнивая это выражение с формулой Жуковского (8.1), получаем выражение для скорости ударной волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho r}{\delta E_{\text{тр}}}}}. \quad (8.8)$$

Формулы (8.1) и (8.8) получены с использованием некоторых упрощающих допущений:

- в жидкости отсутствуют трение и другие виды потерь энергии при ударе;
- движение жидкости в трубопроводе принято одномерным, т. е. все местные скорости считаем равными средней скорости, а давление — одинаковым во всех точках живого сечения;
- при деформациях трубы и сжатии жидкости справедлив закон Гука.

И тем не менее экспериментальные исследования гидравлического удара в трубе показывают, что если жидкость не содержит воздушных примесей и начальное давление p_0 невелико, то, несмотря на перечисленные упрощающие допущения, формула Жуковского достаточно хорошо соответствует опытным данным. При высоких начальных значениях давления p_0 и больших $\Delta p_{\text{уд}}$ скачок давления $\Delta p_{\text{уд}}$ получается несколько большим, чем по формуле Жуковского. Это объясняется тем, что изменяется (увеличивается) модуль K , т. е. нарушается линейность изменения деформации по давлению.

Если предположить, что труба имеет абсолютно жесткие (а не упругие) стенки, т. е. $E_{\text{тр}} = \infty$, то из формулы (8.8) получаем, что скорость ударной волны составит

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

т. е. будет равна скорости звука в однородной упругой среде с плотностью ρ и объемным модулем K . Для воды эта скорость равна 1435 м/с. Но так как стенки трубы не абсолютно жесткие, то скорость ударной волны меньше скорости звука.

Если скорость жидкости в трубе уменьшается не до нуля, а до некоторого значения v_1 (это происходит при неполном закрытии крана), то возникает *неполный* гидравлический удар, и формула Жуковского будет иметь вид

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho(v_0 - v_1)c. \quad (8.9)$$

Формула Жуковского справедлива при очень быстром перекрытии сечения трубопровода, при котором время закрытия

$$t_{\text{зак}} < 2\frac{l}{c} = t_0. \quad (8.10)$$

Величина t_0 называется фазой гидравлического удара.

При выполнении условия (8.10) имеет место *прямой* гидравлический удар.

Если $t_{\text{зак}} > t_0$, возникает *непрямой* гидравлический удар, при котором ударная волна, отразившись от резервуара, возвращается к крану, перекрывающему трубопровод, раньше, чем он будет закрыт. Понятно, что повышение давления $\Delta p'_{\text{уд}}$ при этом будет меньше, чем $\Delta p_{\text{уд}}$ при прямом ударе.

Если предположить, что скорость потока при закрытии крана уменьшается линейно и давление возрастает линейно во времени (рис. 8.6), то

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p'_{\text{уд}}}{\Delta p_{\text{уд}}} &= \frac{t_0}{t_{\text{зак}}}, \\ \text{откуда} \quad \Delta p'_{\text{уд}} &= \Delta p_{\text{уд}} \frac{t_0}{t_{\text{зак}}} = \\ &= \rho v_0 c \frac{2l}{ct_{\text{зак}}} = \rho v_0 \frac{2l}{t_{\text{зак}}}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Рассмотрим еще случай, когда тупиковый трубопровод с начальным давлением p_0 отделен краном

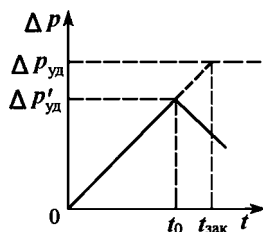


Рис. 8.6

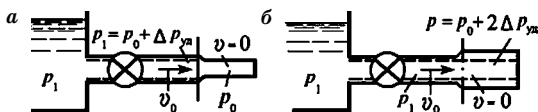


Рис. 8.7

от сосуда большого объема (или насоса) с высоким давлением p_1 (рис. 8.7). При мгновенном открытии крана давление в начале трубопровода внезапно возрастает на $\Delta p_{уд} = p_1 - p_0$. Возникшая волна давления со скоростью c перемещается к концу трубопровода, давление за ее фронтом отличается от давления перед фронтом на $\Delta p_{уд}$. Скорость жидкости в плоскости фронта возрастает от нуля до значения v_0 , определяемого из формулы Жуковского (8.1):

$$v_0 = \frac{\Delta p_{уд}}{\rho c}.$$

В момент подхода фронта ударной волны к тупиковому концу трубы давление во всем трубопроводе увеличивается на $\Delta p_{уд}$ и жидкость приобретает скорость v_0 . У тупикового конца трубы скорость жидкости полностью гасится, дополнительно увеличивая давление еще на $\Delta p_{уд} = \rho v_0 c$. И от тупикового конца к крану по трубопроводу начинает двигаться новая (отраженная) волна давления, за фронтом которой давление по сравнению с первоначальным возросло на $2\Delta p_{уд}$, а скорость жидкости $v = 0$.

Способы предотвращения или смягчения гидравлического удара могут быть различными. Наиболее эффективным способом снижения $\Delta p_{уд}$ является устранение возможности прямого гидравлического удара. Для этого при заданной длине трубопровода необходимо увеличивать время срабатывания кранов, задвижек и других устройств. Другой способ — установка перед кранами и задвижками компенсаторов в виде дополнительных объемов жидкости, гидроаккумуляторов или предохранительных клапанов.

Уменьшение скорости движения жидкости в трубопроводе (путем увеличения диаметра труб при заданном расходе) и уменьшение длины трубопровода (для получения непрямого удара) тоже смягчает удар, снижая ударное давление.

И, наконец, иногда просто увеличивают прочность слабых элементов системы трубопроводов.

РАВНОМЕРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

При напорном движении жидкости в трубопроводах живое сечение потока со всех сторон ограничено твердыми стенками. При движении жидкости в открытых руслах лишь часть периметра живого сечения имеет твердую границу и всегда есть участок периметра, который граничит с газом (или жидкостью), расположенным над ним. Этим обуславливаются особенности безнапорного движения жидкости в открытых руслах.

Даже если *русло* канала цилиндрическое, т. е. площадь его сечения не меняется по длине канала, площадь *живого сечения потока* в общем случае является переменной величиной, которая зависит от характеристик потока и может изменяться вдоль течения.

Размеры и форма живого сечения потока будут оставаться постоянными только в случае равномерного установившегося движения в цилиндрическом или призматическом русле. Цилиндрическим или призматическим руслом обладают искусственные каналы, устраиваемые для целей судоходства, орошения или других нужд. Таким образом, изучение закономерностей равномерного движения воды в открытых руслах необходимо, прежде всего, для расчета каналов.

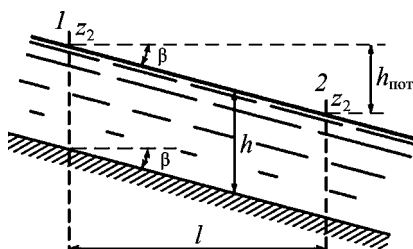


Рис. 9.1

Составим уравнение Бернулли для двух сечений на свободной поверхности потока (рис. 9.1). При движении жидкости в открытом русле давление на свободной поверхности обычно принимается постоянным вдоль всего потока и равным атмосферному. Кроме того, при равномерном движении скорости течения вдоль потока остаются постоянными — $v_1 = v_2 = \text{const}$.

Тогда уравнение Бернулли примет вид простого равенства

$$z_1 = z_2 + h_{\text{пот}},$$

в котором z_1 и z_2 представляют собой отметки свободной поверхности в сечениях, а $h_{\text{пот}}$ выражает потерю удельной энергии жидкости между этими сечениями.

Разность $z_1 - z_2$ уровней в двух сечениях открытого потока называется *падением свободной поверхности* потока между этими сечениями. Разделив падение свободной поверхности на участке равномерного движения на длину этого участка, получим уклон свободной поверхности потока.

Если длину участка измерять по свободной поверхности, образующей с горизонтом угол β , то уклон свободной поверхности потока

$$I = \sin \beta.$$

Однако ввиду небольших, как правило, уклонов открытых потоков можно принять $\sin \beta \approx \text{tg} \beta$ и уклон свободной поверхности определять тангенсом угла β (см. рис. 9.1), т. е.

$$I \approx \text{tg} \beta = \frac{z_1 - z_2}{l}.$$

Это равносильно тому, чтобы расстояние между сечениями потока определять вдоль горизонтальной линии. Расстояние от свободной поверхности до самой низкой точки поперечного сечения назовем *глубиной* потока h . Живые сечения будем считать вертикальными, измеряя глубину h по вертикали (см. рис. 9.1).

С другой стороны,

$$i = \frac{h_{\text{пот}}}{l},$$

где i — гидравлический уклон потока, определяемый уравнением Бернулли.

Тогда очевидно, что

$$i = I,$$

т. е. гидравлический уклон открытого равномерного потока равен уклону его свободной поверхности.

Установившееся и равномерное движение в русле возможно только при постоянной глубине потока h . При этом уклон дна русла I_0 будет равен уклону его свободной поверхности, т. е. гидравлический уклон открытого равномерного потока равен уклону его дна.

Объединяя эти рассуждения, запишем для установившегося равномерного потока

$$i = I = I_0 = \operatorname{tg} \beta. \quad (9.1)$$

При равномерном движении потеря энергии жидкости происходит только по длине, местные потери можно не учитывать. Во всех случаях, имеющих практическое значение, вода в открытых руслах движется турбулентно, при квадратичном законе сопротивления. Таким образом, для расчета движения жидкости в открытых потоках следует использовать формулу Шези (4.7). Для гидравлического уклона при этом будем иметь

$$i = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2},$$

где $K = \omega C \sqrt{R}$ — расходная характеристика — модуль расхода русла.

Кроме того, справедливым будет и условие постоянства расхода вдоль потока:

$$Q = v\omega = \text{const.}$$

При расчете каналов возникают три вида гидравлических задач, подобные тем, что встречаются при расчете трубопроводов.

1. Заданы размеры живого сечения канала и уклон дна I_0 , требуется определить расход воды Q , пропускаемый каналом.

2. Заданы размеры живого сечения канала и расход воды, необходимо определить уклон дна.

3. Заданы расход и уклон дна, требуется установить размеры живого сечения.

Расчетные зависимости для всех трех случаев получаем из формулы Шези, заменяя в соответствии с равенством (9.1) гидравлический уклон уклоном дна.

Для решения задач первого вида получим формулу

$$Q = K\sqrt{I_0} = \omega C\sqrt{RI_0}. \quad (9.2)$$

Для решения задач второго вида — зависимости

$$I_0 = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{v^2}{C^2 R}. \quad (9.3)$$

Для решения задач третьего вида следует использовать формулу

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I_0}}. \quad (9.4)$$

Шероховатость поверхности канала, необходимая для расчета коэффициента Шези C , должна быть задана для всех трех видов задач. Она определяется характеристиками материала, из которого устроены дно и стенки канала.

Особенностью расчета каналов, существенно отличающей этот расчет от расчета трубопроводов, является то, что зависимость (9.4) не дает полного решения задачи. Одному и тому же значению расходной характеристики может отвечать бесчисленное множество поперечных сечений различных формы и размеров. Поэтому при определе-

нии размеров живого сечения канала необходимо иметь заданной форму живого сечения, а также в большинстве случаев — хотя бы один из размеров либо отношение между двумя основными размерами.

9.2. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖИВОГО СЕЧЕНИЯ ПОТОКА

Наиболее часто встречаются формы поперечных сечений каналов, изображенные на рисунке 9.2.

Приведем некоторые геометрические характеристики и формулы их расчета для сечений различной формы.

Симметричное трапецеидальное сечение. Трапеция (рис. 9.2а) является наиболее распространенной формой поперечного сечения каналов.

Величина h называется *глубиной наполнения канала*, b — *шириной по дну*, a — *высотой откоса*, c — *горизонтальное заложение откоса*.

Крутизна откоса характеризуется *коэффициентом заложения откоса*:

$$m = \frac{c}{a} = ctg\psi.$$

Крутизна откоса (угол ψ) определяется не соображениями гидравлического расчета, а характером грунтов, в которых проходит канал. Наиболее часто при нескальных грунтах устраивают откосы с коэффициентом m , равным 2–3.

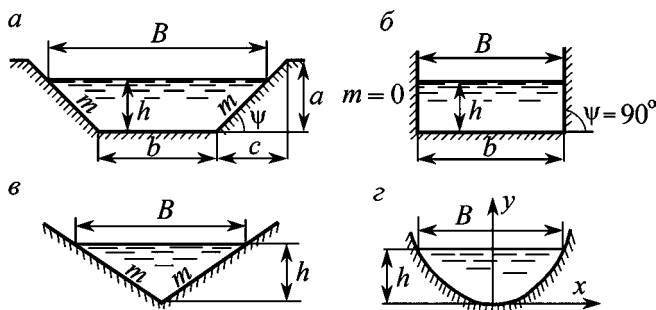


Рис. 9.2

Ширина канала поверху:

$$B = b + 2mh.$$

Площадь живого сечения:

$$\omega = (b + mh)h. \quad (9.5)$$

Смоченный периметр:

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}. \quad (9.6)$$

Зная площадь живого сечения и смоченный периметр, можно определить гидравлический радиус

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

Прямоугольное сечение. Такое сечение (рис. 9.2б) можно получить из трапецеидального, увеличивая крутизну откосов и доводя угол ψ до 90° (коэффициент откоса m — до нуля).

Тогда

$$B = b, m = \operatorname{ctg} 90^\circ = 0;$$

$$\omega = bh, \chi = b + 2h.$$

Каналы с прямоугольным сечением устраиваются (вырубаются) в скальных породах. Кроме того, прямоугольное сечение часто имеют оросительные открытые лотки.

Треугольное сечение. Уменьшая ширину по дну b трапецеидального сечения до нуля, получим поперечное сечение канала в виде треугольника (рис. 9.2в). Для него

$$b = 0; \quad B = 2mh;$$

$$\omega = mh^2; \quad \chi = 2h\sqrt{1+m^2}.$$

Параболическое сечение. Уравнение параболы, образующей смоченный периметр такого канала (рис. 9.2г), имеет вид

$$x^2 = 2py,$$

где p — параметр параболы.

Для такого русла параметры живого сечения определяются следующими формулами (примем без вывода):

$$B = 2\sqrt{2ph}; \quad \omega = \frac{2}{3}Bh = \frac{2}{3}2h\sqrt{2ph};$$

$$\chi = p \left[\sqrt{2\frac{h}{p} \left(1 + 2\frac{h}{p} \right)} + \ln \left(\sqrt{2\frac{h}{p}} + \sqrt{1 + 2\frac{h}{p}} \right) \right].$$

Прочие поперечные сечения. В практике встречаются и другие формы сечения русла каналов. Некоторые из них приведены на рисунке 9.3:

- несимметричный профиль (рис. 9.3а);
- неправильный профиль (рис. 9.3б); в этом случае, как и в случае, приведенном на рисунке 9.3а, величины ω и χ приходится вычислять, разбивая поперечное сечение канала на отдельные части;
- составной профиль (рис. 9.3в);
- замкнутые профили (рис. 9.3г); такие каналы называются закрытыми.

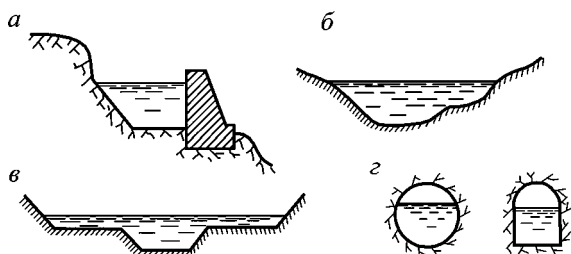


Рис. 9.3

9.3. ГИДРАВЛИЧЕСКИ НАИВЫГОДНЕЙШИЙ ПРОФИЛЬ ЖИВОГО СЕЧЕНИЯ

Гидравлически наиболее выгодные профили (или формы) живого сечения потока — это такие профили, которые приводят к наименьшим потерям энергии при движении жидкости. Исходя из этого принципиального условия, можно привести несколько формулировок гидравлической выгодности сечения потока.

Гидравлически наивыгоднейшим профилем живого сечения, имеющего заданную площадь при заданном уклоне дна, будет такой профиль, при котором средняя скорость течения и расход потока имеют наибольшие значения.

С другой стороны, у гидравлически наивыгоднейшего сечения, имеющего заданные расход и уклон дна, площадь живого сечения наименьшая. Это означает, что гидравлически наивыгоднейшему сечению, имеющему заданную

площадь, соответствует наибольший гидравлический радиус и, следовательно, наименьший возможный смоченный периметр.

Легко показать, что гидравлически наивыгоднейшей формой живого сечения является полукруг, поскольку в этом случае имеем минимальную величину смоченного периметра χ , а следовательно, и минимальную поверхность трения.

Определим параметры гидравлически наивыгоднейшего профиля трапецеидальной формы. Пусть заданы площадь живого сечения $\omega = \text{const}$ и уклон дна канала $I_0 = \text{const}$.

Площадь трапецеидального живого сечения определяется формулой (9.5), смоченный периметр — формулой (9.6). При этом, как следует из этих формул, и площадь сечения, и смоченный периметр являются функциями глубины наполнения канала h и ширины канала по дну b . Как сказано выше, у гидравлически наивыгоднейшего сечения при заданной площади $\omega = \text{const}$ смоченный периметр χ минимален. Математически это означает, что для гидравлически наивыгоднейших сечений производные $\frac{d\omega}{dh}$ и $\frac{d\chi}{dh}$ должны быть равны нулю.

Тогда из формул (9.5) и (9.6) получим

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dh} &= \left(\frac{db}{dh} + m \right) h + (b + mh) = 0; \\ \frac{d\chi}{dh} &= \frac{db}{dh} + 2\sqrt{1+m^2} = 0.\end{aligned}$$

Из последней формулы выразим

$$\frac{db}{dh} = -2\sqrt{1+m^2}$$

и подставим в формулу для производной $\frac{d\omega}{dh}$:

$$(-2\sqrt{1+m^2} + m)h + (b + mh) = 0.$$

Это выражение дает неявную зависимость между глубиной наполнения канала h и шириной канала по дну b

для гидравлически наивыгоднейшего сечения при заданном m . Из него можно определить относительную ширину канала трапецеидального сечения по дну b/h :

$$\frac{b}{h} = 2(\sqrt{1+m^2} - m). \quad (9.7)$$

Используя это соотношение и формулы (9.5) и (9.6), запишем для площади сечения и смоченного периметра трапеции

$$\begin{aligned} \omega &= (b + mh)h = \left(\frac{b}{h} + m\right)h^2 = \\ &= (2\sqrt{1+m^2} - 2m + m)h^2 = (2\sqrt{1+m^2} - m)h^2; \\ \chi &= b + 2h\sqrt{1+m^2} = \left(\frac{b}{h} + 2\sqrt{1+m^2}\right)h = \\ &= (2\sqrt{1+m^2} - 2m + 2\sqrt{1+m^2})h = 2(2\sqrt{1+m^2} - m)h. \end{aligned}$$

Откуда гидравлический радиус сечения

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{(2\sqrt{1+m^2} - m)h^2}{2(2\sqrt{1+m^2} - m)h} = \frac{h}{2}.$$

Следовательно, при любом значении коэффициента откоса m гидравлический радиус трапецеидального живого сечения, имеющего гидравлически наивыгоднейший профиль, равен половине глубины наполнения h .

При коэффициенте откоса $m = 2$

$$\frac{b}{h} = 0,47,$$

при коэффициенте откоса $m = 3$

$$\frac{b}{h} = 0,32.$$

То есть при наиболее часто встречающейся крутизне откосов ширина по дну трапецеидального профиля составляет менее половины глубины.

Условие (9.7) будет справедливо и для прямоугольного сечения, если положить $m = 0$.

Тогда

$$\frac{b}{h} = 2.$$

Таким образом, у гидравлически наивыгоднейшего прямоугольного профиля ширина больше глубины в два раза.

На рисунке 9.4 показаны гидравлически наивыгоднейшие поперечные сечения каналов: полукруглое, прямоугольное с соотношением $b/h = 2$ и трапецеидальное с $m = 2$ и $b/h = 0,47$. Сечения судоходных каналов выбираются в соответствии не с гидравлической выгодой, а с требованиями судоходства. Ширина по дну выбирается из условия безопасного расхождения встречных судов, глубина берется равной осадке расчетного судна плюс запас под днищем. Такие сечения всегда очень далеки от гидравлически выгодных — их ширина многократно превосходит глубину.

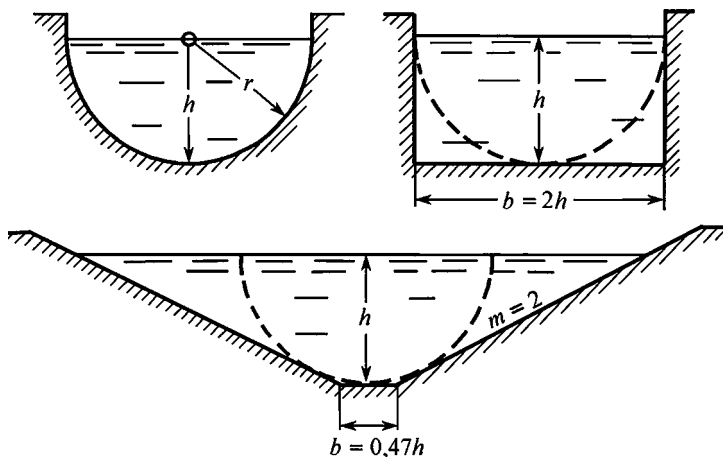


Рис. 9.4

9.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Движение в каналах трапецеидального поперечного сечения характеризуется двумя группами величин:

- величины, определяющие геометрические размеры живого сечения, — b , h и m ;
- величины, определяющие гидравлический режим течения, — n , I и Q (или $v = Q/\omega$).

Условиями проектирования, как правило, задаются значения всех величин, кроме одной. Задача гидравлического расчета состоит в отыскании неизвестной характеристики.

Рассмотрим несколько типичных примеров гидравлического расчета, связанных с проектированием каналов.

1. Геометрия живого сечения задана.

1.1. Пусть заданы все размеры живого сечения, т. е. b , h и m и также уклон дна I_0 и коэффициент шероховатости n . Требуется определить расход Q воды в канале.

Задачу решаем следующим образом:

- зная размеры живого сечения, находим его площадь $\omega = (b + mh)h$, величину смоченного периметра $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$ и гидравлический радиус $R = \omega/\chi$;
- зная R и n , по формулам Павловского (4.8) или Маннинга (4.9) определяем C ;
- зная C и R , определяем скорость течения $v = C\sqrt{RI_0}$;
- зная v и ω , находим искомый расход $Q = v\omega$.

1.2. Пусть заданы размеры живого сечения (b , h и m), а также коэффициент шероховатости n и расход Q . Необходимо найти уклон дна в канале I_0 .

Ход решения:

- так же, как и выше, находим величины ω , χ , R , C ;
- зная ω , рассчитываем скорость течения $v = Q/\omega$;
- по формуле (9.3) вычисляем уклон $I_0 = \frac{v^2}{C^2 R}$.

2. Расчет элементов геометрии канала.

Задачи по определению геометрических размеров трапециoidalного канала решаются путем подбора искомой величины.

Пусть заданы m , b , n , I_0 , Q . Требуется найти глубину наполнения канала h . (Вариант — задана h , необходимо определить b .)

Ход решения:

- рассчитываем модуль расхода $K_{\text{треб}}$, которым должен характеризоваться канал:

$$K_{\text{треб}} = \frac{Q}{\sqrt{I_0}};$$

- строим график зависимости модуля расхода K от глубины наполнения h : задаваясь рядом значений глубины h , рассчитываем для каждого h соответствующий модуль расхода; для этого удобно составить таблицу расчета:

Таблица 9.1

Расчет геометрических параметров канала

№	Величина	Задаваемые и расчетные значения					
1	h	h_1	h_2	...	...	...	h_n
2	$\omega = (b + mh)h$	...	...	...	...	...	...
3	$\chi = b + h(2\sqrt{1+m^2})$	...	...	...	...	...	...
4	$R = \frac{\omega}{\chi}$	...	...	...	...	...	...
5	$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}$ (формула Маннинга)	...	...	...	...	...	...
6	$K = \omega C \sqrt{R}$	...	...	...	...	...	...

- по данным такой таблицы (по строкам 1 и 6) строим график зависимости $K = f(h)$ (рис. 9.5а); кривая имеет выпуклость, обращенную в сторону оси h , и проходит через начало координат (при $h = 0$ значение $K = 0$);
- по этому графику, зная $K_{\text{треб}}$, находим искомую глубину наполнения канала $h_{\text{иск}}$;
- в случае если задана глубина наполнения h и требуется отыскать ширину по дну b , расчет производится с использованием тех же зависимостей таблично-графическим способом; строится график $K = f(b)$ (рис. 9.5б) и по нему определяется $b_{\text{иск}}$.

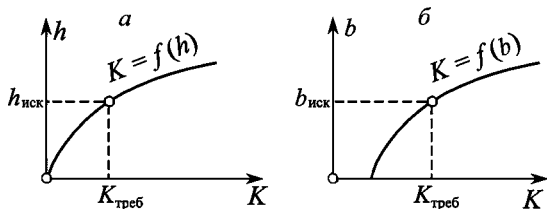


Рис. 9.5

3. Среди заданных величин — средняя скорость.

3.1. Пусть заданы размеры живого сечения (b , h и m), а также n и v . Требуется найти Q и I_0 .

Ход решения:

- вычисляем площадь живого сечения $\omega = (b + mh)h$, величину смоченного периметра $\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$ и гидравлический радиус $R = \omega/\chi$;
- находим расход $Q = v\omega$;
- зная R и n , определяем C ;
- определяем уклон дна $I_0 = \frac{v^2}{C^2 R}$.

3.2. Пусть заданы m , n , Q , v , а также одна из величин: h или b . Требуется определить: уклон дна I_0 , а также неизвестный геометрический размер b или h .

Ход решения:

- вычисляем площадь живого сечения $\omega = Q/v$;
- формула для площади живого сечения $\omega = (b + mh)h$ содержит одну неизвестную величину b или h (в зависимости от условий задачи); решая это уравнение, находим неизвестный геометрический размер живого сечения;
- рассчитывая необходимые величины (R и C), определяем уклон дна $I_0 = \frac{v^2}{C^2 R}$.

9.5. ДОПУСКАЕМЫЕ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

При проектировании каналов приходится особо оценивать скорости течения воды, особенно в случаях, когда дно и стенки канала земляные. Проектируя статически устойчивый земляной канал, т. е. канал, русло которого не должно подвергаться в процессе эксплуатации деформациям, необходимо накладывать на скорость течения определенные ограничения. Деформация формы и площади сечения русла может возникать по следующим причинам:

- большие скорости течения могут вызвать размыв земляного ложа канала и разрушение откосов;

- если вода, поступающая в канал, содержит много взвешенных частиц грунта — наносов, то при небольших скоростях течения наносы осаждаются и откладываются на дне канала, уменьшая его сечение и пропускную способность, происходит заиливание канала.

