

M.M.Mirsaidov
B.Donayev
Sh.Xudoynazarov
O.Alimardonov



TIAME
NRU
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

NAZARIY MEXANIKA

misol va masalalar

22.2 Ya-73

M-39 O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

**MIRSAIDOV MIRZIYOD
DONAYEV BURXON
XUDAYNAZAROV SHERZOD
ALMARDONOV OYBEK**

NAZARIY MEXANIKA

I QISM

(MISOL VA MASALALAR)

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan o'quv qo'llanma sifatida foydalanishga
tavsiya etilgan*

**TOSHKENT
«ADABIYOT»
2023**

UDK: 30.121ya73
BBK: 539.3/.6(075.8)
M 31

M.Mirsaidov, B.Donayev, SH.Xudoynazarov, O.Almardonov
M 31 **Nazariy mexanika. I-qism (misol va masalalar).** O'quv qo'llanma
«Adabiyot» nashriyoti, 2023. – 292 b.

Taqrizchilar:

K.S.Sultonov – O'zb.R.F.A. "Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi" instituti direktori, fizika-matematika fanlari doktori, professor.

S.X. Yoqubov – QMII "Umumtexnika fanlari" kafedrası professori, texnika fanlari doktori, professor.

O'quv qo'llanmada "Nazariy mexanika" fanining statika va kinematika bo'limlari bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni o'tkazish uchun zarur bo'ladigan nazariy ma'lumotlar, masalalarni yechish tartibi, mustaqil yechish uchun misol va masalalar to'liq keltirilgan. Ba'zi masalalar har xil usullar bilan yechilib, masalalarning yechilish tartibi batafsil tushuntirilgan va olingan natijalar solishtirilib qo'llanilgan usullar tahlil qilingan.

Ushbu o'quv qo'llanma oliy o'quv yurtlarining mashinasozlik, sanoat, qurilish, suv xo'jaligi va texnikaning boshqa yo'nalishlari bo'yicha bilim oluvchi bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, undan magistrlar, ilmiy tadqiqotchi va izlanuvchilar ham keng foydalanishlari mumkin.

The textbook contains the necessary materials for the course of "Theoretical Mechanics" for practical exercises in statics and kinematics; it discusses in detail theoretical questions, methods of solving problems and gives a sufficient number of examples of their independent implementation. It also gives a detailed solution to some problems (various options) and the solutions obtained are compared to analyze the effectiveness of the technique.

This textbook is intended for bachelor students studying in mechanical engineering, industry, construction, water management, and other technical areas. It can also be useful for masters, graduate students, and researchers.

ISBN 978-9943-9178-0-4



© M.Mirsaidov, B.Donayev, SH.Xudoynazarov, O.Almardonov, 2023
© «Adabiyot» nashriyoti, 2023

KIRISH

Bizni juda hayratlanarli va cheksiz olam o'rab olgan bo'lib, ushbu olam gigant yulduzlar, planetalar, sirli va qorong'u bo'shliqlar, Quyosh sistemasi, jonli va jonsiz jismlardan tashkil topgan.

Harakat tabiatning ajralmas qismi bo'lib, olamda bo'layotgan barcha voqea-hodisalarni o'zida qamrab oladi. Har qanday harakat jismlarning biror bir ko'chishlarining yig'indisidan tashkil topadi, masalan, osmon jismlarining o'z holatini o'zgartirishi, yer yuzasidagi moddiy jismlarning bir-biriga nisbatan o'z vaziyatini o'zgartirishi.

Nazariy mexanika moddiy jismlarning mexanik harakatining umumiy qonuniyatlari va jismlarning muvozanat holatlari haqidagi fandir.

Mexanik harakat deganda jismlarning vaqt davomida bir-biriga nisbatan o'z vaziyatini o'zgartirishi tushuniladi. Kundalik hayotimizda har kuni mexanik harakatning har xil ko'rinishlarini kuzatamiz. Tabiatda Yerning Quyosh atrofida aylanishi, shamolda zarrachalarning harakati, suv toshqinlari harakati, yulduzlar harakati, texnikada esa samolyot, vertolyotlarning fazodagi harakatlari, kema va korablarning suvdagi harakati, *mashina, bino va inshootlarning Yer yuzasidagi tinch turgan boshqa jismlarga nisbatan harakatini misol qilishimiz mumkin.*

Mexanik o'zaro ta'sir deganda moddiy jismlarning bir-biriga ko'rsatadigan ta'sirida bu jismlar harakatlarining o'zgarishi yoki bo'lmasa ular shakllarining o'zgarishi (deformatsiyalanishi) tushuniladi. Bu ta'sirlarning asosiy miqdoriy o'lchami sifatida kuch deb ataluvchi kattalik qabul qilingan. Mexanik o'zaro ta'sirlarga butun olam tortilish qonuni asosida moddiy jismlarning o'zaro tortishishi, suyuqlik va gaz zarralarining bir-biriga o'zaro ta'sirlari va boshqalar misol bo'la oladi.

«Nazariy mexanika» fanining asosiy maqsadi – talabalarda moddiy nuqta va mexanik sistema harakat qonuniyatlariga oid masalalarni yechish malakasini shakllantirishdan iboratdir.

«Nazariy mexanika» fanning asosiy vazifalari bo'lajak mutaxassisning kelgusidagi ishlab chiqarish va ilmiy texnikaviy faoliyati jarayonida uchraydigan turli mexanik masalalar va muammolarni mustaqil ravishda hal qilish, ishlab chiqarish jarayoniga yangi zamonaviy texnologiyalarni joriy

qilish, ishlab chiqarish jarayonini boshqarish hamda bo‘lajak muhandisning dunyoqarashini, umumiy madaniyatini, aqliy qobiliyatini o‘stirishdan iboratdir.

Nazariy mexanikani o‘rganish jarayonida talaba mexanikaning asosiy tushunchalari, qonunlari va shu qonunlardan kelib chiqadigan asosiy teoremlar orqali moddiy nuqta hamda mexanik sistemaga ta’sir etayotgan kuchlar, ularning kinematik xarakteristikalarini aniqlash usullarini bilishi, olgan bilimni nazariy mexanikaning muhandislik va maxsus fanlarga oid masalalarini yechilishiga tatbiq eta olishi zarur.

Uzoq o‘tmishda insonlar qo‘l mehnatini soddalashtiruvchi yoki yengillashtiruvchi qurilmalarni «mexanik san’at» deb qaraganlar. **Mexanika** so‘zi grekcha so‘z bo‘lib, “mashina” yoki “inshoot” degan ma’nolarni bildiradi. Qadimda «ziyraklik yoki tadbirkorlik» bilan yaratilgan barcha qurilma va jihozlar lotin tilida «machina» deb atalgan.

Nazariy mexanika fani – boshqa fanlar kabi insonlarning ishlab chiqarishga munosabatidan, ya’ni qo‘l mehnatini soddalashtirish, kam kuch sarflab, ko‘p ish bajarishni amalga oshirilishi natijasida yuzaga keldi va 25 asr davomida rivojlanib kelmoqda. Nazariy mexanika fizika-matematika fanlari singari umumilmiy fundamental fanlarning biri sifatida o‘rganiladi. Ushbu fanni o‘rganish uchun talabalar fizika, elementar matematika, oliy matematika, informatika va hisoblash texnikasi, chizma geometriya, muhandislik grafikasi kabi fanlardan yetarli bilimlarga ega bo‘lishlari lozim.

Ushbu o‘quv qo‘llanma texnika, mashinasizlik, sanoat va qurilish sohalari bo‘yicha bakalavriat yo‘nalishlari talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, undan magistrlar, ilmiy tadqiqotchi va izlanuvchilar ham o‘z ilmiy ishlarini bajarishda keng qo‘llashlari mumkin.

I BOB. STATIKA. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI.

1.1 *Statikaning asosiy tushuncha va qoidalari*

Kuchlar to'g'risida umumiy bilim beruvchi va kuchlar ta'siridagi jismlarning muvozanat holatini o'rganuvchi "Nazariy mexanika" fanining bo'limi **statika** deyiladi.

Jismlarning muvozanati deganda ularning boshqa harakatdagi jismlarga nisbatan tinch holati tushuniladi.

Mexanik harakat fazoda vaqt mobaynida sodir bo'ladi. Nazariy mexanikada haqiqiy fazo va vaqt modeli sifatida ularning oddiy modellari – absolyut fazo va absolyut vaqt qabul qilinadi. Absolyut fazo va vaqt bir-biriga bog'liq emas deb hisoblanadi. Nisbiylik nazariyasidagi fazo va vaqt modelida ular bir-biriga bog'liq bo'ladi. Absolyut fazo uch o'lchamli, bir jinsli va izotrop qo'zg'almas Yevklid fazosi deb tushuniladi. Kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, real fizik fazoning o'lchamlari katta bo'lmagan sohalari uchun Yevklid geometriyasi to'g'ri. Nazariy mexanikada absolyut vaqt to'xtovsiz o'zgaradigan kattalik deb hisoblanadi, u o'tmishdan kelajakka qarab oqadi. Vaqt bir jinsli, fazoning barcha nuqtalarida bir xil va materiya harakatiga bog'liq bo'lmaydi deb qaraladi.

Jismlarning bir-biriga nisbatan fazodagi o'rnini o'zgartirishi, muvozanat holatida qolishi yoki qolmasligi bu jismlarga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'ladi.

Demak, Nazariy mexanika fanining asosiy tushunchalari – fazo, vaqt, kuch, moddiy nuqta, absolyut qattiq jism tushunchalaridan iborat. Shu sababli bu tushunchalarga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Fazo – bir vaqtda mavjud bo'lgan ob'ektlarning joylashish tartibini ifodalaydi.

Vaqt – sodir bo'layotgan hodisalarning (harakatning) ketma-ket o'zgarish tartibini ifodalaydi.

Kuch – bir jismning ikkinchi jismga ta'sirining miqdoriy o'lchovini xarakterlovchi kattalikni bildiradi.

Moddiy nuqta – qaralayotgan sanoq sistemasiga nisbatan o'lchamlari e'tiborga olinmaydigan darajada kichik, massasi bir nuqtada to'plangan jismdir.

Absolyut qattiq jism – istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofa doimo o'zgarishsiz qoladigan jismdir.

Nazariy mexanika fanida bu tushunchalarning qanday qabul qilinishini aniqlash uchun Nyutonning «*abstraksiya usuli*»dan foydalanamiz. Chunki Nazariy mexanika tabiiy fanlardan hisoblanib, u ko'plab o'tkazilgan kuzatish va tajriba natijalari asosida turli harakat jarayonlarining borishini matematik tahlil yordamida aniqlab beruvchi Nyuton qonunlariga asoslangan.

I.Nyuton jismning harakatini o'rganishda ko'p sonli bog'lanishlar mavjudligi tufayli asosiy bog'lanishlar va qonuniyatlarni kuzatish orqali ularni birinchi va ikkinchi darajali turlarga ajratib oladi. U jismning harakatiga unchalik katta ta'sir qilmaydigan omillarni hisobga olmaslikni taklif etadi. Sodir bo'layotgan hodisani tahlil qilayotganda eng muhimi va asosiyini ajratib oladi, ikkinchi darajali ahamiyatsizlaridan esa voz kechadi. I.Nyuton ilmiy abstraksiya usulidan foydalanib, tekshiralayotgan hodisaning shartli sxemasini yaratdi.

Jismlarning fazoviy xossalarini aniqlashda asosiy kattalik birligi sifatida **kesma uzunligi** qabul qilingan. Nazariy mexanikada uzunlik birligi sifatida etalon-sterjenning ikkita tangasi orasidagi masofa – metr (***m***) olinadi, yuza va hajm mos ravishda kvadrat metr (***kv.m***) va kub metrlar (***kub.m.***)da o'lchanadi.

Har bir harakatda kamida ikkita jism ishtirok etadi, shu sababli harakatni tavsiflash uchun jismlardan birini sanoq jism sifatida qabul qilish mumkin. Sanoq jism sifatida ixtiyoriy jismni olish mumkin. Agar shu jismga koordinatalar sistemasi va soatni o'rnatdik, ular birgalikda **sanoq sistemasini** tashkil qiladi.

I. Nyuton qonunlari doimo barcha koordinatalar sistemasi uchun ham o'rinli bo'lavermaydi. Shu sababli Nazariy mexanikada – hech bo'limganda bitta inersial sanoq sistemasi (qo'zg'almas sanoq sistemasi) mavjud bo'ladiki, bu sanoq sistemasi uchun Nyuton qonunlari o'rinli bo'ladi deb qabul qilinadi. Ko'plab o'tkazilgan tajribalar, o'lchashlar va kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, bunday inersial sanoq sistemasi uchun markazi Quyoshda bo'lgan va o'qlari uzoq „qo'zg'almas“ yulduzlar tomon yo'nalgan geliosentrik yoki asosiy inersial sanoq sistemasini qabul qilish mumkin.

Tajribalarning ko'rsatishicha, Nazariy mexanika fanida qaraladigan harakatlarda fazoning xossalari vaqtning o'zgarishiga va sodir bo'layotgan harakatning o'zgarishiga bog'liq bo'lmaydi. Boshqacha aytganda, bir sanoq sistemasidan boshqasiga o'tishda sanoq sistemasi bilan bog'langan jismlarning fizikaviy xossalarini emas, balki faqat sanoq sistemasining geometrik xossalarinigina e'tiborga olish kerak. Ma'lumki, bunday xossalarga bo'ysunuvchi absolyut fazo – uch o'lchovli Evklid fazosini bildiradi. Demak, Nazariy mexanikada fazo uchun **uch o'lchovli Yevklid fazosi** qabul qilinadi.

Nazariy mexanikada **vaqt** fazoning har qanday qismida ham bir me'yorda o'tadi va u fazo kabi uzluksiz hamda bir jinsli deb qaraladi. Tekshirishlar shuni ko'rsatadiki, jismlarning yorug'lik tezligi ($3 \cdot 10^{10}$ m/s)ga nisbatan juda kichik tezlik bilan harakatlanishida vaqt jismlarning xossalari va ularning harakatiga bog'liq emas, ya'ni vaqtni absolyut vaqt deb qarash mumkin. Vaqt jarayonning davomiylik o'lchovidir. Shuning uchun o'tgan vaqt kattalikni biror jarayon davomiyligi bilan o'lchash yoki solishtirish orqali aniqlanadi. Vaqt o'lchov birligi sifatida Quyosh sutkasining, ya'ni Yerning o'z o'qi atrofida bir marta to'la aylanish vaqtining $1/86400$ qismi – sekund (s) qabul qilingan.

Nazariy mexanikaning asosiy tushunchalaridan yana biri **moddiy nuqta** tushunchasidir. Jismlarni moddiy nuqta deb qarashdan asosiy maqsad uning harakat qonuni va asosiy kinematik xarakteristikalarini katta aniqlikda aniqlashdan iboratdir. Moddiy nuqta deb qarashda uning o'lchamlari qabul qilingan sanoq sistemasida biror kattalikka solishtirish orqali belgilanadi. Masalan, Toshkent shahridan London shahriga uchayotgan samolyotning harakatini o'rganishda shu shaharlar orasidagi masofaga nisbatan samolyotning o'lchamlarini juda kichik deb qaraladi. Albatta moddiy nuqta deb qarash nisbiy bo'lib, birinchi bosqichdagina moddiy nuqta deb qarab, hisoblashning keyingi bosqichlarida ob'yektning real o'lchamlariga ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanib masalaning aniq yechimi topiladi. Har qanday jismni moddiy nuqtalar to'plamidan tashkil topgan deb qarash mumkin.

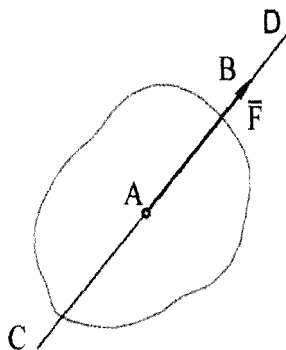
Tabiatda uchraydigan barcha qattiq jismlar tashqi ta'sirlar natijasida katta yoki kichik miqdorda o'z shaklini va o'lchamlarini o'zgartiradi, ya'ni

deformatsiyalanadi. Deformatsiyaning qanday darajada ko‘rinishi jismlarning materiali, ularning geometrik shakli, o‘lchamlari va ta’sir etuvchi kuchlarga bog‘liq. Turli xil inshoot va konstruksiyalar mustahkamligini ta’minlash uchun ularning materiali va o‘lchamlari shunday tanlanadiki, ularda tashqi kuchlar ta’siridan hosil bo‘ladigan deformatsiya juda ham kichik bo‘lishi kerak. Shu sababli qattiq jismlarning muvozanat shartlarini o‘rganishda ularning juda kichik deformatsiyalarini e’tiborga olmasa ham bo‘ladi, ya’ni ularni **absolyut qattiq jism** deb qaraladi. Bundan keyin statika masalalarini yechishda barcha jismlarni absolyut qattiq jism deb qaraladi yoki qisqa qilib qattiq jismlar deb ataladi.

Berilgan jismning muvozanat holati yoki harakati uning boshqa jismlar bilan mexanik o‘zaro ta’sir xarakteriga bog‘liq bo‘ladi. Moddiy jismlar o‘zaro ta’sirining miqdoriy o‘lchoviga **kuch** deyiladi.

Kuch – vektor kattalik. Kuchning jismga ko‘rsatadigan ta’siri uchta faktor orqali xarakterlanadi (1.1-rasm):

- 1) kuch qo‘yilgan nuqta;
- 2) kuchning yo‘nalishi;
- 3) kuchning miqdori (moduli).



1.1-rasm

Kuchning moduli kuchni tanlangan o‘lchov birligi bilan solishtirish orqali topiladi. Kuchning asosiy o‘lchov birligi Xalqaro o‘lchov birliklar sistemasida (SI) Nyuton (N) deb qabul qilingan. Kuch texnik sistemada (kg.k, t.k) larda ham o‘lchanishi mumkin: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$; Kuch dinamometr asbobi yordamida o‘lchanadi. Kuchlar boshqa vektor kattaliklar kabi ustida chiziqcha chizilgan, masalan \vec{F} , \vec{P} , \vec{Q} harflar bilan belgilanadi. Kuch modulini esa - $|\vec{F}|$, $|\vec{P}|$, $|\vec{Q}|$ yoki ustida chizig‘i bo‘lmagan o‘sha F, P, Q harflari bilan belgilash qabul qilingan. Kuch chizmada

kuchning qo'yilish nuqtasi, yo'nalishi va moduli yo'naltirilgan kesma bilan ifodalanadi (1.1- rasm).

Kesmaning uzunligi belgilangan masshtabda kuchning modulini, kesmaning yo'nalishi kuchning yo'nalishini ifodalaydi. A nuqta kuchning quyilish nuqtasi (boshi), B nuqta kuchning uchi deyiladi. Kuch yo'nalgan SD chiziqqa kuchning ta'sir chizig'i deyiladi (1.1- rasm).

Agar jismga bir nechta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsa, bunday kuchlar to'plamiga kuchlar sistemasi deyiladi va $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ deb belgilanadi.

Ta'sir etayotgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasini boshqa biror $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ kuchlar sistemasi bilan almashtirilganda jismning muvozanat holati o'zgarmasa, bunday kuchlar sistemasiga ekvivalent kuchlar sistemasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \infty (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n), (1.1)$$

Agar kuchlar sistemasi bitta kuch bilan almashtirilganda jism holati o'zgarmasa, bu kuch berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deyiladi va quyidagicha belgilanadi. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \infty \vec{R}$.

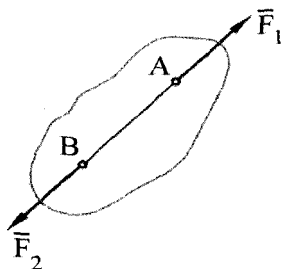
Kuchlar sistemasi ta'sirida jism muvozanatda (tinch holatda) bo'lsa, bunday kuchlar sistemasiga muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi deyiladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \infty \vec{O}, (1.2)$$

Statika masalalari geometrik shakllar yasash yo'li bilan (geometrik usul) va sonli hisoblash (analitik usul) yordamida yechiladi.

1.2 Statika aksiomalari

1-aksioma. Erkin absolyut qattiq jismga qo'yilgan ikkita kuch ta'sirida jism muvozanatda bo'lishi uchun faqat va faqat, bu kuchlar miqdor jihatidan teng, yo'nalish jihatdan kuchlar qo'yilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishlari lozim.

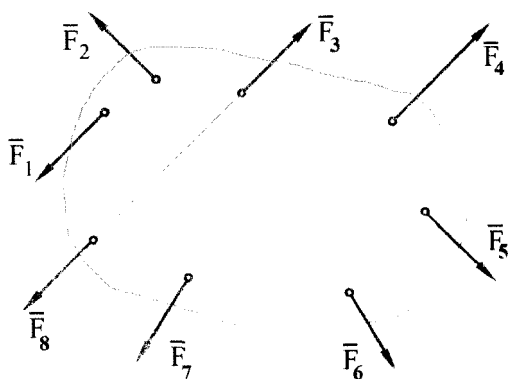


1.2-rasm

Bu aksioma inersiya aksiomasi deb yuritiladi. Unga ko‘ra – o‘zaro muvozanatlashgan kuchlar ta‘siridagi jism muvozanatda yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakatda bo‘ladi. Erkin jismning istalgan ikki nuqtasiga miqdorlari teng, yo‘nalishi esa shu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘yicha qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan ikkita kuch ta‘sir etsa, bunday kuchlar o‘zaro muvozanatlashadi (1.2-rasm).

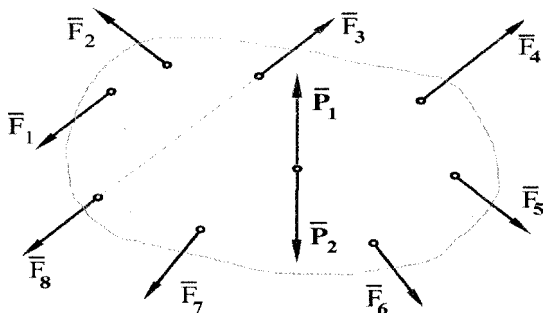
2-aksioma. Absolyut qattiq jismga qo‘yilgan kuchlar sistemasiga muvozanatlashgan sistema qo‘shilsa yoki undan ayrilsa, sistemaning jismga ko‘rsatadigan ta‘siri o‘zgarmaydi.

Ushbu aksiomada jismga bir nechta kuchlardan iborat kuchlar sistemasi ta‘sir etayotgan bo‘lsa, shu sistema tarkibiga boshqa ikkita kuchdan iborat muvozanatlashgan sistema olib kelib qo‘yilsa yoki shu sistema tarkibidan muvozanatlashgan sistemani tashkil qiluvchi ikki kuch olib tashlansa jismning avvalgi holati o‘zgarmasligi keltirilgan.



1.3-rasm

1.3-rasmda keltirilgan qattiq jismga 8 ta kuchdan iborat kuchlar sistemasi ta‘sir qilyapti. Kuchlar sistemasi tarkibida miqdorlari bir-biriga teng, yo‘nalishlari qarama-qarshi bo‘lgan \vec{F}_3 va \vec{F}_8 kuchlar mavjud bo‘lib, bu ikki kuch birgalikda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi. Jismga qo‘yilgan kuchlar sistemasi tarkibidan shu ikkala kuchni olib tashlansa, jismning hozirgi holati umuman o‘zgarmaydi.



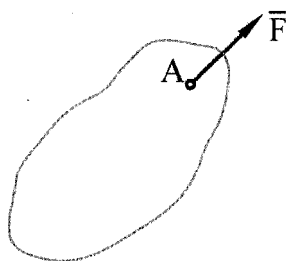
1.4-rasm

Shu jismga boshqa ikkita kuchdan iborat ($\overline{P}_1, \overline{P}_2$) muvozanatlashgan kuchlar sistemasi olib kelib qo'yilsa ham jismning hozirgi holati umuman o'zgarmaydi (1.4-rasm.). Chunki biz yuqorida muvozanatlashgan yoki nolli sistema miqdorlari bir-biriga teng, yo'nalishlari esa bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikki kuchdan tashkil topishini aytib o'tgan edik.

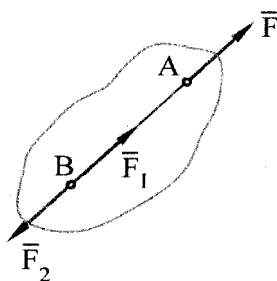
Ushbu aksiomadan kelib chiqadigan va kelgusida statika masalalarini yechishda qo'llaniladigan asosiy xulosalarni ko'rib chiqamiz.

Natija. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchni o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab, jismning istalgan nuqtasiga ko'chirilganda kuchning qattiq jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi.

a)



b)

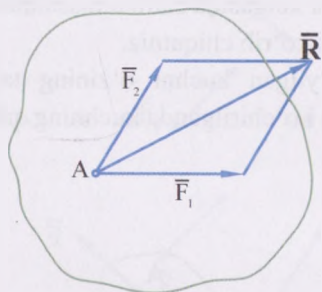


1.5-rasm

Isboti. Qattiq jismning biror A nuqtasiga \overline{F} kuch qo'yilgan bo'lsin (1.5-rasm, a). Bu kuchning ta'sir chizig'idan ixtiyoriy B nuqta olamiz. Bu nuqtaga muvozanatlashgan ($\overline{F}_1, \overline{F}_2$) sistemani keltirib qo'yamiz (1.5-rasm,

b). Bunda $\vec{F}_1 = \vec{F}$ va $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ shart bajarilsin. Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi ta'sirida jismning holati o'zgarmaydi. Chunki \vec{F} va \vec{F}_2 kuchlar muvozanatlashgan sistemani tashkil etadi. Muvozanatlashgan sistemani tashlab yuboramiz. Natijada jism B nuqtaga qo'yilgan \vec{F}_1 kuch ta'sirida qoladi. Shartga ko'ra esa $\vec{F}_1 = \vec{F}$ tenglik o'rinli. Demak, jismning holati o'zgarmaydi. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuch sirpanuvchi vektorni ifodalaydi.'

3-aksioma (parallelogramm aksiomasi). Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarga qurilgan parallelogrammning kuchlar qo'yilgan nuqtasidan o'tuvchi diagonaliga teng. \vec{F}_1, \vec{F}_2 vektorlar asosida qurilgan parallelogrammning diagonaliga teng \vec{R} vektor \vec{F}_1, \vec{F}_2 vektorlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi (1.17-rasm).



1.6-rasm



1.7-rasm

Kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bilan kuchlar sistemasining geometrik yig'indisi alohida-alohida tushunchalar bo'lib hisoblanadi. Ularni bir-biri bilan almashtirib yubormaslik kerak. Kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga ega bo'lmasligi mumkin, lekin geometrik yig'indiga ega bo'ladi.