В первом случае (при значительных величинах скорости) в процессе равномерного турбулентного движения воды вертикальные пульсационные составляющие скорости оказываются столь большими, что частицы грунта с поверхности ложа канала отрываются от дна и переходят во взвешенное состояние. Размытый в одном месте грунт будет откладываться в другом месте, откосы будут оползать, уменьшая ширину канала по дну. Предоставленный самому себе, такой канал скоро примет формы естественного речного русла, более мелкого и широкого, чем спроектированный и построенный канал. Поэтому скорости течения в каналах должны быть меньше тех скоростей, которые могут вызвать размыв ложа канала. Предельная скорость, при которой не происходит размыв русла, называется *максимальной допускаемой скоростью при равномерном движении воды или неразмывающей скоростью*.

Величина неразмывающей скорости зависит от материала дна и стенок канала, а также, как показывают опыты, от глубины воды в канале. Для ее определения используются эмпирические формулы.

Проверка каналов на допускаемую скорость происходит путем проверки соблюдения неравенства

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\omega} \leq v_{\text{нр}},$$

где $v_{\text{нр}}$ — рассчитанная неразмывающая скорость.

Получить представление о величине неразмывающих скоростей для различных грунтов можно из таблицы 9.2. В таблице приведены значения неразмывающей скорости при глубине наполнения $h = 1$ м.

При глубине наполнения, отличной от 1 м, величину неразмывающей скорости получают, умножая скорости, приведенные в таблице 9.2, на $h^{2/3}$.

Для предотвращения размыва ложа канала выполняются следующие мероприятия:

Таблица 9.2

Неразмывающие скорости для различных грунтов

Грунт ложа канала		$v_{нр}$, м/с
Несвязные материалы:		
Мелкозернистые пески, $d = 0,25$ мм		0,39
Среднезернистые пески, $d = 1,0$ мм		0,55
Крупнозернистые пески, $d = 3,0$ мм		0,80
Гравий, $d = 15$ мм		1,20
Галька, $d = 100$ мм		1,50
Связные материалы:		
Супесь		0,54
Суглинки	легкие	0,70
	средние	1,00
	плотные	1,10
Глины	мягкие	0,7
	нормальные	1,20
	плотные	1,50

1) увеличивают значение допустимой размывающей скорости $v_{нр}$, с этой целью используют покрытие откосов и дна канала каким-либо креплением: хворостяным покрытием, каменной отмосткой, бетонной облицовкой и т. п. В бетонированных каналах допускаются скорости течения воды до 10 м/с;

2) уменьшают среднюю скорость движения воды. В соответствии с формулой Шези, $v = C\sqrt{RI_0}$, следовательно, снизить скорость можно, уменьшив:

- а) гидравлический радиус R ;
- б) коэффициент Шези C путем создания на покрытии ложа канала искусственной шероховатости;
- в) уклон дна канала устройством перепадов.

Поскольку уменьшение гидравлического радиуса и введение искусственной шероховатости для длинных каналов

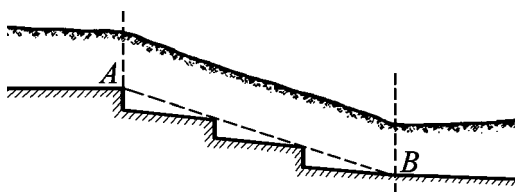


Рис. 9.6

обычно бывает экономически неприемлемо, прибегают к устройству перепадов по длине канала (рис. 9.6).

Если вода, поступающая в канал, содержит много взвешенных частиц, то для такого канала существует не только верхний, но и нижний предел допускаемых скоростей. Наносы, содержащиеся в воде, осаждаются и откладываются на дне канала. Поэтому в каналах не допускаются скорости, при которых из воды выпадают содержащиеся в ней наносы. Наименьшая скорость, при которой еще не происходит выпадения наносов, называется *незаиливающей* скоростью — $v_{\text{нз}}$. Незаиливающую скорость определяют также опытным путем. Величина незаиливающей скорости зависит как от общего количества содержащихся в воде наносов, так и от крупности частиц взвеси. Чем больше общая мутность воды и чем крупнее взвешенные частицы, тем большая нужна скорость для того, чтобы частицы переносились, не осаждаясь на дне.

Таким образом, при проектировании каналов диапазон возможных скоростей определяется условием

$$v_{\text{нз}} \leq v \leq v_{\text{нр}}.$$

Иногда при проектировании каналов сталкиваются со случаями настолько большой мутности воды, что величина незаиливающей скорости оказывается больше неразмывающей. В этом случае возможны следующие меры:

- расчетная скорость устанавливается меньше неразмывающей, а значит, больше незаиливающей, и проводится периодическая очистка канала от отложившихся в нем наносов;
- скорость в канале назначается равной незаиливающей $v = v_{\text{нз}}$, и принимаются меры, описанные выше, для увеличения неразмывающей скорости.

9.6. БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТЫХ КАНАЛАХ

Примерами каналов, имеющих замкнутый профиль, являются канализационные и дренажные трубы, гидротехнические туннели. Эти водотоки работают как безнапорные, т. е. жидкость течет вдоль труб, не заполняя их полностью. Поэтому с гидравлической точки зрения такие трубы не отличаются от открытых каналов. Тем не менее, такие течения имеют свои особенности. Рассмотрим их на примере трубы круглого поперечного сечения диаметром d (рис. 9.7).

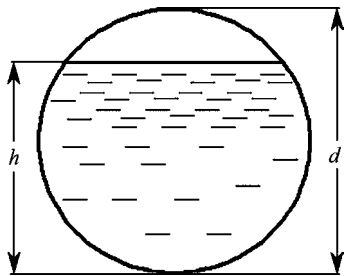


Рис. 9.7

Глубина наполнения трубы h меняется от $h = 0$ до $h = d$. Назовем отношение

$$a = \frac{h}{d}$$

степенью наполнения трубы. Понятно, что степень наполнения может изменяться от нуля до единицы. На практике для канализационных и дренажных труб обычно принимается $a = 0,6-0,9$. При этом средняя скорость движения и расход жидкости тоже могут изменяться от нуля до некоторых значений v_{π} и Q_{π} , соответствующих полному наполнению рассматриваемых замкнутых каналов. Расчетные значения средней скорости и расхода жидкости при степени заполнения, равной a , обозначим v_a и Q_a соответственно.

Введем обозначения:

- коэффициент полноты расхода $A = \frac{Q_a}{Q_{\pi}} = f_1(a)$;
- коэффициент полноты скорости $B = \frac{v_a}{v_{\pi}} = f_2(a)$.

Графики зависимостей $A = f_1(a)$ и $B = f_2(a)$ построены для профилей различной формы и имеются в справочной литературе. Оказывается, что вид этих графиков не зависит

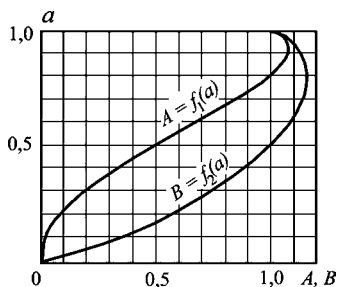


Рис. 9.8

от размеров замкнутых профилей и определяется только формой поперечного сечения труб. Для профилей круглого поперечного сечения такие графики приведены на рисунке 9.8.

Существенным является то обстоятельство, что функции $A = f_1(a)$ и $B = f_2(a)$ в случае замкнутых профилей имеют

максимум. Наибольшее значение коэффициента полноты расхода A соответствует степени наполнения $a = 0,95$, а наибольшее значение коэффициента полноты скорости B соответствует значению $a = 0,81$.

Уклон трубы, равный уклону свободной поверхности жидкости в трубе, будем обозначать I_0 .

Коэффициент шероховатости канализационных и дренажных труб обычно принимается равным $n = 0,012-0,014$ вне зависимости от материала стенок труб, так как такие трубы в процессе эксплуатации покрываются изнутри осадками, что в значительной мере сглаживает разницу в материале стенок труб.

Модуль расхода $K_{\Pi} = \omega C \sqrt{R}$ для случая полного заполнения труб круглого поперечного сечения при известном коэффициенте шероховатости зависит только от диаметра трубы. Действительно:

- площадь поперечного сечения $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$;
- гидравлический радиус круглого сечения $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$;
- коэффициент C определяется по формуле Маннинга

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{n} \left(\frac{d}{4} \right)^{1/6}.$$

Тогда

$$K_{\Pi} = \omega C \sqrt{R} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{0,013} \left(\frac{d}{4} \right)^{1/6} \left(\frac{d}{4} \right)^{1/2} \approx 24 d^{8/3}. \quad (9.8)$$

Таблицы модуля расхода K_{π} в зависимости от диаметра для труб выпускаемых сортаментов приводятся в гидравлических справочниках, например:

Таблица 9.3

Модуль расхода в зависимости от диаметра трубы

d , мм	100	125	150	200	250	300	350	400
K_{π} , л/с	52	94	152	328	595	968	1460	2084

При расчетах безнапорного течения в замкнутых трубах встречаются следующие типы задач.

1. Задан тип профиля (например, круговой), известны его диаметр d и уклон трубы I_0 , а также степень наполнения a . Требуется найти расход Q_a .

Ход решения:

- зная диаметр d , по таблице 9.3 или формуле (9.8) определяется модуль расхода для полной трубы K_{π} ;
- рассчитывается расход, который был бы при полном заполнении трубы, $Q_{\pi} = K_{\pi} \sqrt{I_0}$;
- по степени заполнения a из графика рисунка 9.8 определяется коэффициент полноты расхода $A = f_1(a)$;
- искомый расход будет $Q_a = A Q_{\pi}$.

2. Заданы a , d и Q_a . Найти I_0 .

Ход решения:

- из определения коэффициента полноты расхода

$$A = \frac{Q_a}{Q_{\pi}} = \frac{K_a \sqrt{I_0}}{K_{\pi} \sqrt{I_0}} = \frac{K_a}{K_{\pi}};$$

- как в предыдущем случае, по диаметру d находим K_{π} ;
- по степени заполнения a из графика рисунка 9.8 определяем коэффициент полноты расхода $A = f_1(a)$;
- рассчитываем модуль расхода для неполной трубы $K_a = A K_{\pi}$;
- находим искомый уклон $I_0 = \frac{Q_a^2}{K_a^2}$.

3. Заданы a , Q_a , I_0 . Найти d .

Ход решения:

- определяем $K_a = \frac{Q_a}{\sqrt{I_0}}$;
- зная a , по графику рисунка 9.8 находим $A = f_1(a)$;

- определяем $K_{\pi} = \frac{K_a}{A}$;
- по таблице 9.3 или из формулы (9.8) находим d и принимаем его ближайшее большее значение по сортаменту труб.

4. Заданы d, Q_a, I_0 . Найти степень заполнения a .

Ход решения:

- определяем $K_a = \frac{Q_a}{\sqrt{I_0}}$;
- зная d , по таблице 9.3 или формуле (9.8) определяем модуль расхода для полной трубы K_{π} ;
- рассчитываем коэффициент полноты расхода $A = \frac{K_a}{K_{\pi}}$;
- по графику рисунка 9.8 находим a .

Аналогично решаются задачи, в которых требуется определить скорость течения v или в которых значение этой скорости задается. При решении этих задач используется зависимость $B = f_2(a)$ из графика рисунка 9.8.



ГЛАВА 10

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В гидротехнике приходится иметь дело с разнообразными случаями неравномерного движения воды в открытых руслах. При неравномерном установившемся движении средняя скорость и глубина потока изменяются вдоль движения, но не меняются в любом сечении с течением времени.

Неравномерное движение в открытых руслах устанавливается в следующих случаях:

- в цилиндрических и призматических руслах (т. е. имеющих вдоль течения одинаковое поперечное сечение) — в случаях устройства в русле плотины (рис. 10.1а), перепада (рис. 10.1б), щита (рис. 10.1в) или другого препятствия;
- в руслах с горизонтальным дном (уклон $I_0 = 0$) или с обратным уклоном ($I_0 < 0$) (рис. 10.2);
- в нецилиндрических (непризматических) руслах, сечение которых изменяется по длине — расширяется (рис. 10.3а), сужается (рис. 10.3б) или меняется произвольным образом.

Таким образом, можно отметить, что равномерное движение воды в открытом потоке осуществляется только в цилиндрическом (призматическом) русле с прямым уклоном

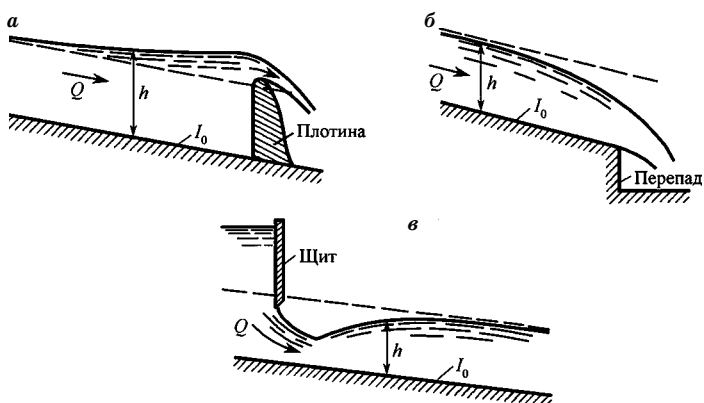


Рис. 10.1

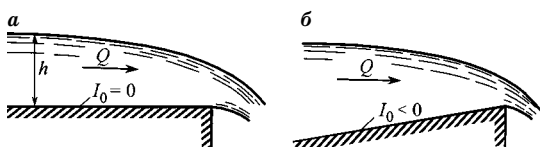


Рис. 10.2



Рис. 10.3



Рис. 10.4

($I_0 > 0$) при условии, что русло достаточно длинное и не имеет каких-либо препятствий и устройств, нарушающих равномерность режима течения.

На практике случаи неравномерного движения воды встречаются значительно чаще, чем случаи равномерного.

Важнейшей задачей расчета неравномерного движения является построение кривых свободной поверхности потоков.

При неравномерном движении глубины потока могут уменьшаться вниз по течению. В этом случае кривая свободной поверхности называется *кривой спада*. Если глубина потока вниз по течению увеличивается, кривая свободной поверхности называется *кривой подпора* (рис. 10.4).

Изучение кривых подпора дает возможность рассчитывать отметки подъема уровней воды в русле, длину распространения подпора, глубины на подпертом участке, высоту затопления берегов и принять меры против затопления территорий и находящихся на них сооружений. По кривым спада определяют уменьшение глубин и увеличение скоростей, что необходимо для расчетов укрепления русел и предотвращения их размывов.

10.2. НОРМАЛЬНАЯ И КРИТИЧЕСКАЯ ГЛУБИНА

Будем рассматривать случаи неравномерного движения в призматических руслах, например, трапецеидального или прямоугольного сечений. Считаем уклон дна I_0 русла, а также его размеры и шероховатость стенок и дна известными.

Обратим внимание на следующее обстоятельство — один и тот же расход Q может быть пропущен через такое русло при различном его наполнении, т. е. при разных глубинах в каждом сечении. При больших глубинах вода будет двигаться с меньшей скоростью, при малых глубинах — с большей. Однако равномерное движение заданного расхода возможно только при одной глубине, определяемой формулой

$$Q = K\sqrt{I_0},$$

так как значению расходной характеристики (модулю расхода) $K = \omega C\sqrt{R}$ соответствует определенное значение глубины потока (см. рис. 9.5).

Глубина равномерного движения потока жидкости h_0 называется *нормальной глубиной* для данного расхода. Отвечающее нормальной глубине значение расходной характеристики K_0 будем называть *нормальной расходной характеристикой*. В заданном русле при всех глубинах, отличных от нормальной, заданный расход будет проходить при неравномерном режиме движения.

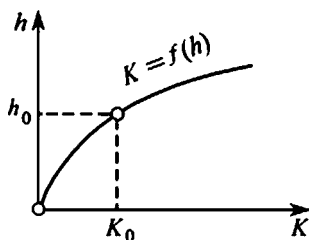


Рис. 10.5

Каждому расходу в определенном русле соответствует свое значение нормальной глубины. Зная форму и размеры русла и расход жидкости, нормальную глубину можно определить графически. Для этого следует построить график зависимости $K = f(h)$: задаваясь некоторыми значениями глубины h , можно вычислить соответствующие значения расходной характеристики K и по полученным точкам построить график (рис. 10.5).

Затем на оси K следует отложить величину нормальной расходной характеристики

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{I_0}}$$

и на оси h определить соответствующее значение нормальной глубины h_0 .

Рассмотрим некоторое сечение потока (рис. 10.6). Удельную энергию протекающей жидкости в соответствии с

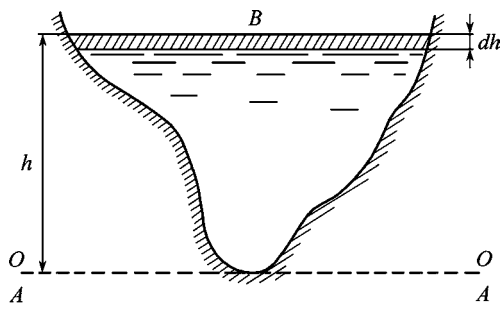


Рис. 10.6

уравнением Бернулли можно отсчитывать относительно произвольной плоскости сравнения, например плоскости А–А. В зависимости от расположения плоскости сравнения значения удельной энергии будут разными. Назовем *удельной энергией сечения* удельную энергию, рассчитанную относительно плоскости сравнения, проведенной через низшую точку сечения — плоскость О–О на рисунке 10.6.

Обозначив удельную энергию сечения через $\mathfrak{E}$, запишем трехчлен Бернулли:

$$\mathfrak{E} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}.$$

Нетрудно убедиться, что в открытых руслах для любой точки в потоке

$$z + \frac{p}{\rho g} = h,$$

т. е. величина удельной потенциальной энергии равна глубине воды в сечении.

Тогда

$$\mathfrak{E} = h + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (10.1)$$

Таким образом, удельная энергия сечения складывается из удельной потенциальной энергии h и удельной кинетической энергии $\frac{\alpha v^2}{2g}$. С учетом выражения средней скорости движения через расход $v = Q/\omega$,

$$\mathfrak{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}. \quad (10.2)$$

Из уравнения (10.2) видно, что даже при постоянном расходе Q удельная энергия сечения при неравномерном движении меняется с изменением глубины потока h и соответственно площади живого сечения ω . Характер зависимости, определяемый уравнением (10.1), приведен на рисунке 10.7. На графике изменение удельной потенциальной энергии h изображено пунктирной прямой, проходящей под углом 45° к осям координат. При $h \rightarrow \infty$ удельная энергия сечения $\mathfrak{E}$ также стремится к бесконечности.

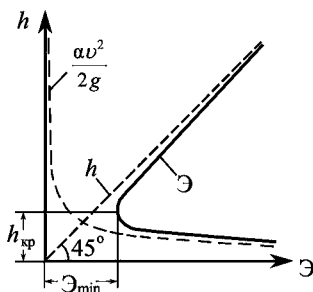


Рис. 10.7

Изменение кинетической энергии показано пунктирной гиперболой. При увеличении глубины возрастает площадь живого сечения потока, скорость, а с ней и кинетическая энергия уменьшаются. При $h \rightarrow 0$ площадь живого сечения стремится к нулю. При $\omega \rightarrow 0$ скорость и кинетическая энергия возрастают. Суммарная кривая, отображающая изменение полной

удельной энергии сечения, состоит из двух ветвей. Вдоль верхней ветви энергия Θ возрастает с увеличением глубины h , это увеличение происходит за счет увеличения потенциальной энергии.

Вдоль нижней ветви энергия Θ возрастает с уменьшением глубины за счет увеличения кинетической энергии. Очевидно, что функция Θ имеет минимум в точке соединения двух своих ветвей. Глубина, при которой удельная энергия сечения достигает минимального значения $\Theta_{\min}$, называется *критической глубиной* $h_{\text{кр}}$. Для определения критической глубины можно воспользоваться условием минимума удельной энергии сечения Θ — функции, определяемой формулой (10.2). Возьмем производную этой функции по h :

$$\frac{d\Theta}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \frac{d\omega}{dh}.$$

Приращение площади живого сечения при изменении глубины может быть представлено (рис. 10.6) как $d\omega \approx B dh$, где B — ширина живого сечения по верху.

Тогда

$$\frac{d\Theta}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}.$$

При глубине, равной критической $h = h_{\text{кр}}$, функция Θ имеет минимум, значит, в этой точке производная $d\Theta/dh$ должна быть равна нулю.

Тогда

$$\frac{\omega_{\text{кр}}^3}{B_{\text{кр}}} = \frac{\alpha Q^2}{g}, \quad (10.3)$$

где $\omega_{\text{кр}}$ и $B_{\text{кр}}$ — площадь живого сечения и ширина его по верху при критической глубине $h_{\text{кр}}$.

Формула (10.3) позволяет определить критическую глубину для русел любой формы. Поскольку критическая глубина входит в формулу неявным образом, ее находят способом подбора. Критическую глубину можно определить и графически, построив по нескольким точкам график функции $\frac{\omega^3}{B} = f(h)$. Далее, отложив на оси абсцисс величину $\frac{\alpha Q^2}{g}$, получим на оси ординат искомое значение $h_{\text{кр}}$ (рис. 10.8).

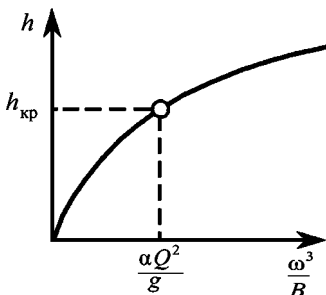


Рис. 10.8

Для некоторых форм поперечных сечений русел критическую глубину можно определить аналитически. Например, для русел прямоугольного сечения ее можно вывести из формулы (10.3) с учетом того, что

$$B_{\text{кр}} = b; \quad \omega_{\text{кр}} = bh_{\text{кр}}.$$

Тогда

$$h_{\text{кр}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}.$$

Рассуждая аналогично, для симметричных треугольных русел получим выражение

$$h_{\text{кр}} = \sqrt[5]{\frac{2\alpha Q^2}{gm^2}},$$

где m — коэффициент откоса русла.

Для русел параболического сечения

$$B_{\text{кр}} = 2\sqrt{2ph_{\text{кр}}}; \quad \omega_{\text{кр}} = \frac{4}{3}\sqrt{2ph_{\text{кр}}}h_{\text{кр}},$$

где p — параметр параболы.

Отсюда из формулы (10.3) находим

$$h_{\text{кр}} = \sqrt[4]{\frac{27}{64} \frac{\alpha Q^2}{g p}},$$

Для русел трапецеидальной формы составлены таблицы и графики для определения критических глубин в зависимости от параметров сечений.

Из выражений, определяющих величину критической глубины, можно видеть, что она зависит от формы и размеров русла и от расхода, но не зависит от уклона и шероховатости стенок русла. В то же время при равномерном движении нормальная глубина зависит как от расхода, формы и размеров русла, так и от его уклона и шероховатости. При изменении уклона критическая глубина не меняется, а нормальная — меняется. В зависимости от уклона нормальная глубина может быть больше или меньше критической, а при некотором уклоне нормальная глубина может стать равной критической. Уклон дна, при котором нормальная глубина становится равной критической, т. е. $h_0 = h_{\text{кр}}$, называется *критическим уклоном*. При критическом уклоне расход определится по формуле для равномерного движения

$$Q = \omega_{\text{кр}} C_{\text{кр}} \sqrt{R_{\text{кр}} I_{0 \text{ кр}}}.$$

Подставив это выражение в формулу (10.3) и решив его относительно $I_{0 \text{ кр}}$, получим

$$I_{0 \text{ кр}} = \frac{g}{\alpha C_{\text{кр}}^2} \frac{\chi_{\text{кр}}}{B_{\text{кр}}}.$$

При уклоне дна меньше критического, $I_0 < I_{0 \text{ кр}}$, нормальная глубина больше критической — $h_0 > h_{\text{кр}}$. Такие уклоны называют *пологими*. При уклоне дна больше критического, $I_0 > I_{0 \text{ кр}}$, нормальная глубина меньше критической — $h_0 < h_{\text{кр}}$. Такие уклоны называют *крутыми*.

В зависимости от соотношения действительной и критической глубин потока различают три состояния потока.

Если действительная глубина больше критической, состояние потока называют *спокойным*. Основным видом энергии такого потока является потенциальная энергия.

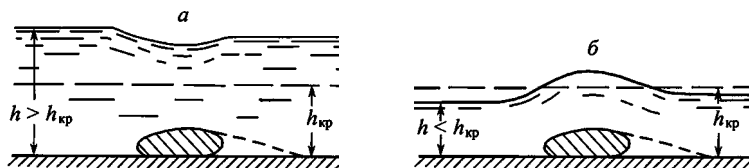


Рис. 10.9

В тех сечениях, где глубина потока равна критической, состояние потока называют *критическим*.

При глубине меньше критической поток называют *бурным*. Энергия потока сосредоточена главным образом в кинетической энергии.

О бурном или спокойном состоянии потока можно судить по тому, какой вид имеет свободная поверхность над препятствием, лежащим на дне. Спокойный поток понижает поверхность над препятствием (рис. 10.9а), а бурный, наоборот, повышает, переходит через препятствие «прыжком» (рис. 10.9б). Переход через препятствие сопровождается потерей энергии. В спокойном потоке теряется потенциальная энергия, что приводит к понижению уровня. В бурном потоке теряется кинетическая энергия, скорость потока падает, уровень повышается.

10.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

Как уже отмечалось, важнейшей задачей расчета неравномерного движения является построение кривых свободной поверхности потоков. Для решения этой задачи необходимо установить зависимость глубины потока от расстояния вдоль оси потока.

Рассмотрим участок потока при неравномерном движении (рис. 10.10). Будем полагать, что изменение сечения русла по длине происходит постепенно, так что соблюдаются условия плавной изменяемости движения. Уклон дна I_0 принимаем достаточно малым для того, чтобы живые сечения считать вертикальными, измеряя глубину h по вертикали. Ось длины l направим вдоль линии дна русла.

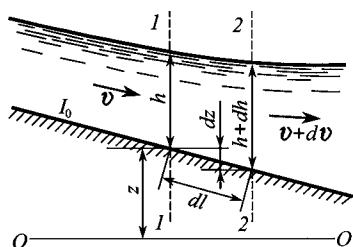


Рис. 10.10

Запишем уравнение Бернулли для двух вертикальных сечений потока 1-1 и 2-2, расположенных на бесконечно малом расстоянии dl друг от друга. Отметка дна относительно плоскости сравнения $O-O$ в первом сечении z , глубина h , средняя скорость v , а во втором сечении — соответ-

ственно $z + dz$, $h + dh$, $v + dv$. Приращения могут быть и положительными, и отрицательными. Тогда уравнение Бернулли для точек в сечениях, расположенных на поверхности потока, запишется так:

$$z + h + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = (z + dz) + (h + dh) + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + \frac{\alpha (v + dv)^2}{2g} + dh_{\text{тр}},$$

где $dh_{\text{тр}}$ — потери энергии по длине между сечениями.