Ushbu vektor – \vec{R} teng ta'sir etuvchi vektor deyiladi, ya'ni uning shu jismga ta'siri, yuqoridagi ikkita kuchning ta'siriga teng bo'ladi, vektor va skalyar tenglamalar quyidagicha yoziladi:

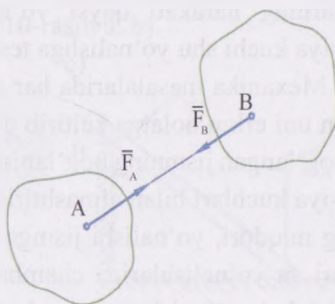
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (1.3)$$

1.7-rasmda ikkita zanjir vositasida yuk ko'tarish kranining ishlash jarayoni keltirilgan bo'lib, zanjirlarda hosil bo'ladigan taranglik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi ular asosida qurilgan parallelogramning diagonali bo'ylab yo'nalishi ko'rsatilgan.

4-aksioma (Nyutonning uchinchi qonuni). Har qanday muvozanatdagi ikkita jism bir-biri bilan miqdor jihatidan teng, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sirlashadi.

Bu qonun mexanikaning asosiy qonunlaridan biri hisoblanadi.

A jism B jismga qandaydir \vec{F}_A kuch bilan ta'sir etsa, B jism ham A jismga shu kuchga miqdor jihatdan teng, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan \vec{F}_B kuch bilan ta'sir etadi (1.8-rasm).



1.8-rasm

Shuni e'tirof etish kerakki, \vec{F}_A va \vec{F}_B kuchlar turli jismlarga qo'yilgan bo'lganligi uchun ular o'zaro muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etmaydi.

5-aksioma. Kuchlar sistemasi ta'siridagi deformatsiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning avvalgi muvozanat holati o'zgarmaydi.

Bu qonun jismlarning qotish prinsipi deyiladi. Zanjirning zvenolari bir-biriga payvandlanganda uning muvozanati buzilmaydi. Chunki, muvozanatda bo'lgan jism qotishdan oldin ham, qotgandan keyin ham bir xil kuchlar sistemasi ta'sirida bo'ladi.

1.3 Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari

Tabiatdagi barcha jismlarni ikkiga ajratish mumkin: erkin jismlar va bog'langan (erksiz) jismlar.

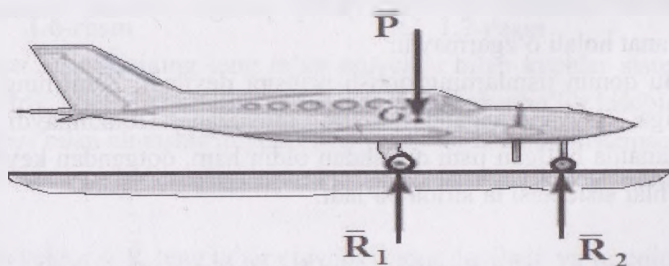
Agar jism fazoda istalgan yoʻnalishda harakatlana olsa, bunday jismga erkin jism deyiladi. Masalan, fazodagi havo shari.

Jismning harakati biror sabab bilan cheklangan yoki chegaralangan boʻlsa, bu jism bogʻlangan (erksiz) jism deyiladi. Bogʻlangan jismlarga misol qilib, stol ustiga qoʻyilgan yuk, shipga osilgan qandil va boshqalarni misol keltirishimiz mumkin. Yuk uchun bogʻlanish vazifasini stol, qandil uchun bogʻlanish vazifasini zanjir bajaradi.

Jismning harakatini cheklovchi barcha jismlar (toʻsiqlar) bogʻlanishlar deyiladi. Bogʻlanishning jismga koʻrsatadigan taʼsiriga bogʻlanish reaksiya kuchi yoki qisqacha bogʻlanish reaksiyasi deyiladi. Bogʻlanishdagi jismlarning harakati qaysi yoʻnalishda cheklangan boʻlsa, bogʻlanish reaksiya kuchi shu yoʻnalishga teskari yoʻnalgan boʻladi.

Mexanika masalalarida har qanday jismning muvozanatini tekshirish uchun uni erkin holatga keltirib olish kerak. Erkin holatga keltirish degani esa bogʻlangan jismning bogʻlanishlari (tayanchlari) ni bogʻlanish (tayanch) reaksiya kuchlari bilan almashtirish demakdir. Bogʻlanish reaksiya kuchlarining miqdori, yoʻnalishi jismga taʼsir etayotgan tashqi kuchlarning miqdorlari va yoʻnalishlariga chambarchas bogʻliqdir. Mexanika masalalarini yechishda bogʻlanish reaksiya kuchlarining miqdori va yoʻnalishini toʻgʻri aniqlash juda muhim ahamiyatga ega.

Masalan, tinch holatda turgan samolyot oʻz tayanch gʻildiraklari orqali muvozanat holatini saqlab turadi (1.9-rasm). Samolyotning umumiy ogʻirligini samolyot turgan maydon koʻtara olishi uchun asosda samolyot ogʻirliklariga qarama-qarshi yoʻnalishda reaksiya kuchlari boʻlishi kerak.

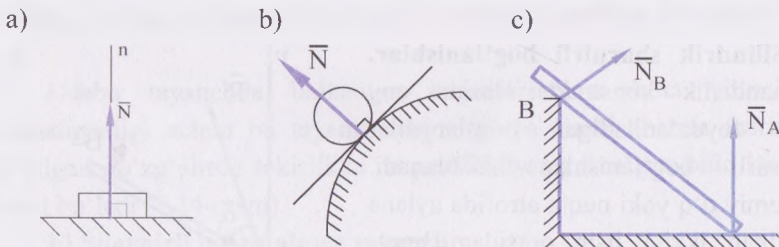


1.9-rasm

Har qanday jismni erkin holatga keltirish uchun avvalo bog‘lanishlarning turlari, shu bog‘lanishlarda hosil bo‘ladigan bog‘lanish reaksiya kuchlarining soni va yo‘nalishini bilish zarur. Shuning uchun avvalo bog‘lanishlarning asosiy turlari bilan tanishamiz.

1. Silliq sirt yoki tayanch.

Ishqalanish e‘tiborga olinmaydigan sirtga silliq sirt deyiladi. Sirt bilan jism orasida ishqalanish bo‘lmaganda jism sirt bilan biror nuqtada tayanib turgan bo‘lsa, silliq sirt jismning shu sirtga o‘tkazilgan normal bo‘yicha harakatini cheklaydi. Shu sababli silliq sirtning reaksiya kuchi \vec{N} sirtga o‘tkazilgan normal bo‘yicha yo‘naladi (1.10-rasm a, b).



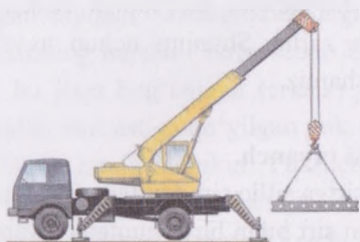
1.10-rasm

Agar to‘sin A nuqtada polga, B nuqtada vertikal devorga tayangan bo‘lsa (1.10-rasm, c), tayanchning \vec{N}_A reaksiya kuchi pol tekisligiga perpendikulyar va vertikal devorning \vec{N}_B reaksiya kuchi esa B nuqtadan to‘sin tekisligiga perpendikulyar ko‘rinishda yo‘naladi.

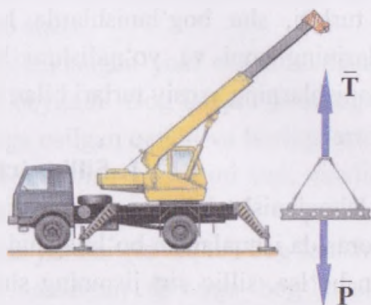
2. Arqon, ip, zanjir, tros vositasidagi bog‘lanishlar.

Agar jism egiluvchan, cho‘zilmaydigan arqon, ip, zanjir yoki trosga osib qo‘yilgan bo‘lsa, u holda bog‘lanish reaksiyasi kuchi arqon bo‘ylab osilish nuqtasi tomonga yo‘nalgan bo‘ladi (1.11-rasm).

a)



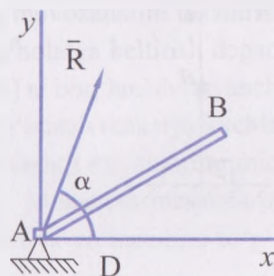
b)



1.11-rasm

3. Silindrik sharnirli bog'lanishlar.

Muhandislik konstruksiyalarida eng ko'p foydalaniladigan bog'lanishlar sharnirli bog'lanishlar hisoblanadi. Umumiy o'q yoki nuqta atrofida aylana oladigan ikkita jism orasidagi bog'lanishga sharnir deyiladi.

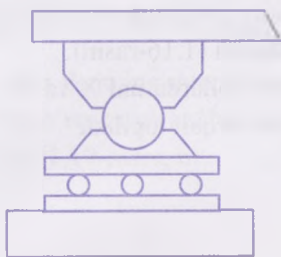


1.12 – rasm

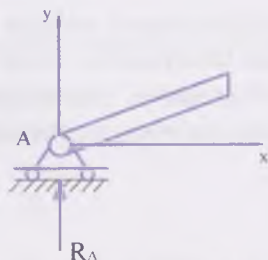
AB sterjenning A uchi sharnir yordamida qo'zg'almas D tayanchga mahkamlangan bo'lsin (1.12-rasm). U holda jismning A uchi sharnir o'qiga perpendikulyar biror-bir yo'nalishda siljiy olmaydi. Demak, silindrik sharnirning \bar{R} reaksiya kuchi sharnir o'qiga perpendikulyar tekislikda istalgan yo'nalishga ega bo'lishi mumkin. Silindrik sharnirli bog'lanishlarning asosiy turlari bilan tanishamiz.

a) sharnirli qo'zg'aluvchan tayanch.

Bu tayanch konstruksiyasi ikkita qoplama (biri balkaga, ikkinchisi silliq sirtga mahkamlangan) va silindrik sharnirlardan tashkil topgan (1.13-rasm).



1.13-rasm



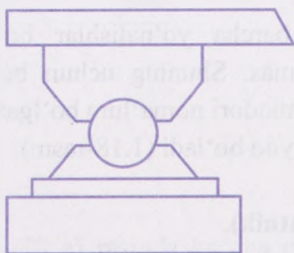
1.14-rasm

Uchta kichik silindrik sharnirlar qo'zg'almas tekislikka qo'yilgan bo'lib, balka tayanchining shu tekislikda erkin harakatlanishiga imkoniyat yaratadi. Katta silindrik sharnir esa ikkita qoplama o'rtasiga o'rnatilgan bo'lib, u balkaning sharnir o'qi bo'ylab erkin aylanishiga imkoniyat yaratadi.

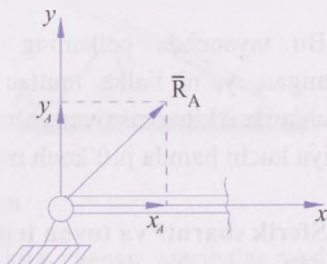
Ushbu tayanchda balkaning harakati faqat bitta yo'nalishda cheklanganligi uchun bu tayanchning reaksiya kuchi sharnir markaziga qo'yilgan qo'zg'almas tekislikka perpendikulyar yo'nalgan bitta kuchdan iborat bo'ladi (1.14-rasm).

b) Sharnirli qo'zg'almas tayanch.

Bu tayanch konstruksiyasi ikkita qoplama (biri balkaga, ikkinchisi qo'zg'almas tekislikka mahkamlangan) va bitta silindrik sharnirdan tashkil topgan (1.15-rasm).

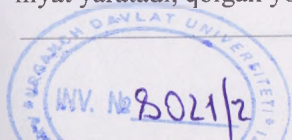


1.15-rasm



1.16-rasm

Silindrik sharnir ikkita qoplama o'rtasiga qo'yilgan bo'lib, u qoplamalarni birlashtirib balkaning sharnir o'qi bo'ylab erkin aylanishiga imkoniyat yaratadi, qolgan yo'nalishlar bo'yicha balkaning harakati cheklangan.



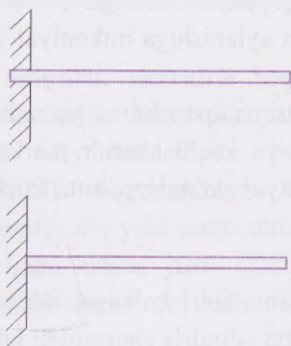
Bundan bu tayanch reaksiya kuchi noma'lum yo'nalishga va miqdorga ega bo'lgan bitta kuchdan iborat ekanligi kelib chiqadi (1.16-rasm).

Bu reaksiya kuchini aniqlashda aksariyat hollarda uni X va Y o'qlari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratish orqali topiladi:

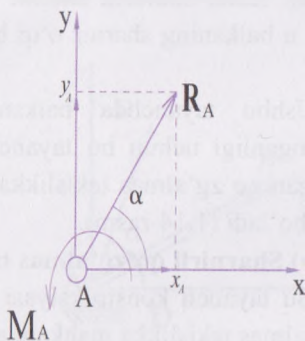
$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \quad (1.4)$$

c) qistirib mahkamlangan tayanch.

Bu tayanch konstruksiyasi devorga qistirish orqali konstruksiya elementlarini tayanchga biriktirishdan hosil bo'ladi (1.17-rasm).



1.17-rasm



1.18 – rasm

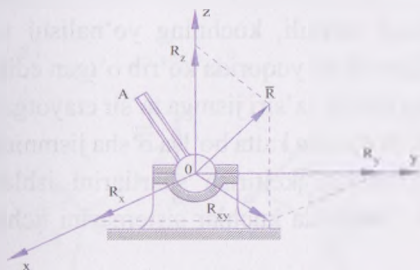
Bu tayanchda balkaning harakati barcha yo'nalishlar bo'yicha cheklangan, ya'ni balka mutlaq qo'zg'almas. Shuning uchun bu kabi tayanchlarda ikkita reaksiya: yo'nalishi va miqdori noma'lum bo'lgan bitta reaksiya kuchi hamda juft kuch momenti paydo bo'ladi (1.18-rasm).

3. Sferik sharnir va tovon tegi (podpyatnik).

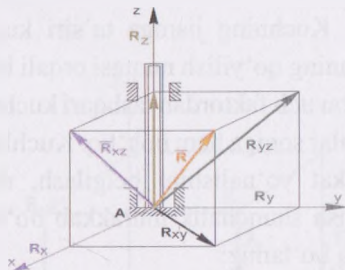
AO sterjen O nuqtada sferik sharnir vositasida biriktirilgan bo'lsa, bu sterjen O nuqtadan o'tuvchi har qanday o'q atrofida faqat aylanma harakat qila oladi (1.19-rasm, a). Sferik sharnirning R reaksiya kuchi O nuqtadan o'tadi, lekin qaysi tomonga yo'nalishini oldindan aytib bo'lmaydi. Sferik sharnirning reaksiya kuchini tanlab olingan koordinata o'qlariga parallel

yoʻnalgan R_x , R_y , R_z tashkil etuvchilarga ajratib, ularning yoʻnalishi va qiymatlari jismning muvozanat shartlaridan aniqlanadi. Tovon tegining \vec{R} bogʻlanish reaksiya kuchi ham fazoda istalgan tomonga yoʻnalgan boʻlishi mumkin (1.19-rasm, b).

a)



b)

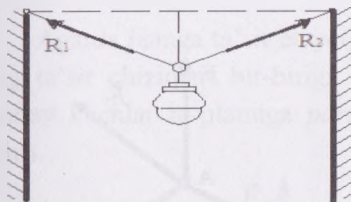


1.19-rasm

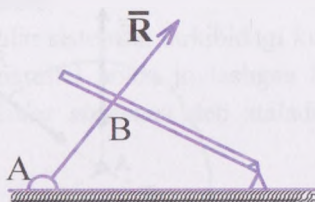
5. Vaznsiz sterjen vositasidagi sharnirli bogʻlanishlar.

Oʻz ogʻirligi hisobga olinmaydigan, uchlaridan boshqa nuqtalariga hech qanday kuch qoʻyilmagan sterjenlarga vaznsiz sterjenlar deyiladi.

a)



b)



1.20-rasm

1.20 a) rasmda koʻcha chirogʻi ikkita vaznsiz sterjenlar vositasida mahkamlangan holatda tasvirlangan. Ushbu holatda bogʻlanish reaksiya kuchlari vaznsiz sterjenlar oʻqlari boʻylab yoʻnalgan boʻladi.

II BOB. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI

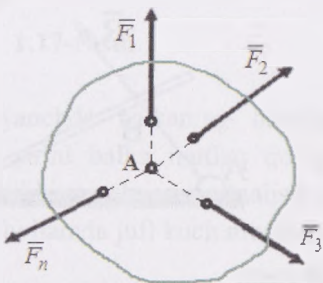
2.1. Kuchlar sistemasi va ularning turlari

Agar jismga bir vaqtning o'zida bir nechta kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, ta'sir etayotgan kuchlar to'plamiga *kuchlar sistemasi* deb ataladi.

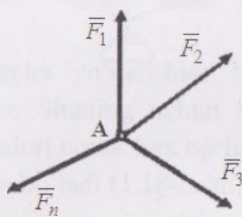
Kuchning jismga ta'siri kuchning moduli, kuchning yo'nalishi va kuchning qo'yilish nuqtasi orqali belgilanishini yuqorida ko'rib o'tgan edik. Ushbu uch faktordan tashqari kuchning jismga ta'siri jismga ta'sir etayotgan kuchlar soniga ham bog'liq. Kuchlar soni qancha katta bo'lsa o'sha jismning harakat yo'nalishini belgilash, muvozanatga keltirish shartlarini ishlab chiqish shunchalik murakkab bo'ladi. Statikada kuchlar sistemasini uchta turga bo'lamiz:

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi.
2. Tekislikdagi kuchlar sistemasi.
3. Fazoviy kuchlar sistemasi.

a)



b)



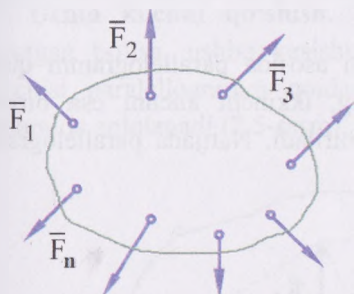
2.1-rasm

Agarda jismga ta'sir etayotgan barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtadan o'tsa, bunday kuchlar to'plamiga *kesishuvchi kuchlar sistemasi* deyiladi (2.1-rasm, a,b).

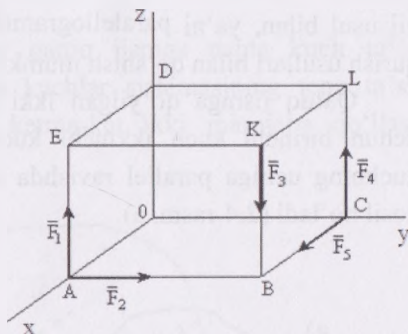
Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlarning ta'sir chiziqlari bitta tekislikda yotsa, bunday kuchlar to'plamiga *tekislikdagi kuchlar sistemasi* deyiladi (2.2-rasm, a).

Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nechta tekisliklarda yotgan bo'lsa, bunday kuchlar to'plamiga *fazoviy kuchlar sistemasi* deb ataladi (2.2-rasm, b).

a)

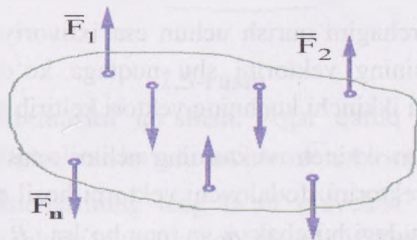


b)



2.2-rasm

Agarda jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi tarkibidagi kuchlarning ta'sir chiziqlari bir-biriga o'zaro parallel holda joylashgan bo'lsa, bunday kuchlar to'plamiga *parallel kuchlar sistemasi* deb ataladi (2.3-rasm).



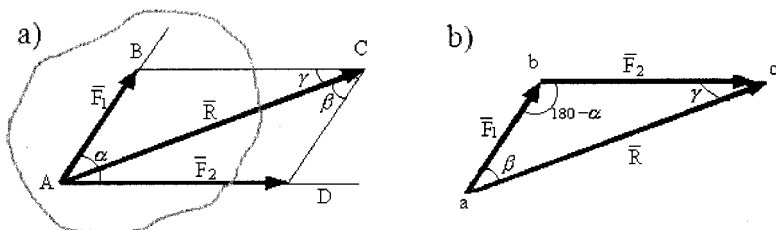
2.3-rasm

2.2 Kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik usulda qo'shish

Agar jismga kesishuvchi kuchlar sistemasini ta'sir etayotgan bo'lsa, bu kabi masalalarini yechish vektorlarni qo'shish usullariga bog'liq holda hal etiladi. Qattiq jismga ta'sir etayotgan kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi jismga ta'sir etayotgan kuchlar soniga qarab har xil usullarda aniqlanadi. Har bir usulni alohida ko'rib chiqamiz.

Ikkita kuchni qo'shish. Qattiq jismga qo'yilgan ikkita kuchni ikki xil usul bilan, ya'ni parallelogramm qoidasi yoki kuchlar uchburchagini qurish usullari bilan qo'shish mumkin.

Qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch asosida parallelogramm qurish uchun birinchi kuch ikkinchi kuchning, ikkinchi kuchni esa birinchi kuchning uchiga parallel ravishda ko'chiriladi. Natijada parallelogramm hosil bo'ladi (2.4-rasm, a).



2.4-rasm

Kuchlar uchburchagini qurish uchun esa ixtiyoriy a nuqtani tanlab kuchlardan birinchisining vektorini shu nuqtaga ko'chirish lozim. Bu vektorning uchiga esa ikkinchi kuchning vektori keltirib qo'yiladi. Birinchi vektorning boshi bilan ikkinchi vektorning uchini tutashtirib \bar{R} ni, ya'ni shu ikki kuch bosh vektorini ifodalovchi vektorni hosil qilamiz (2.4-rasm, b). Agar kuchlar orasidagi burchak α ga teng bo'lsa, \bar{R} kuchning moduli kosinuslar teoremasidan topiladi:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos \alpha} , \quad (2.1)$$

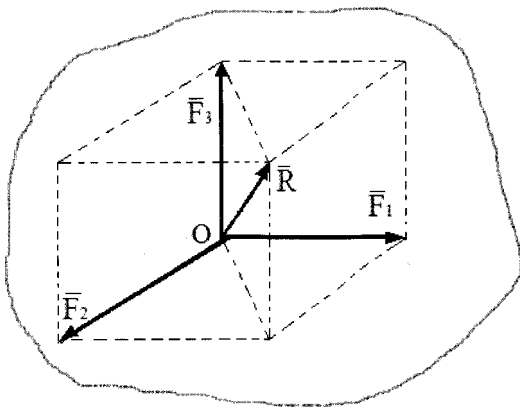
bu yerda: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Qo'shiluvchi vektorlar bilan \bar{R} orasidagi α, β, γ burchaklar sinuslar teoremasidan topiladi:

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad (2.2)$$

Bu yerda $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$.

Uchta kuchni qo'shish. Agar qattiq jismga uchta kuch ta'sir etayotgan bo'lsa, ushbu kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi parallelogramm qoidasini ketma-ket ikki marotaba qo'llash yordamida aniqlanadi (2.5-rasm).

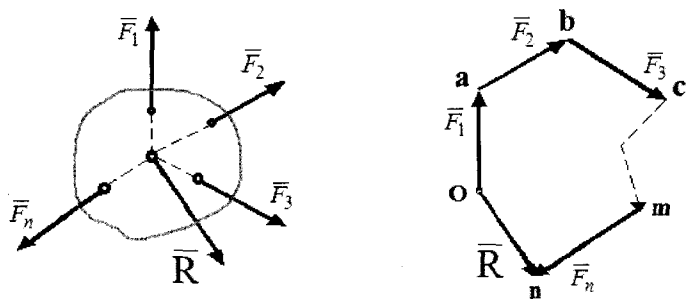


2.5-rasm

Kuchlar sistemasini qo'shish. Agar qattiq jismga kuchlar soni uchtadan ortiq bo'lgan kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sir etayotgan bo'lsa, ushbu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \bar{R} parallelogramm qoidasi asosida kuchlarni ketma-ket qo'shish yoki **kuchlar ko'pburchagini** qurish usullari bilan amalga oshiriladi.

Parallelogramm qoidasini biz oldingi holatlarda qo‘llab, undan qanday foydalanishni bilamiz. Shuning uchun hozir kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisini kuchlar ko‘pburchagini qurish bilan aniqlash usuliga to‘xtalib o‘tamiz.

Kuchlar ko‘pburchagini qurish usuli bir muncha oson va qulay hisoblanadi. Absolyut qattiq jismga $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta’sir etayotgan bo‘lsin (2.6-rasm, a). Bu usul bilan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisini aniqlash uchun ixtiyoriy O nuqta tanlab, bu nuqtaga \vec{F}_1 kuchni yo‘nalishi bo‘yicha keltirib qo‘yamiz. \vec{F}_1 kuchining uchiga \vec{F}_2 kuchni, \vec{F}_2 kuchni uchiga \vec{F}_3 kuchni keltirib qo‘yamiz va hokazo.



2.6-rasm

\vec{F}_1 kuchning boshi bilan \vec{F}_n kuchning uchini tutashtirib, kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisi \vec{R} vektorni hosil qilamiz (2.6-rasm, b):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \text{ yoki } \vec{R} = \sum \vec{F}_k, \quad (2.3)$$

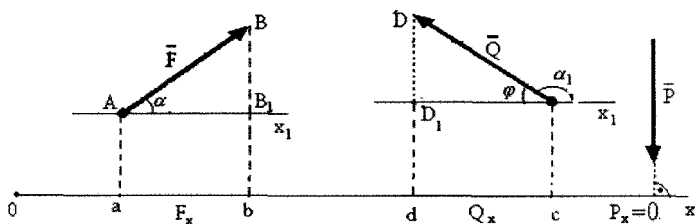
Bunda kuchlarni ko‘chirishda ularning uzunligini va yo‘nalishini katta aniqlikda ko‘chirish talab qilinadi. Aks holda kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisining moduli va yo‘nalishini aniqlashda xatolikka yo‘l qo‘yiladi.

(2.3) ga ko‘ra kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta‘sir etuvchisi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng va shu kuchlar ta‘sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo‘yilgan bo‘ladi.

2.3 Kuchning o‘qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Analitik usulda statika masalalarini hisoblash uchun kuchning o‘qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi tushunchalaridan foydalanamiz.

Kuchning o‘qdagi proyeksiyasi deb kuch modulini kuch bilan o‘qning musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusiga bo‘lgan ko‘paytmaga teng algebraik kattalikka aytiladi.



2.7-rasm

Agar kuch bilan o‘qning musbat yo‘nalishi orasidagi burchak o‘tkir bo‘lsa, proyeksiya musbat, agar o‘tmas burchak bo‘lsa, proyeksiya manfiy ishorada bo‘ladi. Kuch o‘qqa perpendikulyar bo‘lsa, kuchning o‘qdagi proyeksiyasi nolga teng.

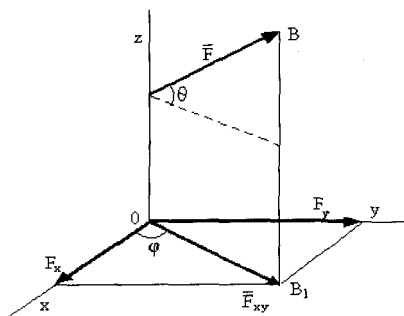
F kuchning o‘qdagi proyeksiyasini F_x bilan belgilaymiz. U holda 2.7-rasmga ko‘ra quyidagini yozamiz:

$$F_x = AB_1 = ab, Q_x = -CD_1 = -cd, F_x = F \cos \alpha, \quad (2.4)$$

$$Q_x = -Q \cos \varphi = Q \cos \alpha_1, P_x = 0, \quad (2.5)$$

\vec{F} kuchning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi deb \vec{F} kuchning boshi va uchining shu tekislikdagi proyeksiyalarini tutashtiruvchi yo‘nalishli $\vec{F}_{xy} = \vec{OB}_1$ kesmaga aytiladi.

\overline{F} kuchning tekislikdagi proyeksiyasi o'qdagi proyeksiyasidan farq qiladi. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi vektor kattalik bo'lib, u miqdorga ega bo'lishdan tashqari yo'nalishga ham ega.



2.8-rasm

\overline{F} kuchning tekislikdagi proyeksiyasining moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{F_{xy}} = F \cos \theta, \quad (2.6)$$

Bu yerda: θ — \overline{F} kuch bilan o'qning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchak.

Ko'pgina hollarda kuchning o'qdagi proyeksiyasini topish uchun avval uning tekislikdagi proyeksiyasini aniqlab, keyin kuchning tekislikdagi proyeksiyasini shu tekislikda yotgan o'qlarga proyeksiyalash kerak. 2.8-rasmga ko'ra kuchning o'qdagi proyeksiyasi bilan kuchning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi bog'lanishni quyidagicha yozish mumkin:

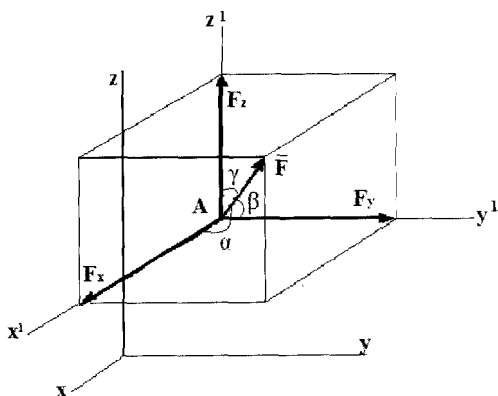
$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cdot \cos \varphi, \quad (2.7)$$

$$F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \cdot \sin \varphi, \quad (2.8)$$

2.4 Kuchni analitik usulda aniqlash

Kuchni analitik usulda aniqlash uchun avvalo kuchning fazodagi yo'nalishini aniqlash maqsadida Oxyz koordinatalar sistemasini tanlash lozim. Agar \overline{F} kuchning moduli va koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α, β va γ burchaklar ma'lum bo'lsa, \overline{F} kuchni ifodalovchi vektorni yasash mumkin (2.9-rasm). Mexanika masalalarini yechishda kuchni uning

koordinata o'qlaridagi F_x, F_y, F_z proyeksiyalari orqali aniqlash qulayroqdir.



2.9-rasm

Kuchning o'qdagi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, kuchning moduli va o'qlar bilan tashkil qilgan burchaklari quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (2.9)$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}, \quad (2.10)$$

Kuchlarni analitik usulda qo'shish uchun quyidagi teoremani ko'rib chiqamiz.

Teorema. *Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining biror o'qdagi proyeksiyasi sistema tarkibidagi barcha kuchlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng.*

Bu teoremaga ko'ra $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning geometrik yig'indisi \vec{R} bo'lsa, u holda

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k \text{ yoki}$$

$$R_x = \Sigma F_{kx}, R_y = \Sigma F_{ky}, R_z = \Sigma F_{kz}, \quad (2.11)$$

R_x, R_y, R_z larni bilgan holda (2.9) formulaga ko'ra

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (2.12)$$

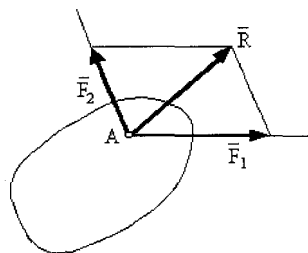
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \cos\gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (2.13)$$

2.5 Uch kuchning muvozanati haqida teorema

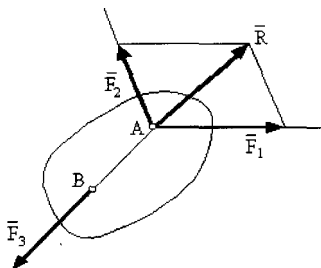
Teorema: *bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch ta'sirida jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.*

«Uch kuchning muvozanati haqida»gi teoremdan statika masalalarini yechishda keng foydalaniladi.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar ta'sirida bo'lgan qattiq jismni ko'rib chiqamiz (2.10-rasm). \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \vec{R} ni aniqlaymiz. Natijada jism bitta \vec{R} kuch ta'sirida qoladi. Shartga ko'ra jism muvozanat holatida va barcha kuchlar bir tekislikda yotadi hamda o'zaro parallel emas.



2.10-rasm



2.11-rasm

Statikaning 1-aksiomasiga asosan jism muvozanat holatida bo'lishi uchun jism ikkita kuch ta'sirida bo'lishi, bu kuchlar miqdor jihatidan teng, yo'nalish jihatdan kuchlar qo'yilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishlari lozim. Shuning uchun

jismning B nuqtasiga moduli \bar{F}_1 ga teng va yo'nalishi qarama-qarshi tomonga yo'nalgan \bar{F}_3 kuchni qo'yamiz (2.11-rasm). Ularning ta'sir chiziqlari A nuqtada kesishadi.

Agar \bar{F}_1 va \bar{F}_2 kuchlar jismning har xil nuqtalariga qo'yilgan bo'lsa ularni statikaning 2-aksiomasiga ko'ra o'zlarining ta'sir chiziqlari bo'ylab A nuqtaga ko'chiramiz va ularni teng ta'sir etuvchisi \bar{R} bilan almashtiramiz. Natijada parallelogram aksiomasiga ko'ra jism ikkita: A nuqtaga qo'yilgan \bar{R} va B nuqtada qo'yilgan \bar{F}_3 kuch ta'sirida qoladi. 1-aksiomaga ko'ra \bar{R} va \bar{F}_3 kuchlarning miqdorlari teng, yo'nalishi esa bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgandagina ular muvozanatlashadi. Demak, \bar{F}_3 kuchning ta'sir chizig'i ham A nuqtadan o'tadi (2.11-rasm). Teorema isbotlandi.

2.6 Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Kesishuvchi kuchlar sistemasiga eng oddiy misol sifatida yuk ko'tarish kranlarida foydalaniladigan troslar, osma ko'prikkar sim arqonlarini keltirishimiz mumkin. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanati deganda sistemani tashkil qiluvchi troslar va jismlarning qo'yilgan kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sirida tinch muvozanat holatida ekanligi tushuniladi.

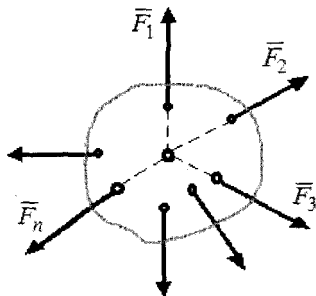
Qattiq jismga qo'yilgan kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari geometrik va analitik ko'rinishda ifodalanadi.

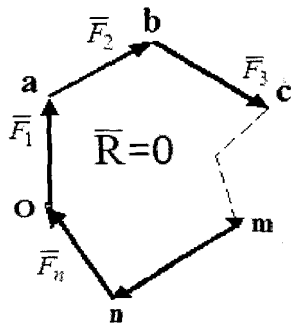
Muvozanatning geometrik sharti. Bizga ma'lumki kuchlar sistemasining bosh vektori \bar{R} shu kuchlar sistemasi asosida qurilgan kuchlar ko'p burchagining yopuvchi tomonidir (2.12-rasm, b).

Demak, \bar{R} nolga teng bo'lishi uchun kuchlar ko'pburchagida oxirgi kuchning uchi birinchi kuchning boshi bilan ustma-ust tushishi lozim.

a)



b)



2.12-rasm

Demak, muvozanatning geometrik sharti quyidagicha ifodalanadi: **Kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun sistema tarkibidagi kuchlar asosida qurilgan ko'pburchak yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.**

Muvozanatning analitik sharti. Kesishuvchi kuchlar sistemasining bosh vektori quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (2.14)$$

$R = 0$ bo'lishi uchun $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$ bo'lishi lozim yoki

$$R_x = \sum F_{kx} = 0, R_y = \sum F_{ky} = 0, R_z = \sum F_{kz} = 0$$

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0 \quad (2.15)$$

Bu ifodalar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodalidir.

Demak, muvozanatning analitik sharti quyidagicha ifodalanadi:

Kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun sistema tarkibidagi kuchlarning har bir koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar jismga ta'sir etuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasi bir tekislikda yotsa, (2.15) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \quad (2.16)$$

2.7 Statika masalalarini yechish tartibi

Nazariy mexanikaning statika bo'limida asosan quyidagi turdagi masalalarni yechish ko'rib chiqiladi:

1. Kuchlar sistemasini sodda holga keltirish (ta'sir etayotgan kuchlar sistemasini unga teng kuchli (ekvivalent) bo'lgan boshqa sistema bilan almashtirish).

2. Qattiq jismning muvozanat holatini baholash.

3. Qattiq jismning tayanch reaksiyalarini aniqlash.

4. Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlash.

Statika masalalarini yechishning ikki xil usuli mavjud:

1. Geometrik usul. Bu usul vektorlar algebrasi qoidalari asosida olib boriladi.

2. Analitik usul. Bu usul kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi tushunchalariga asoslanadi.

Bu kabi masalalarni yechish jarayoni quyidagi tartibda olib boriladi:

1. Muvozanati ko'rib chiqiladigan jism (yoki jismlar) tanlanadi.

2. Jism (yoki jismlar) orqali koordinata o'qlari o'tkaziladi.

3. Aniqlangan jism erkin holatga keltiriladi. Bunda jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar va bog'lanish reaksiyalari chizmada ko'rsatiladi.

4. Jismga ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab ularga mos muvozanat tenglamalari tuziladi. Bunda tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining birortasidan foydalaniladi. Muvozanat tenglamalarini tanlashda tenglamalari oson hisoblanadigan tenglamalar sistemasini tanlash lozim, har bir tenglamada bittadan no-ma'lum qatnashadigan tenglamalar sistemasini yechish osonroq bo'ladi.

Bundan tashqari, soddaroq tenglamalar sistemasiga ega bo'lish uchun quyidagilarga e'tibor berish zarur:

a) koordinata o'qlarini noma'lum reaksiya kuchlariga perpendikulyar qilib o'tkazish lozim;

b) moment olinadigan nuqtani tanlashda noma'lumlar ko'proq joylashgan nuqtani tanlash maqsadga muvofiq, chunki bunda momentlar tenglamasidagi noma'lumlar sonini kamaytirishga erishiladi.

c) agar jismga ta'sir etayotgan kuchlardan birortasi ma'lum burchak ostida ta'sir etayotgan bo'lsa, bunda u kuchni tashkil etuvchilarga ajratish kerak;

d) masalani yechish jarayonida masalaga tegishli chizma juda aniq chizilishi lozim.

5. Tenglamalarni yechib, noma'lum bog'lanish (tayanch) reaksiya kuchlari aniqlanadi.

6. Masalaning to'g'ri yoki noto'g'ri yechilgani tekshirib ko'riladi.

2.8 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala. Poyezd to'g'ri chiziqli gorizontal yo'lda o'zgarmas tezlik bilan harakatlanadi; poyezdning elektrovozdan tashqari og'irligi $12 \cdot 10^3 \text{ kN}$. Agar poyezdning harakatiga bo'lgan qarshilik uning relsga ko'rsatadigan bosimining 0,005 qismiga teng bo'lsa, elektrovozning tortish kuchi qancha?

Yechilishi: Bu masalani yechishda statikaning 4-aksiomasidan foydalanamiz (2.13-rasm). (Nyutonning uchinchi qonuni).

Unga ko'ra:

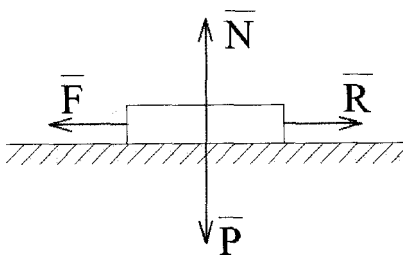
$$N - P = 0$$

$$R - F = 0$$

$$R = P \cdot \mu$$

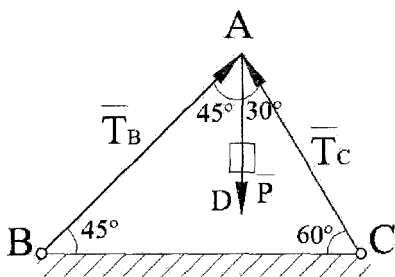
$$N = P = 12 \cdot 10^3 \text{ kN},$$

$$F = R = 12 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot 0,005 = 60 \text{ kN}$$

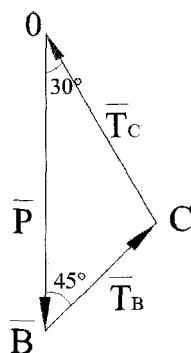


2.13-rasm

2-masala. Ikkita absolyut qattiq AB va AC sterjenlar uchlari A nuqtada bir-biriga sharnir vositasida mahkamlangan. Sterjenlarining ikkinchi uchlari polning B va C nuqtalariga sharnir yordamida birlashtirilgan. Bunda sterjenlar pol bilan tegishli 45° va 60° burchak hosil qiladi. A sharnirga og'irligi $P=100\text{ N}$ bo'lgan D yuk cho'zilmaydigan ip yordamida osib qo'yilgan. AC va BC sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin. Sterjenlarning og'irligi e'tiborga olinmasin (2.14-rasm).



2.14-rasm

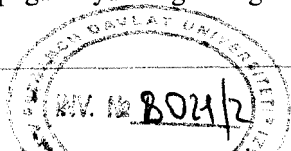


2.15-rasm

Yechilishi: D yukning og'irlik kuchi P ni vertikal pastga qaratib yo'naltiramiz. Yukning P og'irlik kuchi ta'sirida AB va AC sterjenlarda hosil bo'lgan zo'riqishlarni tegishli T_B va T_C deb belgilaymiz. Natijada A sharnirga sterjenlarda hosil bo'ladigan T_B, T_C zo'riqishlar va D yukning P og'irlik kuchi qo'yilgan. Noma'lum bo'lgan zo'riqishlarni topish uchun geometrik va analitik usullardan foydalanamiz:

1) Geometrik usul. A sharnir muvozanatda bo'lishi uchun sharnirga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'lishi lozim. Demak, A sharnirga P, T_B va T_C kuchlar qo'yilgan.

Kuchlar uchburchagini yasash uchun ixtiyoriy O nuqta tanlaymiz. O nuqtaga D yukning P og'irlik kuchini o'z-o'ziga parallel ko'chiramiz. P



kuchning uchiga AB sterjenning zo'riqishi T_B , uning uchiga esa AC sterjenning zo'riqishi T_C ni o'ziga parallel qilib ko'chiramiz (2.15-rasm).

$$\angle CAD = 30^\circ \quad \text{va} \quad \angle BAD = 45^\circ$$

bunda $\angle bcO = 105^\circ$

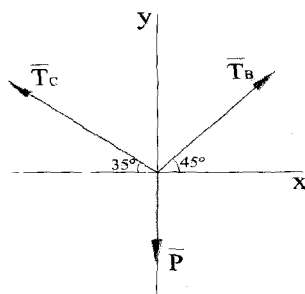
Sinuslar teoremasiga ko'ra quyidagini yozamiz:

$$\frac{T_B}{\sin 30^\circ} = \frac{T_C}{\sin 45^\circ} = \frac{P}{\sin 105^\circ}$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$T_B = P \frac{\sin 30^\circ}{\cos 15^\circ} = 100 \frac{0,5}{0,9659} = 51,8 \text{ N}, \quad T_C = P \frac{\sin 45^\circ}{\cos 15^\circ} = 100 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0,9659} = 73,2 \text{ N}$$

2) Analitik usul. Ta'sir etuvchi kuchlar bir tekislikda yotganligi uchun tekislikdagi kesishuvchi kuchlar muvozanat tenglamalaridan foydalanamiz. Avvalo, koordinata o'qlarini o'tkazamiz. x o'qini gorizontal qilib, y o'qini esa unga perpendikulyar qilib yo'naltiramiz (2.16-rasm).



2.16-rasm

Masalani analitik usulda yechamiz:

$$\sum F_{KX} = 0; \quad T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0 \quad T_B \sin 45^\circ + T_C \sin 30^\circ - P = 0 \quad (2)$$

tenglikdan
$$T_B = T_C \frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}$$

Bu tenglikni (2) ga qo'yamiz.

$$T_c \frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \sin 45^\circ + T_c \sin 30^\circ - P = 0$$

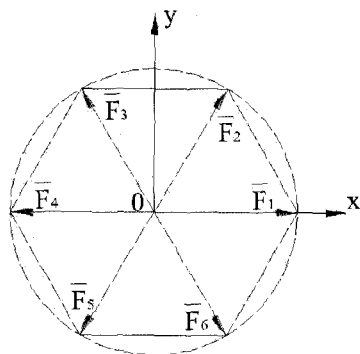
yoki

$$T_c \cos 30^\circ + T_c \sin 30^\circ - P = 0$$

$$T_c = \frac{P}{\cos 30^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{100}{0,866 + 0,5} = 73,2 \text{ N};$$

$$T_B = 73,2 \frac{0,866}{0,7} = 51,8 \text{ N};$$

3-masala. Muntazam oltiburchak markaziga miqdorlari 1,3,5,7,9 va 11N bo'lgan va ko'pburchakning uchlariga qarab yo'nalgan kuchlar qo'yilgan (2.17-rasm). Teng ta'sir etuvchi va muvozanatlovchi kuchning miqdori va yo'nalishi topilsin.



2.17-rasm

Yechilishi: Masala shartiga binoan kuchlar rasmda ko'rsatilgan kabi yo'nalgan. Kuchlar yo'nalishiga ko'ra ularning koordinata o'qlardagi proyeksiyalar yig'indisini olamiz (kuch yo'nalishlarini e'tiborga olgan holda).

Unga ko'ra:

$$F_1 + F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 60^\circ - F_4 - F_5 \cos 60^\circ + F_6 \cos 60^\circ = F_x$$

$$F_2 \sin 60^\circ + F_3 \sin 60^\circ - F_5 \sin 60^\circ - F_6 \sin 60^\circ = F_y$$

Har ikkala tenglamani yechib F_x va F_y larning qiymatlarini hisoblaymiz: $F_x = -6N$, $F_y = -6\sqrt{3}N$, Topilgan qiymatlardan foydalanib ta'sir etuvchi kuchni miqdorini aniqlaymiz.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{144} = 12N.$$

Uning yo'nalishini esa quyidagicha aniqlaymiz:

$$\cos(\bar{F} \wedge x) = \frac{-6N}{12N} = -1/2, \quad \cos(\bar{F} \wedge y) = \frac{-6\sqrt{3}N}{12N} = -\sqrt{3}/2,$$

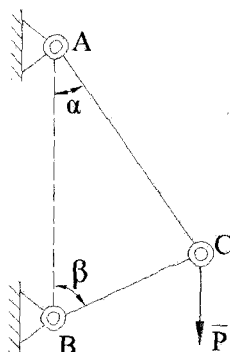
$$(\bar{F} \wedge x) = 120^\circ; \quad (\bar{F} \wedge y) = 150^\circ.$$

Demak, teng ta'sir etuvchi kuch F_5 kuch 12 N ga teng bo'lib, muvozanatlovchi kuch unga miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan.

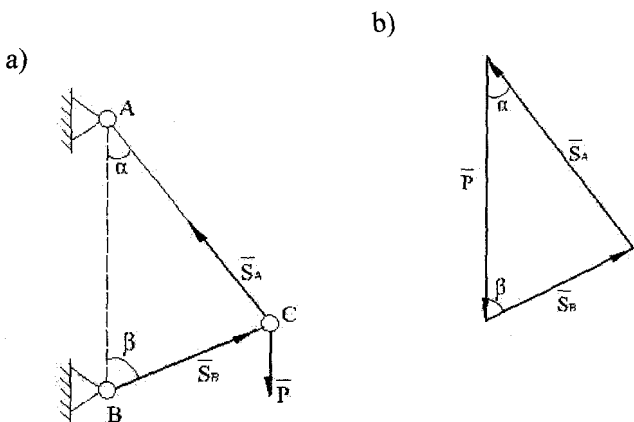
4-masala. Og'irliklari e'tiborga olinmaydigan AC va BC sterjenlar bir-biri va vertikal devor bilan, sharnirlar vositasida biriktirilgan. Sharnirli C boltga $P=1000N$ vertikal kuch ta'sir qiladi. Agar sterjenlar bilan devor orasidagi burchaklar $\alpha=30^\circ, \beta=60^\circ$ bo'lsa, sharnirli C boltga sterjenlarning ko'rsatadigan reaksiyalari aniqlansin (2.18-rasm).

Yechilishi: Kuchlarning ta'sir yo'nalishlarini belgilaymiz (2.19-rasm, a) va ularni ta'sir yo'nalishlarini o'zgartirmagan holda bog'lanishlardan ozod qilib, uchburchak shaklida tasvirlaymiz (2.19-rasm, b).

Masala shartiga binoan ushbu uchburchagimiz to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat ekan. Negaki $\alpha + \beta = 90^\circ$. Bundan ko'rinadiki, biz uchun noma'lum bo'lgan uchinchi burchak 90° ga teng. Bunda S_B va S_A – katetlar. P – gipotenuza.



2.18-rasm



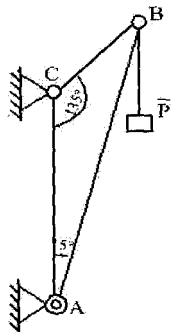
2.19-rasm

$$S_B = P \cos \beta = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ N}$$

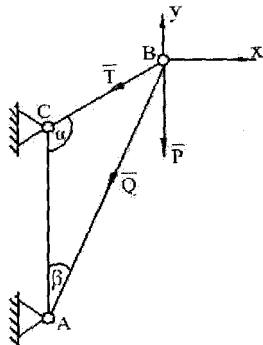
$$S_A = P \cos \alpha = 866 \text{ N}$$

5-masala. Machtga krani AB strela va CB zanjirdan iborat. AB strela machtga A sharnir vositasida birlashtirilgan. Strelaning B uchiga $P = 2 \text{ kN}$ yuk o'nilgan. Burchaklar $BAC = 15^\circ$, $ACB = 135^\circ$ CB zanjirdagi T taranglik kuchi va AB streladagi Q zo'riqish aniqlansin (2.20-rasm).

Yechilishi: Bu masalani yechish uchun ham analitik usuldan foydalanamiz. Dastlab kuch yoʻnalishlarini belgilab, soʻngra koordinata oʻqlarini kiritib, kuchlar tutashgan nuqtani koordinata boshi sifatida qabul qilamiz.



2.20-rasm



2.21-rasm

Barcha kuchlarning yoʻnalishlarini inobatga olgan holda, kuchlarning oʻqlardagi proyeksiyalar yigʻindisini hisoblaymiz (2.21-rasm):

$$-T \cos 45^\circ - Q \sin 15^\circ = 0,$$

$$-T \sin 45^\circ - Q \cos 15^\circ - P = 0$$

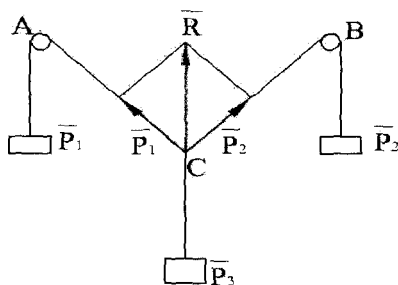
Ikkala tenglamani birgalikda yechib javoblarni aniqlaymiz:

$$T = 1,04 \text{ kN};$$

$$Q = -2,83 \text{ kN}.$$

6-masala. Uchta ip C tugunda bogʻlangan. Ulardan ikkitasi A va B bloklar orqali oʻtkazilib uchlariga $P_1=3\text{N}$ va $P_2=5\text{N}$ yuklar osilgan. Uchinchi ipning uchiga esa ogʻirligi P_3 boʻlgan yuk osilgan, bunda $\angle ACB = 60^\circ$ Agar sistema muvozanatda boʻlsa P_3 yukning ogʻirligi topilsin (2.22-rasm).

Yechilishi: C tugunda uchta kuch ta'sir qiladi: CA yo'nalish bo'yicha P_1 kuch, CB yo'nalish bo'yicha P_2 , kuch va vertikal pastga yo'nalgan P_3 kuch. P_1 va P_2 kuchlarni qo'shamiz.



2.22-rasm

P_1 va P_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi R quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos 60^\circ}$$

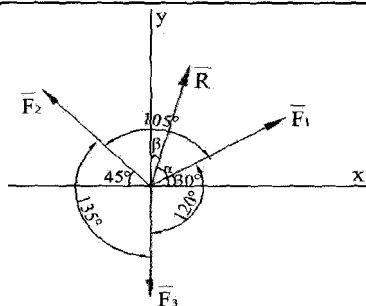
$$R = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0,5} = \sqrt{9 + 25 + 15} = \sqrt{49} = 7N$$

R kuch P_3 kuch bilan muvozanatlashgani uchun

$$P_3 = R = 7N$$

7-masala.

Jismning A nuqtasiga bir tekislikda yotuvchi va bir-biri bilan 105° , 135° va 120° burchak ostida uchta kuch qo'yilgan bo'lib, ularning modullari $F_1=18N$, $F_2=24N$, $F_3=30N$ ga teng. Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisining kattaligi va yo'nalishini aniqlang (2.23-rasm).