Разделив это уравнение на расстояние между сечениями dl и приведя подобные члены, получим дифференциальную форму уравнения Бернулли:

$$\frac{dz}{dl} + \frac{dh}{dl} + \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{dh_{\text{тр}}}{dl} = 0.$$

Заметим, что $\frac{dz}{dl} = -I_0$ — это уклон дна русла. Знак «минус» возникает потому, что уклон принимается положительным в сторону уменьшения отметок дна. Кроме того, $\frac{dh_{\text{тр}}}{dl} = i_{\text{тр}}$ — это гидравлический уклон или уклон трения. Из уравнения (10.1) видно, что

$$\frac{d}{dl} \left(h + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \frac{d\mathcal{E}}{dl}.$$

Объединяя эти рассуждения, получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = I_0 - i_{\text{тр}}. \quad (10.4)$$

Из этого уравнения следует, что приращение удельной энергии сечения по длине потока равно разности уклона дна и уклона трения.

Уравнение (10.4) называется *основным дифференциальным уравнением установившегося неравномерного движения в открытом русле*. Оно справедливо для общего случая движения потока в русле произвольного сечения.

Выполним некоторые преобразования уравнения (10.4).

При определении уклона трения будем допускать, что потери напора при неравномерном плавноизменяющемся движении выражаются теми же формулами, что и при равномерном движении воды. То есть для определения уклона трения будем использовать формулу Шези

$$i_{\text{тр}} = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2},$$

где $K = \omega C \sqrt{R}$ — модуль расхода.

Для равномерного движения справедлива зависимость

$$I_0 = \frac{Q^2}{K_0^2},$$

где K_0 — нормальный модуль расхода.

Тогда можем записать

$$i_{\text{тр}} = I_0 \frac{K_0^2}{K^2},$$

и правая часть уравнения (10.4) примет вид

$$I_0 - i_{\text{тр}} = I_0 - I_0 \frac{K_0^2}{K^2}.$$

Преобразуем левую часть уравнения (10.4). Умножим и разделим ее на dh :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} \frac{dh}{dl}.$$

Удельная энергия сечения является функцией двух переменных: h и l . Длина l , в свою очередь, также зависит от h . Поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} \frac{dl}{dh}.$$

Отсюда

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dl} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial h} \frac{dh}{dl} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial l}. \quad (10.5)$$

В соответствии с уравнением (10.2)

$$\mathfrak{D} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial h} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial h} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}. \quad (10.6)$$

Здесь использовано соотношение $\frac{\partial \omega}{\partial h} = B$, где B — ширина канала по верху. С другой стороны,

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial l} = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial l}.$$

Используем следующие известные соотношения:

$$Q^2 = K_0^2 I_0; \quad K = \omega C \sqrt{R}; \quad \frac{\omega}{R} = \chi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial l} &= -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial l} = -\frac{\alpha K_0^2 I_0}{g\omega^3} \frac{C^2 R}{C^2 R} \frac{\partial \omega}{\partial l} = \\ &= -\frac{\alpha I_0}{g} \frac{C^2 R}{\omega} \frac{K_0^2}{\omega^2 C^2 R} \frac{\partial \omega}{\partial l} = -\frac{\alpha I_0 C^2}{g\chi} \frac{K_0^2}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial l}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (10.5), получим левую часть уравнения (10.4) в виде

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dl} = \left(1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}\right) \frac{dh}{dl} - \frac{\alpha I_0 C^2}{g\chi} \frac{K_0^2}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial l}.$$

Объединяем левую и правую части уравнения:

$$\left(1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}\right) \frac{dh}{dl} - \frac{\alpha I_0 C^2}{g\chi} \frac{K_0^2}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial l} = I_0 - I_0 \frac{K_0^2}{K^2}.$$

Выразим из этого соотношения величину изменения глубины потока вдоль течения — dh/dl .

$$\frac{dh}{dl} = I_0 \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2} \left(1 - \frac{\alpha C^2}{g\chi} \frac{\partial \omega}{\partial l}\right)}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}}. \quad (10.7)$$

Уравнение (10.7) — это дифференциальное уравнение для определения изменения глубины потока при плавно меняющемся движении в руслах произвольного сечения. Для цилиндрических и призматических русел, т. е. русел, у которых площадь сечения вдоль потока остается постоянной ($\frac{\partial \omega}{\partial l} = 0$), из уравнения (10.7) получим

$$\frac{dh}{dl} = I_0 \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}}. \quad (10.8)$$

10.4. ВИДЫ КРИВЫХ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОТКРЫТЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

10.4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При неравномерном движении воды кривые свободной поверхности могут приближаться к линиям нормальной (при $I_0 > 0$) или критической глубины, которые для цилиндрических и призматических русел остаются постоянными на всем их протяжении. Рассмотрим особенности изменения глубин в этих случаях.

Если глубина неравномерного движения стремится к нормальной глубине ($h \rightarrow h_0$), то модуль расхода стремится к нормальному модулю ($K \rightarrow K_0$). Тогда из уравнения (10.8) следует, что $\frac{dh}{dl} \rightarrow 0$. Это значит, что глубина стремится не изменяться вдоль потока, оставаться постоянной, т. е. кривая свободной поверхности асимптотически приближается к линии нормальных глубин (рис. 10.11а).

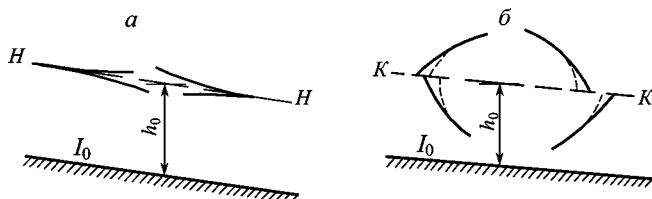


Рис. 10.11

Пусть глубина неравномерного движения приближается к линии критических глубин ($h \rightarrow h_{\text{кр}}$). Из определения критической глубины это означает, что удельная энергия сечения стремится к минимуму и $\frac{d\mathcal{E}}{dh} \rightarrow 0$.

Тогда из уравнения (10.6) следует, что

$$\frac{\omega_{\text{кр}}^3}{B_{\text{кр}}} = \frac{\alpha Q^2}{g},$$

и знаменатель выражения (10.8) стремится к нулю, а следовательно, $\frac{dh}{dl} \rightarrow \infty$. Это означает, что кривая свободной поверхности стремится подойти к линии критических глубин перпендикулярно.

Результаты исследований на натуральных потоках показывают, что на самом деле в этом случае кривая свободной поверхности подходит к линии критических глубин не перпендикулярно, а под достаточно крутым углом (рис. 10.11б). Это обстоятельство объясняется тем, что в области глубин, близких к критической, существенна кривизна потока и не выполняется условие плавной изменяемости движения. В этом случае уравнение Бернулли и вытекающее из него уравнение (10.8) не в полной мере соответствуют условиям движения воды.

При больших глубинах, т. е. при $h \rightarrow \infty$, будет $K \rightarrow \infty$ и $\frac{\omega^3}{B} \rightarrow \infty$ (см. рис. 10.8).

Тогда из уравнения (10.8) имеем

$$\frac{dh}{dl} = I_0 \frac{1-0}{1-0} = I_0.$$

Так как и уклон дна равен I_0 , то в этом случае свободная поверхность стремится стать горизонтальной. Обычно такая ситуация наблюдается в водохранилищах, прудах и других водоемах с большими глубинами.

Таким образом, при неравномерном движении кривые свободной поверхности подходят асимптотически к линии нормальных глубин, под крутым углом к линии критических глубин и при больших глубинах линии свободной поверхности стремятся стать горизонтальными.

При этих общих особенностях в зависимости от уклона дна I_0 и соотношения глубины неравномерного движения h , нормальной глубины h_0 и критической глубины $h_{кр}$ возникают различные формы кривых свободной поверхности.

10.4.2. УКЛОН ДНА МЕНЬШЕ КРИТИЧЕСКОГО

В случае, когда уклон дна меньше критического $I_0 < I_{0кр}$, нормальная глубина будет больше критической — $h_0 > h_{кр}$ (рис. 10.12). Это означает, что линия нормальных глубин $H-H$ проходит выше линии критических глубин $K-K$. Неравномерное движение при этом может устанавливаться в трех зонах:

- зона a — при $h > h_0$;
- зона b — при $h_0 > h > h_{кр}$;
- зона c — при $h < h_{кр}$.

Рассмотрим особенности линий свободной поверхности в каждой из этих зон.

Зона a

В этой зоне $h > h_0$, а значит (см. рис. 10.5), $K > K_0$. Кроме того, $h > h_{кр}$ и, значит (см. рис. 10.8), $\frac{\omega^3}{B} > \frac{\alpha Q^2}{g}$.

Следовательно, и числитель, и знаменатель производной $\frac{dh}{dl}$ в формуле (10.8) положительны, положительна и сама производная, т. е. $\frac{dh}{dl} > 0$. Это означает, что глубина

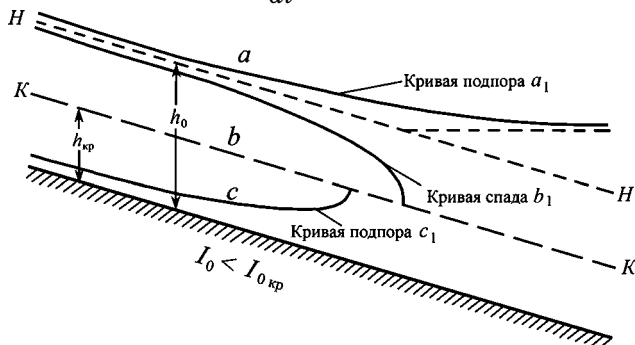


Рис. 10.12

потока вдоль движения возрастает. В зоне a глубина может изменяться от нормальной глубины h_0 до теоретически бесконечно большой. Вверх по потоку кривая свободной поверхности асимптотически приближается к линии нормальных глубин, т. е. к линии свободной поверхности равномерного потока. Вниз по течению линия свободной поверхности стремится к горизонтальной прямой и большим глубинам. Она имеет вогнутую форму. Такие кривые называются *кривой подпора типа a_1* . Такую форму имеют кривые свободной поверхности перед плотиной или другой преградой в русле (рис. 10.1а).

Зона b

В этой зоне $h < h_0$, а значит $K < K_0$. Но $h > h_{кр}$, следовательно, $\frac{\omega^3}{B} > \frac{\alpha Q^2}{g}$. Тогда производная $\frac{dh}{dl} < 0$, т. е. глубина потока вдоль движения уменьшается от нормальной до критической. Вверх по течению кривая асимптотически сближается с линией нормальных глубин, а вниз по течению она подходит к линии критических глубин под углом, близким к прямому. Кривая свободной поверхности в этом случае имеет выпуклую форму и называется *кривой спада типа b_1* . Такую форму свободной поверхности может иметь поток перед уступом или перепадом в дне русла (рис. 10.1б).

Зона c

В этом случае $h < h_{кр} < h_0$ и $K < K_0$. Кроме того, в этой зоне $\frac{\omega^3}{B} < \frac{\alpha Q^2}{g}$. В соответствии с уравнением (10.8) производная $\frac{dh}{dl} > 0$. Следовательно, глубина вдоль течения возрастает от какой-то начальной глубины h вверху по течению до критической глубины. Кривая свободной поверхности подходит к линии критической глубины под углом, близким к прямому, имеет вогнутый характер и называется *кривой подпора типа c_1* . Такая линия поверхности может устанавливаться непосредственно за плотиной или щитом (рис. 10.1в). При падении воды с высоты в потоке устанавливаются большие скорости и малые глубины, которые возрастают при дальнейшем движении воды.

Заметим, что в случае, когда в потоке за плотиной на некотором расстоянии устанавливается равномерное движение, переход к нему в плавноизменяющемся режиме невозможен. Действительно, глубина потока должна увеличиться от малого значения h до критической глубины $h_{кр}$ (в зоне c), а затем — до нормальной глубины h_0 в зоне b . Но в зоне b , согласно уравнению (10.8) и вышеизложенным рассуждениям, при плавноизменяющемся режиме течения устанавливается только кривая спада и глубина повышаться не может. В этом случае возможен не плавный, а резкий скачкообразный переход от бурного состояния потока к спокойному; такой переход называется *гидравлическим прыжком*.

10.4.3. УКЛОН ДНА БОЛЬШЕ КРИТИЧЕСКОГО

При уклоне дна больше критического $I_0 > I_{0кр}$ линия нормальных глубин проходит ниже линии критических глубин (рис. 10.13).

Здесь также возникают три зоны течения. Рассмотрим особенности движения в них.

Зона а. В этой зоне $h > h_{кр} > h_0$, а $K > K_0$ и $\frac{\omega^3}{B} > \frac{\alpha Q^2}{g}$.

Тогда из уравнения (10.8) следует, что производная $\frac{dh}{dl}$ положительна, следовательно, глубина вдоль движения возрастает. Вверх по течению линия свободной поверхности

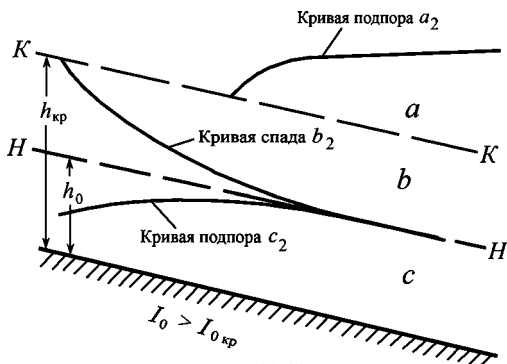


Рис. 10.13

подходит под углом, близким к прямому, к линии критических глубин, а вниз по потоку она стремится стать горизонтальной при больших глубинах. Такая выпуклая кривая называется *кривой подпора типа a_2* .

Зона b. При этом $h < h_{кр}$, а $\frac{\omega^3}{B} < \frac{\alpha Q^2}{g}$, кроме того, $h > h_0$, а $K > K_0$. Производная $\frac{dh}{dl}$ будет отрицательной, т. е. кривая свободной поверхности понижается вдоль движения.

Кривая имеет вогнутую форму и называется *кривой спада типа b_2* . Такая линия свободной поверхности может устанавливаться после изменения уклона русла со значения меньшего критического к уклону, больше критического (рис. 10.14).

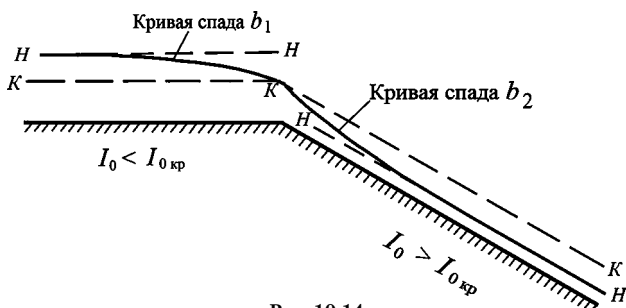


Рис. 10.14

Зона c. В этом случае $h < h_0 < h_{кр}$, $K < K_0$ и $\frac{\omega^3}{B} < \frac{\alpha Q^2}{g}$. Из уравнения (10.8) следует, что производная $\frac{dh}{dl}$ будет положительной, следовательно, глубины будут повышаться вдоль течения, асимптотически приближаясь к значе-

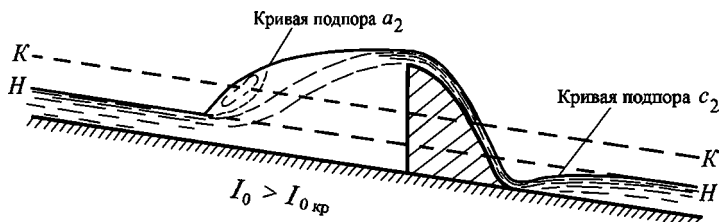


Рис. 10.15

нию нормальной глубины h_0 . Кривая свободной поверхности в этом случае называется *кривой подпора типа c_2* . На рисунке 10.15 показаны кривые свободной поверхности перед плотиной и после нее при уклоне дна русла более критического, $I_0 > I_{0\text{кр}}$. В этом случае перед плотиной возникает гидравлический прыжок, за ним устанавливается кривая подпора типа a_2 , а после плотины — кривая подпора типа c_2 .

10.4.4. УКЛОН ДНА РАВЕН КРИТИЧЕСКОМУ

При уклоне дна, равном критическому $I_0 = I_{0\text{кр}}$, линия нормальных глубин совпадает с линией критических глубин, зона b исчезает и неравномерное движение может происходить только в двух зонах — a и c (рис. 10.16). Анализ уравнения (10.8) в этом случае показывает, что в обеих зонах производная $\frac{dh}{dl}$ будет положительной и глубины

будут возрастать вдоль течения. В зоне a установится *кривая подпора типа a_3* , а в зоне c — *кривая подпора типа c_3* .

Анализ формы и направления выпуклости этих кривых в общем случае затруднен. Однако оценить форму и выпуклость кривых в случае $I_0 = I_{0\text{кр}}$ можно из следующих соображений. При уклоне дна меньше критического, $I_0 < I_{0\text{кр}}$, в зонах a и c устанавливаются вогнутые кривые подпора (см. рис. 10.12). При уклоне дна больше критического, $I_0 > I_{0\text{кр}}$, в тех же зонах устанавливаются выпуклые кривые подпора (см. рис. 10.13).

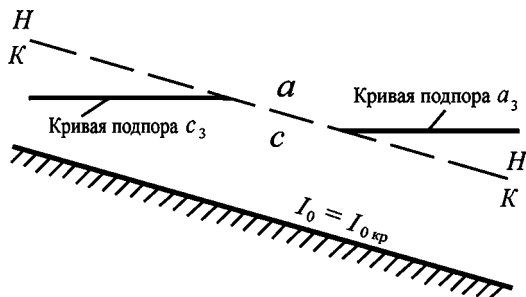


Рис. 10.16

При увеличении уклона от менее критического до более критического вогнутые кривые подпора переходят в выпуклые. Промежуточной формой этих кривых при $I_0 = I_{0\text{кр}}$ будут прямые линии. Расчеты для частных случаев (например, для широкого прямоугольного русла) и опытные данные подтверждают, что линиями свободной поверхности при уклоне дна, равном критическому, являются прямые линии, близкие к горизонтальным и плавно сопрягающиеся с линией критических глубин.

Пример такого течения возникает в канале, если после участка с уклоном, большим критического, $I_0 > I_{0\text{кр}}$, будет участок с уклоном, меньшим критического, $I_0 < I_{0\text{кр}}$. Когда эти два участка следуют непосредственно друг за другом, то переход от бурного состояния потока к спокойному возможен только с помощью гидравлического прыжка (рис. 10.17а). Если же между этими участками вставить участок с уклоном, равным критическому, $I_0 = I_{0\text{кр}}$, то установится беспрыжковое сопряжение бурного и спокойного состояния потока (рис. 10.17б).

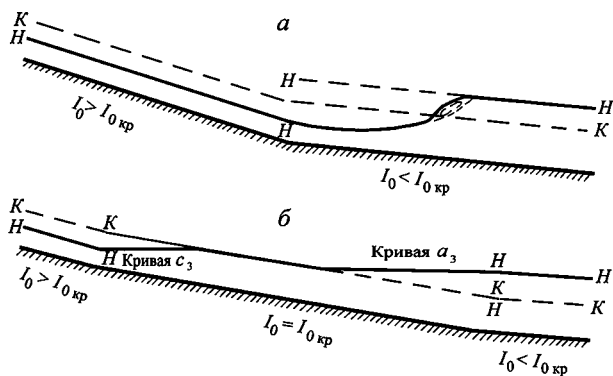


Рис. 10.17

10.4.5. УКЛОН ДНА РАВЕН НУЛЮ

В горизонтальном канале (при $I_0 = 0$) не может быть равномерного движения и, следовательно, не может быть нормальной глубины. Неравномерное движение происходит в двух зонах — b и c (рис. 10.18).

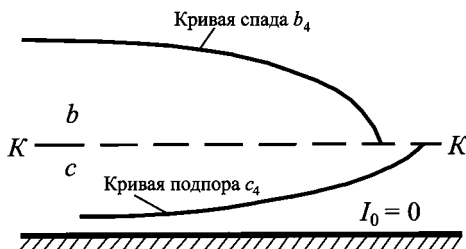


Рис. 10.18

Зона *b*. При $h > h_{кр}$ будет $\frac{\omega^3}{B} > \frac{\alpha Q^2}{g}$, и производная $\frac{dh}{dl}$ из уравнения (10.8) получается отрицательной.

То есть глубины в этом случае понижаются вдоль движения, и в русле устанавливается *кривая спада типа b_4* . Вверх по течению кривая b_4 асимптотически приближается к горизонтальной линии. Такое течение (рис. 10.19) устанавливается, например, если между двумя участками канала с уклонами $I_0^{(1)}$ и $I_0^{(2)}$, меньшими критического, и при этом уклон нижнего участка больше уклона верхнего $I_0^{(1)} < I_0^{(2)}$, устанавливается промежуточный горизонтальный участок с $I_0 = 0$.

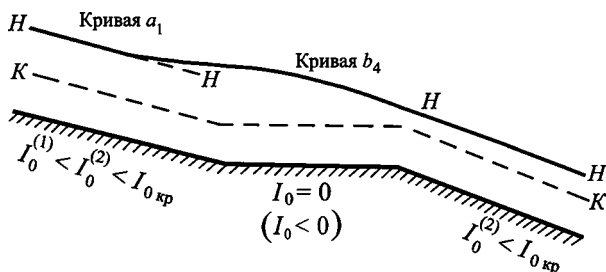


Рис. 10.19

Зона *c*. При $h < h_{кр}$ имеем $\frac{\omega^3}{B} < \frac{\alpha Q^2}{g}$, и производная $\frac{dh}{dl}$ будет положительной. Следовательно, в зоне *c* устанавливается *кривая подпора типа c_4* . Такая кривая, например, устанавливается при истечении из-под шита в горизонтальный канал.

10.4.6. ОБРАТНЫЙ УКЛОН ДНА

В случае если русло имеет обратный уклон, $I_0 < 0$, то, как и в предыдущем случае, при движении потока не может быть нормальной глубины и неравномерное движение рассматривается в двух зонах — b и c (рис. 10.20).

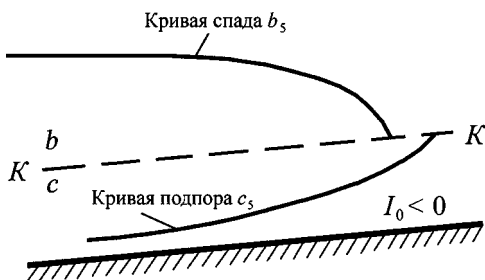


Рис. 10.20

Зона b . При $h > h_{кр}$ будет $\frac{\omega^3}{B} > \frac{\alpha Q^2}{g}$, а так как $I_0 < 0$, то производная $\frac{dh}{dl}$ в соответствии с уравнением (10.8) получается отрицательной, и в этой зоне устанавливается кривая спада типа b_5 .

Как и кривая спада типа b_4 , такая кривая вверх по течению имеет горизонтальную асимптоту. Кривая спада типа b_5 устанавливается по аналогии с кривой типа b_4 , если между участками канала с уклонами $I_0^{(1)} < I_{0\text{кр}}$ и $I_0^{(2)} < I_{0\text{кр}}$ при $I_0^{(1)} < I_0^{(2)}$ находится промежуточный участок с уклоном $I_0 < 0$ (см. рис. 10.19). Кроме того, такая кривая свободной поверхности устанавливается перед перепадом при обратном уклоне подводящего русла (рис. 10.21).

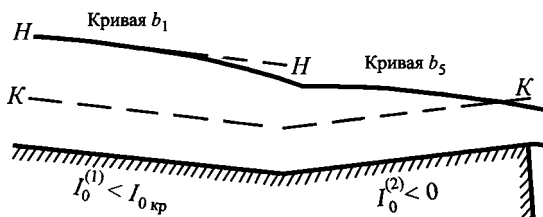


Рис. 10.21

Зона с. В этой зоне, как нетрудно убедиться, производная $\frac{dh}{dt}$ положительна, и в канале устанавливается кривая подпора типа c_5 . Такая кривая имеет место, например, если между участками с уклонами $I_0^{(1)} > I_{0\text{кр}}$ и $I_0^{(2)} > I_{0\text{кр}}$ при $I_0^{(1)} > I_0^{(2)}$ устанавливается промежуточный участок с уклоном $I_0 < 0$ (рис. 10.22).



Рис. 10.22

10.4.7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Исследуя с помощью уравнения (10.8) случаи неравномерного движения воды в цилиндрических и призматических руслах, мы получили двенадцать форм кривых свободной поверхности.

Следует отметить и запомнить, что кривые свободной поверхности всегда подходят к линии нормальной глубины $H-H$ асимптотически, а к линии критической глубины $K-K$ — имея вертикальную (или близкую к ней) касательную.

Заметим также, что кривая свободной поверхности данной формы никогда не пересекает линий критической глубины $K-K$ и нормальной глубины $H-H$.

Величина удельной энергии сечения $\mathcal{E}$ увеличивается по течению для тех кривых, которые удаляются от линии $K-K$, и уменьшается по течению для тех кривых, которые приближаются к линии $K-K$.

10.5. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для построения кривой свободной поверхности предварительно необходимо на основании вышеизложенных положений установить форму этой кривой. Необходимо также выбрать исходное сечение для построения. Исходным

должно быть сечение, глубина в котором известна или может быть определена. Таким сечением может быть сечение с критической глубиной перед перепадом или сечение при изменении уклона дна русла. За исходное может приниматься сечение непосредственно перед сооружением или за ним, в этом случае глубина определяется специальными расчетами. За исходное нельзя принимать сечение с нормальной глубиной при асимптотическом приближении к ней кривой свободной поверхности, так как асимптота подходит к кривой только в бесконечности.

После выбора исходного сечения и определения формы кривой свободной поверхности определяются количественные характеристики этой кривой, т. е. устанавливается зависимость $h = f(l)$, где l — расстояние от исходного сечения. В зависимости от положения исходного сечения на кривой свободной поверхности расстояние l может откладываться от исходного сечения как вниз по течению, так и против течения.

Для расчета зависимости $h = f(l)$ необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение неравномерного движения в форме (10.4), (10.7) или (10.8). Точных методов интегрирования этих уравнений нет, есть несколько приближенных подходов к построению кривых свободной поверхности. При выборе подходов к решению отдают предпочтение способам, обеспечивающим, с одной стороны, достаточную точность, а с другой стороны, простоту выполнения практических расчетов. Рассмотрим один из таких способов, предложенный Б. А. Бахметьевым.