2.23-rasm

Yechilishi:

- Berilgan kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$F_{1x} = F_1 \cos 30^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos 45^\circ = -24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -12\sqrt{2}$$

$$F_{3x} = 0 \quad F_{1y} = F_1 \sin 30^\circ = 18 \cdot 0,5 = 9$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \quad F_{3y} = -F_3 = -30$$

2. (2.11) formulaga ko'ra teng ta'sir etuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini aniqlaymiz:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 9\sqrt{3} - 12\sqrt{2} = 15,588 - 16,968 = -1,380$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 9 + 12\sqrt{2} - 30 = 9 + 16,968 - 30 = -4,032$$

3. (2.18) va (2.19) formulalarga ko'ra teng ta'sir etuvchi kuchning moduli va yo'nalishini aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-1,38)^2 + (-4,032)^2} = 4,262 \text{ N}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-1,38}{4,262} = -0,323, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{-4,032}{4,262} = -0,946$$

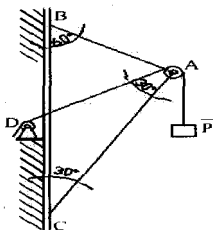
4. Aniqlangan α va β burchaklarga ko'ra rasmda teng ta'sir etuvchini ko'rsatamiz:

$$\arccos(-0,323) = \alpha, \quad \alpha = 71^\circ$$

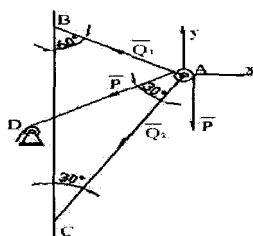
$$\arccos(-0,946) = \beta, \quad \beta = 19^\circ$$

8-masala. $P = 20 \text{ kN}$ yuk A va D bloklar orqali o'tkazilgan zanjir vositasida BAC magazinli kran bilan ko'tariladi. D blok devorga shunday mahkamlanganiki, burchak $CAD = 30^\circ$. Kraning sterjenlari orasidagi burchaklar: $ABC = 60^\circ$, $ACB = 30^\circ$. AB va AC sterjenlardagi Q_1 va Q_2 zo'riqishlar aniqlansin (2.24-rasm, a).

a)



b)



2.24-rasm

Yechilishi: Bu masalani ham oldingi masaladagi kabi shartlarni inobatga olgan holda, A blok markazini koordinata boshi sifatida qabul qilamiz (2.24-rasm, b) va kuchlarning o'qlardagi proyeksiyalari yig'indisini hisoblaymiz:

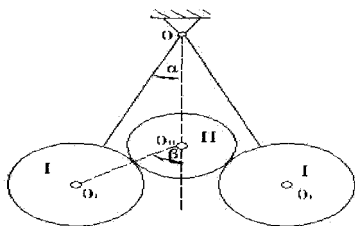
$$-P \cos 30^\circ - Q_1 \cos 30^\circ - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

$$-P \cos 60^\circ + Q_1 \cos 60^\circ - Q_2 \cos 30^\circ - P = 0$$

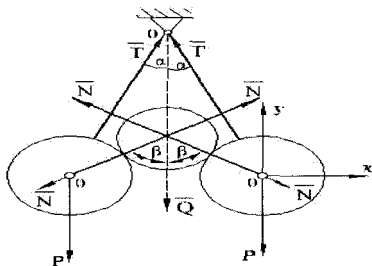
$$\text{Javob: } Q_1 = 0, Q_2 = -34,6 \text{ kN}$$

9-masala. Har biri P og'irlikdagi ikkita bir xil I silindrlar O nuqtaga iplar bilan osib qo'yilgan. Ular orasiga Q og'irlikdagi II silindr erkin tashlab qo'yilgan. Silindrlar sistemasi muvozanatda. I silindrlar bir-biriga tegmaydi. Iplarning vertikal bilan hosil qilgan α burchak hamda I va II silindrlar markazi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning vertikal bilan β burchagi orasidagi bog'lanish aniqlansin (2.25-rasm, a).

a)



b)



2.25-rasm

Yechilishi: Bizga ma'lumki II silindr I silindrlarga bir xil kuch bilan ta'sir etadi. Shu bois 0 nuqtaga nisbatan bir xil α burchaklar ajraladi va I silindrlar ham II silindrga nisbatan β burchaklar hosil qiladi.

Bu holda I silindrlardagi taranglik kuchlari va normal reaksiya kuchlari o'zaro teng bo'ladi. Ular (2.25-rasm, b) da ko'rsatilgandek yo'nalgan. Koordinatalar sistemasini kiritib, kuchlarning o'qlardagi proyeksiyalarini olib ularni birgalikda yechamiz:

$$\begin{aligned}N \sin \beta - T \sin \alpha &= 0, \\-N \cos \beta + T \cos \alpha - P &= 0, \\2N \cos \beta - Q &= 0. \\ \text{tg} \beta &= \left(\frac{2P}{Q} + 1 \right) \text{tg} \alpha.\end{aligned}$$

10-masala. Og'irligi P bo'lgan B sharcha qo'zg'almas A nuqtaga AB ip bilan osilgan bo'lib, r radiusli silliq sfera airtida turadi. A nuqtadan sfera sirtigacha bo'lgan masofa, $AC = d$. Ipnging uzunligi $AB = l$, OA to'g'ri chiziq-vertikal. Ipdagi taranglik kuchi T va sferaning reaksiyasi Q topilsin (2.21-rasm).

Yechilishi:

1. Ushbu masalani ham oldingi masalalardagi kabi ta'sir kuchlarini belgilab olishdan boshlaymiz.
2. Kuchning ta'sir chiziqlari yordamida uchburchak hosil bo'lishini ko'ramiz va masala yechimini geometrik usulda qidiramiz.
3. Shartga binoan 3 ta kuch har xil masofalarga ta'sir ko'rsatmoqda va bu kuchlarning ta'sir masofalariga nisbatlari o'zaro teng kattalidir (2.27 (a), (b)-rasm).

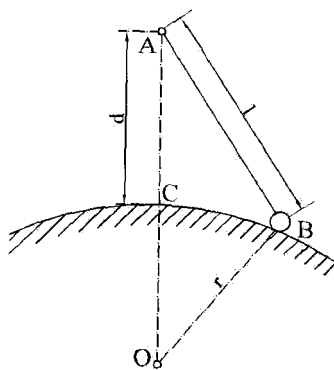
Shunday ekan:

$$\frac{T}{l} = \frac{P}{d+r},$$

$$T = P \frac{l}{d+r};$$

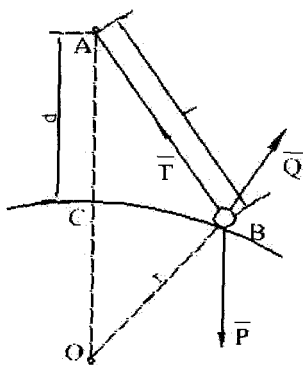
$$\frac{Q}{r} = \frac{P}{d+r},$$

$$Q = P \frac{r}{d+r}.$$

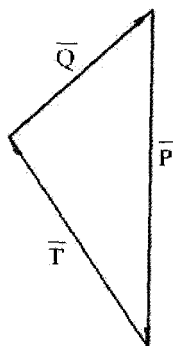


2.26-rasm

a)



b)



2.27-rasm

11-masala. Og'irliga 10N bo'lgan bir jinsli shar ikkita AB va DC tross vositasida muvozanatda ushlab turiladi. Bu trosslar bitta vertikal tekislikda joylashgan bo'lib, bir-biri bilan 150° burchak tashkil qiladi. AB tross gorizont bilan 45° burchak tashkil qiladi. Trosslardagi taranglik kuchlari topilsin (2.28-rasm, a).

Yechilishi: Masalani yechimini topishda shar markazini koordinatalar boshi sifatida tasvirlab, kuchlarning o'qlardagi proyeksiyalari yig'indisini hisoblaymiz (2.28-rasm, b):

$$T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 15^\circ = 0,$$

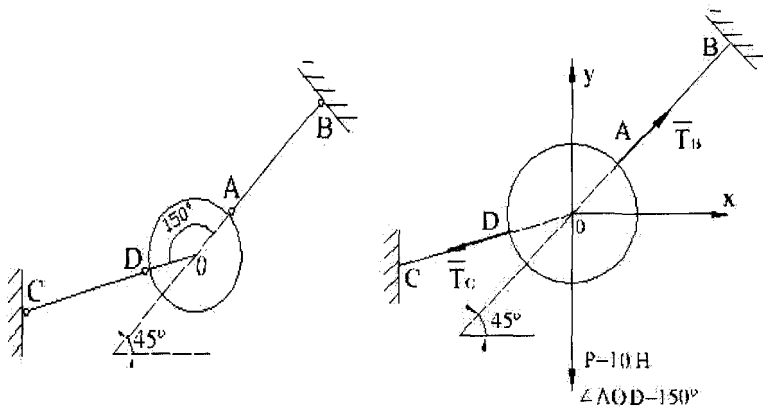
$$T_B \sin 45^\circ - T_C \sin 15^\circ - P = 0$$

$$T_B = 19,3N,$$

javob: $T_C = 14,1N$

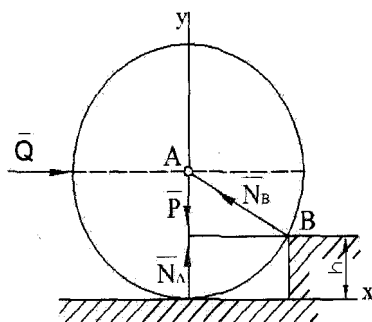
a)

b)



2.28-rasm

12-masala. Og'irligi P bo'lgan silindr gorizontol tekislikda joylashgan bo'lib, uning bir tomonidan siquvchi Q - kuch ta'sir etmoqda, ikkinchi tomondan esa u B nuqtadagi o'tkir qirraga qadalib qolgan holda muvozanat holatda turmoqda.



2.29-rasm

Agar $BD=h=R/2$ (R -silindrning radiusi) bo'lsa, A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlari aniqlansin (2.29-rasm).

Yechilishi: Avvalo, berilgan P , Q – kuchlar hamda N_A va N_B lardan iborat reaksiya kuchlari ta'siridagi silindrning muvozanat shartini ko'rib chiqamiz. Shakldan ko'rinib turibdiki, barcha kuchlar bitta tekislikda joylashgan bo'lib, ular silindrning markazi C nuqtada kesishmoqdalar. Silindrga ta'sir etayotgan kuchlar soni 4 ta bo'lganligi uchun masalani analitik usulda yechish lozim bo'ladi. Shu sababli $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$. Natijada 2 ta tenglamadan iborat tenglamalar sistemasini tuzamiz. Buning uchun koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganday tanlab olamiz, u holda:

$$Q - N_B \cos \alpha = 0; \quad N_A - P + N_B \sin \alpha = 0;$$

Agar $h=0,5R$ ga teng bo'lsa $\sin \alpha = (R-h)/R=0,5$ va $\alpha=30^\circ$ bo'ladi. U holda birinchi tenglamadan

$$N_B = Q / \cos \alpha = 2Q \frac{\sqrt{3}}{3}$$

N_B – ning aniqlangan bu qiymatini ikkinchi tenglamaga qo'ysak,

$$N_A = P - Q \operatorname{tg} \alpha = P - \frac{Q\sqrt{3}}{3}$$

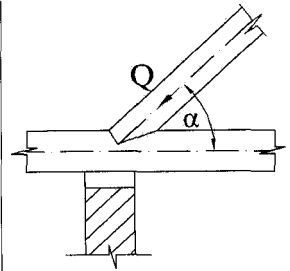
Agar $Q = P\sqrt{3}$ bo'lsa $N_A = 0$ bo'ladi, agar $Q > P\sqrt{3}$ bo'lsa silindr yerdan ko'tarilib B nuqta atrofida aylanma harakat qila boshlaydi.

2.9 Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. $8N$ li kuch har biri $5N$ dan bo'lgan ikkita kuchga ajratilsin. Shu kuchni har biri $10N$, yoki $15N$, yoki $20N$ dan va hokazodan iborat ikkita kuchga ajratish mumkinmi? $100N$ dan bo'lgan ikkita kuchgacha?

(Javob: Agar tashkil etuvchilar yo'nalishlari berilmagan bo'lsa, ajratish mumkin).

2-masala. Gorizontga $\alpha=45^\circ$ burchak ostida og'gan stropila oyog'i bo'ylab $Q=2,5kN$ kuch ta'sir qiladi. Bu holda gorizont to'sin bo'ylab qanday S zo'riqish paydo bo'ladi va vertikal yo'nalishda devorga qanday N kuch ta'sir qiladi?

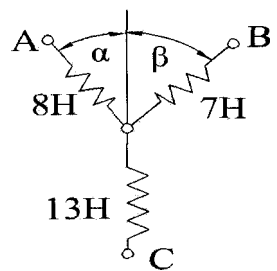


(Javob: $S = N = 1,77kN$)

3-masala. To'g'ri kanalning qirg'oqlari bo'ylab o'zgarmas tezlik bilan yuruvchi ikki traktor kanaldagi qayiqni ikki arqon bilan tortib boradi. Arqonlarning tortilish kuchlari $0,8kN$ va $0,96kN$ ga va ular orasidagi burchak 60° ga teng. Agar qayiq kanalning qirg'oqlariga parallel ravishda harakatlansa, qayiqning harakati vaqtida unga suvning ko'rsatadigan qarshiligi P va arqonlar bilan qirg'oqlar orasida hosil bo'luvchi α va β burchaklar topilsin?

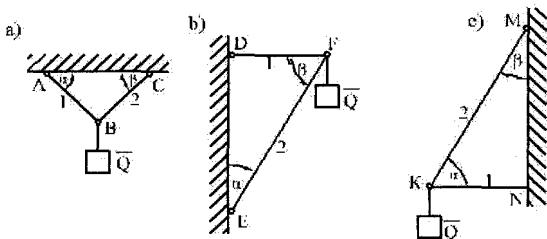
(Javob: $P = 1,53kN, \alpha = 33^\circ, \beta = 27^\circ$).

4-masala. Prujinali uchta tarozining A , B , va C xalqalari gorizont taxtaga qo'zg'almas qilib o'rnatilgan. Tarozining ilmoqlariga uchta arqon bog'langan va ular tortilib, bir D tugunga biriktirilgan. Tarozilar $8, 7$ va $13N$ ni ko'rsatadi. Rasmda ko'rsatilgani kabi, arqonlarning yo'nalishlari orasida hosil bo'lgan α va β burchaklar topilsin.



(Javob: $\alpha = 27,8^\circ; \beta = 32,2^\circ$)

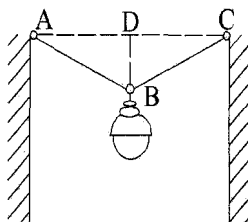
5-masala. Rasmlarda ko'rsatilgandek bir-biri, shift va devorlar bilan sharnirlar vositasida biriktirilgan sterjenlar sxema tarzida tasvirlangan. B, F va K sharnirli boltlarga $Q=1000N$ yuk osilgan. Sterjenlar og'irliklarini hisobga olmay, quyidagi hollar uchun ulardagi zo'riqishlar aniqlansin.



- a) $\alpha = \beta = 45^\circ$;
- b) $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$;
- c) $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$;

Javoblar:

- a) $S_1 = S_2 = 707N$
- b) $S_1 = 577N$; $S_2 = -1154N$;
- c) $S_1 = -577N$; $S_2 = 1154N$;

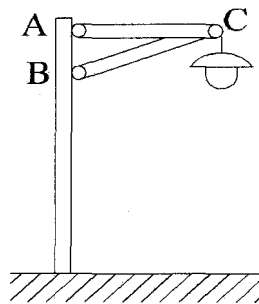


(minus ishora sterjenning siqilib turganini bildiradi)

6-masala. Ko'cha fonari ABC trossning o'rtasidagi B nuqtaga osilgan, bu trossning uchlari bir gorizontalda turuvchi A va C ilmoqlarga ilingan. Agar fonarning og'irligi $150N$, butun ABC trossning uzunligi $20m$ va fonar osilgan nuqtaning gorizontaldan pasayishi $BD=0,1m$ ga teng bo'lsa, trossning AB va BC qismlaridagi T_1 va T_2 taranglik kuchlari topilsin? Trossning og'irligi hisobga olinmasin.

(Javob: $T_1 = T_2 = 7,5kN$).

7-masala. Og'irligi $300N$ bo'lgan ko'cha fonari AC gorizontaal sterjen va BC tirgak yordami bilan vertikal ustunga osilgan. $AC=1,2m$, $BC=1,5m$. AC va BC sterjenlar A, B va C nuqtalarda sharnirlar bilan biriktirilgan.

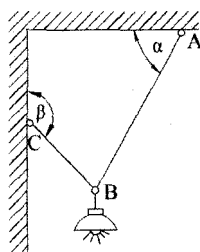


Sterjenlarning og'irliklarini hisobga olmay, ulardagi S_1 va S_2 zo'riqishlar topilsin.

(Javob: $S_1 = 400N$, $S_2 = 400N$)

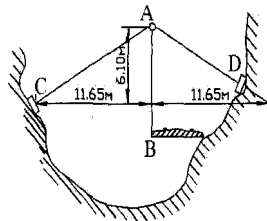
8-masala. Og'irligi $20N$ bo'lgan elektr lampa AB shnurda shiftga osilgan va keyin BC arqon bilan devorga tortilgan. Burchak $\alpha = 60^\circ$ va $\beta = 135^\circ$ deb olib, AB shnurning T_A va BC arqonning T_C taranglik kuchlari aniqlansin.

(Javob: $T_A = 14,6N$; $T_C = 10,4N$.)



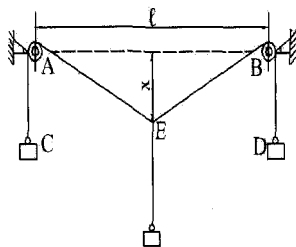
9-masala. Tog'larda qurilgan temir yo'lda yo'ning dara ichidagi bir qismi rasmda ko'rsatilgandek osilgan. AB osmaga $P = 500kN$ kuch ta'sir qiladi deb hisoblab, AC va AD sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

(Javob: AC va AD sterjenlarning har biri $P = 539kN$ ga teng kuch bilan qisilgan).



10-masala. $AB = l$ gorizontal to'g'ri chiziqda joylashgan ikkita A va B bloklar orqali CAEBD arqon o'tkazilgan. Arqonning C va D uchlariga har qaysisining og'irligi p bo'lgan toshlar, E nuqtasiga esa og'irligi P bo'lgan tosh osilgan. Yuklar muvozanatlashganda E nuqtaning AB to'g'ri chiziqdan pasayishi x aniqlansin? Bloklarning o'lchamlari va ulardagi ishqalanish, hamda arqonning og'irligi hisobga olinmasin.

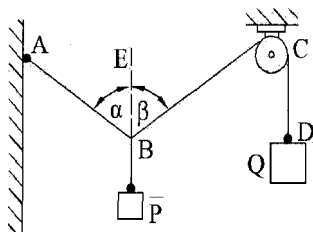
(Javob: $x = \frac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$).



11-masala. Og'irligi $25N$ yukni bloklardan o'tkazilib, yuklar bilan tortib qo'yilgan ikkita arqon yordamida muvozanatda ushlab turiladi. Yuklardan birining og'irligi $20N$, shu yuk osilgan arqon bilan vertikal orasidagi burchakning sinusi $0,6$ ga teng. Ikkinchi yukning og'irligi p va ikkinchi arqon bilan vertikal orasidagi α burchak topilsin? Bloklardagi ishqalanish va arqonlarning og'irligi hisobga olinmasin.

(Javob: $p=15N$, $\sin\alpha=0,8$).

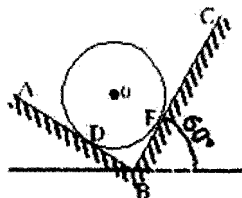
12-masala. Bir uchi A nuqtaga biriktirilgan AB arqonning B nuqtasiga P yuk va blokdan o'tkazilgan BCD arqon bog'langan. Arqonning D uchiga og'irligi $100N$ bo'lgan Q yuk ulangan. Agar muvozanat holatida arqonlar bilan BE vertikal orasidagi burchaklar $\alpha=45^\circ$; $\beta=60^\circ$ bo'lsa, AB arqondagi T taranglik kuchi va P yukning kattaligi aniqlansin? Blokdagi ishqalanish hisobga olinmasin.



(Javob: $T=122N$, $P=137N$)

13-masala. Bir-biriga tik bo'lgan ikkita silliq AB va BC og'ma tekisliklarda og'irligi $60N$ bo'lgan bir jinsli 0 shar turibdi. BC tekislik bilan gorizontal orasidagi burchak 60° . Sharning har qaysi tekislikka ko'rsatadigan bosimi aniqlansin.

(Javob: $N_D=52N$, $N_E=30N$).

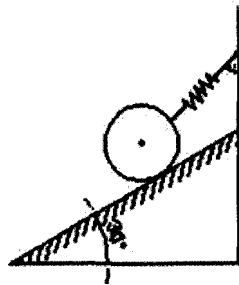


14-masala. Silliq vertikal AB devorga AC arqon vositasida bir jinsli 0 shar osilgan. Arqon devor bilan α burchak hosil qiladi. Sharning og'irligi P . Arqonning taranglik kuchi T va sharning devorga bosimi Q aniqlansin.

(Javob: $T=\frac{P}{\cos\alpha}$; $Q=Ptg\alpha$).

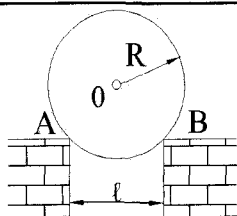


15-masala. Og'irligi $20N$ bo'lgan bir jinsli shar silliq og'ma tekislik ustida tross yordamida ushlab turiladi. Bu tross tekislikdan yuqoriroqqa mahkamlangan prujinali taroziga bog'langan. Prujinali tarozining ko'rsatishi $10N$ ga teng. Gorizontal bilan tekislik orasidagi burchak 30° . Tross bilan vertikal orasidagi α burchak va sharning tekislikka ko'rsatadigan Q bosimi aniqlansin? Prujinali tarozining og'irligi hisobga olinmasin.



(Javob: $\alpha = 60^\circ$; $Q = 17,3N$).

16-masala. Radiusi $R = 1m$, uzunligi bo'yicha tekis taralgan og'irligi $P = 40kN$ bo'lgan qozon g'isht devorning chiqiqlarida turadi. Devorlar orasidagi masofa $l = 1,6m$. Ishqalanishni hisobga olmay, A va B nuqtalarga qozondan tushadigan bosim topilsin.



(Javob: $N_A = N_B = 33,3 kN$)

III BOB. TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI

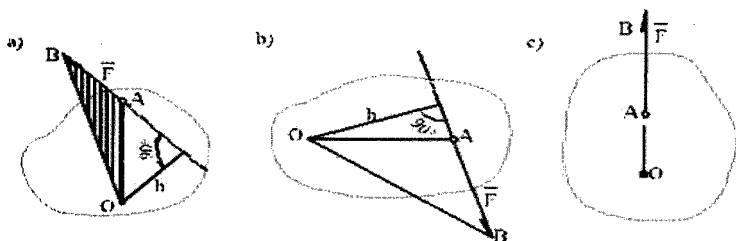
3.1 Kuchning markaz (nuqta) ga nisbatan momenti

Tajribalar ko'rsatadiki, kuch ta'sirida qattiq jism faqat ilgari lanma harakatlanib qolmasdan, qandaydir markaz (nuqta) atrofida aylanma harakat qilish ham mumkin. Kuchning aylantirish effektini uning momenti harakterlaydi.

Qattiq jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. \vec{F} kuch qattiq jismni qandaydir O markaz atrofida aylantiradi. O markazdan \vec{F} kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikulyarga kuch yelkasi deyiladi va h harfi bilan belgilanadi. (3.1-rasm, a). Kuch jismni O markaz atrofida aylantirish effekti quyidagilarga bog'liq bo'ladi:

- 1) \vec{F} kuchning moduli va kuch yelkasi h ning uzunligiga;
- 2) O markaz va \vec{F} kuch orqali o'tuvchi OAB aylanish tekisligining egallagan holatiga;
- 3) tekislikdagi aylanish yo'nalishiga.

Jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar bir tekislikda yotadi deb olamiz. U holda jismga ta'sir etuvchi kuchlarning aylantirish tekisligi umumiy bo'ladi.



3.1-rasm

Tekislikda aylanish yo'nalishini biror belgi orqali aniqlab olish mumkin. Kuch momenti haqidagi tushunchani kiritamiz. Kuchning O markazga nisbatan momenti deb, mos ishorada olingan kuch modulini kuch yelkasiga bo'lgan ko'paytmasiga aytiladi. \bar{F} kuchning O markazga nisbatan momenti (bundan keyin qisqagina kuch momenti deb ataymiz) ni $m_o(\bar{F})$ yoki $M_o(\bar{F})$ bilan belgilaymiz.

Demak,

$$m_o(\bar{F}) = \pm F \cdot h, \quad (3.1)$$

Kuch momenti Nyuton metr (1Nm) da, shuningdek, kilogramm metr (1Kgm) larda o'lchanadi. Kuch momenti quyidagi xossalarga ega:

- 1) Jismga qo'yilgan kuchni o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning istalgan nuqtasiga ko'chirilsa, kuch momenti o'zgarmaydi;
- 2) agar jismga kuch ta'sir etmasa (kuch nolga teng), yoki moment markazi kuchning ta'sir chizig'ida yotgan bo'lsa (yelka nolga teng) kuch momenti nolga teng bo'ladi (18-rasm, c);
- 3) kuch momenti son jihatdan OAB uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng (3.1-rasm, a), ya'ni:

$$m_o(\bar{F}) = 2S_{\Delta OAB}, \quad (3.2)$$

Haqiqatdan ham uchburchak OAB ning yuzasi.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot h \text{ bundan } 2S_{\Delta OAB} = AB \cdot h, \quad (3.3)$$

AB asos bo'ylab \bar{F} kuch qo'yilgan, shunga ko'ra

$$2S_{\Delta OAB} = F \cdot h, \quad (3.4)$$

(11) formula bilan solishtirsak

$$m_o(\bar{F}) = 2S_{\Delta OAB}, \quad (3.5)$$

kelib chiqadi.

3.2 Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi

Teorema: Tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining biror nuqtaga nisbatan momenti, qo'shiluvchi kuchlarning shu nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot: Ta'sir chiziqlari A nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasini qarab chiqamiz (3.2-rasm).

Tekislikdan ixtiyoriy O nuqta olib, bu nuqtadan OA ga perpendikulyar qilib Ox o'qini o'tkazamiz. Kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan momentlari tegishli $m_0(\vec{F}_1), m_0(\vec{F}_2)$ va h.k. bilan belgilanadi. (3.2) formulaga ko'ra

$$m_0(\vec{F}_1) = 2S_{\Delta OAB} \quad (3.6)$$

Rasmga ko'ra $2S_{\Delta OAB} = OA \cdot F_{1x}$,

$$m_0(F_1) = OA \cdot F_{1x}, \quad (3.7)$$

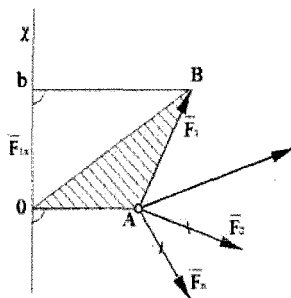
Shu usul yordamida qolgan kuchlarning momentlarini ham aniqlash mumkin. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini \vec{R} bilan belgilaymiz: $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ Uning x o'qdagi proyeksiyasi $R_x = \sum F_{kx}$. Tenglikning har ikkala tomonini OA ga ko'paytiramiz:

$$OA \cdot R_x = \sum(OA \cdot F_{kx}), \quad (3.8)$$

(3.2) formulaga ko'ra

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_k), \quad (3.9)$$

Bu Varin'on teoremasining matematik ifodasi.