10.5.1. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ РУСЛА

В уравнения неравномерного движения (10.7) или (10.8) входит отношение модулей расхода $\frac{K_0^2}{K^2}$. Это отношение является достаточно сложной функцией глубины, поскольку

$$K = \omega C \sqrt{R}, \quad (10.9)$$

а величины ω , C и R порой весьма сложно выражаются через h .

Для облегчения решения задачи Б. А. Бахметьев предложил считать, что связь между K и h устанавливается показательной зависимостью

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^x, \quad (10.10)$$

где h_1 и h_2 — две произвольные глубины, взятые для рассматриваемого поперечного сечения русла, а K_1 и K_2 — модули расхода, отвечающие этим глубинам.

Показатель степени x принимается постоянным для данного русла и не зависящим от величины глубин h_1 и h_2 . Величина x называется *гидравлическим показателем русла*.

Гидравлический показатель русла может быть определен из равенства (10.10) как

$$x = \frac{2\lg K_1 - 2\lg K_2}{\lg h_1 - \lg h_2}. \quad (10.11)$$

Оказывается, что для некоторых русел зависимость (10.10) в точности совпадает с зависимостью (10.9), для других русел зависимость (10.10) является приближенной, т. е. она приближенно описывает зависимость (10.9), а для некоторых русел зависимость (10.10) вообще не применима, она не соответствует реальной картине течения.

Рассмотрим эти случаи.

1. Русла, для которых зависимость (10.10) является точной.

Для таких русел величина x не зависит от глубины, т. е. $x = \text{const}$.

К таким руслам относятся:

- весьма узкие прямоугольные ($x = 2,0$);
- широкие прямоугольные ($x = 3,4$);
- узкие параболические ($x = 3,7$);
- широкие параболические ($x = 4,4$);
- треугольные ($x = 5,4$).

2. Русла, для которых зависимость (10.10) является приближенной.

Сюда относятся русла:

- прямоугольные и параболические (кроме широких и узких);

- трапецеидальные;
- близкие по очертанию к названным.

Для таких русел при $I_0 > 0$ величину x можно определить по формуле

$$x = \frac{2 \lg K_{\text{cp}} - 2 \lg K_0}{\lg h_{\text{cp}} - \lg h_0},$$

где h_{cp} — средняя глубина на данном участке потока; K_{cp} — модуль расхода, отвечающий этой глубине.

Кроме того, в этом случае величину x можно определить по формулам Р. Р. Чугаева:

- для прямоугольного русла

$$x = 3,4 - \frac{2,8}{\frac{b}{h} + 2};$$

- для трапецеидального русла

$$x = 3,4 \left(1 + \frac{m}{\frac{b}{h_{\text{cp}}} + m} \right) - 1,4 \frac{m'}{\frac{b}{h_{\text{cp}}} + m'},$$

где b — ширина русла по дну; m — коэффициент откоса, $m' = 2\sqrt{1+m^2}$.

3. Русла, для которых зависимость (10.10) явно неприменима.

К этой категории относятся русла:

- имеющие замкнутый профиль;
- составные;
- некоторые правильные русла, для которых гидравлический показатель x зависит от величины наполнения, примеры таких русел приведены на рисунке 10.23.

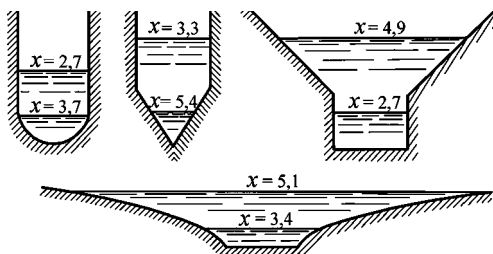


Рис. 10.23

4. Русла, для которых неизвестно заранее, применима ли к ним зависимость (10.10).

Для того чтобы узнать, применима ли к какому-то руслу показательная зависимость (10.10), необходимо для русла выбранного сечения построить график, называемый *логарифмической анаморфозой*.

По вертикальной оси графика откладываются величины $\lg h$, по горизонтальной оси — величины $2\lg K$.

Пример графика приведен на рисунке 10.24. На графике нанесены две линии — I и II. Линия I построена по зависимости (10.9): задаваясь различными значениями h , вычисляем $\lg h$ и рассчитываем $2\lg K$. Эту линию можно назвать *линией Шези*. Линию II строим по показательной зависимости Б. А. Бахметьева (10.10), которую можно записать в виде

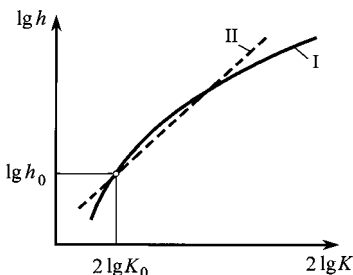


Рис. 10.24

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0}\right)^x, \quad (10.12)$$

где h — любая глубина; h_0 — нормальная глубина, определяемая по формуле Шези; K_0 — соответствующий ей модуль расхода.

Из равенства (10.12) получим

$$2\lg K = (2\lg K_0 - x\lg h_0) + x\lg h. \quad (10.13)$$

Чтобы русло соответствовало показательной зависимости, гидравлический показатель x должен быть величиной постоянной. Тогда уравнение (10.13) — это уравнение прямой линии, поскольку выражение в скобках при заданных русле и расходе является постоянной величиной. Назовем эту прямую *линией Бахметьева*.

Отметим, что и линия Шези, и прямая Бахметьева проходят через точку с координатами $\lg h_0$ и $2\lg K_0$. Если на графике логарифмической анаморфозы удастся провести прямую Бахметьева (подобрав соответствующий наклон)

так, чтобы она располагалась достаточно близко к линии Шези, то в этом случае для расчета русла можно считать приемлемой показательную зависимость (10.10). Очевидно, что это можно сделать, только если линия Шези сама будет близка к прямой. Если линия Шези обладает значительной кривизной, показательная зависимость неприемлема. Если же показательная зависимость оказывается приемлемой, то гидравлический показатель x определяется как тангенс угла наклона прямой Бахметьева к оси $2\lg K$.

Заметим, что для русел, перечисленных выше в п. 1, для которых зависимость (10.10) является точной, линия Шези является строгой прямой.

10.5.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ПО МЕТОДУ Б. А. БАХМЕТЬЕВА

Для построения кривой свободной поверхности проинтегрируем уравнение (10.8):

$$\frac{dh}{dl} = I_0 \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3}}.$$

Преобразуем знаменатель этого уравнения. Так как $Q^2 = K_0^2 I_0$, то получим

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 1 - \frac{\alpha B I_0}{g \omega} \frac{K_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\alpha I_0}{g} \frac{B K_0^2}{\omega} \frac{C^2 R}{\omega^2 C^2 R}.$$

Используя соотношения

$$K = \omega C \sqrt{R}; \quad \frac{\omega}{R} = \chi,$$

будем иметь

$$1 - \frac{\alpha I_0}{g} \frac{B K_0^2}{\omega} \frac{C^2 R}{\omega^2 C R} = 1 - \frac{\alpha I_0 C^2}{g} \frac{B}{\chi} \frac{K_0^2}{K^2}.$$

Обозначим

$$j = \frac{\alpha I_0 C^2}{g} \frac{B}{\chi}, \quad (10.14)$$

и знаменатель уравнения (10.8) примет вид

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 1 - j \frac{K_0^2}{K^2}.$$

Подставляя его в уравнение, получим

$$\frac{dh}{dl} = I_0 \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - j \frac{K_0^2}{K^2}}. \quad (10.15)$$

Используем показательную зависимость Б. А. Бахметьева в виде (10.12):

$$\left(\frac{K}{K_0} \right)^2 = \left(\frac{h}{h_0} \right)^x.$$

Введем обозначение

$$\frac{h}{h_0} = \eta,$$

величина η называется относительной глубиной.

Из этого соотношения получим

$$dh = h_0 d\eta.$$

Тогда уравнение (10.15) запишется в виде

$$\frac{I_0}{h_0} dl = \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} d\eta = \left(1 - 1 + \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} \right) d\eta = d\eta - \frac{1-j}{1-\eta^x} d\eta.$$

Проинтегрируем полученное уравнение вдоль потока от сечения 1-1 до сечения 2-2, расположенного на некотором расстоянии от сечения 1-1 вниз по потоку. Будем отмечать гидравлические элементы сечения 1-1 индексом 1, элементы сечения 2-2 — индексом 2. В результате получим

$$\frac{I_0}{h_0} (l_2 - l_1) = \eta_2 - \eta_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1-j}{1-\eta^x} d\eta.$$

Допустим, что величина j мало меняется с изменением глубины потока, специальные расчеты подтверждают это. Тогда скобку $(1-j)$ можно вынести за знак интеграла, приняв среднее значение величины j на расчетном участке. Это среднее значение величины j_{cp} можно вычислить по формуле

$$j_{\text{ср}} = \frac{j_1 + j_2}{2},$$

где j_1 и j_2 рассчитываются по формуле (10.14) соответственно для глубин h_1 и h_2 .

Величину $j_{\text{ср}}$ можно также рассчитать по формуле (10.14):

$$j_{\text{ср}} = \frac{\alpha I_0 C_{\text{ср}}^2}{g} \frac{B_{\text{ср}}}{\chi_{\text{ср}}},$$

где величины $C_{\text{ср}}$, $B_{\text{ср}}$ и $\chi_{\text{ср}}$ вычисляются для глубины

$$h_{\text{ср}} = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Тогда интегрируемое уравнение можно записать как

$$\frac{I_0}{h_0} (l_2 - l_1) = \eta_2 - \eta_1 - (1 - j_{\text{ср}}) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1 - \eta^x}.$$

Так как мы считаем для данного русла величину гидравлического показателя x постоянной, то подынтегральная функция этого уравнения зависит только от η . Введем обозначение

$$\int \frac{d\eta}{1 - \eta^x} = B(\eta) + C,$$

где C — произвольная константа интегрирования.

Тогда окончательно получим уравнение кривой свободной поверхности в виде

$$\frac{I_0}{h_0} (l_2 - l_1) = \eta_2 - \eta_1 - (1 - j_{\text{ср}}) [B(\eta_2) - B(\eta_1)]. \quad (10.16)$$

Уравнение (10.16) называется уравнением Бахметьева для случая $I_0 > 0$.

Функции $B(\eta)$ для различных значений η и x вычислены и занесены в таблицы. Установив величину гидравлического показателя x для исследуемого русла, по таким таблицам можно определить значения функций $B(\eta_1)$ и $B(\eta_2)$ для предварительно вычисленных η_1 и η_2 .

Пользуясь уравнением (10.16), можно решать следующие практические задачи:

- задана глубина h_1 (или h_2), требуется определить глубину h_2 (или h_1) в сечении потока, расположенном на расстоянии $(l_2 - l_1)$ от первого сечения;

- заданы две глубины в разных сечениях: h_1 и h_2 , требуется определить расстояние ($l_2 - l_1$) между этими сечениями;
- задана глубина h_1 в некотором сечении, требуется построить кривую свободной поверхности.

Метод Б. А. Бахметьева, использующий показательную зависимость между глубинами и модулями расхода потока, можно применять и для расчета движения воды в русле с горизонтальным уклоном ($I_0 = 0$) и в русле с обратным уклоном ($I_0 < 0$).

Для течения в горизонтальном русле показательная зависимость записывается в виде

$$\left(\frac{K}{K_{кр}} \right)^2 = \left(\frac{h}{h_{кр}} \right)^x, \quad (10.17)$$

в котором действительные элементы потока h и K относятся к критическим элементам $h_{кр}$ и $K_{кр}$.

Для русел с обратным уклоном показательную зависимость запишем так:

$$\left(\frac{K}{K'_0} \right)^2 = \left(\frac{h}{h'_0} \right)^x, \quad (10.18)$$

где K'_0 — модуль расхода, отвечающий некоторой воображаемой нормальной глубине h'_0 , которая получается, если представить, что при заданном расходе Q вода движется *по уклону*, т. е. в обратную сторону относительно действительного течения, причем в русле установился равномерный режим.

Используя зависимости (10.17) или (10.18) и проведя преобразования, аналогичные вышеизложенным, получаем уравнения Б. А. Бахметьева для случаев горизонтального русла и русла с обратным уклоном.

10.5.3. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

Движение воды в естественных руслах всегда осуществляется в неравномерном режиме. Неравномерность движения обуславливается тем, что естественные водотоки характеризуются неправильной геометрической формой

поперечных сечений, извилистостью в плане, изменяемостью уклона по длине и шероховатости по длине и глубине потока. При проектировании плотин на реках, расчистке естественных русел необходимо строить кривые свободной поверхности потока. Как правило, полученные выше дифференциальные уравнения неравномерного движения воды в случае естественных русел точно проинтегрировать не удастся. Поэтому применяют различные приближенные методы расчета.

Для получения решения необходимо иметь исходные данные, определяющие:

- формы поперечных и продольных профилей русла;
- коэффициенты шероховатости русла;
- ожидаемые расходы.

Для построения кривых свободной поверхности потока рассматриваемое русло разбивают на отдельные расчетные участки с примерно однообразным характером дна и берегов, его поперечных сечений, шероховатости и уклонов. Длина таких расчетных участков может быть различной, иногда достигая нескольких километров.

Как правило, задача расчета состоит в том, чтобы определить отметку горизонта воды в начале расчетного участка, если отметка горизонта в конце его, а также расход — заданы. Для решения таких задач можно применять два метода.

Первый метод заключается в том, что действительное естественное русло в пределах расчетного участка заменяется некоторым воображаемым цилиндрическим руслом, близким по сечению к естественному. Для такого цилиндрического русла по методикам, изложенным выше, производится расчет искомых отметок уровня воды в начале расчетного участка.

Второй метод заключается в отыскании более или менее точных решений дифференциальных уравнений неравномерного движения воды в пределах расчетного участка: с использованием упрощений, численных или графических способов.

Первый метод используется для предварительных расчетов при эскизном проектировании и т. п. Второй метод

является более точным, однако требует значительно больших расчетных усилий.

Один из простых способов приближенного расчета линии свободной поверхности естественных потоков предложен К. В. Гришаниным.

После разбиения рассматриваемого русла на более или менее однообразные участки для всех сечений, разделяющих участки, строятся кривые зависимости расходной характеристики от глубины, аналогичные приведенным на рисунке 10.6. Затем, имея известной отметку свободной поверхности h_{n+1} в сечении $(n+1)$, задаются некоторой ориентировочной величиной падения $\Delta h'$ и определяют ориентировочную отметку

$$h'_n = h_{n+1} + \Delta h'.$$

По выбранным значениям h'_n и h_{n+1} находятся величины расходных характеристик K_n и K_{n+1} и вычисляется значение $K_{\text{ср}}$:

$$K_{\text{ср}} = \frac{K_n + K_{n+1}}{2}.$$

Затем из соотношения

$$I = \frac{\Delta h}{\Delta l} = \frac{Q^2}{K_{\text{ср}}^2}$$

определяется

$$\Delta h = \frac{Q^2}{K_{\text{ср}}^2} \Delta l.$$

Если полученная величина Δh оказывается равной первоначально предположенному падению $\Delta h'$, расчет для данного участка закончен. В противном случае задаются новой величиной падения $\Delta h''$, и расчет повторяется до тех пор, пока предполагаемая и вычисляемая величины падения не совпадут. Затем переходят к следующему участку.

ГЛАВА 11

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК

11.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ

Гидравлическим прыжком называется скачкообразный переход от бурного состояния потока к спокойному. Так как глубина спокойного потока всегда больше глубины бурного, то внешне гидравлический прыжок выражается во внезапном подъеме свободной поверхности. При этом происходит переход от глубин потока меньше критических к глубинам больше критических. Общая схема гидравлического прыжка показана на рисунке 11.1.

Глубина h_1 бурного потока перед прыжком и глубина h_2 спокойного потока после прыжка называются *сопряженными глубинами прыжка*. Разность этих глубин

$$a = h_2 - h_1$$

называется *высотой прыжка*, расстояние $l_{\text{пр}}$ между сечениями с глубинами h_1 и h_2 называется *длиной прыжка*.



Рис. 11.1

Прыжок возникает всегда, когда при увеличении глубин свободная поверхность пересекает линию критических глубин $K-K$ (рис. 11.1).

Характер движения жидкости в пределах гидравлического прыжка следующий.

В потоке между сечениями с бурным течением (глубиной h_1) и со спокойным течением (глубиной h_2) возникает как бы *поверхность раздела*. Ниже этой поверхности *транзитная струя* резко расширяется от глубины h_1 до глубины h_2 , выше поверхности раздела образуется *поверхностный валец*. Движение в вальце имеет сложный характер, он представляет собой водоворотную область с весьма неупорядоченным течением. В поверхностной части вальца преобладает движение частиц жидкости в направлении, обратном основному течению. В зоне раздела между вальцом и основным потоком частицы жидкости движутся в направлении движения основного потока. Валец и основной поток все время обмениваются между собой массами жидкости: в начале прыжка идет захват основным потоком масс жидкости из вальца, в конце прыжка жидкость из основного потока поступает в валец. Движение жидкости на участке прыжка носит пульсирующий неустановившийся характер — валец то сдвигается вниз по течению, то перемещается вверх. Верхняя поверхность вальца получается неровной, волнообразной. Валец насыщен пузырьками воздуха.

Непосредственно за прыжком находится *послепрыжковый участок* потока. Сразу за прыжком распределение осредненных скоростей по глубине потока имеет некоторые особенности: скорость в верхней точке живого сечения близка к нулю, придонные скорости значительны (рис. 11.1). Прыжок способствует резкому увеличению пульсаций скорости и давления в турбулентном потоке, поэтому поток за прыжком характеризуется интенсивной турбулентностью. На протяжении послепрыжкового участка происходит затухание пульсаций до величин, характерных для равномерного течения, в конце участка распределение скоростей принимает вид, также характерный для равномерного течения.

Для оценки длины прыжка $l_{\text{пр}}$ и длины послепрыжкового участка $l_{\text{пп}}$ используются различные эмпирические формулы, выражающие эти длины через глубины в русле. На практике обычно пользуются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} l_{\text{пр}} &= 6(h_2 - h_1); \\ l_{\text{пп}} &= (10-30)h_2. \end{aligned}$$

Иногда используют формулу Н. Д. Чертоусова

$$l_{\text{пп}} = (2,5-3)l_{\text{пр}}.$$

Гидравлический прыжок вызывает весьма резкие изменения в конфигурации потока и условиях его протекания, в гидравлическом прыжке происходят значительные потери энергии. При этом, в зависимости от параметров прыжка, величина местных потерь энергии может быть различной. Это обстоятельство затрудняет использование для расчетов параметров прыжка уравнения Бернулли, при решении которого необходимо знать величину потерь энергии.

11.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЫЖКА

Для решения многих задач гидравлики необходимо установить связь между сопряженными глубинами прыжка h_1 и h_2 . При выводе уравнения, связывающего эти величины, используем закон изменения количества движения для отсека жидкости, находящегося между сечениями 1-1 и 2-2 (рис. 11.2). Согласно этому закону, изменение количества движения рассматриваемого объема жидкости за малый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на отсек жидкости:

$$d(mv) = \sum (Rdt).$$

Уравнение составим в проекциях на направление движения.

Так как прыжок имеет относительно малую длину, то при выводе уравнения используем следующие допущения:

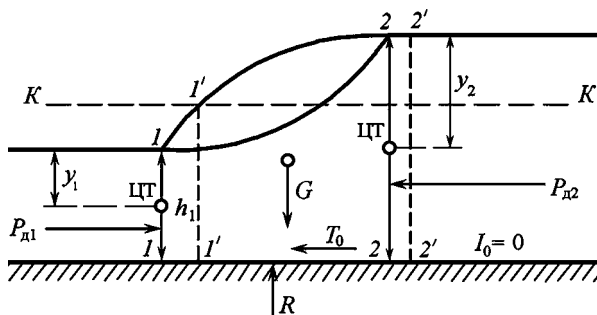


Рис. 11.2

- русло, в котором возникает гидравлический прыжок, считаем достаточно длинным и цилиндрическим, имеющим прямоугольное или близкое к нему сечение;
- уклоном дна русла в пределах прыжка можно пренебречь, считаем, что дно русла в пределах прыжка горизонтально, т. е. $I_0 = 0$;
- силы трения на стенках русла в пределах прыжка малы, и ими можно пренебречь;
- движение жидкости в сечениях 1-1 и 2-2 плавноизменяющееся, и давление в этих сечениях распределяется по гидростатическому закону;
- коэффициенты количества движения в сечениях равны между собой: $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha_0$.

Отсек жидкости, находившийся в начальный момент времени между сечениями 1-1 и 2-2, за малый промежуток времени переместится в положение между сечениями 1'-1' и 2'-2'. Из рисунка 11.2 видно, что количество движения объема жидкости, заключенного между сечениями 1'-1' и 2-2, за это время не изменилось. Таким образом, изменение количества движения всего начального отсека определится как разность количества движения отсека 2'-2' — 2-2 и отсека 1'-1' — 1-1.

Количество движения отсека 2'-2' — 2-2 определим как

$$m_2 \alpha_0 v_2 = \rho V_2 \alpha_0 v_2 = \rho v_2 dt \omega_2 \alpha_0 v_2 = \rho \alpha_0 v_2^2 \omega_2 dt.$$

Величина V_2 объема отсека 2'-2' — 2-2 здесь рассчитана как произведение образующей цилиндра $v_2 dt$ на площадь поперечного сечения ω_2 .

Количество движения отсека $1'-1' - 1-1$ определится аналогично:

$$m_1 \alpha_0 v_1 = \rho \alpha_0 v_1^2 \omega_1 dt.$$

Определим теперь проекции на направление движения всех сил, действующих на выделенный объем жидкости. На этот объем действуют следующие силы:

- вес объема жидкости, G ;
- сила реакции дна русла, R ;
- сила реакции боковых стенок русла, $R_{\text{бок}}$;
- силы трения, распределенные по поверхности дна и стенок, T_0 ;
- сила давления $P_{\text{д1}}$ со стороны жидкости, находящейся выше по течению от сечения $1-1$;
- сила давления $P_{\text{д2}}$ со стороны жидкости, находящейся ниже по течению от сечения $2-2$.

В соответствии с вышеприведенными допущениями, силами трения мы условились пренебречь. Вес объема жидкости и силы реакции дна и боковых стенок не дают проекций на направление движения, так как они перпендикулярны этому направлению. Таким образом, следует учесть лишь параллельные направлению движения силы давления. Мы приняли движение в сечениях $1-1$ и $2-2$ плавноизменяющимся и распределение давления в них гидростатическим. Это значит, что сила давления равна произведению площади сечения потока на давление в центре тяжести сечения. Таким образом, силы давления выразятся как

$$P_{\text{д1}} - P_{\text{д2}} = p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2 = \rho g y_1 \omega_1 - \rho g y_2 \omega_2,$$

где y_1 и y_2 — заглубление под уровнем поверхности жидкости центров тяжести соответствующих сечений.

Объединяя полученные выражения в закон изменения количества движения для отсека жидкости, получим

$$\rho \alpha_0 v_2^2 \omega_2 dt - \rho \alpha_0 v_1^2 \omega_1 dt = (\rho g y_1 \omega_1 - \rho g y_2 \omega_2) dt.$$

Учитывая, что $v = Q/\omega$, и приводя подобные члены, окончательно получим

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_1} + y_1 \omega_1 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_2} + y_2 \omega_2. \quad (11.1)$$

Это уравнение называется *основным уравнением гидравлического прыжка*. Из него следует, что если заданы расход и форма русла, то левая часть уравнения (11.1) зависит только от глубины h_1 , а правая — только от глубины h_2 . Поэтому вводят обозначение

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega} + y\omega = \Pi(h), \quad (11.2)$$

где h — глубина в данном сечении; ω и y — площадь сечения и заглублиение центра тяжести, соответствующие этой глубине.

Функцию $\Pi(h)$ называют *прыжковой функцией*. Тогда основное уравнение прыжка (11.1) можно записать в следующем виде:

$$\Pi(h_1) = \Pi(h_2),$$

т. е. прыжковые функции для сопряженных глубин равны между собой.

Из формулы (11.2) видно, что прыжковая функция стремится к бесконечности при $h \rightarrow 0$ (т. е. при $\omega \rightarrow 0$) и при $h \rightarrow \infty$ (при $\omega \rightarrow \infty$). Это значит, что прыжковая функция имеет минимум. Глубину, соответствующую минимуму прыжковой функции, можно найти, взяв производную этой функции и приравняв ее нулю. Оказывается, что минимум прыжковой функции соответствует критической глубине. График прыжковой функции приведен на рисунке 11.3. Пользуясь этим графиком, можно по заданной глубине h_1 найти глубину h_2 и, наоборот, по известной глубине h_2 найти глубину h_1 (пример приведен на рисунке).

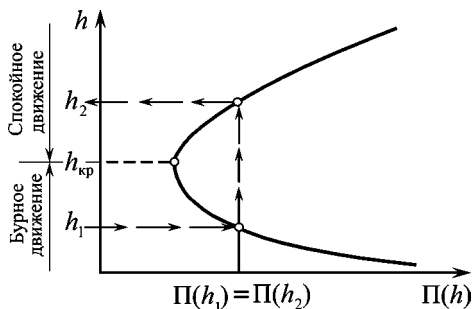


Рис. 11.3

Заметим, что зависимость удельной энергии сечения от глубины (см. рис. 10.7) имеет характер, схожий с зависимостью от глубины прыжковой функции, с минимумом при критической глубине.

Если зависимость от глубины h прыжковой функции $\Pi(h)$ и удельной энергии сечения $\mathcal{E}$ построить на одном графике (рис. 11.4), можно оценить потери энергии в прыжке $\Delta\mathcal{E}$. Причинами потерь энергии в прыжке являются резкое уменьшение скорости, вращение жидкости в поверхностном вальце, пульсационные явления, вызывающие интенсивное перемешивание жидкости. И хотя пульсации скорости и давления не затухают непосредственно в зоне прыжка, а выносятся на послепрыжковый участок, условно принято считать, что потери энергии происходят в зоне прыжка между сечениями 1-1 и 2-2.