3.2-rasm

3.3 Juft kuch. Juft kuch momenti

Miqdorlari teng, parallel va qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan ikkita kuchdan iborat sistemaga juft kuch deyiladi. (3.3-rasm, a) Juft kuch (\vec{F}_1, \vec{F}_2) koʻrinishida belgilanadi. \vec{F}_1, \vec{F}_2 kuchlarga juftning tashkil etuvchilari deyiladi. Juftni tashkil etuvchilarining taʼsir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofaga juftning yelkasi deyiladi va d harfi bilan belgilanadi. Juftning taʼsir chiziqlari orqali oʻtuvchi tekislikka, juftning taʼsir tekisligi deyiladi.

Juftni tashkil etuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda boʻla olmaydi. Juft kuch teng taʼsir etuvchiga ega emas.

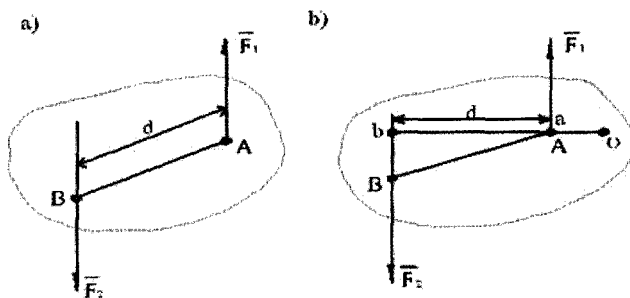
Haqiqatdan ham (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft qandaydir \vec{Q} teng taʼsir etuvchiga ega boʻlsin. Teng taʼsir etuvchi $\vec{Q} \neq 0$ boʻlsin. U holda qattiq jism \vec{F}_1, \vec{F}_2 va \vec{Q} kuchlar taʼsirida muvozanatda boʻlishi kerak. Lekin bu mumkin emas, chunki $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, $Q \neq 0$ boʻlgani uchun $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{Q} \neq 0$. Ushbu holatda juftni bitta kuch bilan almashtirib boʻlmaydi. Demak, juft kuch teng taʼsir etuvchiga ega emas.

Jismga qoʻyilgan juftning aylantirish effekti: 1) juft kuchning moduli va yelkasining uzunligiga; 2) juft taʼsir tekisligining holatiga; 3) shu tekislikdagi aylanish yoʻnalishiga bogʻliq boʻladi. Bu effektini xarakterlash uchun juft kuch momenti tushunchasi kiritiladi.

Juft kuch momenti deb mos ishora bilan olingan juftni tashkil etuvchi kuchlardan birining miqdorini juft yelkasi uzunligiga koʻpaytmasiga teng kattalikka aytiladi. Juft momenti m yoki M bilan belgilanadi.

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2 \cdot d, \quad (3.10)$$

Agar juft jismni soat mili harakati yoʻnalishiga teskari yoʻnalishda aylantirsa, juft momenti musbat, agar soat mili yoʻnalishi boʻylab aylantirsa, juft momenti manfiy ishorada olinadi. Juft momenti ham xuddi kuch momenti kabi bir xil oʻlchov birliklarda oʻlchanadi.



3.3-rasm

Teorema: Juftni tashkil etuvchi kuchlarning juft tekisligida ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi juft momentiga teng.

Isbot. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juftning ta'sir tekisligidan ixtiyoriy O nuqtani olamiz (3.3-rasm,b). Natijada quyidagini aniqlaymiz:

$$m_0(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot Oa, \quad m_0(\vec{F}_2) = F_2 \cdot Ob, \quad (3.11)$$

Bu tengliklarni qo'shamiz va $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, $Ob - Oa = d$ ekanligini e'tiborga olamiz. Natijada

$$m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) = -F_1 Oa + F_2 Ob = -F_1 Oa + F_2 (d + Oa), \quad (3.12)$$

$$m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) = -F_1 Oa + F_2 d + F_2 Oa = F_2 d = m, \quad (3.13)$$

$$\text{Demak, } m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) = m, \quad (3.14)$$

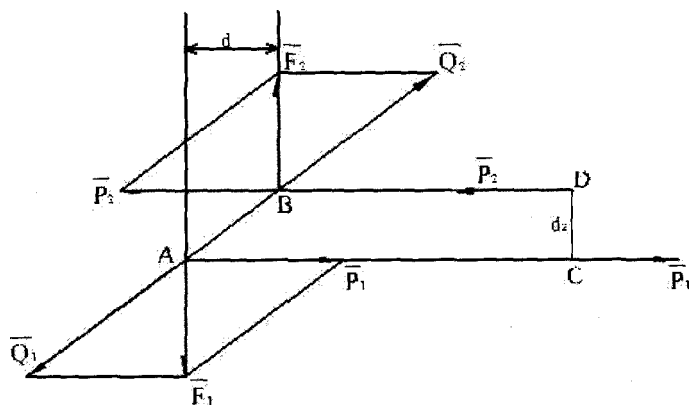
3.4 Ekvivalent juftlar haqida teorema

Teorema: Qattiq jismga qo'yilgan juftning ta'sirini o'zgartirmay, shu juftning ta'sir tekisligida yotuvchi, momenti berilgan juftning momentiga teng istalgan juft bilan almashtirish mumkin.

Isbot. Qattiq jismga yelkasi d_1 bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft qo'yilgan bo'lsin. Bu juftning ta'sir tekisligidan ikkita ixtiyoriy C,D nuqtalar olamiz. C va D nuqtalardan to'g'ri chiziqlar chiqaramiz. Bu to'g'ri chiziqlar \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning ta'sir chiziqlari bilan kesishadi. Kesishishda hosil bo'lgan nuqtalarni tegishlicha A va B deb belgilaymiz va (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juftlarni shu nuqtalarga keltirib qo'yamiz (3.4-rasm).

AC va BD to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani d_2 bilan belgilaymiz. \vec{F}_1 kuchni AB va AC yo'nalishlarda \vec{P}_1 va \vec{Q}_1 , \vec{F}_2 kuchni AB va BD yo'nalishlarda \vec{P}_2 va \vec{Q}_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bunda quyidagi shart bajarilsin: $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$ va $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$.

Rasmdan ko'rinadiki, \vec{Q}_1 va \vec{Q}_2 kuchlar miqdor jihatdan teng, bir



3.4-rasm

to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan:

$$(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \infty O, \quad (3.15)$$

Ushbu kuchlar nolga ekvivalent sistemani tashkil etgani uchun ularni tashlab yuboramiz. Natijada qattiq jism yelkasi d_2 bo'lgan (\vec{P}_1, \vec{P}_2) juft ta'sirida qoladi.

Demak, (\bar{F}_1, \bar{F}_2) juft (\bar{P}_1, \bar{P}_2) juft bilan almashtirildi. (\bar{P}_1, \bar{P}_2) juftni o'zining ta'sir tekislikdagi C va D nuqtalarga ko'chirish mumkin.

Endi biz (\bar{F}_1, \bar{F}_2) va (\bar{P}_1, \bar{P}_2) juftlarining momentlari tengligini isbotlaymiz:

\bar{F}_1 kuch \bar{P}_1 va \bar{Q}_1 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, shunga ko'ra

$$\bar{F}_1 = \bar{P}_1 + \bar{Q}_1, \quad (3.16)$$

Varin'on teoremasiga ko'ra, bu kuchlarning B nuqtaga nisbatan momentlari quyidagiga teng:

$$m_B(\bar{F}_1) = m_B(\bar{P}_1) + m_B(\bar{Q}_1) \quad (3.17)$$

$$m_B(\bar{F}_1) = F_1 \cdot d_1, \quad m_B(\bar{P}_1) = P_1 \cdot d_2, \quad m_B(\bar{Q}_1) = 0; \quad (3.18)$$

Bularni o'rniga qo'ysak

$$F_1 d_1 = P_1 d_2, \quad (3.19)$$

Demak, juftlarning momentlari o'zaro teng ekan. Teorema isbotlandi.

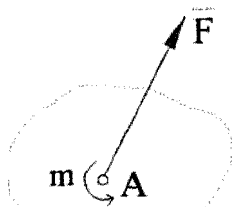
Yuqorida isbotlangan teoremadan juftlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) juftning jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'zining ta'sir tekisligida istalgan joyga ko'chirish mumkin:

2) juftning momentini o'zgartirmay, uning tashkil etuvchilari va yelkasi o'zgartirilsa, juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi;

Texnik chizmalarda juft kuch ko'rsatilmaydi, balki uning aylanish yo'nalishi ko'rsatiladi.

Masalan, 3.5-rasmda, qattiq jismning A nuqtasiga \bar{F} kuch momenti m ga teng bo'lgan juft qo'yilganligi ko'rsatilgan.



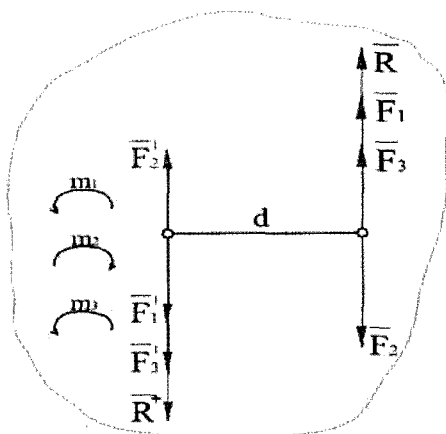
3.5-rasm

3) Juft kuchni qattiq jismga ko'rsatadigan ta'sirini o'zgartirmay, bir tekislikdan unga parallel bo'lgan istalgan boshqa bir tekislikka ko'chirish mumkin.

3.5 Tekislikdagi juftlarni qo‘shish. Tekislikdagi juft kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Teorema: Bir tekislikda yotuvchi juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo‘lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig‘indisiga teng.

Isbot: Absolyut qattiq jisimga bir tekislikda yotuvchi bir nechta, aniq-roq bo‘lishi uchun uchta juft qo‘yilgan bo‘lsin (ular rasmda ko‘rsatilmagan). Ularning momentlari tegishli m_1, m_2 va m_3 ga teng bo‘lsin.



3.6-rasm

Juftlarning ekvivalentligi haqidagi teoreмага asosan, uchta juftni momentlarini o‘zgartirmay ularni umumiy $AB=d$ yelkaga keltiramiz (3.6-rasm). A va B nuqtalarga qo‘yilgan kuchlarni alohida-alohida qo‘shib, A nuqtada \bar{R} va B nuqtada \bar{R}^1 kuchlarni hosil qilamiz.

$$\text{Bunda } \bar{R} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 + \bar{F}_3, \quad \bar{R}^1 = \bar{F}_1^1 - \bar{F}_2^1 + \bar{F}_3^1, \quad (3.20)$$

Natijada juftlar sistemasi yelkasi $AB=d$ bo‘lgan (\bar{R}, \bar{R}^1) teng ta‘sir etuvchi juftga keltiriladi. Uning momenti

$$M=Rd=F_1d-F_2d+F_3d=m_1-m_2+m_3, \quad (3.21)$$

Uchta juft uchun teorema isbotlandi.

Agar juftlar sistemasi momentlari m_1, m_2, \dots, m_n bo'lgan n ta juftlardan iborat bo'lsa, ular momenti.

$$M = \sum m_k, \quad (3.22)$$

bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'ladi.

Isbotlangan teoremadan tekislikdagi juft kuchlar sistemasi muvozanat shartlari kelib chiqadi:

Tekislikdagi juftlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum m_k = 0, \quad (3.23)$$

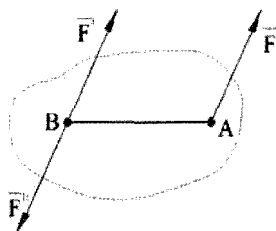
3.6 Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma

Qattiq jism biror kuch ta'sirida muvozanatda bo'lganda shu kuchni o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning istalgan nuqtasiga ko'chirilsa, jismning muvozanati o'zgarmaydi. Kuch jismning boshqa bir nuqtasiga ko'chirilsa, jismning muvozanati albatta o'zgaradi.

Lemma. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchni jismga ko'rsatadigan ta'sirini o'zgartirmay jismning istalgan boshqa nuqtasiga ko'chirilganda, momenti ko'chirilayotgan kuchni ko'chirish markaziga nisbatan momentiga teng bo'lgan juft kuchni qo'shib olish lozim.

Isbot. Qattiq jismning biror A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin (3.7-rasm). Agar qattiq jismning istalgan biror B nuqtasiga muvozanatlashuvchi (\vec{F}', \vec{F}'') sistemani qo'ysak, \vec{F} kuchining ta'siri o'zgarmaydi. Bunda: $\vec{F}' = \vec{F}, \vec{F}'' = -\vec{F}$ bo'lsin.

Natijada qattiq jism \vec{F}, \vec{F}' va \vec{F}'' kuchlar sistemasi ta'sirida qoladi. Bu kuchlar sistemasi B nuqtaga qo'yilgan \vec{F}' kuchga va (\vec{F}, \vec{F}'') juftga



3.7-rasm

ekvivalent bo'ladi. (\bar{F}, \bar{F}') juftning momenti, \bar{F} kuchning B nuqtaga nisbatan momentiga tengligi juftlar nazariyasidan ma'lum ya'ni,

$$m = m_B(\bar{F}), \quad (3.24)$$

Shunday qilib, A nuqtaga qo'yilgan \bar{F} kuchni B nuqtaga keltirishda (\bar{F}, \bar{F}') juftni qo'shib olish kerak ekan. (\bar{F}, \bar{F}') juftga qo'shilgan juft deyiladi.

3.7 Tekislikdagi kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish

Qattiq jismga bir tekislikda yotuvchi $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir etayotgan bo'lsin. Shu tekislikdan ixtiyoriy O nuqta tanlab, bu nuqtani keltirish markazi deb ataymiz va berilgan kuchlar sistemasini O nuqtaga keltiramiz. Kuchlarni keltirishda bittadan juft qo'shib olinadi, (3.8-rasm, a). Natijada jismga uning O nuqtasiga qo'yilgan

$$\bar{F}_1^1 = \bar{F}_1, \bar{F}_2^1 = \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n^1 = \bar{F}_n, \quad (3.25)$$

kuchlar sistemasi va momentlari:

$$m_1 = m_0(\bar{F}_1), m_2 = m_0(\bar{F}_2), \dots, m_n = m_0(\bar{F}_n), \quad (3.26)$$

bo'lgan juftlar ta'sir qila boshlaydi.

O nuqtaga keltirilgan kuchlar ularni geometrik yig'indisi bo'lgan bitta $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ kuch bilan almashtiriladi (3.8-rasm, b), (17) ga ko'ra:

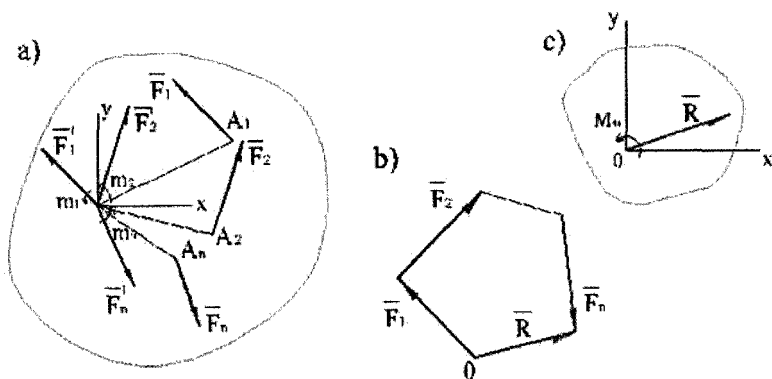
$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k, \quad (3.27)$$

Juflarni qo'shish teoremasiga ko'ra, barcha juftlar ham bitta juft bilan almashtiriladi. Bu juftning momenti $M_0 = \sum m_k$ yoki (3.26) ga ko'ra

$$M_0 = \sum m_0(\bar{F}_k), \quad (3.28)$$

Kuchlar sistemasining geometrik yig'indisiga teng kattalik \bar{R} – kuchlar sistemasining bosh vektori, juftlar momentlarining algebraik yig'indisi M_0 – kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deyiladi.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida, bu kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor \bar{R} ga teng bitta kuchga hamda momenti bosh moment M_0 ga teng bitta juftga ekvivalent bo'ladi (3.8-rasm, c).



3.8-rasm

Shuni qayd qilish kerakki, bu yerda \bar{R} kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'la olmaydi, chunki u kuchlar sistemasini juft bilan birgalikda almashtirayapti. Endi ikkita xususiy holni ko'rib chiqamiz:

- 1) agar $\bar{R}=0$; $M_0 \neq 0$ bo'lsa, berilgan kuchlar sistemasi momenti M_0 ga teng bo'lgan bitta juftga keltiriladi. Bu holda M_0 O markazni tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi;
- 2) agar $\bar{R} \neq 0$, $M_0 = 0$ bo'lsa, berilgan kuchlar sistemasi O markazga qo'yilgan teng ta'sir etuvchisiga teng bo'lgan bitta \bar{R} kuchga keltiriladi.

3.8 Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Tekislikdagi kuchlar sistemasi ta'sirida jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning bosh vektor \bar{R} va bosh momenti M_0 alohida-alohida nolga teng bo'lishi shart va yetarli:

$$\bar{R} = 0; \quad M_0 = 0, \quad (3.29)$$

(3.29) tenglik muvozanatning zaruriy sharti bo'lib hisoblanadi. Chunki, agar ulardan biri bajarilmasa, jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga ($\bar{R} \neq 0$) yoki bo'lmasa juftga ($M_0 \neq 0$) keltiriladi, lekin muvozanatda bo'lmaydi. Shu bilan birgalikda (3.29) muvozanatning yetarli sharti bo'lib ham hisoblanadi. Chunki, $\bar{R} = 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bosh moment M_0 ga teng juftga keltiriladi, lekin $M_0 = 0$ bo'lgani uchun kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Endi biz (3.29) tenglikdan kelib chiqadigan tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatning analitik shartlarini aniqlaymiz. Ular quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

1. Muvozanatning asosiy formasi. (3.29) tenglikda $\bar{R} = 0$ bo'lishi uchun uning x va y o'qlardagi proyeksiyalari alohida-alohida nolga teng bo'lishi lozim:

$$R_x = 0; R_y = 0; \text{ va } M_0 = 0, \quad (3.30)$$

O'z navbatida $R_x = \sum F_{kx}$; $R_y = \sum F_{ky}$. Demak tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bir vaqtning o'zida

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0, \quad (3.31)$$

shart bajarilishi lozim.

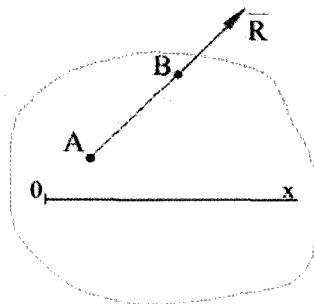
Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ikkita koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indilari va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. Muvozanat shartining ikkinchi formasi. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi ikkita nuqtasining har biriga nisbatan momentlarining yig'indisi va mazkur nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum F_{kx} = 0; \quad (3.32)$$

Kuchlar sistemasi muvozanatining zarurligi bevosita (3.32) dan kelib chiqadi. Chunki (3.32) dan birortasi bajarilmasa,

ya'ni $\bar{R} \neq 0$ yoki $m_A \neq 0$ ($m_B \neq 0$) bo'lsa muvozanat bo'lmaydi. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining yetarlisini isbotlaymiz. Tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun (3.32) da faqat birinchi ikkita sharti bajarilsa, ya'ni $m_A = 0$ va $m_B = 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmay A



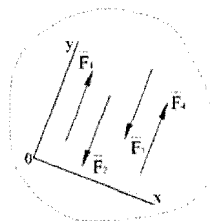
3.9-rasm

va B nuqtalardan o'tuvchi teng ta'sir etuvchi \bar{R} ga keltiriladi (3.9-rasm). (3.32) ning uchinchi shartiga ko'ra $R_x = \sum F_{kx} = 0$. x o'q AB ga perpendikulyar bo'lmagani uchun oxirgi tenglik faqat $\bar{R} = 0$ bo'lgandagina bajariladi, ya'ni kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

3. Muvozanat shartining uchinchi formasi (uchta momentlar tenglamasi). Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtasining har biriga nisbatan momentlarning yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0, \quad (3.33)$$

Bu shartlarning zarurligi xuddi oldingi holdagidek isbotlanadi. (3.33) shartlar sistema muvozanatda bo'lishining yetarli ekanligini teskarisini faraz qilish bilan isbotlanadi. (3.33) shartlar bajarilishiga qaramay, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmasligi uchun berilgan sistemaning teng ta'sir etuvchisi bir vaqtning o'zida A,B,C nuqtalardan o'tishi lozim. Bunday bo'lishi



3.10-rasm

mumkin emas, chunki A,B,C nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. (3.33) shartlar bajarilsa, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

3.9 Tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari

Jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi o'zaro parallel kuchlardan iborat bo'lsa, Ox o'qini kuchlar sistemasiga perpendikulyar qilib, Oy o'qini esa kuchlar sistemasiga parallel qilib yo'naltiramiz (3.10-rasm). U holda har bitta kuchning x o'qidagi proyeksiyasi nolga teng bo'lganligi uchun shartning birinchi tenglamasi ayniyatga $\theta=0$ aylanadi va tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari quyidagicha bo'ladi.

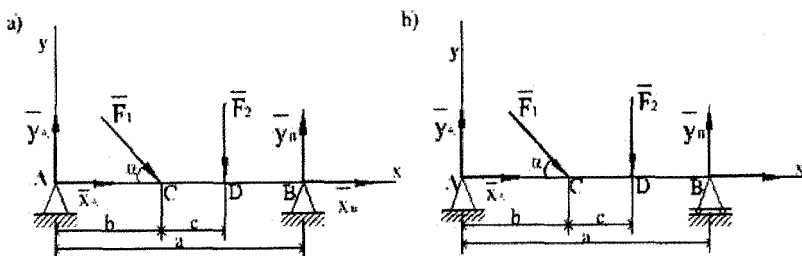
$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0, \quad (3.34)$$

(3.31) muvozanat shartidan parallel kuchlar muvozanatining boshqa formasi hosil bo'ladi.

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0 \quad (3.35)$$

3.10 Statik aniq va statik aniqmas masalalar

Berilgan masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalar soniga teng bo'lsa, statik aniq masala deyiladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan masalalar statik aniq masalalar edi.



3.11-rasm

Noma'lumlar soni muvozanat tenglamalar sonidan ortiqcha bo'lsa, bunday masala statik aniqmas masala deyiladi.

Ikkala uchi qo'zg'almas silindrik sharnirli tayanchga birlashtirilgan AB to'sin berilgan bo'lsin (3.11-rasm, a). To'sinni C nuqtasiga α burchak ostida \bar{F}_1 va D nuqtasiga perpendikulyar yo'nalgan \bar{F}_2 kuchlar ta'sir

etayotgan bo'lsin. A va B tayanchlar silindrik sharnirli qo'zg'almas tayanchlar bo'lgani uchun ularning reaksiya kuchlarini \bar{x}_A, \bar{y}_A va \bar{x}_B, \bar{y}_B tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu kuchlar tekislikdagi kuchlarni tashkil etadi. Demak muvozanat tenglamalari uchta bo'ladi. Shu sababli masala statik aniqmas masala.

Masalani statik aniq bo'lishi uchun tayanchlardan birini (masalan, B tayanchni) qo'zg'aluvchan silindrik sharnirli tayanch bilan almashtirish mumkin (3.11-rasm,b).

B tayanchning reaksiya kuchi bitta \bar{y}_B dan iborat bo'ladi. Endi tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'ladi. Masala statik aniq masalaga aylandi.

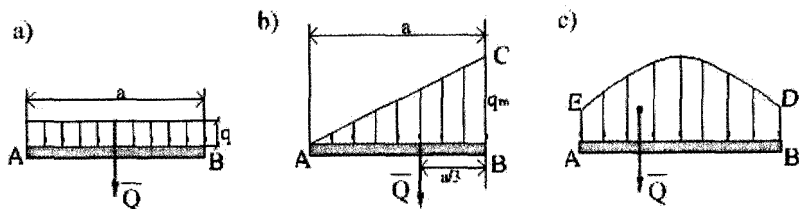
Nazariy mexanikada statik aniq masalalar yechiladi. Statik aniqmas masalalar materiallar qarshiligi va qurilish mexanikasi fanlarida yechiladi.

3.11 Taqsimlangan kuchlar

Muhandislik hisoblashlarida u yoki bu qonuniyat asosida sirt bo'ylab taqsimlangan kuchlar ko'plab uchraydi. Bir tekislikda taqsimlangan kuchlar qo'yilgan eng sodda misollarni ko'rib chiqamiz.

Bir tekis taqsimlangan kuchlarni xarakterlovchi kattalik, uning intensivligi, ya'ni uzunlik birligiga to'g'ri kelgan taqsimlangan kuch bo'lib hisoblanadi. Intensivlik $\frac{\text{Nyuton}}{\text{metr}} \left(\frac{1 \text{ N}}{m} \right)$ larda o'lchanadi va q harfi bilan belgilanadi.

1) To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar
(3.12-rasm, a)



3.12-rasm

Bunday kuchlarning intensivligi qo'zg'almas kattalik bo'ladi. Masalalar yechishda bunday kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisi \bar{Q} bilan almashtiriladi. Uning moduli quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$Q = aq, \quad (3.36)$$

bu yerda: a – kuch taqsimlangan masofa;

Teng ta'sir etuvchi \bar{Q} AB kesmaning o'rtasiga qo'yiladi.

2) To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha chiziqli qonun bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (3.12-rasm, b).

Bunday kuchlarga misol tariqasida to'g'onga beradigan suvning bosim kuchini ko'rsatish mumkin. Suvning bosim kuchi to'g'on balandligi bo'yicha: eng pastda maksimal qiymatga, suv sirtida esa nolga teng bo'ladi. Bunday kuchlar uchun tekis taqsimlangan kuchlarning intensivligi o'zgaruvchan kattalik bo'lib noldan maksimal qiymatga q_m gacha o'zgaradi. Bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \bar{Q} bir jinsli uchburchak shakldagi plastinkaning og'irlik kuchi kabi topiladi. Bir jinsli uchburchak plastinkaning og'irligi uning yuzasiga proporsional bo'lib, moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$Q = 0,5 \cdot a \cdot q_m, \quad (3.37)$$

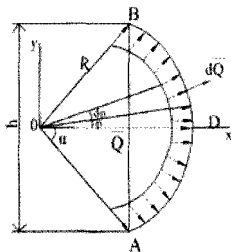
Teng ta'sir etuvchi \bar{Q} kuch ABC uchburchakning BC tomonidan $\frac{a}{3}$ masofada qo'yilgan bo'ladi.

3) To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha ixtiyoriy qonun asosida taqsimlangan kuchlar (3.12-rasm, c).

Bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \bar{Q} miqdor jihatidan mos masshtabda o'lchangan ABCD shakl yuzasiga teng hamda berilgan yuzaning og'irlik markaziga qo'yiladi. Bu holga metro va boshqa yer osti inshootlariga tuproqning ta'sir kuchi misol bo'la oladi.

4) **Aylana yoyi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar** (3.13-rasm). Bunday kuchlarga silindrik shakldagi idish ichidagi suyuqlikning idish devoriga beradigan gidrostatik bosimi misol bo'la oladi.

Yoyning radiusi R , $\angle BOD = \angle AOD = \alpha$, bu yerda OD – simmetriya o'qi bo'lib x o'qini shu o'q bo'ylab yo'naltiramiz.



3.13-rasm

Yoyga ta'sir etuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \bar{Q} simmetriya ya'ni Ox o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bunda $Q_x = Q$. Q ning modulini aniqlash uchun yoydan ds yoy elementini ajratib olamiz, uning holati φ burchak orqali uzunligi esa $ds = R dφ$ yordamida aniqlanadi.

Elementar ds yoyga ta'sir etuvchi kuch $dQ = q ds = q R dφ$, Ox o'qdagi proyeksiyasi $dQ_x = dQ \cdot \cos φ = q R \cos φ \cdot dφ$ ga teng.

$$\text{U holda } Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = qR \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos φ \cdot dφ = 2qR \sin α \quad \text{3.13-rasmdan}$$

ko'rinadiki, $R \sin α = \frac{AB}{2}$, shuningdek $Q_x = Q$ bo'lgani uchun

$$Q = q \cdot h, \quad (3.38)$$

bu yerda: h – AB yoyini tortib turuvchi vatar.

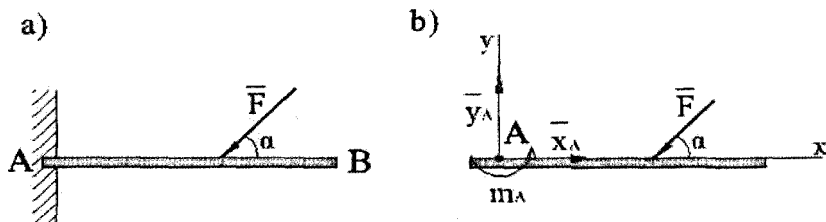
5) **Devorga qistirib mahkamlangan balkaga ta'sir etuvchi taqsimlangan kuchlar.**

AB to'sinning AC qismi devorga qistirib mahkamlangan bo'lsin (3.14-rasm,a). Bino balkonlarining asosi devorga xuddi shunday birlashtiriladi.

To'sinning devorga kirib turgan qismiga ta'sir etuvchi taqsimlangan reaksiya kuchlarini A nuqtaga keltirish natijasida bu kuchlarni shu nuqtaga qo'yilgan bitta R_A kuch va momenti m_A noma'lum juft bilan almashtirish mumkin.

R_A ning yo'nalishi aniq bo'lmagani uchun uni x_A, y_A tashkil etuvchilarga ajratiladi.

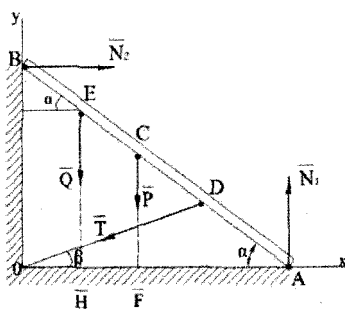
Shunday qilib, devorga qistirib mahkamlangan to'sinning devorga qisilgan qismidagi reaksiya kuchi oldindan noma'lum uchta x_A, y_A, m_A lardan iborat bo'ladi (3.14-rasm, b).



3.14-rasm

3.12 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala. Uzunligi $2a$, og'irligi P ga teng AB zinapoya silliq gorizontol pol va silliq vertikal devorga tayanib turadi; Uning E nuqtasida og'irligi Q bo'lgan odam turibdi. Zinapoya sirg'anib ketmasligi uchun OD ip yordamida bog'lab qo'yilgan. Zinapoya va ipning pol bilan tashkil qilgan burchaklari tegishli α, β . $BE=b$ bo'lsa, A va B tayanchlardagi reaksiyalarni aniqlang.



3.15-rasm

Zinapoyaning og'irlik markazi uning o'rta-sidagi C nuqtada deb oling.

Yechilishi: Tayanch reaksiyalarini tegishli N_1 va N_2 deb belgilab, ularni tayanch nuqtalariga perpendikulyar qilib yo'naltiramiz (3.15-rasm). Ipda hosil bo'lgan reaksiya kuchi T taranglik kuchidan iborat bo'lib, u ip bo'y-

lab yoʻnalgan boʻladi. Odam va zinapoyaning ogʻirlik kuchlari Q va P larni vertikal pastga tomon, koordinata oʻqlarini OA va OB toʻgʻri chiziq boʻyicha yoʻnaltiramiz. Endi muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{xx} = 0; \quad N_2 - T \cos \beta = 0 \quad (1')$$

$$\sum F_{xy} = 0; \quad -Q - P - T \sin \beta + N_1 = 0 \quad (2')$$

$$\sum m_0(\vec{F}_k) = 0; \quad -N_2 \cdot OB - Q \cdot OH - P \cdot OF + N_1 \cdot OA = 0 \quad (3')$$

Avval quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$OB = AB \sin \alpha = 2a \sin \alpha; \quad OH = b \cos \alpha$$

$$OF = AB/2 \cdot \cos \alpha = \frac{2a}{2} \cos \alpha = a \cos \alpha, \quad OA = AB \cos \alpha = 2a \cos \alpha$$

bularni oʻrniga qoʻyamiz.

$$\sum F_{xx} = 0; \quad N_2 - T \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{xy} = 0; \quad -Q - P - T \sin \beta + N_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_0(\vec{F}_k) = 0; \quad -N_2 \cdot 2a \sin \alpha - Qb \cos \alpha - Pa \cos \alpha + N_1 \cdot 2a \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

(1) tenglikdan

$$N_2 = T \cos \beta$$

(2) tenglikdan $N_1 = T \sin \beta + P + Q$

N_1 va N_2 larning qiymatlarini (3) tenglikka keltirib qoʻyamiz.

$$-T \cos \beta \cdot 2a \sin \alpha - Qb \cos \alpha - Pa \cos \alpha + (T \sin \beta + P + Q)2a \cos \alpha = 0 \quad \text{yoki}$$

$$T \cdot 2a \sin \beta \cos \alpha + P2a \cos \alpha + Q2a \cos \alpha - T2a \sin \alpha \cos \beta - Qb \cos \alpha - Pa \cos \alpha = 0$$

$$2a \cos \alpha (T \sin \beta + P + Q) - T2a \cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha (Qb + Pa) = 0$$

$$\text{bundan } -2aT \sin(\alpha - \beta) + Pa \cos \alpha + Q(2a - b) \cos \alpha = 0$$

$$\text{yoki: } -2aT \sin(\alpha - \beta) + [Pa + Q(2a - b)] \cos \alpha = 0$$

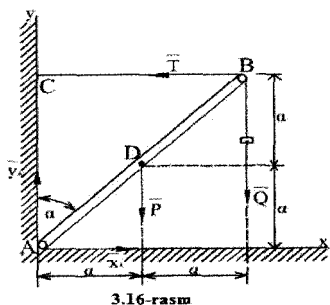
$$T = \frac{[Pa + (2a - b)Q] \cos \alpha}{2a \sin(\alpha - \beta)} = \left[\frac{Pa + (2a - b)Q}{2a} \right] \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = \left(\frac{P}{2} + \frac{2a - b}{2a} Q \right) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)};$$

Endi N_1 va N_2 larni aniqlaymiz.

$$N_1 = T \sin \beta + P + Q = P + Q + \left(\frac{P}{2} + \frac{2a - b}{2a} Q \right) \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$N_2 = \left(\frac{P}{2} + \frac{2a-b}{2a} Q \right) \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)};$$

2-masala. A sharnir atrofida aylana oladigan, uzunligi $2a$ va og'irligi P ga teng bo'lgan ko'tarish kranining AB tirsagi BC zanjir yordamida gorizontal holatda muvozanat holatida ushlab turiladi. Tirgakning B uchiga og'irligi Q bo'lgan yuk osilgan. Agar tirgak bilan vertikal orasidagi burchak α ga teng bo'lsa, zanjirning taranglik kuchi va A sharnirning reaksiyalarini aniqlang.



3.16-rasm

Yechilishi: Koordinata boshi qilib A nuqtani olamiz va A_x , A_y o'qlarini o'tkazamiz (3.16-rasm). Zanjirda hosil bo'ladigan bog'lanish reaksiya kuchi, zanjirning taranglik kuchiga teng bo'lib zanjir bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. A sharnirning reaksiya kuchining yo'nalishi bizga ma'lum bo'lmagani uchun, uni x_A va y_A tashkil etuvchilarga ajratib topamiz. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{Kx} = 0 \quad x_A - T = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{Ky} = 0 \quad y_A - P - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_K) = 0 \quad -aP \sin \alpha - 2aQ \sin \alpha + 2aT \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

R_A ni Pifagor teoremasiga ko'ra aniqlaymiz.

$$(1) \text{ - dan } x_A = T \quad (2) \text{ dan } y_A = P + Q$$

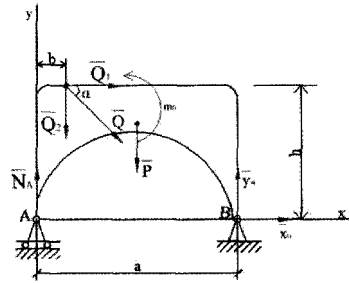
$$(3) \text{ - dan } T = \frac{aP \sin \alpha + 2aQ \sin \alpha}{2a \cos \alpha} = \frac{(P + 2Q) \cdot a \sin \alpha}{2a \cos \alpha} = \left(\frac{P}{2} + Q \right) \operatorname{tg} \alpha$$

$$T = \left(\frac{P}{2} + Q \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad x_A = \left(\frac{P}{2} + Q \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad y_A = P + Q$$

$$R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{P}{2} + Q \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha \right]^2 + (P + Q)^2} = \sqrt{\left(\frac{P}{2} + Q \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + (P + Q)^2}$$

3-masala. Simmetrik arkani D nuqtasiga qo'yilgan $Q = 40$ kN va momenti $m_D = 120$ kN m ga teng bo'lgan juftga keltiriladigan kuchlar sistemasi qo'yilgan. Arkaning og'irligi $P = 80$ kN. Arkaning A va B tayanch reaksiyalarini aniqlang.

$AB = Q = 10$ M, $b = 2$ M, $h = 3$ M, $\alpha = 60^\circ$, deb oling.



3.17-rasm

Yechilishi:

Arkanning muvozanatini yaxlit holda qarab chiqamiz. Unga aktiv kuchlar P va Q shuningdek reaksiya kuchlari N_A, X_B, Y_B ta'sir qiladi (B sharnirli tayanch ikkita A qo'zg'aluvchan tayanchning bitta reaksiya kuchlari) (3.17-rasm). Q kuchdan moment olish uchun uni ikkita Q_1 va Q_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz, ularning moduli

$$Q_1 = Q \cos \alpha, Q_2 = Q \sin \alpha$$

$$\sum m_A(F_K) = 0; \quad -Q \cos \alpha \cdot h - Q \sin \alpha b + m_D - P \frac{a}{2} + Y_B \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_B(F_K) = 0; \quad P \frac{a}{2} + m_D - Q \cos \alpha \cdot h + Q \sin \alpha (a - b) - N_A \cdot a = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{KX} = 0; \quad Q \cos \alpha + x_B = 0 \quad (3)$$

Tenglamalarni hisoblaymiz.

$$x_B = -Q \cos 60^\circ = -40 \cdot \frac{1}{2} = -20 \text{ kN}$$

$$N_A = \frac{P \frac{a}{2} + m_D - Q \cos 60^\circ \cdot h + Q \sin 60^\circ (a - b)}{a} = \frac{400 + 120 - 60 + 27,68}{10} = 73,7 \text{ kN}$$

$$Y_B = \frac{h \cdot Q \cos 60^\circ + b \cdot Q \sin 60^\circ - m_D + P \frac{a}{2}}{a} = \frac{60 + 69,2 - 120 + 400}{10} = 40,9 \text{ kN}$$

x_B ning qiymati manfiy ishorada kelib chiqdi. Demak, x_B reaksiya kuchi chizmada ko'rsatilgan tomonga teskari yo'nalgan ekan. B tayanchning to'la reaksiyasining moduli

$$R_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

formuladan aniqlanadi

$$R_B = \sqrt{(-20)^2 + (40,9)^2} \approx 45,5 \text{ kN}$$

Masalani to'g'ri yoki noto'g'ri yechilganini tekshirib ko'rish kerak. Buning uchun A_y o'qidagi proyeksiya tenglamasini tuzamiz:

$$\sum F_{ky} = 0; N_A + y_B - P - Q \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

hisoblaymiz.

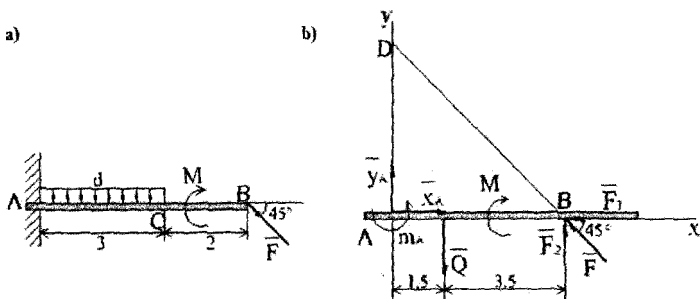
$$73,7 + 40,9 - 80 - 40 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0; 114,6 - 114,6 = 0; 0 = 0$$

Demak masala to'g'ri yechilgan.

Shuni qayd qilish kerakki, bunday usulda tekshirishda kuchlarning o'qlardagi proyeksiyalari yoki kuchlarning momentlarini aniqlashda yo'l qo'yilgan xatoliklarni aniqlab bo'lmaydi. Shunga ko'ra, qo'shimcha ravishda D markazga nisbatan momentlar tenglamasini tuzish kerak.

4-masala. AB to'sin A nuqtada devorga qisib mahkamlangan (3.18-rasm, a). Agar $F=4 \text{ kN}$, $M=2 \text{ kNm}$, $q=1,5 \text{ kN/m}$ bo'lsa, A tayanchdagi reaksiya kuchlari aniqlansin.

Yechilishi: Birinchi navbatda A nuqtani koordinata boshi qilib koordinata o'qlarini o'tkazamiz.



3.18-rasm

To'singa ta'sir etuvchi kuchlarni rasmda ko'rsatamiz (3.18-rasm, b). To'sinning AC qismga qo'yilgan bir tekis taqsimlangan kuchni teng ta'sir etuvchisi \bar{Q} bilan almashtiramiz. \bar{Q} kuch AC kesmaning o'rtasiga qo'yiladi.

To'sinning B uchiga qo'yilgan \bar{F} kuchni \bar{F}_1 va \bar{F}_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz va momenti M bo'lgan juftni qo'yamiz. To'sin devorga qisib mahkamlangani uchun bog'lanish reaksiya kuchlari \bar{x}_A, \bar{y}_A va momenti m_A bo'lgan reaksiya jufti bilan almashtiriladi.

To'singa ta'sir etuvchi kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasidan iborat bo'lgani uchun, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining asosiy formasidan foydalanamiz:

$$\sum F_{KX} = 0; \quad x_A - F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \quad y_A - Q + F_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_K) = 0; \quad m_A - Q \cdot 1,5 - M + F_2 \cdot 5 = 0 \quad (3)$$

bu yerda $F_1 = F \cos 45^\circ$, $F_2 = F \sin 45^\circ$; $Q = q \cdot 3 = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ kN}$

$$x_A = F \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 1,41 = 2,82 \quad (1)$$

$$y_A = Q - F \sin 45^\circ = 4,5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,5 - 2,82 = 1,68 \text{ kN} \quad (2)$$

$$m_A = Q \cdot 1,5 + M - F \sin 45^\circ \cdot 5 = 4,5 \cdot 1,5 + 2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 = 6,75 + 2 - 14,1 = -5,35 \text{ kNm} \quad (3)$$

m_A rasmda ko'rsatilgan yo'nalishga teskari yo'nalgan ekan.

Ikkinchi usul: y_A va F kuchlarning ta'sir chiziqlarini davom ettiramiz. Ular qandaydir D nuqtada kesishadi :

$$\sum m_A(F_K) = 0; \quad m_A - Q \cdot 1,5 - M + F_2 \cdot 5 = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_B(F_K) = 0; \quad -M + Q \cdot 3,5 + m_A - y_A \cdot 5 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_D(F_K) = 0; \quad +m_A - Q \cdot 1,5 - M + x_A \cdot AD = 0 \quad (6)$$

(3.18-rasm, b) rasmdan ko'rinadiki $\angle ABD$ teng yonli uchburchak, chunki $\alpha = 45^\circ$. Shunga ko'ra $AB = AD = 5 \text{ m}$

$$m_A = Q \cdot 1,5 + M - F \sin 45^\circ \cdot 5 = 4,5 \cdot 1,5 + 2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 = -5,35 \text{ kNm}$$

$$y_A = \frac{-m_A - Q \cdot 3,5 + M}{5} = \frac{-2 - 4,5 \cdot 3,5 + (-5,35)}{5} = \frac{-2 + 15,75 - 5,35}{5} = 1,68 \text{ kNm}$$

$$x_A = \frac{M + Q \cdot 1,5 - m_A}{AD} = \frac{2 + 4,5 \cdot 1,5 + 5,35}{5} = 2,82 \text{ kN}$$

Aniqlangan natijalarning to'g'riligiga ikkala usulda ham bir xil natija olinganligidan ham ishonch hosil qilish mumkin.

5-masala. Agar $P = 30N$, $F_1 = F_2 = F_3 = 20N$, $a = 0,3m$, $b = 0,5m$, $\alpha = 60^\circ$ bo'lsa, ko'rsatilgan P , F_1 , F_2 , F_3 kuchlar sistemasi O markazga keltirilsin.

Yechilishi: Ushbu masala berilgan kuchlar sistemasining R_x va R_y – proyeksiyalar orqali bosh vektor R - ni hamda O markazga nisbatan hisoblangan bosh moment M_0 ni aniqlashdan iborat bo'ladi. Oxy koordinata o'qlarni (3.19-rasm) da ko'rsatilgandek qilib o'tkazamiz va quyidagi tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$R_x = \sum R_{kx} = -F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha - F_3$$

$$R_y = \sum R_{ky} = -P - F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha$$

$$M_0 = \sum m_0(F_k) = -bP + aF_1 \cos \alpha + 2bF_2 \sin \alpha + aF_3$$

Ushbu tenglamalar sistemasiga tegishli qiymatlarni qo'yib,

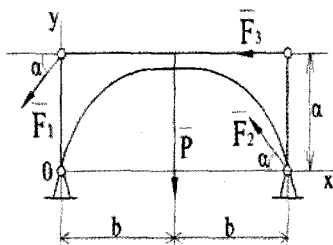
$$R_x = -40N, R_y = -30N, M_0 = 11,3N \cdot m \text{ ekanligini aniqlaymiz.}$$

Bosh vektorning moduli $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 50N \cdot m$ - ga teng bo'ladi. Shunday qilib, berilgan kuchlar sistemasining koordinata o'qlardagi proyeksiyalari $R_x = -40N$, $R_y = -30N$ dan iborat bo'lib, O markazga qo'yilgan bosh vektor - $R = 50N \cdot m$ va momenti $M_0 = 11,3N \cdot m$ ga teng bo'lgan bitta juft kuchga keltirilgan ekan.

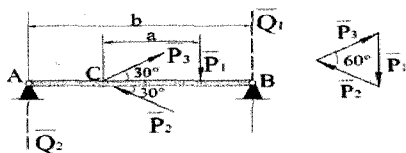
6-masala. Agar $R_1 = R_2 = R_3 = P$ - ga teng bo'lsa, AB balkaga qo'yilgan P_1, P_2, P_3 kuchlar sistemasi sodda holga keltirilsin, hamda A va B tayanchlarga ko'rsatilayotgan bosim kuchlari aniqlansin?

Yechilishi: P_1, P_2, P_3 - kuchlardan tuzilgan kuch ko'pburchagi yopiq, demak, bosh vektor $R = 0$. Barcha kuchlarning ixtiyoriy olingan nuqtaga

(masalan, C nuqtaga) nisbatan momentlarining yig'indisi $-P \cdot a$ - ga teng bo'ladi (3.20-rasm). Demak berilgan kuchlar sistemasi momenti $-P \cdot a$ ga



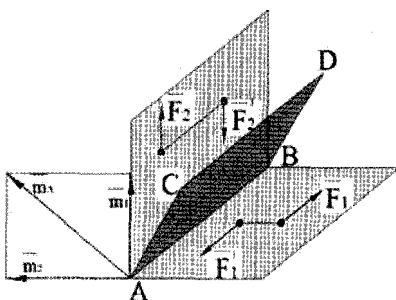
3.19-rasm



3.20-rasm

teng bo'lgan, bitta juftga keltirilgan ekan. Shu aniqlangan juftni A va B tayanchlarga ko'rsatilganidek punktilar orqali tasvirlasak, berilgan P_1, P_2, P_3 kuchlar sistemasi har bir tayanchga $Q_A = Q_B = Ra/b$ miqdordagi kuchlar bilan bosim kuchi ko'rsatar ekan. Lekin bosim kuchlarining yo'nalishlari o'zaro teskari bo'lar ekan.

7-masala: Qattiq jismga o'zaro perpendikulyar bo'lgan tekisliklarda joylashgan \vec{F}_1, \vec{F}_1' va \vec{F}_2, \vec{F}_2' kuchlardan tashkil topgan ikkita juft kuch ta'sir etmoqda. Har bir juft momentining moduli $30 \text{ N}\cdot\text{m}$ ga teng. Shu juftlarning yig'indisi aniqlansin.

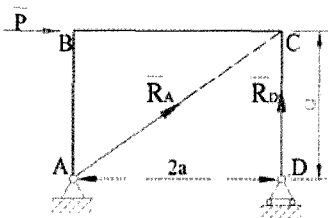


3.21-rasm

Yechilishi: Juftlar joylashgan tekisliklarning kesishgan chizig'ida joylashgan ixtiyoriy A nuqtaga

\vec{m}_1 va \vec{m}_2 vektorlarni tegishli yo'nalishlarda qo'yamiz (3.21-rasm). So'ngra ularni geometrik usulda qo'shib, yig'indi vektorni aniqlaymiz, ya'ni $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$. Demak shu ikki juftga ekvivalent bo'lgan bitta juft, shu \vec{m} -vektorga perpendikulyar bo'lgan ABCD tekislikda joylashib, momentining moduli $m = 30\sqrt{2} \text{ H}\cdot\text{M}$ ga teng bo'lar ekan.

8-masala. Rasmda tasvirlangan romda B nuqtaga qo'yilgan P gorizontaal kuch ta'siridan hosil bo'ladigan R_A va R_D tayanch reaksiyalari aniqlansin? Romning og'irligi hisobga olinmasin (3.22-rasm).



3.22-rasm

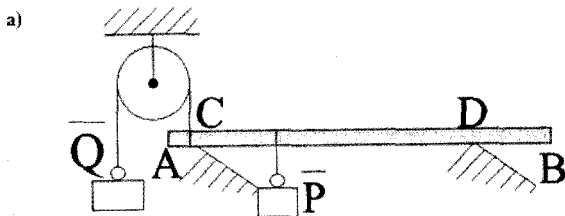
Yechilishi: A va D nuqtalardagi reaksiya kuchlarini yo'nalishlari orqali belgilab

olamiz va A nuqtaga nisbatan moment olamiz. Chizmadan ma'lumki A nuqtadagi reaksiya kuchi ABCD romning diagonalidan iborat (3.22-rasm).

$$R_D 2a - Pa = 0, \quad R_D = P/2;$$

$$R_A = \sqrt{R_D^2 + P^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} P.$$

9-masala. Uzunligi 10 m va og'irligi 2 kN bo'lgan AB balka ikkita C va D tayanchda yotadi. C tayanch balkaning A uchidan 2 m, D tayanch balkaning B uchidan 3 m masofada turadi. Balkaning chetki A nuqtasi bir uchiga 3 kN li Q yuk osilgan va blokdan o'tkazilgan arqon yordamida yuqoriga tortiladi. A uchidan 3 m masofada balkaga og'irligi 8 kN bo'lgan P yuk osilgan (3.23-rasm, a). Blokdagi ishqalanishni e'tiborga olmay, tayanchlardagi reaksiya kuchlari topilsin?



3.23-rasm

Yechilishi: Masalani kuch yo'nalishlarini belgilashdan boshlaymiz. Bizga ma'lumki, balkaning og'irligini uning o'rtasidan tushadi deb hisoblab, uni P_1 orqali belgilaymiz.

$$AB = 10m, \quad AC = 2m,$$

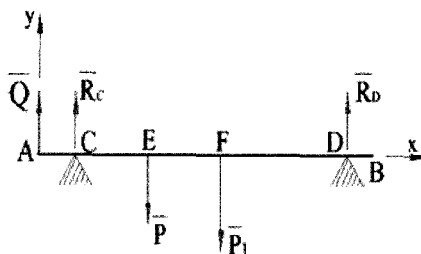
$$AE = 3m, \quad AF = 5m,$$

$$DF = 3m, \quad Q = 3kN,$$

$$P = 8kN, \quad P_1 = 2kN$$

$$R_D = ? \quad R_C = ?$$

b)



3.23-rasm

A nuqtani koordinata boshi deb hisoblab, kuchlarni y o'qdagil proyeksiyalarini aniqlaymiz (3.23-rasm, b).

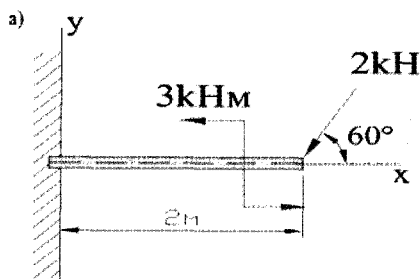
$$R_C + R_D + Q - P - P_1 = 0 \quad \text{Unga ko'ra : } R_C + R_D = 7kN$$

Endi A nuqtaga nisbatan moment hisoblaymiz:

$$5R_D - 3P_1 - 1P - 2Q = 0 \quad R_D = 4kN, \quad \text{topilgan qiymatni o'rniga qo'yib } R_C \text{ ni aniqlaymiz. } R_C = 3kN.$$

10-masala.

To'plangan kuch, tekis taqsimlangan yuk va juft kuch ta'siridagi rasmda tasvirlangan konsol balkaning devorga qistirib mahkamlangan uchining reaksiya kuchlari aniqlansin (3.24-rasm, a).