Потери энергии в прыжке при горизонтальном дне русла можно определить как

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2.$$

В соответствии с формулой (10.2) удельная энергия сечения

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}.$$

Тогда

$$\Delta\mathcal{E} = \left(h_1 + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega_1^2} \right) - \left(h_2 + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega_2^2} \right). \quad (11.3)$$

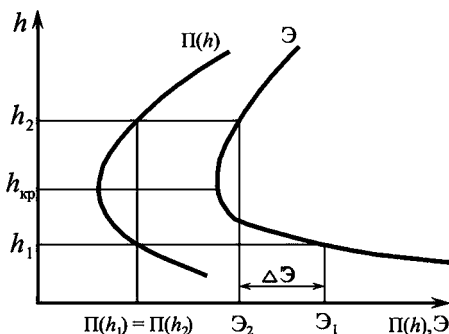


Рис. 11.4

Используя уравнение (11.1), можно получить явную зависимость сопряженных глубин прыжка друг от друга для случая широкого прямоугольного русла. Для прямоугольного русла справедливы соотношения

$$\omega = Bh, \quad y = \frac{h}{2},$$

где B — ширина сечения по верху.

Примем также значение $\alpha_0 \approx 1$ — для турбулентного движения.

Тогда, подставив все это в формулу (11.1), получим

$$\frac{Q^2}{gBh_1} + \frac{h_1}{2}Bh_1 = \frac{Q^2}{gBh_2} + \frac{h_2}{2}Bh_2.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{Q^2}{gB} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{B}{2} (h_2^2 - h_1^2),$$

$$\frac{2Q^2}{gB^2} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 - h_2} h_1 h_2.$$

Сократим числитель и знаменатель дроби в правой части уравнения на $(h_1 - h_2)$ и введем величину удельного расхода, т. е. расхода на единицу ширины потока

$$q = \frac{Q}{B}.$$

Тогда окончательно получим

$$\frac{2q^2}{g} = (h_1 + h_2) h_1 h_2. \quad (11.4)$$

Уравнение (11.4) и будет уравнением сопряженных глубин для русла прямоугольного поперечного сечения. Оно связывает между собой глубину до прыжка h_1 , глубину после прыжка h_2 и расход воды. Уравнение (11.4) является квадратным относительно h_1 и относительно h_2 . Решая его, получим формулы для вычисления сопряженных глубин:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_2^3}} - 1 \right];$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_1^3}} - 1 \right].$$

Потери энергии в прыжке для русла прямоугольного сечения получим с помощью формулы (11.3). Выразим из уравнения (11.4) величину q^2/g и подставим ее в формулу (11.3), учитывая также соотношения геометрических параметров для русла прямоугольного сечения. В результате получим

$$\Delta\mathcal{E} = h_1 - h_2 + \frac{q^2}{2gh_1^2} - \frac{q^2}{2gh_2^2} = h_1 - h_2 + \frac{1}{4}(h_1 + h_2)\left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1}{h_2}\right).$$

Выполнив операции приведения подобных членов, окончательно для русла прямоугольного сечения будем иметь

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2}.$$

11.3. ВИДЫ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРЫЖКОВ

Рассмотренный нами гидравлический прыжок, в котором над основной транзитной струей образуется область с водоворотным движением (поверхностный валец), называется *совершенным прыжком*. Такие прыжки возникают в случае, когда глубина перед прыжком (глубина бурного потока h_1) существенно меньше критической глубины для данного потока:

$$h_1 \leq 0,6h_{кр}.$$

При больших величинах h_1 , а именно при

$$0,6h_{кр} \leq h_1 \leq 0,7h_{кр},$$

получается *несовершенный прыжок*. При этом на поверхности возникает относительно небольшой валец, интенсивность турбулентности потока непосредственно за прыжком невелика.

В случае, когда

$$0,7h_{кр} \leq h_1 \leq 0,85h_{кр},$$

возникает *волнистый прыжок* в виде затухающих волн (рис. 11.5а).

В таком прыжке валец совсем не возникает, высота первой волны получается примерно в 1,5 раза больше вы-

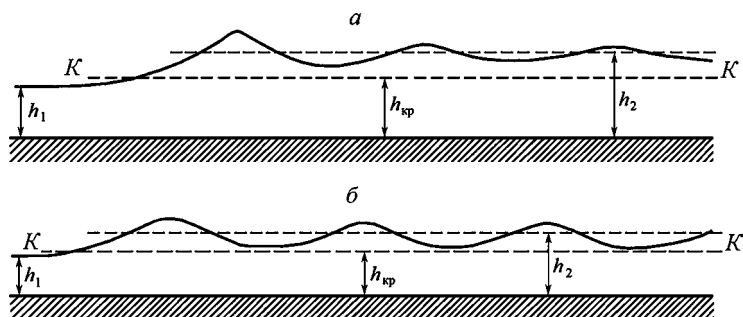


Рис. 11.5

соты h_2 , какая была бы у совершенного гидравлического прыжка, за первой волной следуют небольшие волны, затухающие на короткой длине, в конце этого ряда волн получается глубина, близкая к глубине h_2 для совершенного прыжка.

Если выполняется соотношение

$$0,85h_{кр} \leq h_1 \leq h_{кр},$$

прыжок имеет вид *периодических волн* (рис. 11.5б), т. е. последовательности волн, затухающих на относительно большой длине.

Все сказанное выше о видах прыжков относится к гидравлическим прыжкам, возникающим в руслах прямоугольного сечения с горизонтальным дном.

Для русел со значительным положительным уклоном ($I_0 > 0$) не удастся найти теоретическое уравнение прыжка, и используются эмпирические поправки к уравнению (11.1). Длина прыжка возрастает, ее можно оценить эмпирической формулой Г. Н. Косяковой

$$l_{пр}^i = l_{пр} (1 + kI_0),$$

где $l_{пр}^i$ — длина прыжка в русле с уклоном I_0 ; $l_{пр}$ — длина прыжка в горизонтальном русле; k — коэффициент, принимаемый по данным Г. Н. Косяковой $k = 3$ или по данным Г. К. Илчева $k = 3,75$.

В руслах трапецеидального сечения длину прыжка можно оценить по приближенной формуле Г. Я. Швец

$$l_{\text{пр}} = kh_2,$$

где коэффициент k определяется в зависимости от коэффициента заложения откосов m :

m	0	0,5	1,0	1,5	2,0
k	4,33	5,8	7,1	8,3	9,4

В практике, если русло потока имеет пространственные изгибы, могут возникать прыжки, фронт которых в плане не перпендикулярен оси потока. Такие прыжки называются *косыми*. В отличие от косых прыжков, все рассмотренные нами выше прыжки были *прямыми*.

ГЛАВА 12

ВОДОСЛИВЫ

12.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ВОДОСЛИВОВ

Стенка, перегораживающая безнапорный поток таким образом, что вода переливается через ее гребень, называется *водосливом* (рис. 12.1). Часть стенки, через которую переливается вода, называется *водосливной стенкой*. Область потока перед водосливом называется *верхним бьефом*, область после водослива — *нижним бьефом*.

Практика показывает, что перед водосливом уровень воды верхнего бьефа несколько понижается. Превышение отметки свободной поверхности неискаженного уровня верхнего бьефа над отметкой порога (гребня) водослива называется *геометрическим напором на водосливе* H . Сечение потока, от которого уровень верхнего бьефа начинает заметно понижаться, располагается вверх по потоку

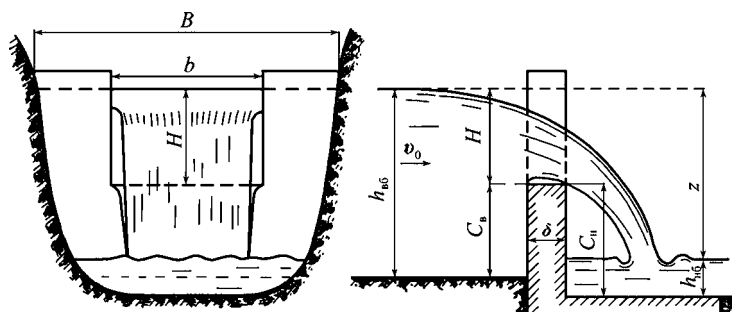


Рис. 12.1

от водослива на расстоянии примерно $(3-4)H$. Средняя скорость потока в этом сечении называется *скоростью подхода* v_0 .

Разность отметок свободной поверхности воды в верхнем и нижнем бьефах называется *геометрическим перепадом на водосливе* z .

Напор с учетом скорости подхода v_0 называется *полным напором* H_0 :

$$H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}.$$

Перепад с учетом скорости подхода называется *полным перепадом на водосливе* z_0 :

$$z_0 = z + \frac{\alpha v_0^2}{2g}.$$

Характеристиками водослива являются также (см. рис. 12.1):

- ширина водослива перпендикулярна потоку b ;
- ширина русла, в котором устроен водослив B ;
- толщина водосливной стенки δ ;
- высота порога водосливной стенки над уровнем дна верхнего бьефа C_v и нижнего бьефа C_n , при одинаковых отметках дна до и после водослива его высота обозначается C ;
- глубины верхнего $h_{вб}$ и нижнего $h_{нб}$ бьефов.

Разнообразные виды водосливов разделяются по некоторым типовым характеристикам. Существуют следующие классификации водосливов:

- по очертанию и размерам водосливной стенки;
- по типу сопряжения падающей струи с потоком в нижнем бьефе;
- по геометрической форме водосливного отверстия;
- по очертанию водосливной стенки в плане;
- с боковым сжатием или без сжатия.

Коротко охарактеризуем основные типы водосливов.

1. По очертанию и размерам водосливной стенки водосливы бывают

- с тонкой стенкой;
- с широким порогом;
- практического профиля.

Водосливом с тонкой стенкой (острым гребнем) считается такой водослив, толщина которого не влияет на характер истечения. Переливающаяся струя только касается ребра такого водослива, течения по поверхности порога не происходит (рис. 12.2а). Это возможно при скошенной верхней части стенки или при толщине стенки $\delta \leq 0,6H$.

Водослив с широким порогом (рис. 12.2б) имеет горизонтальную поверхность гребня в направлении движения настолько широкую, что течение хотя бы на некотором его участке является плавноизменяющимся. Толщина стенки водослива с широким порогом лежит в пределах

$$2,5H \leq \delta \leq (8-10)H.$$

Водосливом практического профиля считается любой водослив, отличающийся от водослива с тонкой стенкой и водослива с широким порогом. Формы водосливов практического профиля весьма разнообразны, они могут быть криволинейного (рис. 12.2в) или полигонального (рис. 12.2г) очертания. Течение воды через такой водослив характеризуется тем, что хотя бы на одном из участков порога вода движется, не отрываясь от поверхности порога, однако движение это не является плавноизменяющимся.

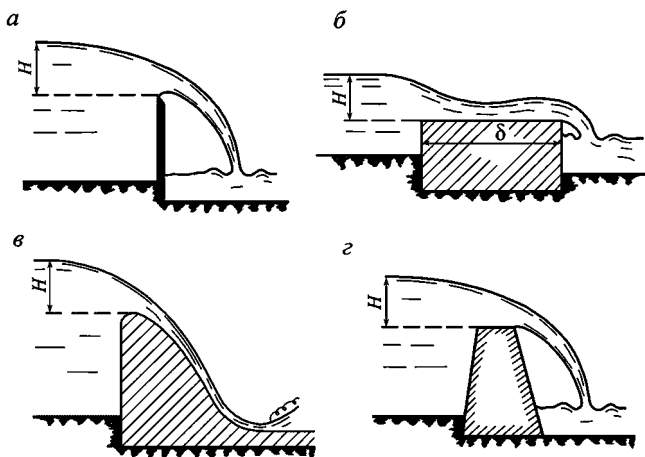


Рис. 12.2

2. По характеру протекания воды и сопряжения переливающейся струи с потоком в нижнем бьефе водосливы делятся на *незатопленные* и *затопленные*.

Незатопленным называется водослив, у которого величины расхода Q и напора H не зависят от глубины в нижнем бьефе $h_{\text{нб}}$. У затопленных водосливов расход и напор меняются в зависимости от высоты уровня нижнего бьефа.

3. В зависимости от геометрической формы водосливного отверстия водосливы могут быть (рис. 12.3): прямоугольными, треугольными, трапециевидальными, круговыми, параболическими (криволинейными), с наклонным гребнем.

4. В зависимости от очертания ребра в плане водосливы могут быть (рис. 12.4): прямыми, косыми, боковыми, полигональными (ломаными), криволинейными, замкнутыми (кольцевыми).

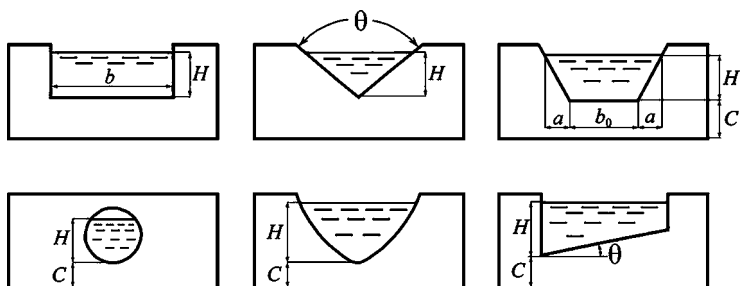


Рис. 12.3

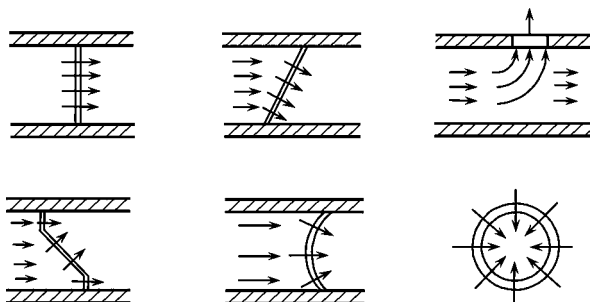


Рис. 12.4

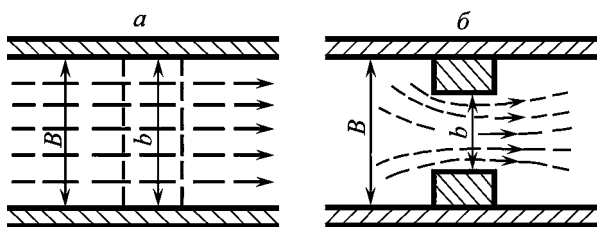


Рис. 12.5

5. В зависимости от соотношения между шириной водослива и шириной подводящего русла различают водосливы без бокового сжатия (рис. 12.5а), ширина b которых равна ширине B подводящего русла, и водосливы с боковым сжатием (рис. 12.5б), ширина b которых меньше ширины B подводящего русла.

12.2. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ВОДОСЛИВА

Пропускную способность водослива, т. е. расход воды при истечении через водослив, мы уже оценивали, рассматривая водослив как большое (широкое) прямоугольное отверстие, не ограниченное сверху стенкой, получили формулу для определения расхода:

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}. \quad (12.1)$$

Эта формула и является основной формулой водослива. Коэффициент m , входящий в эту формулу, называют *коэффициентом расхода* через водослив. Из формулы (12.1) следует, что в явном виде на величину расхода влияют лишь два фактора: напор H и ширина водослива b . Вместе с тем, на величину расхода влияют и другие параметры: скорость подхода, боковое сжатие, тип и форма стенки и уровень нижнего бьефа — у затопленных водосливов.

Влияние скорости подхода и бокового сжатия учитывается в формуле расхода для различных типов водосливов по-разному.

У водосливов с тонкой стенкой учет этих двух факторов происходит путем соответствующего выбора коэффициента расхода m .

У водосливов с широким порогом и практического профиля влияние скорости подхода учитывается тем, что в формулу расхода (12.1) вместо геометрического напора H вводится полный напор H_0 с учетом скорости подхода. Тогда формула принимает более общий вид

$$Q = mb\sqrt{2gH_0^{3/2}}. \quad (12.2)$$

Для учета бокового сжатия у водосливов с широким порогом и практического профиля в формулу расхода вместо геометрической ширины водослива b подставляется ширина $b_{\text{сж}}$ сжатого сечения переливающегося потока:

$$b_{\text{сж}} = \varepsilon_b b,$$

где ε_b — коэффициент бокового сжатия.

Затопление водосливов всех типов учитывается введением в правую часть формулы расхода коэффициента подтопления $\sigma_{\text{п}} \leq 1$.

Влияние типа и формы стенки, а также величины напора учитывается соответствующим изменением коэффициента расхода m .

12.3. ВОДОСЛИВЫ С ТОНКОЙ СТЕНКОЙ

Наиболее часто применяются и детальнее изучены прямые (лобовые) водосливы с вертикальной тонкой стенкой. Экспериментальные исследования показывают, что при движении через такой водослив без бокового сжатия могут реализовываться четыре типа струйного течения: свободная, поджатая, подтопленная и прилипшая струя (рис. 12.6).

При свободном доступе воздуха под струю на водосливе получается свободная струя (свободное истечение) (рис. 12.6а). При отсутствии доступа воздуха под струю переливающаяся струя захватывает с собой пузырьки воздуха из воздушного мешка, имеющегося под струей в начале истечения, воздух постепенно отсасывается, в результате под струей создается вакуум. Под действием вакуума высота столба жидкости под струей увеличивается, а струя приближается (поджимается) к водосливной стенке. Такая

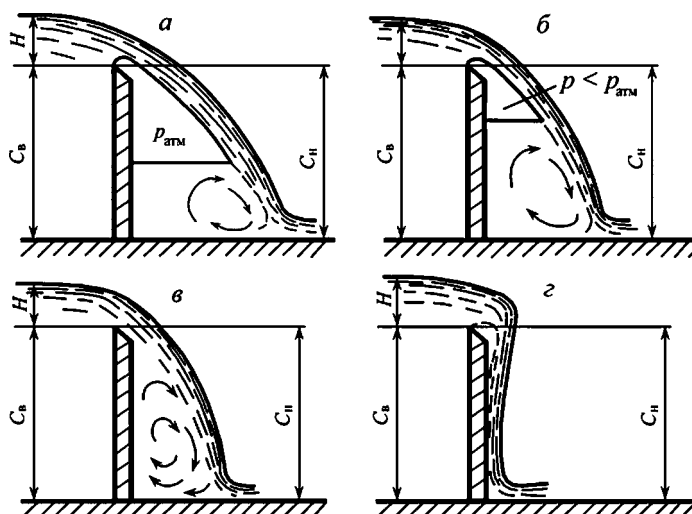


Рис. 12.6

струя называется *поджатой* (рис. 12.6б). В случае, когда вакуум под струей продолжает увеличиваться (при соблюдении условия $H/C \geq 0,4$), все пространство под струей заполнится водой. Струя в этом случае называется *подтопленной снизу* (рис. 12.6в). При малых расходах и отсутствии доступа воздуха под струю получается *прилипшая* струя (рис. 12.6г), которая обычно неустойчива и периодически переходит в поджатую.

Незатопленный прямоугольный водослив с вертикальной стенкой при наличии свободного истечения и при отсутствии бокового сжатия называется *нормальным* водосливом. Форма и параметры струи такого водослива представлены на рисунке 12.7.

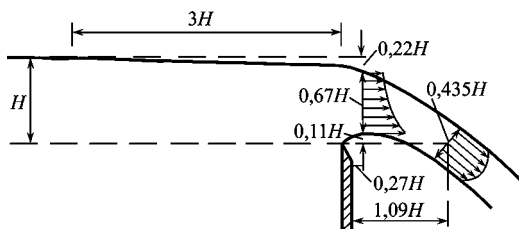


Рис. 12.7

Теория и опыт показывают, что все размеры такой струи пропорциональны величине напора H . Поэтому, если выразить все характерные размеры струи в долях напора, как показано на рисунке 12.7, то получается обобщенное типовое изображение течения через нормальный водослив. Как видно из рисунка, в сечении, где нижняя поверхность струи имеет наибольший подъем, толщина струи по вертикали составляет $0,67H$. Максимальный подъем нижней поверхности струи равен $0,11H$. В сечении, центр которого находится на уровне гребня водослива, толщина струи равна $0,435H$. На рисунке 12.7 показаны также эпюры распределения скоростей в этих сечениях. В сечении, где нижняя поверхность струи имеет наибольший подъем, скорость возрастает от верхней поверхности струи к нижней. В сечении, центр которого лежит на уровне гребня водослива, происходит практически параллельноструйное движение и максимум скоростей находится на оси струи. Коэффициент сжатия струи в этом сечении и будет коэффициентом вертикального сжатия для водослива с тонкой стенкой:

$$\varepsilon_B = 0,435.$$

Расход воды через нормальный водослив рассчитывается по формуле

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}, \quad (12.3)$$

где H — геометрический напор на водосливе; m_0 — нормальный коэффициент расхода.

Скорость подхода воды в этой формуле учитывается коэффициентом расхода m_0 . Существует несколько эмпирических формул для определения коэффициента расхода водослива с тонкой стенкой. Можно воспользоваться формулой И. М. Коновалова, полученной на основе зависимостей движения идеальной жидкости:

$$m_0 = \left(0,407 + \frac{0,045H}{H + C_B} \right) \left[1 + 0,285 \left(\frac{H}{H + C_B} \right)^2 \right].$$

Первая скобка в этой формуле учитывает влияние величины напора, вторая — скорости подхода.

Р. Р. Чугаевым предложена формула

$$m_0 = 0,40 + 0,05 \frac{H}{C_{\text{в}}},$$

ее можно применять при $H \geq 1$ м и $C_{\text{в}} \geq 0,5H$.

Расчеты показывают, что в зависимости от соотношения $H/C_{\text{в}}$ значения коэффициента расхода нормального водослива находятся в пределах $m_0 \approx 0,409-0,497$.

Расчетные формулы для нормальных водосливов дают возможность определять расход с большой точностью. Отчасти поэтому нормальные водосливы широко применяются в качестве измерительных устройств. Измеряют величину H на водосливе, специально устроенном в канале, затем по формуле (12.3) с учетом соответствующего коэффициента расхода рассчитывают расход воды в канале. Как показывают экспериментальные исследования, для прямоугольных водосливов хорошие результаты получаются при напорах $H = 0,15-1,25$ м. При значениях $H \leq 0,15$ м возрастает погрешность измерения, кроме того, при малых расходах часто возникает прилипающая струя, при которой нельзя пользоваться вышеприведенными формулами для коэффициента расхода. В этом случае удобно пользоваться треугольным водосливом с углом $\theta = 90^\circ$. Для такого водослива ширина потока по верху b зависит от величины напора H . С учетом этого формула пропускаемого расхода приводится к виду

$$Q = 1,4H^{5/2}.$$

Эта формула дает хорошие результаты при $H = 0,05-0,25$ м.

При наличии бокового сжатия, когда $b < B$, коэффициент расхода уменьшается и определяется по эмпирической формуле Эгли

$$m_{0\text{с}} = \left(0,405 + \frac{0,0027}{H} - 0,03 \frac{B-b}{B} \right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{H}{H + C_{\text{в}}} \right)^2 \right].$$

Уровень нижнего бьефа оказывает влияние на величину расхода через нормальный водослив, т. е. водослив становится затопленным, при соблюдении двух условий:

- уровень воды в нижнем бьефе должен стоять выше гребня водослива, т. е. $h_{\text{нб}} > C_{\text{н}}$; превышение уровня нижнего бьефа над порогом водослива $h_{\text{п}} = h_{\text{нб}} - C_{\text{н}}$ называется *глубиной подтопления*. Тогда первое условие затопленности выразится как $h_{\text{п}} > 0$;
- в нижнем бьефе должен быть спокойный режим движения воды.

Схема затопленного водослива с тонкой стенкой при соблюдении этих двух условий приведена на рисунке 12.8а. Если второе условие не соблюдается, т. е. в нижнем бьефе за водосливной стенкой течение бурное, в нижнем бьефе появляется *отогнанный гидравлический прыжок* (рис. 12.8б), и водослив оказывается незатопленным даже при соблюдении первого условия. При этом уровень нижнего бьефа, хотя и стоит выше порога водослива, не оказывает влияния на величину расхода через водослив.

Согласно опытным данным, течение в нижнем бьефе будет спокойным в случае, когда относительный перепад на водосливе (отношение перепада z к высоте стенки над дном нижнего бьефа $C_{\text{н}}$) будет меньше некоторого критического значения, а именно

$$\frac{z}{C_{\text{н}}} < (0,7 - 0,75).$$

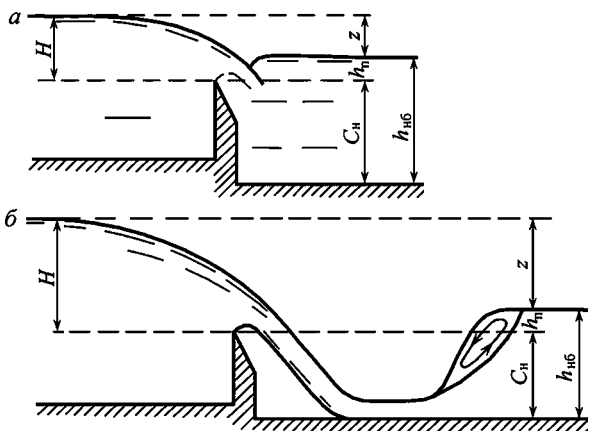


Рис. 12.8

Расход через затопленный водослив с тонкой стенкой без бокового сжатия определяется с учетом коэффициента подтопления σ_{Π} :

$$Q = \sigma_{\Pi} m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

Коэффициент расхода m_0 при этом определяется, как указано выше, по формулам И. М. Коновалова или Р. Р. Чугаева. Коэффициент подтопления σ_{Π} определяется по эмпирической формуле Базена:

$$\sigma_{\Pi} = 1,05 \left(1 + 0,2 \frac{h_{\Pi}}{C_{\Pi}} \right) \sqrt{\frac{z}{H}}.$$

При наличии, помимо подтопления, бокового сжатия в формулу расхода подставляют вместо нормального коэффициента расхода m_0 коэффициент расхода $m_{0с}$, величину коэффициента подтопления σ_{Π} принимают, как и выше, по формуле Базена.

12.4.

ВОДОСЛИВЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

По своему очертанию водосливы практического профиля делятся на *криволинейные* и *полигональные*.

Водосливы криволинейного очертания, в свою очередь, могут быть *безвакуумными* и *вакуумными*. Если очертание криволинейного профиля таково, что струя на гребне водослива стремится оторваться от поверхности водослива, то вблизи этой поверхности в струе возникает вакуум, такие профили называют вакуумными. Вакуумные профили дают наибольший коэффициент расхода из всех типов водосливов — до 0,55. Однако струя в зоне вакуума оказывается неустойчивой, возможны периодические прорывы воздуха под струю, что приводит к вибрации конструкции водослива и разрушению его поверхности. Поэтому на практике в основном водосливы бетонных плотин делают безвакуумного профиля, при котором давление на поверхности водослива больше атмосферного. Профиль водослива очерчивается по форме нижней поверхности струи, переливающейся через нормальный водослив с тонкой стенкой (рис. 12.9).

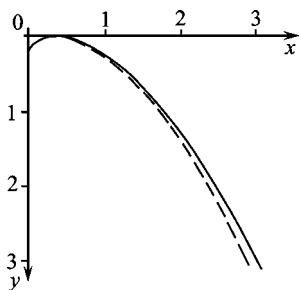


Рис. 12.9

Следует учитывать и то, что один и тот же водослив может быть как безвакуумным, так и вакуумным: при увеличении напора на безвакуумном водосливе струя стремится отброситься дальше от водослива и между ней и водосливной поверхностью возникает вакуум. Поэтому, чтобы устранить возможность появления вакуума, поверхность водослива очерчивают не точно по нижней поверхности струи нормального водослива, а немного «врезают» ее в струю. На рисунке 12.9 пунктиром показана форма струи нормального водослива с тонкой стенкой, а сплошной линией — профиль безвакуумного водослива практического профиля. Численные значения координат на рисунке 12.9, так же как и размеры струи, выражены в долях напора H . Очертание безвакуумного водослива практического профиля строится по безразмерным опытным данным, приведенным в гидравлических справочниках, и называется *профилем Кригера — Офицера*. Такие профили применяются в двух вариантах: *A* и *B*, показанных на рисунке 12.10.

Напор, по которому строится очертание конкретного водослива, называется *профилирующим*. Во избежание возможности того, что безвакуумный водослив в процессе эксплуатации перейдет в вакуумный режим, при проектировании исходят из наибольшей возможной величины напора, отвечающей наибольшему пропускному расходу.

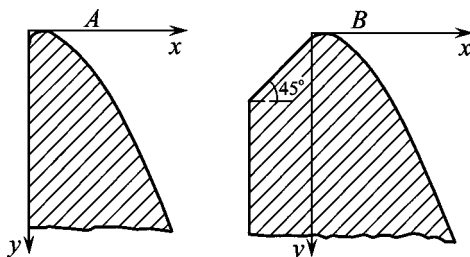


Рис. 12.10

Расход через незатопленный криволинейный водослив практического профиля определяют по общей формуле (12.1). При работе водослива Кригера — Офицерова с профилирующим напором коэффициенты расхода принимаются:

- для профиля типа *A* — $m = 0,49$;
- для профиля типа *B* — $m = 0,48$.

Если напор отличается от профилирующего, следует учитывать следующее: при работе водослива под напором, меньшим профилирующего, коэффициент расхода уменьшается, при работе под напором, большим профилирующего, т. е. при переходе к вакуумному режиму, коэффициент расхода возрастает. Поскольку очертание водосливов определяют, исходя из максимального ожидаемого напора, практическое значение имеет лишь снижение коэффициента напора при уменьшении напора относительно профилирующего значения. Н. Н. Павловским предложены формулы для определения коэффициента расхода безвакуумного профиля при любом значении напора:

- для профиля типа *A*:

- при $H/H_{\text{пр}} > 0,8$

$$m = 0,49 \left(0,88 + 0,12 \sqrt{\frac{H}{H_{\text{пр}}}} \right);$$

- при $H/H_{\text{пр}} \leq 0,8$

$$m = 0,49 \left(0,785 + 0,25 \frac{H}{H_{\text{пр}}} \right);$$

- для профиля типа *B*:

- при $H/H_{\text{пр}} > 0,5$

$$m = 0,4820 \sqrt{\frac{H}{H_{\text{пр}}}};$$

- при $H/H_{\text{пр}} = 0,1-0,5$

$$m = 0,48 \left(0,805 + 0,31 \frac{H}{H_{\text{пр}}} \right).$$

В этих формулах H — напор, для которого определяется значение коэффициента расхода, $H_{\text{пр}}$ — профилирующий напор.

С водосливными стенками практического профиля часто приходится сталкиваться при проектировании плотин. Обычно в гребне плотины устраивается несколько водосливных отверстий, разделенных *быками*. Крайние отверстия ограничены со стороны берегов так называемыми *устоями*. В этих случаях расход через водослив находится по формуле

$$Q = m\varepsilon_6 b \sqrt{2gH_0^{3/2}} = mb_{\text{сж}} \sqrt{2gH_0^{3/2}}.$$

Для определения коэффициента бокового сжатия ε_6 пользуются эмпирической формулой

$$\varepsilon_6 = 1 - 0,2n\xi \frac{H_0}{b},$$

в которой n — число пролетов плотины; ξ — коэффициент, учитывающий форму устоев или быков.

Тогда ширина сжатого сечения потока определится как

$$b_{\text{сж}} = \varepsilon_6 b = b - 0,2n\xi H_0.$$

Быки могут иметь в плане различную форму (рис. 12.11).

Величина коэффициента ξ принимается:

- для быков прямоугольной формы (рис. 12.11а) $\xi = 1,0$;
- для быков полукруглой или заостренной формы (рис. 12.11б, в) $\xi = 0,7$;
- для быков криволинейной заостренной формы (рис. 12.11г) $\xi = 0,4$.

Если отверстие плотины разделено на большое число пролетов неширокими стойками, то принимают просто $\varepsilon_6 = 0,85-0,95$.

Условия затопления для водослива практического профиля такие же, как и для водослива с тонкой стенкой:

- уровень воды в нижнем бьефе должен стоять выше гребня водослива, т. е. $h_{\text{нб}} > C_{\text{н}}$;

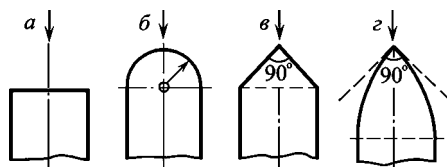


Рис. 12.11

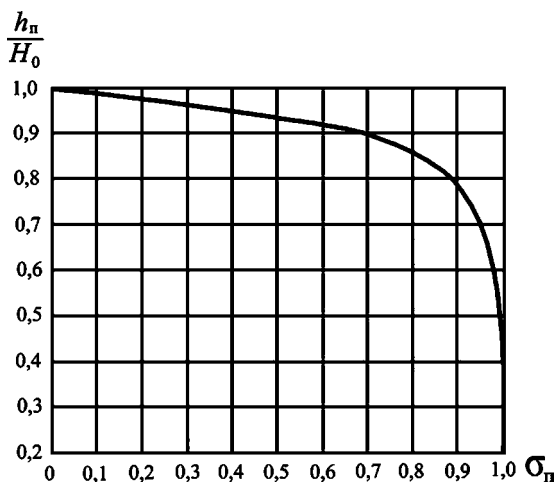


Рис. 12.12

- относительный перепад на водосливе (отношение перепада z к гребню водослива над дном нижнего бьефа $C_{\text{н}}$) должен быть меньше критического значения, т. е. $\frac{z}{C_{\text{н}}} < (0,7 - 0,75)$.

Расход через затопленный водослив практического профиля определяется по формуле

$$Q = \sigma_{\text{п}} m b \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

Коэффициент подтопления $\sigma_{\text{п}}$ определяется по графику, предложенному А. Р. Березинским (рис. 12.12), в зависимости от отношения глубины подтопления к полному напору. Как видно из графика, влияние затопления начинает сказываться при $h_{\text{п}} = 0,4H_0$. При $h_{\text{п}} > 0,8H_0$ затопление очень существенно влияет на величину расхода через водослив.

Водосливы практического профиля помимо криволинейной очертания могут быть, как указывалось выше, полигонального очертания. При этом их можно разделить на группы (рис. 12.13):

- со стенкой прямоугольного поперечного очертания (рис. 12.13а);

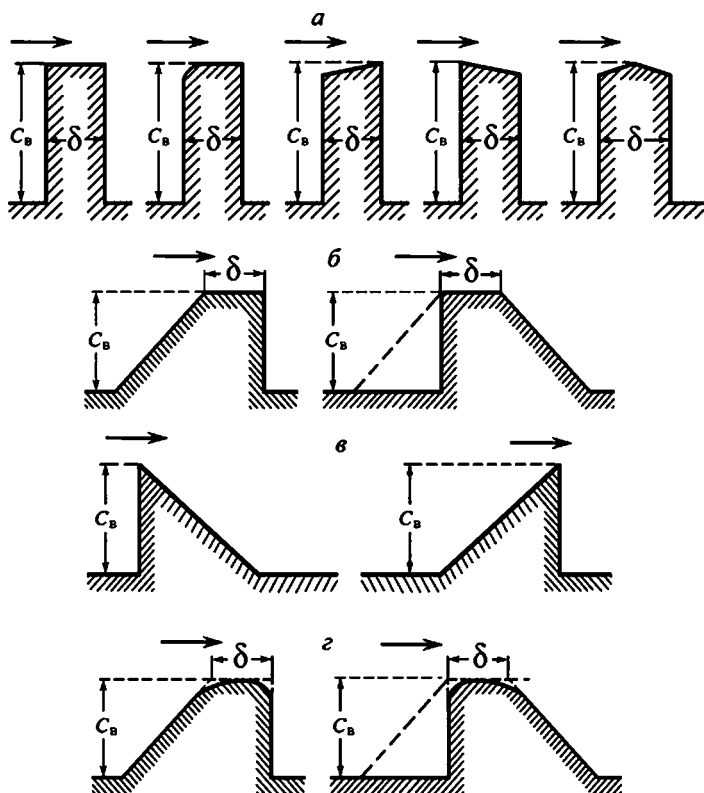


Рис. 12.13

- со стенкой трапецидального очертания (рис. 12.13б);
- со стенкой треугольного сечения (рис. 12.13в);
- со стенкой трапецидального очертания со скругленными углами (рис. 12.13г).

Н. Н. Павловский предложил выражать коэффициенты расхода для разных групп таких водосливов с помощью обобщенной формулы

$$m = m_r \sigma_n \sigma_\phi,$$

где m_r — коэффициент расхода, определенный опытным путем для водослива данной группы при профилирующем напоре; σ_n — коэффициент полноты напора, учитываю-

щий отклонение реального напора от профилирующего; σ_{ϕ} — коэффициент формы, учитывающий отличие размеров водослива, для которого был определен m_r , от размеров реального водослива, для которого определяется коэффициент расхода.

В гидравлических справочниках приводятся различные эмпирические формулы для определения поправок σ_n и σ_{ϕ} .

12.5. ВОДОСЛИВЫ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

Для того чтобы на водосливе с широким порогом движение жидкости хотя бы на части горизонтальной поверхности порога было плавноизменяющимся, необходимо, как показывает опыт, чтобы толщина порога была не менее, чем $2,5H$. При меньшей толщине порога условие плавной изменяемости нигде не будет соблюдаться и характер истечения будет соответствовать водосливу практического профиля прямоугольного очертания.

На незатопленном водосливе с широким порогом в зависимости от ширины порога могут устанавливаться следующие режимы протекания потока.

При $\delta \approx (2,5-3,5)H$ глубина потока на пороге непрерывно понижается (рис. 12.14а).

При $3,5H < \delta < (8-10)H$ на пороге устанавливается примерно параллельноструйное движение с глубиной меньше критической: $h < h_{кр}$ (рис. 12.14б). При $\delta > (8-10)H$ на условия протекания начинают влиять силы трения, пропускная способность водослива становится зависимой от потерь энергии по длине и водослив следует рассматривать как короткий канал. В этом случае на пороге в его начале устанавливается сжатая глубина $h_{сж}$, затем поток путем волнистого гидравлического прыжка переходит через критическую глубину и далее течет в спокойном режиме (рис. 12.14в).

При течении по поверхности водослива с широким порогом возникают два перепада свободной поверхности: z_v на входе на порог и z_n на сходе с порога (рис. 12.15).

Первый перепад (на входе) возникает потому, что безнапорное спокойное движение воды в верхнем бьефе встре-

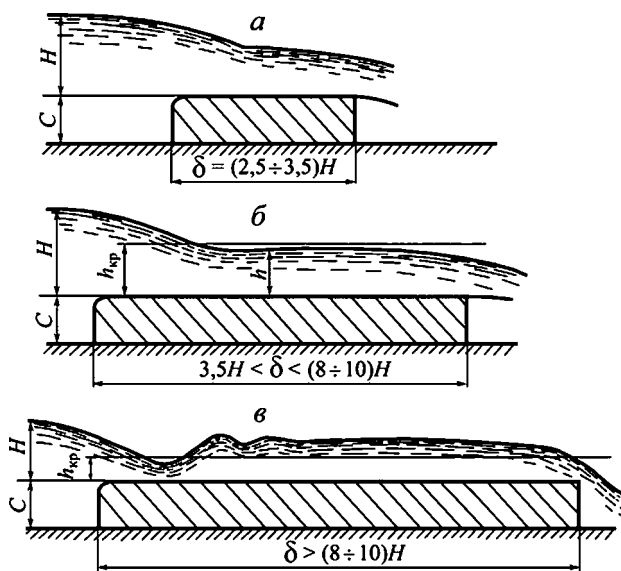


Рис. 12.14

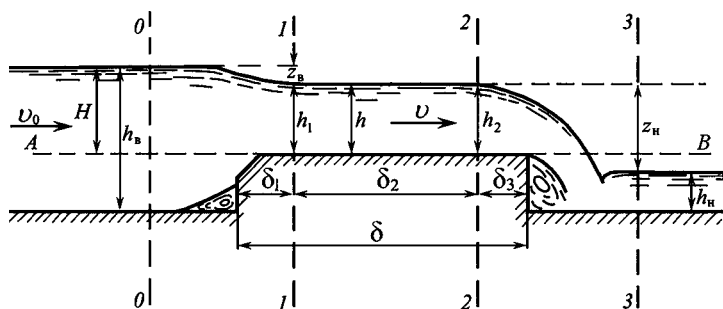


Рис. 12.15

чают местное сопротивление: сжатие потока, уменьшение живого сечения. Происходит увеличение скорости потока в месте сжатия, увеличение кинетической и уменьшение потенциальной энергии и обусловленное снижением потенциальной энергии снижение свободной поверхности в месте сжатия. В конце широкого порога при отсутствии подтопления поток сходит с порога водопадом. Так как

потерей напора по длине вдоль порога водослива пренебрегают, свободную поверхность потока в пределах гребня водослива считают горизонтальной с постоянной глубиной, т. е. (рис. 12.15)

$$h_1 = h_2 = h = \text{const.}$$

Длина начального участка на пороге водослива, за которым устанавливается параллельноструйное течение, как показывает опыт, равна $\delta_1 \approx 2H$. Конец горизонтального участка свободной поверхности отстоит от конца порога на расстояние $\delta_3 = 0-H$.

Для расчета водослива с широким порогом применим уравнение Бернулли для сечений 0-0 (перед водосливом) и 1-1 (начало горизонтального участка), в качестве плоскости сравнения примем плоскость AB , проведенную через верхнюю грань водослива (рис. 12.15). Потери напора на местном сопротивлении — входе на водослив — выразим как

$$h_{\text{пот}} = \zeta_{\text{вх}} \frac{v^2}{2g},$$

где v — скорость на пороге водослива (в любом сечении на горизонтальном участке между сечениями 1-1 и 2-2); $\zeta_{\text{вх}}$ — коэффициент сопротивления входа на водослив.

Уравнение Бернулли запишется следующим образом:

$$H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta_{\text{вх}} \frac{v^2}{2g}.$$

Полагаем $\alpha \approx 1$. Коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{вх}}$ выразим через коэффициент скорости φ по известной формуле

$$1 + \zeta_{\text{вх}} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

Получим

$$v = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h)},$$

где $H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g}$ — полный напор на водосливе.

Для прямоугольного водослива величину расхода Q можно записать через скорость на водосливе:

$$Q = v\omega = vbh.$$

Тогда

$$Q = \phi b h \sqrt{2g(H_0 - h)}. \quad (12.4)$$

Полученную формулу расхода можно преобразовать к виду, общему с видом формулы для расхода водосливов с тонкой стенкой и практического профиля (12.3). Выполним некоторые преобразования. Умножим и разделим выражение $h\sqrt{H_0 - h}$ на $H_0^{3/2}$:

$$h\sqrt{H_0 - h} = \frac{h}{H_0} \sqrt{1 - \frac{h}{H_0}} H_0^{3/2} = k\sqrt{1 - k} H_0^{3/2},$$

где введено обозначение $k = h/H_0$.

Подставим полученное выражение в формулу (12.4) и получим

$$Q = \phi k \sqrt{1 - k} b \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

Назовем величину

$$m = \phi k \sqrt{1 - k}$$

коэффициентом расхода через водослив с широким порогом.

Тогда окончательно получим

$$Q = m b \sqrt{2g} H_0^{3/2},$$

т. е. формулу расхода, по форме совпадающую с формулами для водосливов с тонкой стенкой и практического профиля.

Исходя из опытных данных, принимают следующие значения коэффициента расхода для водослива с широким порогом:

- при закругленном входном ребре $m = 0,36$;
- при незакругленном входном ребре $m = 0,32$.

Как видно из этих величин, водослив с широким порогом дает наименьшие значения коэффициента расхода среди всех типов водосливов.

Водослив с широким порогом становится затопленным тогда, когда уровень нижнего бьефа начинает подтапливать первый перепад на входе водослива. Однако режим затопленного течения на водосливе устанавливается не сразу. Вначале происходит увеличение глубины на нижнем конце порога, причем между нижним сечением и сжатым сечением струи в начале порога образуется прыжок воды (рис. 12.16а).

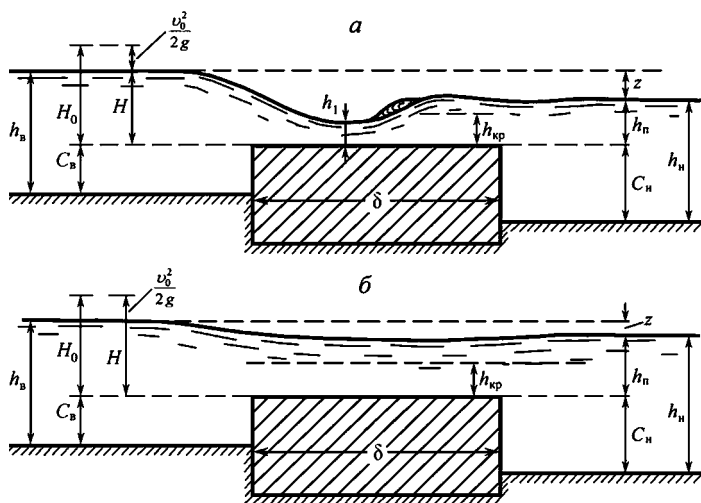


Рис. 12.16

По мере повышения уровня нижнего бьефа прыжок все больше приближается к сжатому сечению. Только когда повышение уровня достигнет сжатого сечения, расход через водослив начнет уменьшаться. Схема затопленного водослива с широким порогом показана на рисунке 12.16б. Согласно опытным данным А. Р. Березинского, затопление водослива с широким порогом происходит тогда, когда начинает выполняться условие $h_n \geq 0,8H_0$ — это и есть условие затопления.

Расход через затопленный водослив с широким порогом рассчитывается с учетом коэффициента подтопления по уже знакомой нам формуле

$$Q = \sigma_n m b \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

Значения коэффициента подтопления можно принимать в зависимости от отношения h_n/H_0 по таблице, составленной А. Р. Березинским на основании опытных данных:

$\frac{h_n}{H_0}$	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98
σ_n	1,00	0,99	0,97	0,95	0,90	0,84	0,78	0,70	0,59	0,40

СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ

13.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При конструировании плотин следует учитывать следующие обстоятельства: поток воды, выходящий из отверстия и сходящийся с водослива плотины, обладает огромным запасом энергии. Падая на подошву сооружения, такой поток может разрушать и разбивать конструкции. Попадая дальше в нижний бьеф, бурный поток может размывать дно, создавая угрозу устойчивости всего сооружения. Поэтому одной из основных задач, возникающих при проектировании и расчете плотин, является обеспечение такого сопряжения бурного потока, сходящего с водослива плотины, со спокойным течением в нижнем бьефе, при котором бы не возникало угроз разрушения конструкций сооружения и размыва русла нижнего бьефа. Требуется «погасить» энергию потока, перевести ее во внутреннюю энергию жидкости, в тепло. Такие задачи в рамках инженерной гидравлики называются *сопряжением бьефов*.

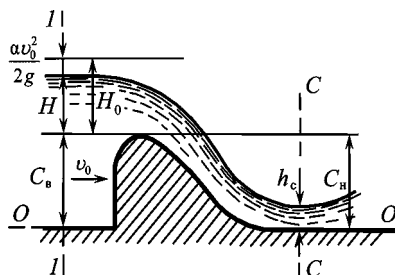


Рис. 13.1

При протекании потока по водосливу плотины скорость его возрастает и достигает наибольшего значения непосредственно за водосливом в так называемом *сжатом сечении* $C-C$ (рис. 13.1). В этом сечении устанавливается наименьшая глубина потока. После сжатого сечения уклон дна и, следовательно, скорость потока уменьшаются и глубины увеличиваются. Глубина в сжатом сечении h_c непосредственно влияет на процесс сопряжения бьефов, на то, какой вид течения установится за водосливом, и поэтому имеет важное значение для дальнейшего расчета.

13.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ В СЖАТОМ СЕЧЕНИИ ПОТОКА

Для определения глубины потока в сжатом сечении воспользуемся уравнением Бернулли для сечения $1-1$ перед водосливом и сжатого сечения $C-C$ (рис. 13.1). В качестве плоскости сравнения $O-O$ примем отметку дна нижнего бьефа. Потери энергии на участке между этими сечениями представим как местные потери, обусловленные перетеканием потока через водослив:

$$h_{\text{пот}} = \zeta \frac{\alpha v_c^2}{2g}.$$

Тогда уравнение Бернулли для этих сечений запишется так:

$$C_n + H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h_c + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + \zeta \frac{\alpha v_c^2}{2g},$$

где C_n — высота водослива относительно дна нижнего бьефа; H — напор на водосливе; v_0 — скорость подхода потока к водосливу; v_c — средняя скорость потока в сжатом сечении; ζ — коэффициент местного сопротивления водослива.

Запишем уравнение Бернулли с использованием полного напора H_0 :

$$C_n + H_0 = h_c + (1 + \zeta) \frac{\alpha v_c^2}{2g}.$$

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}},$$

где φ — коэффициент скорости.

Учтем также, что $v_c = \frac{Q}{\omega_c}$ (ω_c — площадь сжатого сечения), и получим

$$C_n + H_0 = h_c + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega_c^2\varphi^2}. \quad (13.1)$$

Уравнение (13.1) справедливо для русла нижнего бьефа любого поперечного сечения. С помощью этого уравнения и можно определить глубину сжатого сечения h_c , при этом необходимо учитывать, что площадь сжатого сечения ω_c является функцией глубины h_c .

В случае прямоугольного русла нижнего бьефа справедливы соотношения

$$Q = qb; \quad \omega_c = bh_c,$$

где q — удельный расход на единицу ширины русла.

Помимо этого, положим $\alpha = 1$, и тогда уравнение (13.1) примет вид

$$C_n + H_0 = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2\varphi^2},$$

откуда

$$h_c = \frac{q}{\varphi\sqrt{2g(C_n + H_0 - h_c)}}. \quad (13.2)$$

Это уравнение является кубическим относительно h_c . Один из возможных способов его решения — метод последовательных приближений. Примем в правой части уравнения (13.2) $h_c = 0$. Тогда получим в первом приближении

$$h_c^{(1)} = \frac{q}{\varphi\sqrt{2g(C_n + H_0)}}.$$

Подставим это значение в правую часть формулы (13.2) и будем иметь глубину сжатого сечения во втором приближении:

$$h_c^{(2)} = \frac{q}{\varphi\sqrt{2g(C_n + H_0 - h_c^{(1)})}}.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока получаемые последовательно приближения не становятся близки друг другу с заданной точностью. Обычно двух-трех приближений бывает достаточно.

Значения коэффициента скорости φ , необходимые для определения h_c , можно принять по рекомендациям Н. Н. Павловского:

- водосливы плавных форм без щитов:
 - при малой длине сливной грани — $\varphi = 1$;
 - при средней длине сливной грани — $\varphi = 0,95$;
 - при большой длине сливной грани — $\varphi = 0,90$;
- водосливы плавных форм со щитом на гребне — $\varphi = 0,95-0,85$;
- водосливы практического профиля с неплавным очертанием — $\varphi = 0,90-0,80$;
- водосливы с широким порогом — $\varphi = 0,95-0,85$.

13.3. СОПРЯЖЕНИЕ НИСПАДАЮЩЕЙ СТРУИ С НИЖНИМ БЬЕФОМ

В зависимости от состояния русла и потока в нижнем бьефе могут возникать различные случаи сопряжения струи, ниспадающей с водослива плотины, с потоком в нижнем бьефе. Глубина воды в нижнем бьефе определяется условиями движения потока в отводящем русле. Чаще всего в нижнем бьефе устанавливается равномерное движение, и, следовательно, действительная глубина нижнего бьефа равна нормальной глубине отводящего русла.

Рассмотрим два случая:

- уклон дна нижнего бьефа больше критического: $I_0 > I_{0\text{кр}}$;
- уклон дна нижнего бьефа меньше критического: $I_0 < I_{0\text{кр}}$.

Первый случай (рис. 13.2) весьма редко встречается в практике.

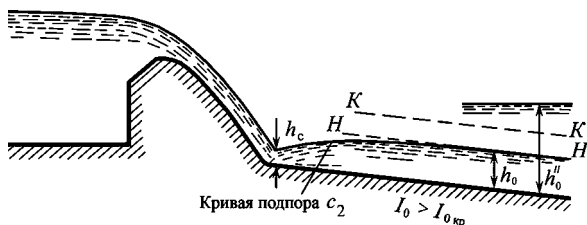


Рис. 13.2

Формы свободных поверхностей потока при уклоне дна больше критического рассмотрены нами ранее и приведены на рисунке 10.13. Если глубина сжатого сечения меньше нормальной глубины $h_c < h_0$, то в нижнем бьефе получаем кривую подпора типа c_2 . Если $h_c > h_0$, то получаем кривую спада b_2 . Если нормальная глубина в нижнем бьефе больше критической (h_0'' на рисунке 13.2, бьеф подперт), то в этом случае за плотиной может образоваться гидравлический прыжок.

Второй случай, когда уклон дна нижнего бьефа меньше критического, обычно реализуется в практике. Более того, часто непосредственно за водосливной стенкой плотины уклон дна равен нулю. В этом случае за водосливом увеличение глубины потока из сжатого сечения происходит согласно кривой подпора типа c_1 (рис. 10.12). Затем происходит переход к глубинам, большим критической, посредством гидравлического прыжка. Прыжок может установиться на некотором расстоянии (иногда значительном) за водосливом (рис. 13.3а), начинаться непосред-

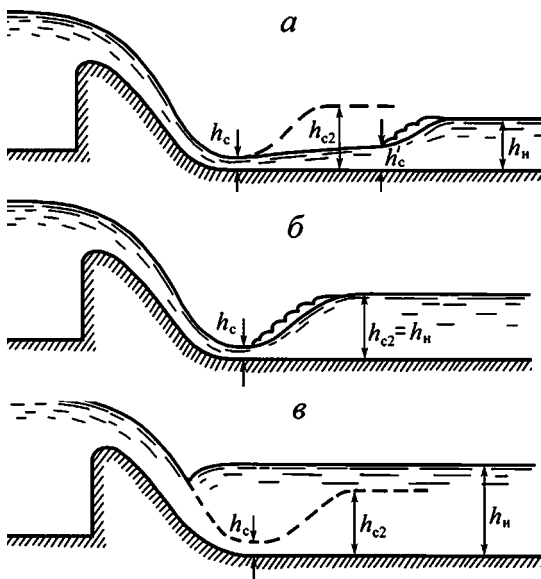


Рис. 13.3

ственно за водосливом (рис. 13.3б) или надвигаться на низовую грань водослива (рис. 13.3в).