3.24-rasm

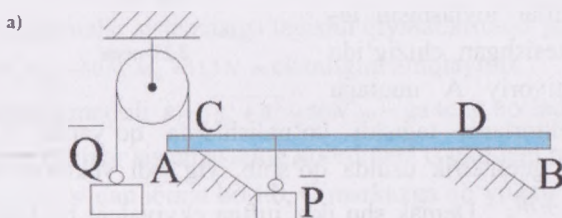
Yechilishi: Chizmadan ma'lumki, konsol balkaning devorga qistirib mahkamlangan joyida reaksiya kuchlarini aynan tashkil etuvchilarga ajratib ishlash muvofiqdir. Bu tashkil etuvchilar koordinata o'qlarining musbat tomonida yo'nalgan. Shuningdek bu qismda tutib turuvchi moment ham mavjud (3.24-rasm, b).

olamiz va A nuqtaga nisbatan moment olamiz. Chizmadan ma'lumki A nuqtadagi reaksiya kuchi ABCD romning diagonalidan iborat (3.22-rasm).

$$R_D 2a - Pa = 0, \quad R_D = P/2;$$

$$R_A = \sqrt{R_D^2 + P^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} P.$$

9-masala. Uzunligi 10 m va og'irligi 2 kN bo'lgan AB balka ikkita C va D tayanchda yotadi. C tayanch balkaning A uchidan 2 m, D tayanch balkaning B uchidan 3 m masofada turadi. Balkaning chetki A nuqtasi bir uchiga 3 kN li Q yuk osilgan va blokdan o'tkazilgan arqon yordamida yuqoriga tortiladi. A uchidan 3 m masofada balkaga og'irligi 8 kN bo'lgan P yuk osilgan (3.23-rasm, a). Blokda ishqalanishni e'tiborga olmay, tayanchlardagi reaksiya kuchlari topilsin?



3.23-rasm

Yechilishi: Masalani kuch yo'nalishlarini belgilashdan boshlaymiz. Bizga ma'lumki, balkaning og'irligini uning o'rtasidan tushadi deb hisoblab, uni P_1 orqali belgilaymiz.

$$AB = 10m, \quad AC = 2m,$$

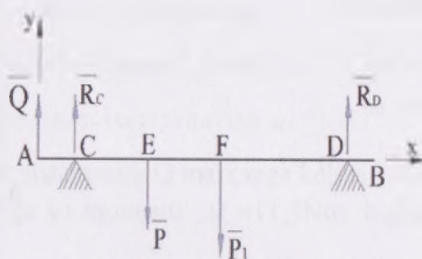
$$AE = 3m, \quad AF = 5m,$$

$$DF = 3m, \quad Q = 3kN,$$

$$P = 8kN, \quad P_1 = 2kN$$

$$R_D = ? \quad R_C = ?$$

b)



3.23-rasm

A nuqtani koordinata boshi deb hisoblab, kuchlarni y o'qdagil proyeksiyalarini aniqlaymiz (3.23-rasm, b).

$$R_C + R_D + Q - P - P_1 = 0 \quad \text{Unga ko'ra : } R_C + R_D = 7kN$$

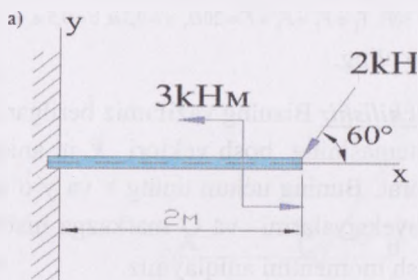
Endi A nuqtaga nisbatan moment hisoblaymiz:

$$5R_D - 3P_1 - 1P - 2Q = 0 \quad R_D = 4kN, \quad \text{topilgan qiymatni o'rniga qo'yib } R_C \text{ ni aniqlaymiz. } R_C = 3kN.$$

10-masala.

To'plangan kuch, tekis taqsimlangan yuk va juft kuch ta'siridagi rasmda tasvirlangan konsol balkaning devorga qistirib mahkamlangan uchining reaksiya kuchlari aniqlansin

(3.24-rasm, a).



3.24-rasm

Yechilishi: Chizmadan ma'lumki, konsol balkaning devorga qistirib mahkamlangan joyida reaksiya kuchlarini aynan tashkil etuvchilarga ajratib ishlash muvofiqdir. Bu tashkil etuvchilar koordinata o'qlarining musbat tomonida yo'nalgan. Shuningdek bu qismda tutib turuvchi moment ham mavjud (3.24-rasm, b).

Berilgan:

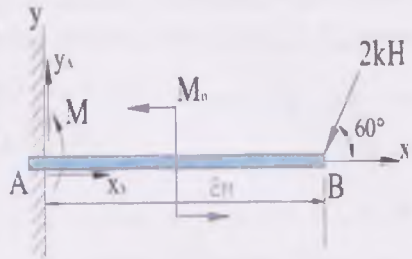
$$F = 2kN, \quad M_0 = 3kNm, \quad \alpha = 60^\circ,$$

$$AB = 2m$$

$$X = ? \quad Y = ?$$

$$M = ?$$

b)



3.24-rasm

Dasttavval, kuchlarning o'qlardagi proyeksiyalarini hisoblaymiz.

$$X_A - 2 \cos 60^\circ = 0, \quad \text{bu ifodalardan} \quad X_A = 1kN$$

$$Y_A - 2 \sin 60^\circ = 0 \quad Y_A = 1,73kN$$

ekanligini aniqlaymiz.

Endi A nuqtaga nisbatan momentlarni hisoblaymiz

$$M + M_0 - 2 \sin 60^\circ \cdot 2 = 0 \quad \text{Bundan moment } M = 0,47kN \cdot m \text{ ga teng bo'lar ekan.}$$

11-masala. Rasmda ko'rsatilgan $\vec{P}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ va \vec{F}_3 kuchlar sistemasini O markazga keltiring (3.25-rasm).

$$P = 30H, \quad F_1 = F_2 = F_3 = F = 20H, \quad a = 0,3m, \quad b = 0,5m, \quad \alpha = 60^\circ$$

deb oling.

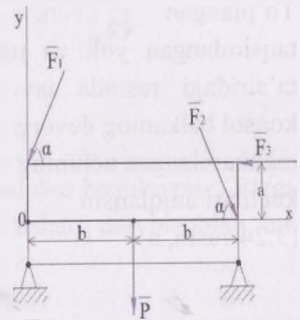
Yechilishi: Bizning vazifamiz berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R} ni aniqlashdan iborat. Buning uchun uning x va y o'qlaridagi proyeksiyalarini va O markazga nisbatan M_0 bosh momentini aniqlaymiz.

U holda R ning x va y o'qlaridagi

proyeksiyalari va O markazga nisbatan bosh momenti quyidagicha aniqlanadi:

$$R_X = \sum F_{KX} = -F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 = -20 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2} - 20 = -40H$$

$$R_Y = \sum F_{KY} = -F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 60^\circ - P = -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 30 = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 30 = -30H$$



3.25-rasm

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-40)^2 + (-30)^2} = \sqrt{1600 + 900} = 50H$$

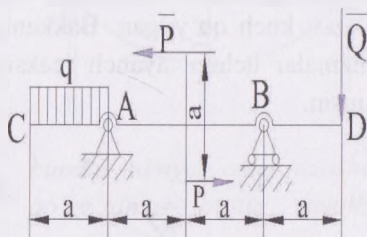
$$M_0 = \sum m_o(\bar{F}_K) = F_1 \cos 60^\circ \cdot a - P \cdot b + F_2 \sin 60^\circ \cdot 2b + F_3 \cdot a$$

$$M_0 = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 - 30 \cdot 0,5 + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 = 3 - 15 + 17,3 + 6 = 11,3H \cdot m$$

Shunday qilib, berilgan kuchlar sistemasini O markazga keltirilganda, O markazga qo'yilgan $R = 50H$ kuchga va momenti $M_0 = 11,3Nm$ bo'lgan juftga keltirilgan ekan.

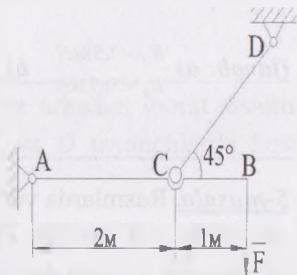
3.13 Mustaqil yechish uchun masalalar:

1-masala. Gorizontal ikki tomonlama AB balkaga (P,P) juft kuch, chap konsolga intensivligi q bo'lgan tekis taqsimlangan yuk, o'ng konsolning D nuqtasiga esa vertikal Q kuch ta'sir qiladi. Agar $P = 1kN$, $Q = 2kN$, $q = 2kN/m$, $a = 0,8m$ bo'lsa, tayanchlardagi reaksiyalar qancha bo'ladi.



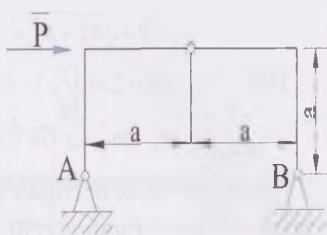
(javob: $R_A = 1,5kN$ $R_B = 2,1kN$)

2-masala. AB balkani CD sterjen gorizontal holatda tutib turadi. A, C va D bog'lanishlar sharnirlidir. Agar balkaning uchiga $F = 5kN$ vertikal kuch ta'sir qilayotgan bo'lsa, A va D tayanchlar reaksiyalari qancha bo'ladi. O'lchovlar rasmda ko'rsatilgan. Balka va sterjenning og'irligi hisobga olinmasin.



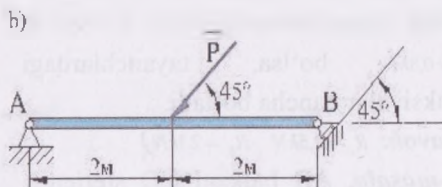
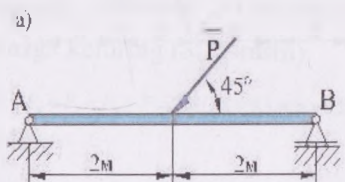
(javob: $R_A = 7,9kN$ $R_D = 10,6kN$)

3-masala. Rasmda ko'rsatilgan uch sharnirli arka uchun gorizontal \bar{P} kuch ta'sirida hosil bo'ladigan A va B tayanch reaksiyalari aniqlansin? Arkaning og'irligi hisobga olinmasin.



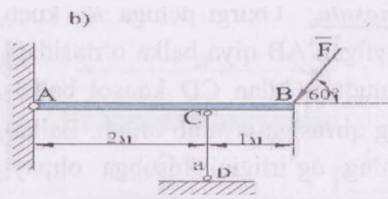
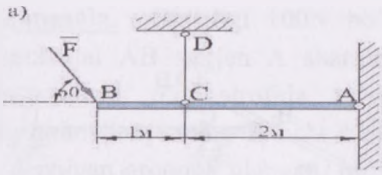
(javob: $R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{2} P$)

4-masala. AB balka A tayanchga sharnir bilan biriktirilgan. Uning B uchi katokka qo'yilgan. Balkaning o'rtasiga uning o'qiga 45° burchak ostida $P = 2kN$ kuch qo'yilgan. Balkaning og'irligi hisobga olmay, a) va b) chizmalar uchun tayanch reaksiyalari aniqlansin? O'lchovlar rasmdan olinsin.



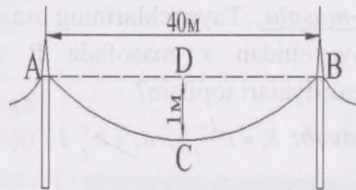
(javob: a) $R_A = 1,58kN$
 $R_B = 0,71kN$ b) $R_A = 2,24kN$
 $R_B = 1kN$)

5-masala. Rasmlarda vertikal CD sterjenlar bilan, gorizontal holatda tutib turiluvchi AB balkalar ko'rsatilgan. Balkalarning uchiga gorizontga 60° qiyalangan $F = 30kN$ kuchlar ta'sir qiladi. O'lchamlarni rasmdan olib, CD sterjenlardagi S zo'riqishlar va balkalarning devorga ko'rsatadigan Q bosimi aniqlansin? A, C va D birikish nuqtalarida sharnirlar bor. Sterjen va balkalarning og'irligi hisobga olinmasin.



(javob: $S=39\text{kN}$ $Q=19,8\text{kN}$)

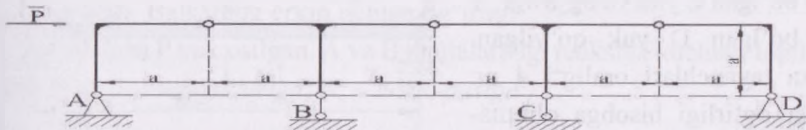
6-masala. ACB elektr simi ikkita simyog'och orasida shunday tortilganki, u solqish strelasi $CD = f = 1\text{m}$ bo'lgan tekis egri chiziq hosil qiladi. Simyog'ochlar orasidagi masofa $AB = l = 40\text{m}$. Simning har qaysi yarmining og'irligi eng yaqindagi simyog'ochdan $1/4$ masofada bo'lgan joyga tushadi deb hisoblab, simning o'rtasidagi T_C , uchlaridagi T_A va T_B taranglik kuchlari topilsin.



bunda simyog'och asoslari qo'zg'almas qattiq tayanch orqali mahkamlangan.

(javob: $T_C = \frac{Ql}{8f} = 2\text{kN}$; $T_A = T_B = 2,0\text{kN}$.)

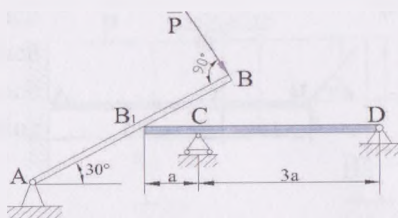
7-masala. O'lchovlari rasmda ko'rsatilgan to'rtta arkadan iborat sistema berilgan. Gorizontaal P kuch ta'sirida A , B , C va D tayanchlarda hosil



bo'ladigan reaksiyalar aniqlansin.

(javob: $R_A = \frac{\sqrt{2}}{2}P$, $R_B = P$, $R_C = P$, $R_D = \frac{\sqrt{2}}{2}P$.)

8-masala. Oxirgi uchiga P kuch qo'yilgan AB qiya balka o'rtasidagi B_1 nuqtasi bilan CD konsol balkaning qirrasiga tayanib turadi. Balkalarning og'irligini hisobga olmay, tayanch reaksiyalari aniqlansin.



(javob: $R_A = P$, $R_C = \frac{4P}{\sqrt{3}}$, $R_D = \frac{\sqrt{2}P}{2}$.)

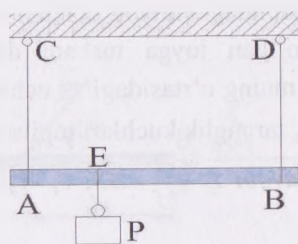
9-masala. Tayanchlarining oraliq'i l bo'lgan gorizontal balkaning birinchi tayanchidan x masofada P yuk qo'yilgan. Tayanchlarning vertikal reaksiyalari topilsin?

(javob: $R_1 = P \frac{l-x}{l}$, $R_2 = P \frac{x}{l}$.)

10-masala. Uzunligi $1m$, og'irligi $20N$ bo'lgan bir jinsli AB sterjen parallel AC va BD arqonlarga gorizontal ravishda osilgan. Sterjenning E nuqtasiga $AE = \frac{1}{4}m$ masofada

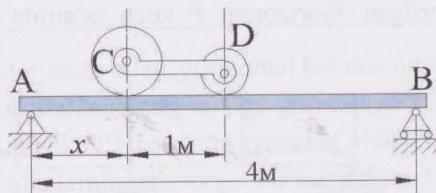
$P = 120N$ yuk osilgan. Arqonlardagi T_C va T_D taranglik kuchlari topilsin.

(javob: $T_C = 100N$, $T_D = 40N$.)

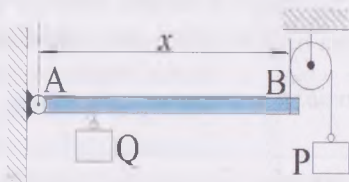


11-masala. Ikkita tayanchda turgan gorizontal balkaga og'irligi $2kN$ bo'lgan C yuk va og'irligi $1kN$ bo'lgan D yuk qo'yilgan. Balka tayanchlari oraliq'i $4m$. Balka og'irligi hisobga olinmaganida, A tayanchning reaksiyasi B tayanch reaksiyasidan ikki marta katta. Yuklar orasidagi CD masofa $1m$ ga teng. C yukdan A tayanchgacha bo'lgan x masofa qancha.

(javob: $x = 1m$)

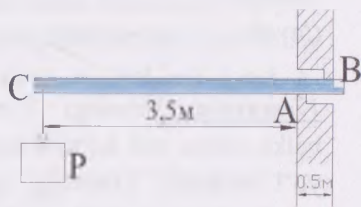


12-masala. Og'irligi 100N bo'lgan gorizontaal AB sterjen A sharnirning qo'zg'almas o'qi atrofida aylanishi mumkin. Sterjenning B uchi blokdan o'tkazilgan arqonga ulangan, og'irligi $P=150\text{N}$ bo'lgan tosh yordami bilan yuqoriga tortiladi. Sterjenning B uchidan 20sm narida turgan nuqtasiga og'irligi 500 N bo'lgan Q yuk osilgan. AB sterjen muvozanatda turgan bo'lsa, uning uzunligi x qancha bo'lishi kerak?



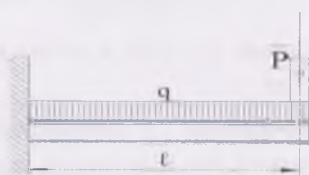
(javob: $x=25\text{sm}$)

13-masala. Bir jinsli gorizontaal balka devorga sharnir bilan biriktirilgan bo'lib, devordan 160 sm narida turgan nuqtada tirab qo'yilgan. Balkaning uzunligi 400 sm, og'irligi 320 N. Devordan 120 sm va 180 sm masofada balkaga mos ravishda og'irligi 160 N va 240 N bo'lgan yuklar qo'yilgan. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin?



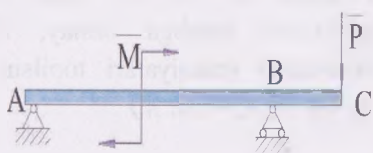
(javob: 790 N-yuqoriga, 70 N-pastga).

14-masala. Uzunligi 4 m, og'irligi 5 kN bo'lgan bir jinsli gorizontaal balka qalinligi 0,5 m bo'lgan devorga shunday qilib o'rnatilganki, u A va B nuqtalarda devorga tirilib turadi. Balkaning erkin uchiga og'irligi 40 kN bo'lgan P yuk osilgan. A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlari topilsin.



(javob: $R_A = 340\text{kN}$ -yuqoriga; $R_B = 295\text{kN}$ -pastga)

15-masala. Balkonni ushlab turadigan gorizontaal balkaga intensivligi $q = 2\text{kN/m}$ bo'lgan tekis taqsimlangan yuk ta'sir etadi. Balkaning erkin uchiga ustundan

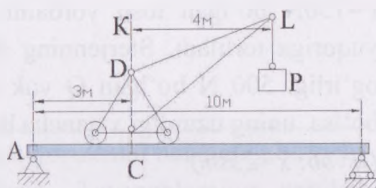


$P = 2\text{kN}$ og'irlik tushadi. Ustun o'qidan devorgacha bo'lgan masofa $l = 1,5\text{m}$. Balka birlashtirilgan reaksiyalar topilsin.

(javob: $R = 5\text{kN}$, $M = 5,25\text{kN}\cdot\text{m}$.)

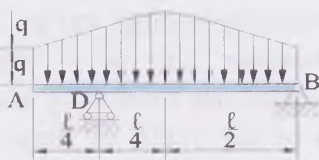
16-masala. Gorizontaal konsol balkaga momenti $M = 6\text{kN}\cdot\text{m}$ bo'lgan juft kuch, uning C nuqtasiga esa vertikal $P = 2\text{kN}$ yuk ta'sir qiladi. Balkaning AB oralig'i $3,5\text{m}$, konsolning chiqib turgan qismi $BC = 0,5\text{m}$. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin.

(javob: $R_A = 2\text{kN}$ -pastga, $R_B = 4\text{kN}$ -yuqoriga.)

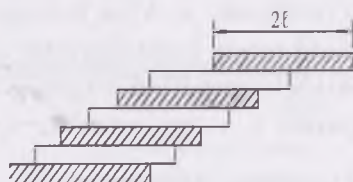


17-masala. Uzunligi 10 m bo'lgan AB balka ustiga yuk ko'taradigan kran uchun yo'l solingan. Kraning og'irligi 50 kN bo'lib, uning og'irlik markazi CD o'qida yotadi. P yukning og'irligi 10 kN , AB balkaning og'irligi 30 kN . Kraning KL qulochi uzunligi 4 m , $AC = 3\text{ m}$. Kraning DL strelasi balka bilan bir vertikal tekislikda bo'lgan hol uchun A va B nuqtalardagi tayanch reaksiyalari topilsin.

(javob: $R_A = 53\text{kN}$, $R_B = 37\text{kN}$.)

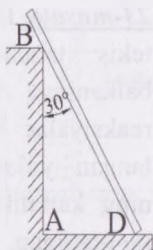


18-masala. l uzunlikdagi AB balkaga rasmda tasvirlangandek taqsimlangan yuk qo'yilgan. Yukning intensivligi balkaning A va B uchlarida $q\text{ N/m}$ ga, balkaning o'rtasida $2q\text{ N/m}$ ga teng. Balkaning og'irligini hisobga olmay, D va B tayanchlar reaksiyalari topilsin. (javob:



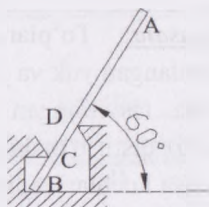
$R_D = ql\text{ N}$, $R_B = 0,5ql\text{ N}$)

19-masala. Uzunligi $2l$ ga teng bo'lgan bir xil va bir jinsli plitalarning bir nechtasi shunday taxlanganki, har qaysi plitaning bir qismi uning tagidagi plitadan chiqib turadi. Plitalar muvozanat holatida bo'lganda ularning eng ko'p chiqib turgan qismlarining uzunligi qancha bo'ladi. (**javob:** l , $l/2$, $l/3$, $l/4$, $l/5$, va hokazo.) [masalani yechishda plitalarning og'irliklari eng yuqoridagi plitadan boshlab ketma-ket qo'shiladi]



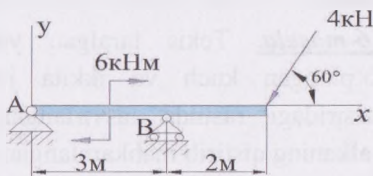
20-masala. Og'irligi 600 N, uzunligi 4 m bo'lgan bir jinsli balka bir uchi bilan silliq polga va oraliqdagi B nuqtada balandligi 3 m bo'lgan devorga tiralgan. Balka vertikal bilan 30° burchak tashkil etadi. Balkani pol bo'ylab tortilgan AC arqon shu holatda ushlab turadi. Ishqalanishni hisobga olmay arqonning tortilish kuchi T , devorning reaksiyasi R_B , pol reaksiyasi R_C topilsin. (**javob:** $T = 150\text{N}$, $R_B = 173\text{N}$, $R_C = 513\text{N}$.)

21-masala. Og'irligi 200 N bo'lgan bir jinsli AB balka gorizontal silliq polga B nuqtada 60° burchak ostida tiralib turadi. Bundan tashqari uni ikkita C va D tayanchlar ushlab turadi. B, C va D tayanchlardagi reaksiyalar topilsin. $AB = 3\text{m}$, $CB = 0,5\text{m}$, $BD = 1\text{m}$.



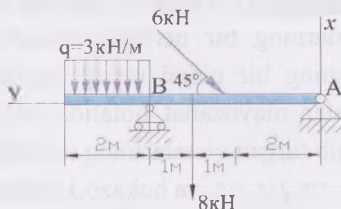
(**javob:** $R_B = 200\text{N}$, $R_C = 300\text{N}$, $R_D = 300\text{N}$.)

22-masala. Bitta to'plangan kuch va juft kuch ta'siridagi balkaning A va B tayanchlari reaksiyalari aniqlansin? Kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



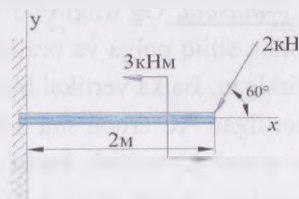
(**javob:** $X_A = 2\text{kN}$, $Y_A = -4,32\text{kN}$, $Y_B = 7,78\text{kN}$.)

23-masala. Ikkita to'plangan kuch va bir tekis taqsimlangan yuk ta'siridagi balkaning A va B tayanchlaridagi reaksiyalar aniqlansin? Tekis taqsimlangan yukning intensivligi, kuchlarining kattaliklari va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



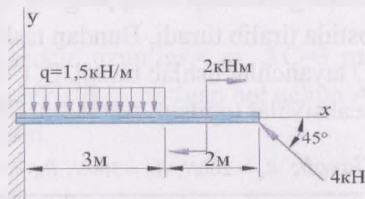
(javob: $X_A = 2,6kN$, $Y_A = 4,2kN$, $X_B = 15,6kN$.)

24-masala. To'plangan kuch va juft kuch ta'siridagi rasmda tasvirlangan konsol balkaning devorga qistirib mahkamlangan uchining reaksiya kuchlari topilsin.



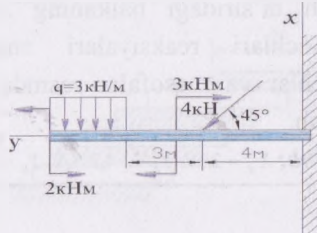
(javob: $X = 1kN$, $Y = 1,73kN$, $M = 0,47kN \cdot m$.)

25-masala. To'plangan kuch, tekis taqsimlangan yuk va juft kuch ta'siridagi rasmda tasvirlangan konsol balkaning devorga qistirib mahkamlangan uchining reaksiya kuchlari topilsin.



(javob: $X = 2,8kN$, $Y = 1,7kN$, $M = -5,35kN \cdot m$.)

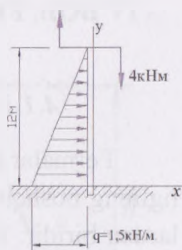
26-masala. Tekis taralgan yuk, bitta to'plangan kuch va ikkita juft kuch ta'siridagi rasmda tasvirlangan konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin.



(javob: $X = 11,8kN$, $Y = -2,8kN$, $M = -86,8kN \cdot m$.)

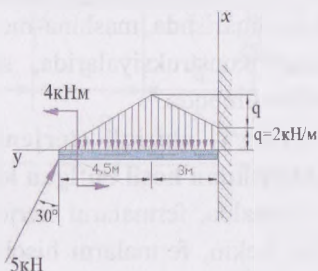
27-masala. Rasmda tasvirlangan juft kuch va uchburchak qonuniyati bilan taqsimlangan yuk ta'sirida bo'lgan konsol balka ko'milgan uchining reaksiya kuchlari aniqlansin.

(javob: $X = -9kN$, $Y = 0$, $M = 40kN \cdot m$.)



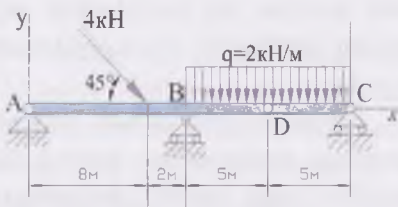
28-masala. Rasmda tasvirlangan to'plangan kuch, juft kuch hamda uchburchak va trapetsiya hosil qilib taqsimlangan yuk ta'siri ostidagi konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin.

(javob: $X = 137kN$, $Y = 25kN$, $M = -270kN \cdot m$.)



29-masala. Rasmda yig'ma balkalar hamda unga qo'yilgan yuk va kuch tasvirlangan. A, B va C tayanchlardagi hamda D sharnirdagi reaksiyalar aniqlansin.

(javob: $X_A = -2,8kN$, $Y_A = -4,4kN$,
 $Y_B = 22,2kN$, $X_D = 0kN$, $Y_C = 5kN$,
 $Y_D = \pm 5kN$.)