Положение гидравлического прыжка или форма сопряжения бьефов может быть установлена следующим образом. Каждому заданному расходу в соответствии с формулой (13.1) отвечает определенная сжатая глубина h_c . А как известно, каждому значению глубины перед гидравлическим прыжком отвечает строго определенное значение сопряженной глубины после прыжка, обозначим ее h_{c2} . Тогда можно построить за водосливом воображаемый гидравлический прыжок с сопряженными глубинами h_c и h_{c2} . На рисунке 13.4 такой воображаемый прыжок показан пунктирной линией.

Положение гидравлического прыжка относительно водослива будет зависеть от глубины потока в нижнем бьефе. Если глубина потока в нижнем бьефе h_n будет меньше сопряженной глубины h_{c2} , то, в соответствии с графиком прыжковой функции (рис. 13.5), перед прыжком установится глубина h'_c , большая h_c .

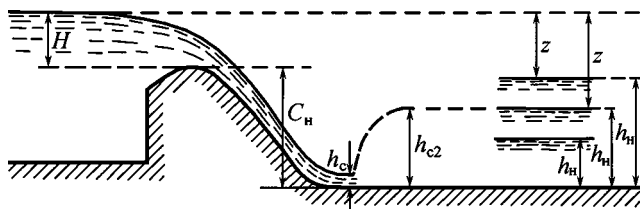


Рис. 13.4

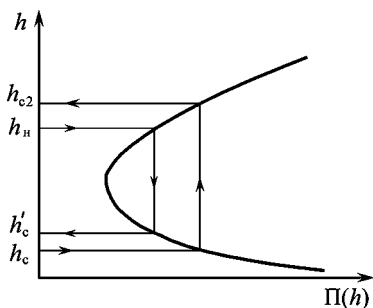


Рис. 13.5

Тогда между глубинами h_c и h'_c устанавливается кривая подпора типа c_1 , глубина потока должна увеличиться от глубины сжатого сечения до глубины, сопряженной с глубиной установившегося потока в нижнем бьефе, и прыжок будет находиться на некотором расстоянии от водослива. Такой прыжок (рис. 13.3а) называется *отогнанным прыжком*. Таким образом, условием установления в нижнем бьефе отогнанного прыжка будет

$$h_{c2} > h_n.$$

При увеличении глубины в нижнем бьефе глубина, ей сопряженная, будет уменьшаться (рис. 13.5) и приближаться к глубине сжатого сечения h_c , прыжок будет приближаться к сжатому сечению. При $h'_c = h_c$ прыжок начинается сразу за водосливом (рис. 13.3б) от сжатого сечения. Такое сопряжение называется *прыжком в сжатом сечении*. То есть условие прыжка в сжатом сечении

$$h_{c2} = h_n.$$

При дальнейшем увеличении глубины в нижнем бьефе она становится больше глубины, сопряженной с глубиной сжатого сечения, сжатое сечение затапливается, прыжок надвигается на низовую грань водослива (рис. 13.3в). Такая форма сопряжения называется *надвинутым прыжком*. Условие надвинутого прыжка

$$h_{c2} < h_n.$$

13.4. ГАШЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПОТОКА В НИЖНЕМ БЬЕФЕ СООРУЖЕНИЯ

Поток перед плотиной обладает большим запасом потенциальной энергии, которая непосредственно за плотиной в значительной степени переходит в кинетическую. Поэтому скорости движения воды в нижнем бьефе за плотиной резко увеличиваются. Это обстоятельство, как уже отмечалось, вызывает опасность разрушения сооружения. Поэтому в нижнем бьефе плотин приходится устраивать мощные, а следовательно, дорогостоящие крепления. Участок с бурным потоком оформляется в виде *водобоя* — массивного бетонного крепления дна нижнего бьефа, непо-

средственно примыкающего к телу плотины. В пределах водобоя поток переходит в спокойное состояние, но сохраняет все же большие скорости. Для того чтобы снизить стоимость таких креплений, необходимо на возможно более короткой длине за плотиной снизить запас кинетической энергии потока воды. Это можно сделать:

- переведа часть кинетической энергии обратно в потенциальную, увеличивая глубину потока;
- рассеять часть кинетической энергии, переведа ее в тепловую за счет работы сил трения.

Сравнивая между собой три типа прыжков, возникающих при сопряжении, можно видеть, что наименее выгодным является сопряжение по типу отогнанного прыжка, а наиболее выгодным — надвинутый прыжок, потому что в случае надвинутого прыжка участок с бурным состоянием потока имеет наименьшую длину. При этом в зоне прыжка и на послепрыжковом участке устанавливается *донный режим* распределения скоростей. Он характеризуется тем, что активный поток на участке перехода из бурного состояния в спокойное проходит по дну, а вихревая зона располагается над ним. Наибольшие скорости при этом имеют место вблизи дна.

Если предварительные расчеты при проектировании плотины показывают, что на водоотводящем канале должен установиться отогнанный гидравлический прыжок, следует предусмотреть специальные меры по ликвидации такого отгона. Основной способ обеспечения надвинутого прыжка состоит в искусственном увеличении глубины нижнего бьефа h_n . Увеличить глубину нижнего бьефа можно устройством:

- водобойного колодца (рис. 13.6а);
- подпорной стенки в конце водобоя (рис. 13.6б);
- совместного применения водобойного колодца и подпорной стенки (рис. 13.6в).

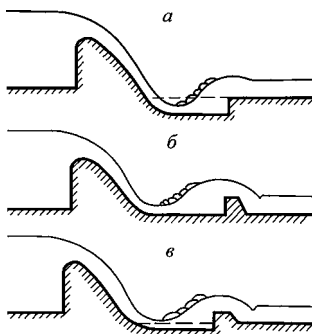


Рис. 13.6

При создании водобойного колодца понижают уровень дна русла нижнего бьефа у плотины. В результате:

- полная высота падения струи увеличивается;
- сжатая глубина h_c уменьшается (см. формулу (13.2));
- с уменьшением сжатой глубины сопряженная с ней глубина h_{c2} увеличивается, следовательно, увеличивается высота прыжка;
- с увеличением высоты прыжка резко увеличивается потеря энергии в нем.

Подпорная стенка работает как водослив практического профиля, при этом происходит увеличение глубины за прыжком в нижнем бьефе на величину высоты водобойной стенки. Увеличивая глубину нижнего бьефа, мы надвигаем прыжок на водослив плотины.

В случаях, когда по результатам расчетов обычный водобойный колодец получается слишком глубоким, а обычная подпорная стенка слишком высокой, устраивают комбинированный водобойный колодец, совместно применяя водобойный колодец и подпорную стенку.

Длину водобойного или комбинированного колодца, а также расстояние от сжатого сечения до подпорной стенки определяют из условия размещения в нем гидравлического прыжка:

$$l_{\text{кол}} = l_{\text{пр}},$$

где $l_{\text{кол}}$ — длина колодца; $l_{\text{пр}}$ — длина прыжка.

Для большего рассеивания кинетической энергии потока на его пути устанавливают специальные гасители энергии, представляющие собой всевозможные препятствия, заставляющие поток деформироваться. В результате такой деформации потока происходит рассеивание энергии. В качестве специальных гасителей энергии могут использоваться пирсы, шашки или рисбермы — гибкое крепление дна.

13.5. ПОВЕРХНОСТНЫЙ РЕЖИМ СОПРЯЖЕНИЯ БЬЕФОВ

Как уже отмечено, при протекании воды после водосливной плотины на послепрыжковом участке потока преобладают донные скорости, а это даже в случае надвинуто-

го прыжка требует устройства дополнительного крепления русла для предотвращения его размыва. Для устранения этого явления необходимо перевести течение в поверхностный режим. При поверхностном режиме сопряжения бьефов максимум скоростей имеет место на свободной поверхности или вблизи нее. Для создания поверхностного режима водосливная часть плотины должна заканчиваться уступом или носком. Поверхность водослива непосредственно перед уступом делают горизонтальной или придают ей небольшой отрицательный уклон. Картина сопряжения бурного потока, сходящего с водослива, со спокойным потоком основного русла нижнего бьефа зависит от глубины нижнего бьефа. При этом по мере возрастания глубины нижнего бьефа могут возникнуть следующие основные формы сопряжения бьефов:

- сопряжение с донным режимом (рис. 13.7а);
- свободный поверхностный прыжок с донным вальцом (рис. 13.7б);
- затопленный поверхностный прыжок с донным и поверхностным вальцами (рис. 13.7в);
- донный прыжок, затопленный на уступе (рис. 13.7г).

При проектировании нужно стремиться реализовать сопряжение по типу свободного или затопленного поверхностного прыжка, это уменьшает размывающее действие потока.

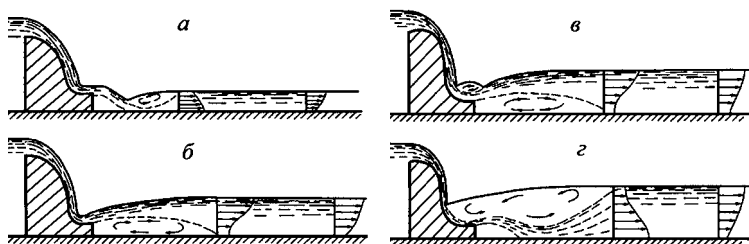


Рис. 13.7

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

14.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Движение воды в грунте, являющееся частным случаем движения жидкости в пористой среде, называется *фильтрацией*. Изучение фильтрационного движения воды имеет существенное практическое значение. Грунтовые воды зачастую являются источником водоснабжения, при проектировании и эксплуатации каналов, прокладываемых в естественных грунтах, необходимо оценивать величину фильтрационных потерь. Уровень грунтовых вод влияет на устойчивость сооружений, при устройстве дренажа необходимо выполнять фильтрационные расчеты. Устройство земляных плотин также сопровождается расчетами просачивания через них воды.

Вода, содержащаяся в грунтах, может находиться в одном из следующих состояний.

1. Вода в виде *водяного пара*.

2. *Гигроскопическая вода*, обволакивающая частицу грунта слоем толщиной в одну молекулу. Такая вода находится под действием только молекулярных сил и не может перемещаться в грунте.

3. *Пленочная вода* обволакивает частицы грунта, не заполняя полностью поры между ними. Эта вода может перемещаться в грунте под действием молекулярных сил и сил тяжести, но не передает гидростатического давления.

4. *Капиллярная вода* полностью заполняет мелкие поры грунта и находится под действием сил поверхностного на-

тяжения и силы тяжести. Передает гидростатическое давление.

5. *Свободная гравитационная вода* полностью заполняет все поры грунта, передает гидростатическое давление и перемещается под действием силы тяжести.

В дальнейшем будем рассматривать только движение свободной гравитационной воды, называя его *движением грунтовых вод*.

Вода в поры грунта может попасть различным образом. Например, выпадая на поверхность земли в виде осадков, она затем просачивается в грунт. На некоторой глубине вода задерживается слоем водонепроницаемого грунта (глина, скала), называемого *водоупором*, и начинает двигаться по поверхности этого слоя. Слой водоупора образует как бы русло для потока грунтовой воды. Движущийся по водоупору поток имеет свободную поверхность, давление в каждой точке которой равно атмосферному. Такие потоки называются *безнапорными*. Свободная поверхность фильтрационного потока называется *депрессионной поверхностью*, кривая свободной поверхности называется *депрессионной кривой*. Выше свободной поверхности грунтовых вод может располагаться зона капиллярной воды. Высота поднятия капиллярной воды над уровнем свободной поверхности гравитационных вод зависит от размеров капиллярных пор, которые, в свою очередь, зависят от крупности частиц грунта.

В случае если фильтрационный поток грунтовых вод движется в полностью заполненном водоносном пласте, сверху и снизу ограниченном водоупорными слоями, фильтрация будет *напорной*.

В зависимости от расхода фильтрационного потока и уклона поверхности водоупорного русла свободная поверхность его может принимать различную форму, аналогично свободной поверхности в открытых потоках. Как и в открытых потоках, движение воды в грунте может быть *установившимся* и *неустановившимся*, *равномерным* и *неравномерным*. Чаще безнапорное движение грунтовых вод бывает неравномерным. Это может происходить по разным причинам (см. главу 10):

- неправильная форма водоупорного русла;
- обратный уклон дна русла $I_0 < 0$;
- в цилиндрическом русле с прямым уклоном дна искусственно устанавливается глубина, отличная от глубины равномерного течения h_0 (от нормальной глубины), например путем откачки грунтовой воды из дренажной траншеи.

Скорости движения воды в порах между частицами грунта очень малы. Поэтому кинетическая энергия жидких частиц в грунтовых потоках ничтожно мала, и ею пренебрегают. В этом случае уравнение Бернулли для грунтового потока принимает вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_{\text{пот}} \quad (14.1)$$

или

$$H_1 = H_2 + h_{\text{пот}}, \quad (14.2)$$

где $H = z + \frac{p}{\rho g}$ — пьезометрический напор.

Для безнапорного потока величины H_1 и H_2 будут равны высотам уровней свободной поверхности в двух сравниваемых сечениях над выбранной плоскостью сравнения.

Благодаря малым скоростям движения и малым размерам пор между частицами грунта движение грунтовых вод, как правило, является *ламинарным*. Турбулентным режим движения грунтовых вод может оказаться лишь в крупнозернистых грунтах (в гравии, гальке), в каменной наброске или в трещинах скальных пород.

В этой главе мы рассмотрим, в основном, установившееся безнапорное неравномерное ламинарное движение грунтовых вод.

14.2. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ЛАМИНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

При фильтрации вода проходит через поры (пустоты), имеющиеся между частицами грунта. При этом эпюра скоростей воды, движущейся сквозь отверстие одной поры, будет иметь вид, приведенный на рисунке 14.1.

Однако при изучении грунтовых потоков бесполезно и бессмысленно пытаться учесть скорости течения в отдельных порах. Из-за извилистости и сложности формы поровых каналов эти скорости могут быть разнообразными по величине и направлению. При изучении движения грунтовых вод поступают следующим образом. Всю площадь живого сечения грунтового потока разбивают на большое число элементарных площадок, которые малы по сравнению со всей площадью живого сечения, но велики по сравнению с сечением отдельной поры.

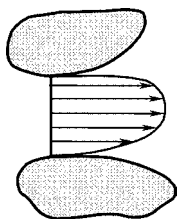


Рис. 14.1

Пусть $\Delta\omega$ — площадь одной из таких элементарных площадок, ΔQ — расход воды, проходящий через эту площадку, $\Delta\omega_{\text{пор}}$ — площадь сечений входящих в нее пор, $\Delta\omega_{\text{гр}}$ — площадь сечений частиц грунта на площадке. Тогда среднюю скорость движения воды в порах грунта определим как

$$u = \frac{\Delta Q}{\Delta\omega_{\text{пор}}}.$$

В практических расчетах движения грунтовых потоков используют условную скорость, получающуюся путем деления расхода на полную площадь элементарного сечения (включающую площадь пор и площадь частиц грунта):

$$v = \frac{\Delta Q}{\Delta\omega} = \frac{\Delta Q}{\Delta\omega_{\text{пор}} + \Delta\omega_{\text{гр}}}.$$

Эту условную скорость называют *скоростью фильтрации*.

Как видно, скорость фильтрации — это воображаемая скорость, получаемая в предположении, что вода с заданным (действительным) расходом движется через все сечение площадки (а не только через поры).

Отношение площади пор ко всей площади сечения называется коэффициентом поверхностной пористости грунта:

$$p = \frac{\Delta\omega_{\text{пор}}}{\Delta\omega_{\text{пор}} + \Delta\omega_{\text{гр}}}.$$

Отношение объема пор в некотором объеме грунта ко всему этому объему грунта (т. е. суммарному объему частиц грунта и пор) называется коэффициентом объемной пористости грунта:

$$m = \frac{\Delta V_{\text{пор}}}{\Delta V_{\text{пор}} + \Delta V_{\text{гр}}}.$$

Для однородного грунта коэффициенты поверхностной и объемной пористости равны $p = m$, поэтому в дальнейшем будем использовать величину p , называя ее *коэффициентом пористости*. Очевидно, что $p < 1$.

Между скоростью фильтрации и средней скоростью движения воды в порах существует очевидное соотношение:

$$v = pu.$$

Так как $p < 1$, то скорость фильтрации по величине всегда меньше средней скорости движения воды в порах.

Примерные значения коэффициента пористости для различных грунтов приведены в таблице 14.1.

Из таблицы видно, что скорость фильтрации составляет от 0,3 до 0,8 фактической скорости движения воды в порах грунта.

Как известно, при движении жидкости потери напора пропорциональны скорости течения в некоторой степени, показатель которой зависит от режима течения — ламинарного или турбулентного.

Так как гидравлический уклон представляет собой потерю напора на единицу длины фильтрационного потока,

$$i = \frac{dH}{dl},$$

то для движения грунтовых вод можно записать:

$$v = ki^n,$$

где v — скорость фильтрации; i — гидравлический уклон; k — коэффициент пропорциональности.

Таблица 14.1

Значения коэффициента пористости p

Род грунта	Гравий	Песок	Супесь	Суглинок	Глина	Торф
p	0,30–0,40	0,30–0,45	0,35–0,45	0,35–0,50	0,40–0,55	0,60–0,80

Для ламинарного режима течения грунтовых вод показатель степени равен единице ($n = 1$), для турбулентной фильтрации $n = 0,5-1,0$.

Тогда для ламинарного режима движения грунтовых вод

$$v = ki, \quad (14.3)$$

где v — скорость фильтрации в некоторой точке фильтрационного потока; i — гидравлический (пьезометрический) уклон в той же точке; k — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом фильтрации*.

Зависимость (14.3) называется *формулой Дарси* или *основным законом фильтрации*.

Так как i — гидравлический уклон, величина безразмерная, то коэффициент фильтрации измеряется в единицах скорости. Он представляет собой скорость фильтрации при уклоне, равном единице. Для расхода фильтрационного потока можно записать

$$\Delta Q = \Delta \omega ki. \quad (14.4)$$

Формула (14.4) также называется формулой Дарси.

Формулы (14.3) и (14.4) справедливы, как уже отмечено, для ламинарного режима. Переход от ламинарного режима к турбулентному определяется значением критерия Рейнольдса. Ламинарная фильтрация устанавливается в случае, если

$$Re = \frac{vd}{\nu} < 1-7 \quad \text{или} \quad Re = \frac{vd}{\nu p^{1/3}} < 5,$$

где d — диаметр частиц грунта; ν — коэффициент кинематической вязкости воды. В противном случае линейный закон фильтрации Дарси не выполняется.

14.3. КОЭФФИЦИЕНТ ФИЛЬТРАЦИИ

Коэффициент фильтрации характеризует водопроницаемость грунта. Он зависит от геометрических свойств пористой среды (формы и размера частиц грунта, их взаимного расположения и шероховатости поверхности) и вязкости фильтрующейся жидкости (а следовательно, от ее температуры).

Существуют три основных способа определения коэффициента фильтрации.

Полевой метод состоит в проведении натурных изысканий, в которых при откачке воды из специально устраиваемых колодцев определяют расход воды и положение уровня грунтовых вод. Зная эти величины, можно довольно точно рассчитать значение коэффициента фильтрации.

Лабораторный метод использует для определения коэффициента фильтрации прибор Дарси. Прибор (рис. 14.2) состоит из вертикально установленного цилиндра, который заполняется испытываемым грунтом, уложенным на поддерживающую его сетку.

Через грунт под соответствующим напором фильтруется вода (сверху вниз или снизу вверх). В сечениях, расположенных на известных расстояниях друг от друга, к цилиндру подключены пьезометры, измеряющие напор. Вода, проходя через грунт, попадает в мерный сосуд, с помощью которого можно определить величину фильтрационного

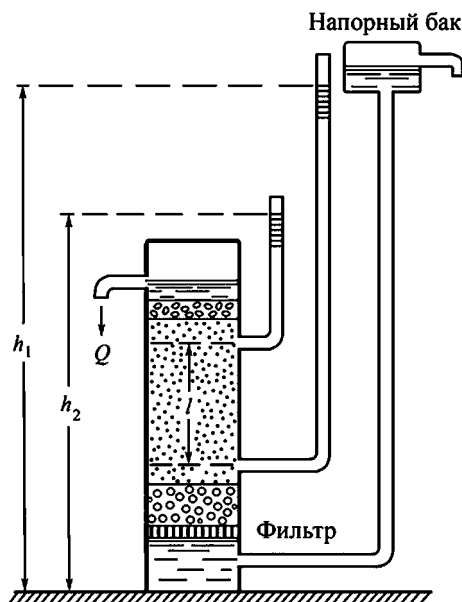


Рис. 14.2

расхода Q . Разность показаний пьезометров ($h_1 - h_2$) дает потерю напора на длине l пути фильтрации, что позволяет определить гидравлический уклон:

$$i = \frac{h_2 - h_1}{l}.$$

При известной площади ω поперечного сечения цилиндра коэффициент фильтрации находится по формуле

$$k = \frac{Q}{\omega i}.$$

И, наконец, *расчетный метод* определения коэффициента фильтрации основан на использовании многочисленных эмпирических формул, имеющих в литературе. Эти формулы позволяют рассчитать коэффициент фильтрации в зависимости от размера частиц грунта, его пористости, температуры воды и пр. Точность даже лучших из имеющихся формул невысока, в настоящее время эмпирические формулы для определения коэффициента фильтрации на практике почти не применяются.

Ориентировочные значения коэффициента фильтрации для различных грунтов приведены в таблице 14.2.

Таблица 14.2

Значения коэффициента фильтрации

Грунт	Коэффициент фильтрации k	
	м/с	м/сутки
Глина	$1,2 \cdot 10^{-8}$	0,001
Суглинок	$5,8 \cdot 10^{-7}$	0,05
Супесь	$1,2 \cdot 10^{-6}$ – $5,8 \cdot 10^{-6}$	0,1–0,5
Лесс	$2,9 \cdot 10^{-6}$ – $5,8 \cdot 10^{-6}$	0,25–0,5
Песок пылеватый	$5,8 \cdot 10^{-6}$ – $1,2 \cdot 10^{-5}$	0,5–1,0
Песок мелкозернистый	$1,2 \cdot 10^{-5}$ – $5,8 \cdot 10^{-5}$	1–5
Песок крупнозернистый	$2,3 \cdot 10^{-4}$ – $5,8 \cdot 10^{-4}$	20–50
Гравий	$2,3 \cdot 10^{-4}$ – $1,7 \cdot 10^{-3}$	20–150
Крупный галечник	0,006 и более	500 и более

14.4. ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

14.4.1. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

При равномерном движении грунтовых вод (рис. 14.3) уклон свободной поверхности и гидравлический (пьезометрический) уклон равны уклону поверхности водонепроницаемого слоя:

$$i = I = I_0.$$

Напомним, что i — гидравлический уклон, I — уклон свободной поверхности, I_0 — уклон дна.

Давление в живых сечениях равномерного потока распределено по гидростатическому закону, а значит, пьезометрический напор во всех точках выбранного живого сечения является одинаковым. При переходе от одного живого сечения к другому гидростатический напор меняется для всех струек на одну и ту же величину. То есть гидростатический уклон для всех струек один и тот же. И если коэффициент фильтрации по объему не меняется, то получаем важный вывод: при равномерном движении потока грунтовых вод скорости фильтрации у всех элементарных струек одинаковы и равны средней скорости фильтрации во всем потоке. Поэтому расход равномерного грунтового потока выразится как

$$Q = \omega v = \omega k i.$$

Для плоской задачи (когда картина течения по ширине потока не меняется) живое сечение можно считать прямоугольным и рассматривать удельные характеристики,

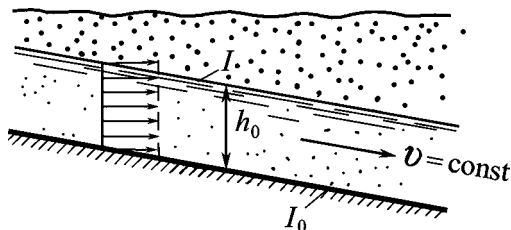


Рис. 14.3

приходящиеся на единицу ширины потока. Тогда при общей ширине потока, равной b , и глубине потока h_0 площадь живого сечения будет равна

$$\omega = bh_0.$$

Удельный расход q на единицу ширины потока определится как

$$q = \frac{Q}{b} = h_0 ki.$$

Отсюда можно определить глубину потока при равномерном движении (нормальную глубину):

$$h_0 = \frac{q}{ki}.$$

14.4.2. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В случае неравномерного движения (рис. 14.4) будем считать его плавноизменяющимся, при котором остается справедливым уравнение Бернулли (формулы (14.1) и (14.2)). В этом случае величина падения свободной поверхности равна потерям энергии на трение и поэтому уклон свободной поверхности совпадает с гидростатическим уклоном, как и для случая равномерного движения. Напомним, что для открытых наземных потоков уклон свободной поверхности равен гидравлическому лишь при равномерном движении.

При плавно меняющемся движении живые сечения можно считать плоскими и давление в каждом сечении — распределяющимся по гидростатическому закону. Поэтому в каждом выбранном живом сечении гидравлический

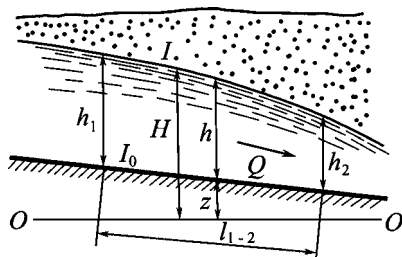


Рис. 14.4

уклон и скорость фильтрации постоянны, они меняются от сечения к сечению вдоль потока. Одинаковость скоростей фильтрации по всему живому сечению грунтового потока — характерное отличие плавно меняющегося движения подземных вод от движения в наземных потоках. Это обусловлено тем, что в наземных потоках — открытых и закрытых — контакт с неподвижными твердыми стенками и торможение жидкости происходит лишь на границах смоченного периметра потока, а грунтовый поток, протекая сквозь решетку, образованную зернами грунта, тормозится по всей площади живого сечения.

Величина пьезометрического уклона во всех точках данного живого сечения одинакова и равна уклону свободной поверхности:

$$I = -\frac{dH}{dl},$$

где H — пьезометрический напор относительно некоторой плоскости сравнения.

Скорости фильтрации, одинаковые во всех точках данного живого сечения, будут равны:

$$v = kI = -k\frac{dH}{dl}. \quad (14.5)$$

Формула (14.5) называется формулой Дюпюи. Формула Дарси определяет скорость фильтрации в любой точке области фильтрации при любом характере движения грунтовых вод (как плавно, так и резкоизменяющемся). По формуле же Дюпюи можно рассчитать среднюю скорость в плоском живом сечении только для плавноизменяющегося фильтрационного потока. Согласно формуле Дюпюи, скорость фильтрации в этом случае выражается через уклон свободной поверхности, умноженный на коэффициент фильтрации.

Пьезометрический уклон можно представить как сумму $H = z + h$, где z — отметка поверхности водоупора (дна грунтового потока), h — глубина фильтрационного потока.

Тогда

$$I = -\frac{d}{dl}(z + h) = -\frac{dz}{dl} - \frac{dh}{dl}.$$

Учитывая то, что $\left(-\frac{dz}{dl}\right) = I_0$ — уклон дна фильтрационного потока, получим

$$I = I_0 - \frac{dh}{dl}.$$

Тогда формулу Дюпюи можно записать так:

$$v = k \left(I_0 - \frac{dh}{dl} \right).$$

Выражение для расхода фильтрационного потока будет

$$Q = k\omega \left(I_0 - \frac{dh}{dl} \right)$$

или для случая плоской задачи

$$q = kh \left(I_0 - \frac{dh}{dl} \right). \quad (14.6)$$

Уравнение (14.6) — это дифференциальное уравнение неравномерного плавноизменяющегося движения грунтовых вод для общего случая цилиндрического русла. В случае, когда уклон дна равен нулю (что главным образом и встречается в практике), уравнение примет вид:

$$q = -kh \frac{dh}{dl}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{q}{k} dl = -h dh$$

или после интегрирования

$$\frac{q}{k} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l_{1-2}}, \quad (14.7)$$

где l_{1-2} — расстояние между сечениями с глубинами h_1 и h_2 .

Уравнение (14.7) также часто называют уравнением Дюпюи.

Если поверхность водоупора имеет прямой уклон, то свободная поверхность грунтового потока может принять две формы: форму кривой подпора и форму кривой спада (рис. 14.5). Из-за того, что мы пренебрегаем кинетической энергией, понятие критической глубины для грунтовых потоков не имеет смысла. Следует принять линию

критических глубин совпадающей с линией дна потока. При горизонтальном водоупоре свободная поверхность может иметь только форму кривой спада. Именно поэтому кривые свободной поверхности называют кривыми депрессии (понижения). Этим подчеркивается, что явления, подобные гидравлическому прыжку (т. е. внезапному подъему свободной поверхности), в грунтовых потоках невозможны, их свободная поверхность всегда понижается в направлении движения.

По уравнению (14.7) легко можно построить кривую депрессии потока грунтовой воды, а также найти фильтрационный расход q . Например (рис. 14.6), пускай у нас вода фильтруется через грунтовой массив длиной L , разделяющий верхний и нижний бьефы водоема с разным уровнем воды (h_1 и h_2).

Сначала найдем удельный расход воды, фильтрующейся через грунтовой массив. Полагая в уравнении (14.7) $l = L$, получим

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}.$$

Теперь построим депрессионную кривую. Пусть h — это глубина фильтрационного потока в некотором сечении грунтового массива, отстоящем на расстояние x от конца массива (от нижнего бьефа, рис. 14.6).

Тогда уравнение Дюпюи примет вид

$$\frac{q}{k} = \frac{h^2 - h_2^2}{2x},$$

откуда

$$h = \sqrt{h_2^2 + 2 \frac{q}{k} x}. \quad (14.8)$$

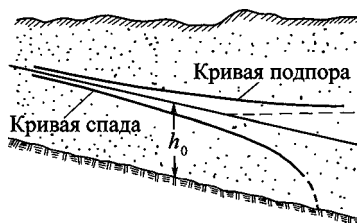


Рис. 14.5

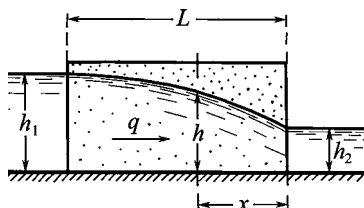


Рис. 14.6

Задаваясь различными значениями x в этом выражении и вычисляя соответствующие им значения h , в результате по точкам можно построить кривую депрессии. Подставляя в эту формулу выражение для удельного расхода q , получим уравнение для кривой депрессии в виде

$$h = \sqrt{h_2^2 + (h_1^2 - h_2^2) \frac{x}{L}}. \quad (14.9)$$

Как видно из уравнения (14.9), в случае однородного грунта кривая депрессии не зависит от величины коэффициента фильтрации. При заданных h_1 и h_2 кривая депрессии будет одинаковой для любого грунта. От коэффициента фильтрации зависит фильтрационный расход, который прямо пропорционален коэффициенту фильтрации.

14.5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ГРУНТОВЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим некоторые случаи практического применения основного закона фильтрации и полученных из него уравнений для расчета дренажных сооружений. Будем считать при этом поверхность водоупорного слоя горизонтальной.

14.5.1. ПРИТОК ГРУНТОВОЙ ВОДЫ К ВОДОСБОРНОЙ ГАЛЕРЕЕ (ДРЕНЕ)

Пусть для удаления избытка грунтовой воды и понижения ее уровня в грунте проложена водосборная галерея (дрена). Рассмотрим случай, когда такая галерея располагается непосредственно на водоупоре (рис. 14.7).

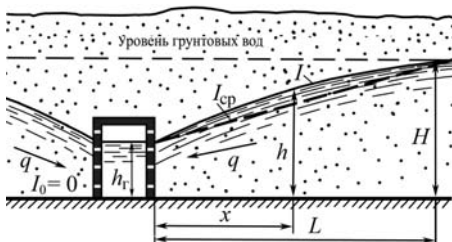


Рис. 14.7

Для того чтобы вода из грунта поступала в галерею, в галерее необходимо поддерживать уровень воды ниже, чем глубина H фильтрационного потока в грунте (мощность водоносного слоя). Это можно сделать, удаляя поступающую воду из водосборной галереи (самотеком, устроив галерею с уклоном или откачивая дренажные воды из галереи).

Для определения удельного (на один погонный метр длины) расхода q грунтовой воды, поступающей в галерею с одной стороны, воспользуемся формулой Дюпюи. Запишем ее в виде

$$q = k \frac{H^2 - h_{\Gamma}^2}{2L},$$

где H — глубина слоя грунтовой воды до устройства галереи; h_{Γ} — глубина воды в галерее; L — расстояние от галереи до сечения, в котором глубина грунтовой воды остается равной H .

Величину L принято называть *длиной влияния* дренажной галереи. На расстоянии L от галереи понижения уровня грунтовых вод практически не происходит и глубина фильтрационного потока в этом сечении равна мощности водоносного слоя. Эту длину определяют на основании данных гидрогеологических изысканий. Иногда эту длину приближенно рассчитывают по формуле

$$L = \frac{H - h_{\Gamma}}{I_{\text{ср}}},$$

где $I_{\text{ср}}$ — средний уклон кривой депрессии.

Средний уклон кривой депрессии принимают в зависимости от вида грунта по справочным значениям:

- плотные глины — 0,15;
- глинистые грунты — 0,1;
- песчано-глинистые грунты — 0,05–0,1;
- песок — 0,005–0,015;
- крупный песок, галька — 0,003–0,005.

Тогда удельный приток грунтовой воды с одной стороны дрены определится по формуле

$$q = \frac{k}{2}(H + h_{\Gamma})I_{\text{ср}}.$$

Очевидно, что общий расход грунтовой воды, поступающий на один погонный метр водосборной галереи с двух сторон, будет равен $2q$.

Зная q , по уравнению (14.8) можно построить кривую депрессии.

14.5.2. ПРИТОК ГРУНТОВОЙ ВОДЫ К КРУГЛОМУ ОДИНОЧНОМУ КОЛОДЦУ

Вертикальный круглый колодец, проходящий от земной поверхности до слоя водоупора (рис. 14.8), называется *совершенным*. Если такой колодец устроить в водонасыщенном грунте, то он заполнится водой, причем уровень воды в колодце будет совпадать с уровнем воды в грунте. При откачке воды из колодца с постоянным расходом Q уровень воды в нем будет понижаться.

Из-за разности уровня грунтовых вод и отметки воды в колодце вода из грунта со всех сторон по радиальным направлениям будет пртекать к колодцу. По мере понижения уровня воды в колодце расход воды, поступающей

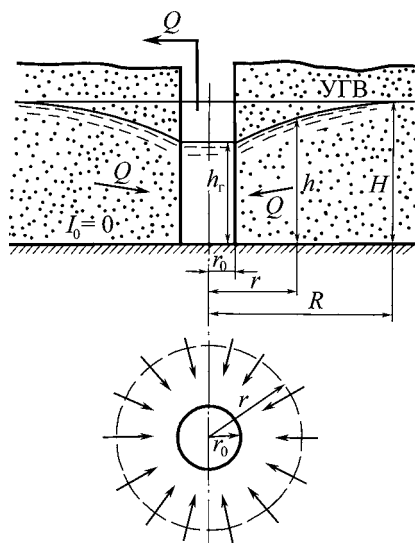


Рис. 14.8

из грунта, будет увеличиваться. В конце концов наступит момент, когда расход воды, поступающей из грунта в колодец, сделается равным расходу Q , откачиваемому из колодца. При этом получается установившееся движение грунтовой воды, глубина воды в колодце будет оставаться постоянной. Депрессионная поверхность будет представлять собой воронку, полученную в результате вращения кривой депрессии относительно вертикальной оси колодца. Живыми сечениями потока грунтовых вод будут круглоцилиндрические концентрические поверхности с вертикальными образующими и осью, совпадающей с осью колодца.

Обозначим через r_0 радиус колодца, h_r — постоянную глубину воды в колодце, H — глубину фильтрационного слоя в грунте (мощность водоносного слоя). Найдем величину расхода, откачиваемого из колодца при заданных глубинах h_r и H , а также уравнение кривой депрессии.

Рассмотрим произвольное живое сечение потока грунтовых вод, определенное радиусом r . Расход воды через это сечение равен

$$Q = \omega v.$$

Площадь живого сечения в этом случае — это площадь боковой цилиндрической поверхности

$$\omega = 2\pi rh,$$

где h — глубина потока грунтовых вод в рассматриваемом сечении.

Средняя скорость фильтрации равна

$$v = kI,$$

где I — уклон кривой депрессии в сечении.

При горизонтальном расположении слоя водоупора ($I_0 = 0$) уклон кривой депрессии можно записать в виде

$$I = \frac{dh}{dr}.$$

С учетом всех этих зависимостей основной закон фильтрации запишется в виде

$$Q = 2\pi rhk \frac{dh}{dr}.$$

Разделяя переменные, получим

$$h dh = \frac{Q}{2\pi k} \frac{dr}{r}.$$

Интегрируем это уравнение по r в пределах от радиуса колодца r_0 до радиуса рассматриваемого сечения r :

$$h^2 - h_r^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (14.10)$$

Уравнение (14.10) — это уравнение кривой депрессии. Выразим из него глубину слоя грунтового потока в явном виде, перейдя при этом к десятичным логарифмам:

$$h = \sqrt{h_r^2 + \frac{Q}{1,36k} \lg \frac{r}{r_0}}. \quad (14.11)$$

Задавая в этой формуле различными значениями текущего радиуса r и находя соответствующие значения h , строим депрессионную кривую.

Расстояние R от оси колодца до сечения, в котором глубина слоя грунтовых вод равна мощности водоносного пласта H , называется *радиусом влияния* колодца. Подставляя значения $r = R$ и $h = H$ в формулу (14.10) и переходя в ней к десятичным логарифмам, получим величину полного притока к колодцу или необходимую величину расхода откачиваемой воды:

$$Q = 1,36k \frac{H^2 - h_r^2}{\lg \frac{R}{r_0}}. \quad (14.12)$$

Если значение расхода из формулы (14.12) подставить в формулу (14.11), получим еще одно уравнение для построения депрессионной кривой:

$$h = \sqrt{h_r^2 + \frac{\lg \frac{r}{r_0}}{\lg \frac{R}{r_0}} (H^2 - h_r^2)}. \quad (14.13)$$

Из уравнения (14.13) видно, что при заданных H , h_r и R форма кривой депрессии не зависит от коэффициента фильтрации k . Видно также, что для определения расхода

колодца Q и построения кривой депрессии необходимо знать величину радиуса влияния колодца R . Ее можно установить на основании гидрологических изысканий. Иногда ее принимают в зависимости от рода грунта, например для мелкозернистого песка $R = 250$ м, для крупнозернистого песка $R = 1000$ м. Существуют также различные эмпирические приближенные зависимости для определения R . Например, часто используется эмпирическая формула Зихарда

$$R = 3000(H - h_r)\sqrt{k}.$$

Обратим внимание на то, что, поскольку величина R в расчетных зависимостях для определения расхода колодца и формы депрессионной кривой находится под знаком логарифма, погрешность в ее определении мало влияет на окончательные результаты расчета.

14.5.3. ФИЛЬТРАЦИЯ ВОДЫ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Важным для гидротехники случаем является фильтрация воды под напорными гидротехническими сооружениями — плотинами. При строительстве плотины на водопроницаемом основании через это основание устанавливается фильтрация воды (рис. 14.9).

Фильтрация под сооружениями создает противодействие на подземный контур сооружения, влияя на его устойчивость. При значительных скоростях фильтрации воз-

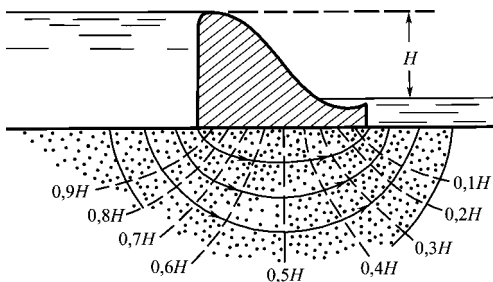


Рис. 14.9

возможен вымыв частиц грунта из-под сооружения, что уменьшает несущую способность грунта. Значительные фильтрационные расходы приводят к существенным потерям воды из водохранилища. Для исследования этих процессов необходим расчет фильтрации под сооружением, т. е. определение скорости и расхода фильтрационного потока.

Под гидротехническим сооружением устанавливается напорная фильтрация. Сверху фильтрационный поток ограничен подземным контуром сооружения, снизу — слоем водонепроницаемого грунта (водоупора). Расчетным напором для грунтового потока является разность уровней верхнего и нижнего бьефов H (рис. 14.9). Начальным живым сечением грунтового потока является дно верхнего бьефа, конечным — дно нижнего бьефа. В плоскости дна верхнего бьефа напор равен H , в плоскости дна нижнего бьефа он равен нулю. Линии пересечения живых сечений с плоскостью рисунка являются линиями равных напоров. Как видно из рисунка, длина разных линий тока различна. Следовательно, гидравлический уклон в одном и том же сечении не одинаков, не одинаковы и скорости фильтрации. Средний гидравлический уклон можно оценить как

$$\bar{I} = \frac{H}{L},$$

где L — длина пути фильтрации.

Для уменьшения скорости фильтрации и, следовательно, расхода фильтрационного потока необходимо удлинить путь фильтрации. С этой целью на участке верхнего бьефа, непосредственно примыкающем к плотине, устраивают водонепроницаемое крепление дна, называемое *понура*. Устройство понура отодвигает входное сечение грунтового потока от плотины. Кроме того, под телом сооружения в грунте устраивают водонепроницаемые шпунтовые стенки (рис. 14.10).

Полное решение задачи о фильтрации под сооружением возможно методами теоретической гидромеханики. Однако Н. Н. Павловским был разработан оригинальный и эффективный способ построения сетки гидродинамического движения, состоящей из линий тока и перпендикулярных

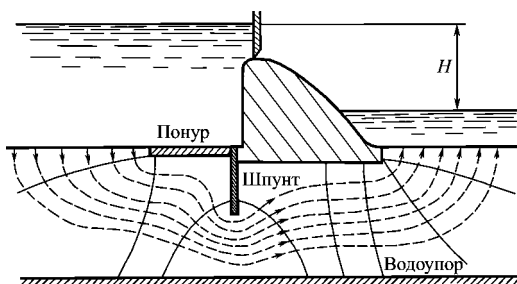


Рис. 14.10

к ним линий равных напоров. Этот метод основан на математической аналогии между движением грунтовых вод и протеканием электрического тока по проводнику. Метод получил название электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА). В соответствии с формулой Дарси, скорость фильтрации в любой точке потока

$$v = -k \frac{dH}{dl}. \quad (14.14)$$

В соответствии с законом Ома, плотность тока (сила тока на единицу площади поперечного сечения проводника)

$$i = -c \frac{dU}{dl}, \quad (14.15)$$

где $c = \frac{1}{R}$ — коэффициент электропроводности проводника; U — электрический потенциал.

Взаимными аналогами в формулах (14.14) и (14.15) являются:

- скорость фильтрации v и плотность тока i ;
- напор H и электрический потенциал U ;
- коэффициент фильтрации k и коэффициент электропроводности c .

Для построения гидродинамической сетки фильтрационного течения с использованием метода ЭГДА необходимо из электропроводящего материала (например, из специальной электропроводной бумаги или станиоля) изготовить модель, геометрически подобную исследуемой области течения — основанию сооружения, сечению во-

доносного слоя и т. п. К границам модели, изображающим дно верхнего и нижнего бьефов, присоединяются электрические шины, к которым приложена разность электрических потенциалов (рис. 14.11а). Под действием разности потенциалов в электропроводной модели возникает электрический ток и устанавливается распределение потенциалов по всей площади модели. При помощи специального устройства можно измерить величину потенциала в любой точке модели. Обычно строятся линии равных потенциалов через одну десятую от общей разности потенциалов, приложенной к модели. Их очертание совпадает с линиями равных напоров, проведенных через $0,1H$. Линии тока следует строить перпендикулярно к полученным линиям равных напоров. А можно построить линии тока, используя ту же установку ЭГДА. Для этого шины, имеющие разность потенциалов, присоединяют к водонепроницаемым контурам модели: одну — к подземному контуру сооружения, другую — к контуру водопора (рис. 14.11б). Линии равных потенциалов в этом случае совпадут с линиями тока.

Затем, используя известные формулы пересчета, рассчитывают скорости фильтрации во всей исследуемой области.

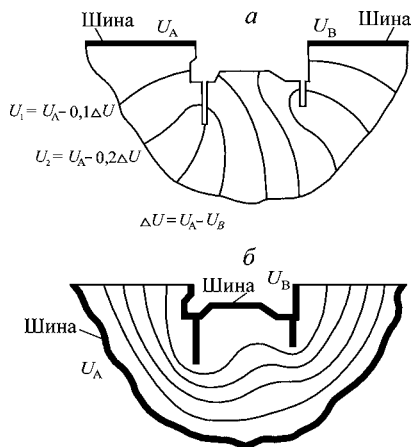


Рис. 14.11

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артемьева, Т. В.* Гидравлика, гидромашины и гидропневмопривод : учеб. пособие / Т. В. Артемьева, Т. Н. Лысенко, А. Н. Румянцева [и др.]. — М. : Изд. центр «Академия», 2006. — 336 с.
2. *Бахметьев, Б. А.* Гидравлика открытых русел. — М. : Гострансиздат, 1934. — 248 с.
3. *Башта, Т. М.* Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т. М. Башта, С. С. Рубнев, Б. Б. Некрасов. — М. : Машиностроение, 1982. — 421 с.
4. *Гиргидов, А. Д.* Механика жидкости и газа (гидравлика) : учебник для вузов. — СПб. : Изд. Политехнического университета, 2007. — 545 с.
5. *Гривнин, Ю. А.* Эксплуатация гидравлического оборудования портовых машин : учеб. пособие / Ю. А. Гривнин, Ю. К. Ивановский. — СПб. : СПГУВК, 2000. — 69 с.
6. *Гришанин, К. В.* Гидравлика. — Л. : Изд. «Речной транспорт», 1962. — 268 с.
7. *Кожевников, М. П.* Гидравлика. Общий курс : конспект лекций. — Л. : ЛПИ, 1966. — 203 с.
8. *Константинов, Ю. М.* Гидравлика. — Киев : Вища школа, 1981. — 360 с.
9. *Лимарь, Н. Н.* Гидравлика : учеб. пособие. — СПб. : СПГУВК, 2007. — 230 с.
10. *Моргунов, К. П.* Гидравлика, гидравлические машины, гидропривод : учебник. — СПб. : СПГУВК, 2010. — 546 с.
11. *Чугаев, Р. Р.* Гидравлика. — Л. : Энергоиздат, 1982. — 672 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	6
<i>Глава 1</i>	
Физические свойства жидкостей	9
1.1. Структура жидкости	9
1.2. Основные физические свойства жидкости	13
<i>Глава 2</i>	
Гидростатика	20
2.1. Силы, действующие в покоящейся жидкости	20
2.2. Гидростатическое давление и его свойства	22
2.3. Уравнения равновесия жидкости	26
2.4. Абсолютное и избыточное давление	30
2.5. Поверхности уровня	34
2.6. Поверхность жидкости во вращающемся сосуде	37
2.7. Сила давления жидкости на плоскую стенку	40
2.8. Сила давления жидкости на цилиндрическую стенку	43
2.9. Сила давления жидкости на сферические поверхности	46
2.10. Закон Архимеда	48
2.11. Устойчивость плавающих тел	50
<i>Глава 3</i>	
Гидродинамика	55
3.1. Основные понятия гидродинамики	55
3.2. Уравнение неразрывности	64
3.3. Уравнение Бернулли	66
3.3.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости	66
3.3.2. Примеры использования в технике уравнения Бернулли для идеальной жидкости	69
3.3.3. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости	75
3.4. Основные уравнения динамики жидкости	80

Глава 4

Режимы течения вязкой жидкости	83
4.1. Основные понятия	83
4.2. Ламинарное движение	85
4.3. Турбулентное движение	90

Глава 5

Гидравлические сопротивления	94
5.1. Структура потока	94
5.2. Потери напора	96
5.3. Графики И. И. Никурадзе	99
5.4. Примеры расчета местных сопротивлений	103
5.4.1. Внезапное расширение трубопровода	103
5.4.2. Постепенное расширение русла	107
5.4.3. Внезапное сужение русла (трубы)	111
5.4.4. Постепенное сужение трубы	113
5.4.5. Внезапный поворот русла	114
5.4.6. Постепенный поворот трубы	114

Глава 6

Гидравлический расчет трубопроводов	116
6.1. Длинные и короткие трубопроводы	116
6.2. Гидравлический расчет длинных трубопроводов	118
6.2.1. Расчет простого трубопровода	118
6.2.2. Последовательное соединение трубопроводов	122
6.2.3. Параллельное соединение трубопроводов	123
6.3. Гидравлический расчет коротких трубопроводов	125

Глава 7

Истечение жидкости через отверстия и насадки	130
7.1. Истечение жидкости через малое круглое отверстие	130
7.2. Истечение под уровень (затопленное отверстие)	135
7.3. Истечение через насадки	136
7.4. Истечение через прямоугольное отверстие и водослив	139
7.5. Истечение при переменном напоре	140
7.6. Выравнивание уровней жидкости в резервуарах	142

Глава 8

Гидравлический удар в трубопроводах	146
8.1. Возникновение гидравлического удара	146
8.2. Расчет повышения давления и скорости ударной волны	149

Глава 9

Равномерное установившееся безнапорное движение	155
9.1. Определения и расчетные зависимости	155
9.2. Гидравлические характеристики живого сечения потока	159
9.3. Гидравлически наивыгоднейший профиль живого сечения	161
9.4. Примеры расчета равномерного движения воды в трапециевидных каналах	164
9.5. Допускаемые скорости течения в каналах	167
9.6. Безнапорное движение жидкости в замкнутых каналах	171

Глава 10

Неравномерное движение жидкости в открытых руслах	175
10.1. Определения и предварительные замечания	175
10.2. Нормальная и критическая глубина	177
10.3. Дифференциальное уравнение установившегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах	183
10.4. Виды кривых свободной поверхности в открытых призматических руслах	187
10.4.1. Общие положения	187
10.4.2. Уклон дна меньше критического	189
10.4.3. Уклон дна больше критического	191
10.4.4. Уклон дна равен критическому	193
10.4.5. Уклон дна равен нулю	194
10.4.6. Обратный уклон дна	196
10.4.7. Заключительные замечания	197
10.5. Построение кривых свободной поверхности	197
10.5.1. Гидравлический показатель русла	198
10.5.2. Интегрирование дифференциальных уравнений неравномерного движения по методу Б. А. Бахметьева	202
10.5.3. Особенности построения кривых свободной поверхности в естественных руслах	205

Глава 11

Гидравлический прыжок	208
11.1. Основные определения и классификация	208
11.2. Основное уравнение гидравлического прыжка	210
11.3. Виды гидравлических прыжков	216

Глава 12

Водосливы	219
12.1. Классификация водосливов	219
12.2. Основная формула водослива	223
12.3. Водосливы с тонкой стенкой	224
12.4. Водосливы практического профиля	229
12.5. Водосливы с широким порогом	235

Глава 13

Сопряжение бьефов	240
13.1. Общие замечания	240
13.2. Определение глубины в сжатом сечении потока	241
13.3. Сопряжение ниспадающей струи с нижним бьефом	243
13.4. Гашение энергии потока в нижнем бьефе сооружения	246
13.5. Поверхностный режим сопряжения бьефов	248

Глава 14

Движение грунтовых вод	250
14.1. Общие замечания	250
14.2. Основной закон ламинарной фильтрации	252
14.3. Коэффициент фильтрации	255

14.4. Движение грунтовых вод	258
14.4.1. Равномерное движение	258
14.4.2. Неравномерное движение	259
14.5. Примеры расчета грунтовых потоков	263
14.5.1. Приток грунтовой воды к водосборной галерее (дрене)	263
14.5.2. Приток грунтовой воды к круглому одинокному колодцу	265
14.5.3. Фильтрация воды под гидротехническими сооружениями	268
Литература	272

Константин Петрович МОРГУНОВ

ГИДРАВЛИКА

У ч е б н и к

Зав. редакцией инженерно-технической
литературы *Т. Ф. Гаврильева*
Ответственный редактор *Н. А. Сметанина*
Технический редактор *А. С. Кузьмина*
Корректор *М. Э. Дылева*
Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*
Верстка *Е. Е. Егорова*
Выпускающие *Н. А. Крылова, Е. П. Королькова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 02.07.14.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,12. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов
в ОАО «ИПК «Чувашия»».
Мининформполитики Чувашии.
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.
Тел.: (8352) 56-00-23