IV BOB. FERMA. FERMA STERJENLARIDAGI ZO‘RIQISH KUCHLARINI ANIQLASH.

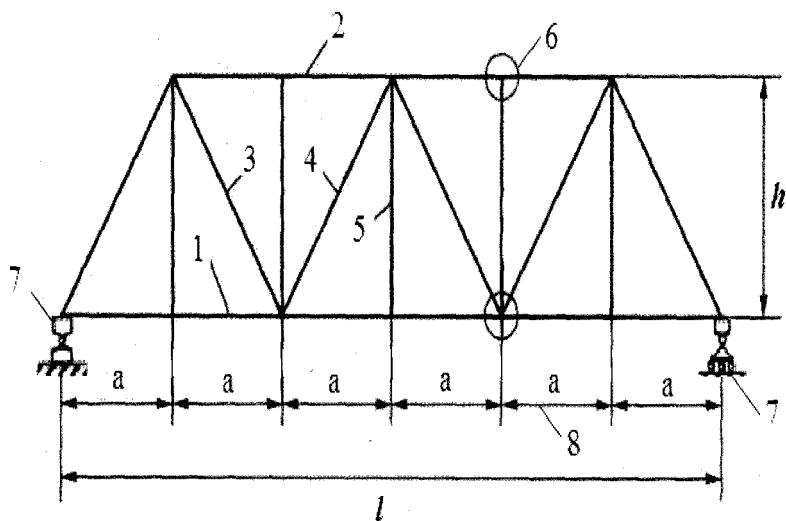
4.1 Ferma haqida tushuncha. Fermalarni hisoblash.

Fermalar sanoat, qurilish, suv xo‘jaligi, mashinasozlik va xalq xo‘jaligining boshqa ko‘p sohalarida keng qo‘llanilib kelayotgan konstruksiyalardan biridir. Fermalardan qurilishda har xil sport inshootlari, qishloq va suv xo‘jaligi ob‘yektlarining tom qismini yopishda, temiryo‘l va daryo ko‘priklarini qurishda, mashinasozlikda qishloq xo‘jaligi mashinalarini ishlab chiqarishda, mashina-mexanizmlar konstruksiyalarida, ko‘tarma yuk kranlari konstruksiyalarida, suv bosim minoralarida (4.2-rasm) keng foydalanilmoqda.

To‘g‘ri chiziqli sterjenlarning uchlarini sharnirlar yordamida biriktirishdan hosil bo‘lgan konstruksiyaga ferma deb ataladi.

Amalda, fermalarni sterjenlari o‘zaro biki biriktirilgan bo‘ladi (4.1-rasm). Lekin, fermalarni hisoblashda biki tugunlar ideal sharnirlar bilan almashtiriladi (4.2-rasm). Masalan, metall ferma sterjenlari o‘zaro payvandlangan yoki boltlar yordamida biriktirilgan holda tayyorlanadi. Temir beton fermalar esa butunligicha quyma tayyorlangan bo‘ladi. Yog‘och fermalar sterjenlari o‘zaro yelimlanadi yoki boltlar orqali biriktirilib tayyorlanadi.

Fermalarni hisoblashda sterjenlar to‘g‘ri chiziqli, tashqi yuklar faqat tugunlarga qo‘yilgan deb qaraladi. Shuning uchun ferma sterjenlari faqat cho‘zilish yoki siqilish deformatsiyasiga ishlaydi. Fermada sterjenlar sharnirlar yordamida o‘zaro biriktirilgan bo‘lib, unga ko‘ngdalang kuchlar ta’sir etmasa, bunday sterjenlarda eguvchi moment nolga teng bo‘ladi. Biroq amalda, ferma elementlarida eguvchi moment ham hosil bo‘ladi. Bu moment miqdori bo‘ylama kuchlarga nisbatan juda kichik bo‘lgani uchun hisobga olinmaydi. Shuning uchun ham fermaning biki tugunlari sharnirlarga almashtiriladi.



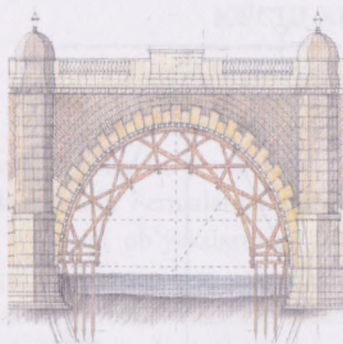
4.1-rasm.

Bu yerda:

1-pastki belbog‘; 2-yuqori belbog‘; 3, 4-hovonlar; 5-ustun; 6-tugun; 7-tayanchlar; 8-panel.

Ferma sterjenlarining uchlarini tutashtiruvchi sharnir **tugun** deb ataladi. Ferma konturining yuqorigi qismini tashkil etuvchi sterjenlar birikmasi **yuqori belbog‘**, uning pastki elementlari birikmasi esa **pastki belbog‘** deyiladi. Yuqorigi va pastki belbog‘larni tutashtiruvchi vertikal va og‘ma elementlar fermaning **panjarasini** hosil qiladi. Panjaraning vertikal elementlari **ustun** va og‘ma joylashgan elementlari **hovonlar** deyiladi. Fermaning ikki tuguni orasidagi gorizontaal masofa **panel** deyiladi. Panel oralig‘i a bilan belgilanadi. Fermaning tayanchlari orasidagi masofa **oraliq** yoki **prolet** deb ataladi va l bilan belgilanadi.

a)



b)



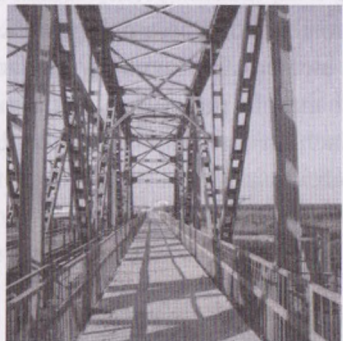
c)



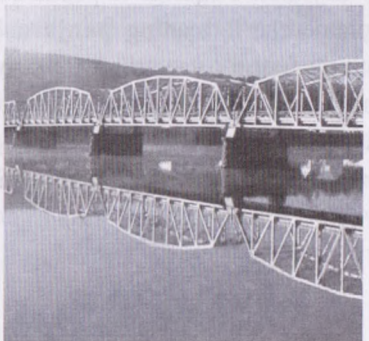
d)



e)



f)



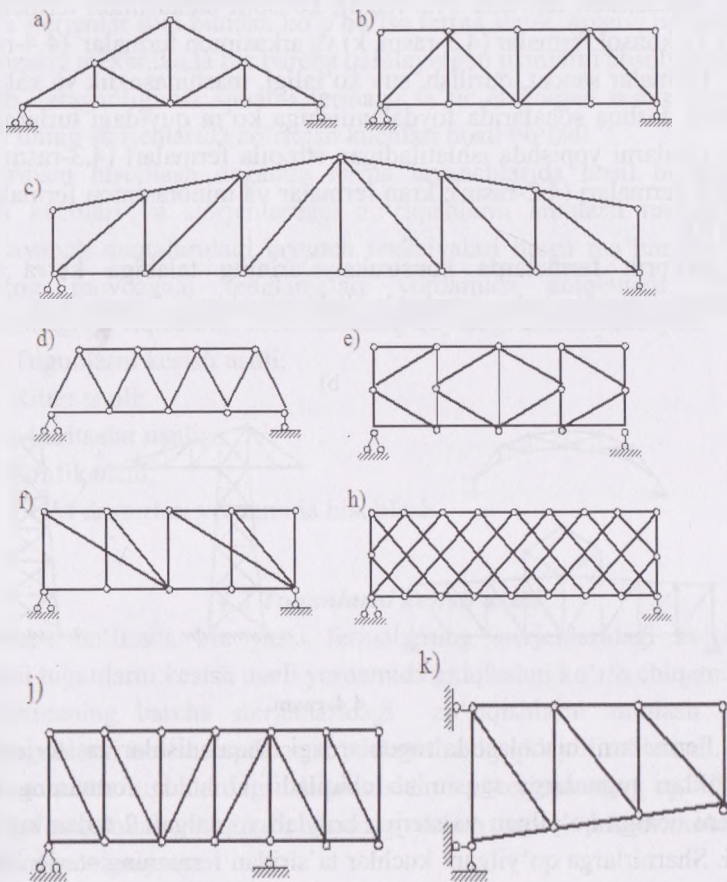
4.2-rasm

Fermalar umumiy tuzilishiga, qo‘llanilishiga, foydalanishiga ko‘ra har xil turlarga bo‘linadi.

Fermalar sterjenlarining fazoda joylashish holatiga ko‘ra quyidagi turlarga bo‘linadi:

- a) Yassi fermalar; b) Fazoviy fermalar.

Agar ferma tarkibidagi barcha sterjenlar bitta tekislikda joylashgan bo‘lsa, bunday fermalar **yassi fermalar deyiladi** (4.3-rasm).



4.3-rasm

Agar ferma tarkibidagi sterjenlar ikki yoki undan ortiq tekisliklarda joylashgan bo'lsa, bunday fermalar **fazoviy fermalar deyiladi** (4.2-rasm).

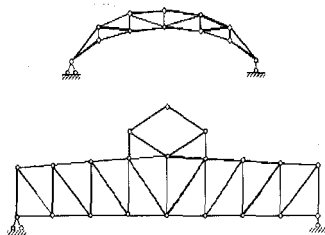
Fermalar panjaralarining tuzilishiga ko'ra quyidagi turlarga bo'linadi: uchburchak panjarali (4.3-rasm, a); oddiy hovon panjarali (4.3-rasm, a, b, c); yarim hovon panjarali (4.3-rasm, e); ikki hovon panjarali (4.3-rasm, f) va ko'p panjarali (4.3-rasm, h, j) fermalar.

Fermalar tayanchlarining joylashishiga ko'ra quyidagi turlarga bo'linadi: balkasimon fermalar (4.3-rasm); konsolli balkasimon fermalar (4.3-rasm, j); konsol fermalar (4.3-rasm, k) va arkasimon fermalar (4.4-rasm, a).

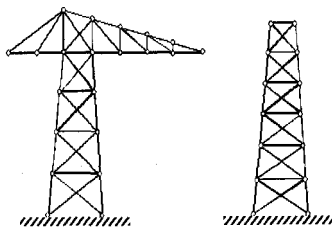
Fermalar sanoat, qurilish, suv xo'jaligi, mashinasozlik va xalq xo'jaligining boshqa sohalarida foydalanilishiga ko'ra quyidagi turlarga bo'linadi: tomlarni yopishda ishlatiladigan stropila fermalari (4.3-rasm, a,b,c); ko'prik fermalari (4.2-rasm); kran fermalar va minorasimon fermalar (4.4-rasm b).

Ko'prik fermalarda konstruksiyalarining talabiga ko'ra harakat yuqoridan, pastdan yoki o'rtadan bo'lishi mumkin (4.2-rasm, b, e, f).

a)



b)



4.4-rasm

Fermalarni hisoblashda tugunlardagi ishqalanishlar va sterjenlarning og'irliklari tugunlarga taqsimlab chiqiladi. U holda fermaning har bir sterjeni uchiga qo'yilgan va sterjen bo'ylab yo'nalgan 2 tadan kuch ta'sir etadi. Sharnirlarga qo'yilgan kuchlar ta'siridan fermaning sterjenlari faqat cho'zilishi yoki siqilishi mumkin. Sterjenlar soni k bilan, tugunlar soni n orasida quyidagi bog'lanish bor:

$$\kappa = 2n - 3 \quad (4.1)$$

Haqiqatdan ham 3 ta sterjendan tashkil topgan qo'zg'almas ABD uchburchakda 3 ta tugun mavjud. Navbatdagi tugun bilan tutashtirish uchun 2 ta sterjen zarur. Demak qolgan barcha $(n-3)$ tugunlar uchun $2(n-3)$ sterjenlar zarur bo'ladi. Natijada fermada sterjenlar soni $\kappa = 3 + 2(n-3) = 2n - 3$ bo'lishi zarur.

Sterjenlar soni bundan kam bo'lsa ferma mustahkam bo'lmaydi, aksincha sterjenlar soni bundan ko'p bo'lsa ferma statik noaniq bo'ladi.

Nazariy mexanikada biz barcha qaralayotgan jismlarni absolyut qattiq jism deb qaraganligimiz sababli fermaga ta'sir etayotgan tashqi kuchlar ta'sirida uning sterjenlarida zo'riqish kuchlari hosil bo'ladi.

Fermani hisoblash deganda ferma tayanchlarida hosil bo'ladigan reaksiya kuchlari va sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlash tushuniladi. Ferma tayanch nuqtalaridagi tayanch reaksiyalari bizga ma'lum bo'lgan statikaning muvozanat tenglamalari yordamida aniqlanadi. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni hisoblashning quyidagi usullari mavjud:

1. Tugunlarni kesish usuli;
2. Ritter usuli;
3. Matritsalar usuli;
4. Grafik usuli;
5. EHM dasturlari yordamida hisoblash.

4.2 Tugunlarni kesish usuli

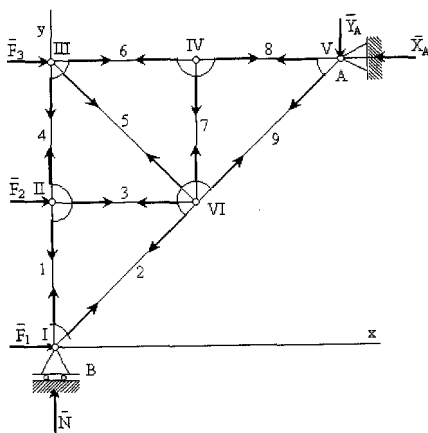
Ushbu bo'limda biz yassi fermalarning sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarini tugunlarni kesish usuli yordamida aniqlashni ko'rib chiqamiz.

Fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, tugunlarni kesish usulidan foydalanish eng qulay hisoblanadi. Fermani hisoblashda tugunlardagi ishqalanishlar va sterjenlarning og'irliklari tugunlarga taqsimlab chiqiladi, shuning uchun asosiy hisob-kitoblarda ularni hisobga olmaymiz.

Bu usuldagi hisoblashni quyidagi misol yordamida tushuntiramiz.

Teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat fermaga x o'qiga parallel yo'nalgan F_1, F_2, F_3 kuchlar qo'yilgan:

$$F_1 = F_2 = F_3 = 20\kappa\text{N}$$



4.5-rasm

Sterjenlardagi zo'riqishni aniqlashdan avval berilgan ferma statik aniq ferma ekanligini tekshirib ko'ramiz. Ushbu fermada sterjenlar soni $k=9$ ga, tugunlar soni $n=6$ ga teng.

$$\kappa = 2n - 3$$

$$9 = 2 \cdot 6 - 3$$

$$9 = 9$$

Demak, 4.5-rasmida keltirilgan ferma statik aniq ferma ekan.

Fermaning tugunlarini rim raqamlari bilan, sterjenlarni esa arab raqami bilan belgilab olamiz.

Ferma uchun muvozanat tenglamalarini tuzib tayanch reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F_1 + F_2 + F_3 - x_A = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N - y_A = 0 \quad (4.3)$$

$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad -F_2 a - F_3 \cdot 2a - y_A \cdot 2a + x_A \cdot 2a = 0 \quad (4.4)$$

$$(4.2)\text{-dan} \quad x_A = F_1 + F_2 + F_3 = 20 + 20 + 20 = 60\text{kN}$$

$$(4.3)\text{-dan} \quad y_A = N$$

$$(4.4)\text{-dan} \quad -F_2 - 2F_3 + 2x_A = 2y_A$$

$$y_A = \frac{2x_A - 3F}{2} = \frac{2 \cdot 60 - 3 \cdot 20}{2} = 30 \text{ kN}$$

$$\text{Demak; } x_A = 60 \text{ kN, } y_A = N = 30 \text{ kN}$$

Sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlashga o'tamiz. 1-sterjendagi zo'riqishni S_1 , ikkinchidagisini S_2 va h.k. deb belgilaymiz. Kesishni shunday tugundan boshlash kerakki, bu tugunda noma'lum zo'riqishlar soni ikkitadan ortiq bo'lmasin.

1-tugunni kesamiz. 1 tugunga \bar{F}_1, \bar{N} – kuchlar ta'sir qilib, 1-2-sterjenlarda \bar{S}_1, \bar{S}_2 zo'riqish kuchlari hosil bo'ladi. \bar{S}_1, \bar{S}_2 – zo'riqish kuchlarini aniqlash uchun statikaning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_2 = -F \sqrt{2} = -28,2 \text{ kN};$$

$$S_1 = -N - S_2 \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -10 \text{ kN}$$

Endi S_1 zo'riqishni bilgan holda II tugunga o'tamiz. II tugunga \bar{F}_2 kuch, 1, 3, 4-sterjenlardagi $\bar{S}_1, \bar{S}_3, \bar{S}_4$ zo'riqishlar ta'sir qiladi.

Ushbu tugun uchun statikaning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad S_3 + F_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0$$

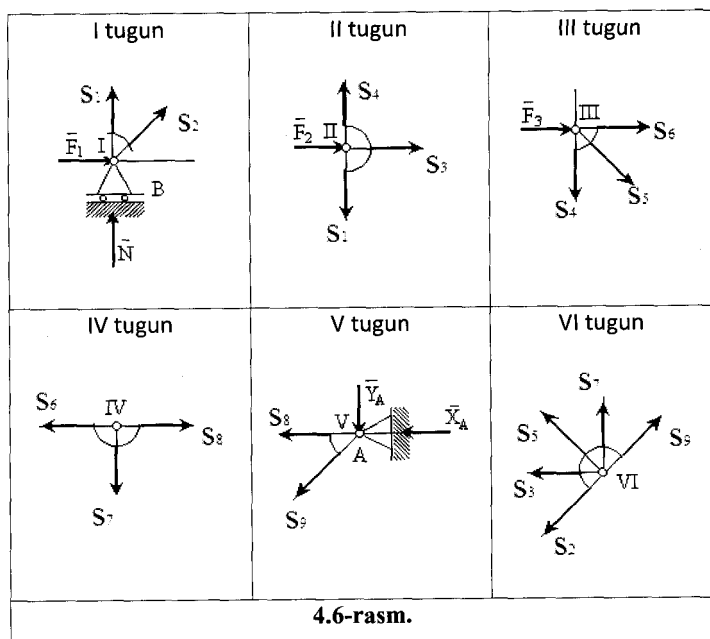
$$S_3 = -F_2 = -20 \text{ kN}$$

$$S_4 = S_1 = -10 \text{ kN}$$

S_4 zo'riqish aniqlangandan so'ng shu usul bilan avval III tugun uchun, keyin IV tugun uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Bu tenglamalardan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F_3 + S_5 \cos 45^\circ + S_6 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -S_4 - S_5 \sin 45^\circ = 0$$



4.6-rasm.

$$S_6 = -F_3 - S_5 \cos 45^\circ$$

$$S_5 = \frac{-S_4}{\sin 45^\circ}$$

$$S_5 = -S_4 \sqrt{2} = 14,1 \text{ kN} \quad S_6 = -30 \text{ kN}$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -S_6 + S_8 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad S_7 = 0$$

$$S_8 = -30 \text{ kN}, \quad S_7 = 0$$

S_9 zo'riqishni aniqlash uchun A tugundagi kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun statikaning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -X_A - S_9 \cos 45^0 - S_8 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -Y_A - S_9 \sin 45^0 = 0$$

$$S_9 = -3\sqrt{2} = -42,3 \text{ kN}$$

Fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarining to'g'ri aniqlanganligini tekshirish uchun V tugun uchun X o'qiga nisbatan barcha kuchlarning proyeksiyalari yig'indisi tenglamasini va VI tugun uchun esa ikkita muvozanat tenglamalarini tuzamiz va tuzilgan tenglamalarga kuchlarning qiymatlarini qo'yib ko'ramiz:

$$-X_A - S_9 \cos 45^0 - S_8 = 0;$$

$$-60 + 42,3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 30 = 0;$$

$$0 = 0;$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -S_3 - S_2 \cos 45^0 - S_5 \cos 45^0 + S_9 \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad S_5 \sin 45^0 - S_2 \sin 45^0 + S_7 + S_9 \sin 45^0 = 0$$

Oxirgi tuzilgan ikkala tenglamalarga kuchlarning qiymatlarini qo'yib ko'rsak, ferma sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarining to'g'ri aniqlanganligiga ishonch hosil qilamiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad 20 + 28,2 \cos 45^0 - 14,1 \cos 45^0 - 42,3 \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad 14,1 \sin 45^0 + 28,2 \sin 45^0 + 0 - 42,3 \sin 45^0 = 0;$$

Fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarining qiymatlarini bitta jadvalga kiritamiz:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
-10	-28,2	-20	-10	14,1	-30	0	-30	-42,3

Odatda ferma sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarining qiymatlari «musbat» ishorali bo'lsa sterjenning cho'zilishga, «manfiy» ishorali bo'lsa sterjenning siqilishga ishlayotganini ko'rsatadi.

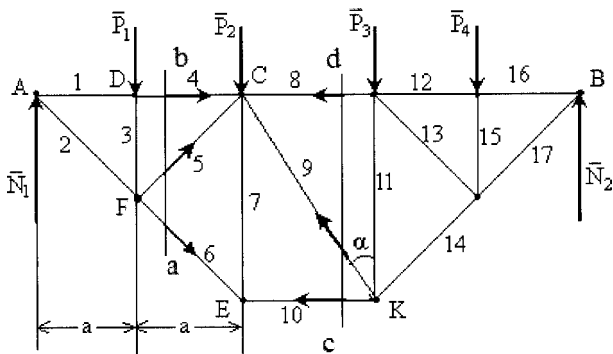
Jadvalda keltirilgan zo'riqishlarning ishoralaridan ko'rinadiki, 7-sterjenda zo'riqish kuchi nolga teng, 5-sterjen cho'zilishga, qolgan sterjenlar esa siqilishga ishlayotganini ko'ramiz.

4.3 Ritter usuli

Fermaning ayrim sterjenlaridagi zo'riqishlarini aniqlash lozim bo'lsa, u holda Ritter (1826-1906) tomonidan kashf qilingan analitik usuldan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ritter usulining mohiyati shundan iboratki, fermani biror $a-b$ kontur bilan fikran qirqib, ikki qismga ajratiladi va ajratilgan biror qismning muvozanati tekshiriladi (4.7-rasm).

Fermaning kesilgan bir qismini fikran tashlab yuborib, ikkinchi qismga ko'rsatadigan ta'sirini sterjenlar bo'ylab tashlab yuborilgan tomonga yo'nalgan kuchlar bilan almashtiramiz. Fermaning ajratilgan qismi uchun tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari tuzilib, ferma sterjenlaridagi zo'riqish kuchlari aniqlanadi. Ushbu usuldan foydalanishda fermaning ajratib olingan qismi uchun tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanat tenglamalaridan birortasi tuzib olinadi. Tuzib olingan muvozanat tenglamalarida noma'lumlar soni bittadan oshmasligini ta'minlash, ya'ni bir noma'lumli tenglamaga erishish shart. Shuning uchun ajratib olingan qismdan shunday nuqtani tanlash kerakki, ushbu nuqtaga nisbatan tuzilgan muvozanat tenglamasida noma'lumlar soni bittadan oshmasin. Tanlangan shu nuqtaga Ritter nuqtasi deyiladi.

Ritter usulidan foydalanib 4.7-rasmdagi fermaning 6-sterjendagi zo'riqish kuchini aniqlaymiz. Fermaga ta'sir etuvchi vertikal kuchlar $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = \bar{P}_3 = \bar{P}_4 = 20\kappa N$, tayanch reaksiyalari $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 40\kappa N$ ga teng.



4.7-rasm

Fermaning 4-5-6-sterjenlarini a, b tekislik bilan kesib, chap qismining muvozanatini ko'rib chiqamiz. Chap qismdagi sterjenlarga ta'sir etuvchi kuchlarni o'ng qismdagi kuchlarga almashtiramiz. 6-sterjendagi S_6 zo'riqishini aniqlash uchun, 4 va 5 sterjenlar kesishuvchi C nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz. Shuningdek $AD = DC = a$ va $CF \perp AE$ ekanligini e'tirof etamiz:

$$\sum m_C(\bar{F}_K) = -N_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + S_6 \cdot CF = 0, \quad (4.5)$$

Shartda ko'rsatilishicha, $\angle AFC = 90^\circ$ va $CF = a\sqrt{2}$ u holda

$$S_6 = 30\sqrt{2} = 42,3\text{kN}$$

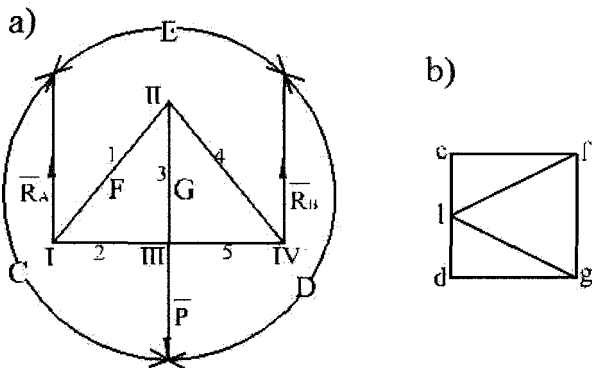
Ritter usulining afzallik tomoni shundaki, bu usuldan foydalanib istalgan sterjendagi zo'riqish kuchini aniqlash imkoniyatining mavjudligidadir. Ritter usulida har bir zo'riqishi kuchi alohida tenglamalar orqali aniqlanishi zarur, bunda zo'riqish kuchi boshqa sterjenlardagi kuchlar orqali ifodalanmasligi kerak.

4.4 Maksvell-Kremon diagrammasi

Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarini aniqlashning yana bir usuli Maksvell-Kremon diagrammasidan foydalanib aniqlash usulidir. Tugunlarni kesish usulida har bir sterjenning reaksiya kuchini kuch ko'pburchaklarida ikki martadan tasvirlashga to'g'ri keladi. Bu kamchilik D.K.Mak-

svell (1831-1879) va L.Kremon (1831-1879) diagrammasida bartaraf qilinadi. Bu diagrammani quyidagicha yasaymiz (4.8-rasm, a).

Tugunlarga ta'sir etuvchi kuchlarni ferma konturining tashqarisida tasvirlaymiz va bu kuchlar bilan chegaralangan ichki sohalarni S,D,E, ferma sterjenlari bilan chegaralangan sohalarni F, G bilan belgilaymiz.



4.8-rasm

Kuch ko'pburchagini qurishda fermani yoki tugunni soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tish qoidasiga amal qilamiz. Bunday aylanib o'tishda kuchning boshi va uchini kuch chegaralab turgan sohalarda mos kichik harflar bilan belgilaymiz. Masalan, \bar{P} kuchni \overline{cd} , \bar{R}_B ni \overline{de} , \bar{R}_A ni \overline{ec} ; III tugunga qo'yilgan kuchlarni \overline{cd} , \overline{dg} , \overline{gf} , \overline{fc} bilan belgilaymiz.

Dastlab, tashqi kuchlar ko'pburchagini quramiz. Ko'riladigan kuch ko'pburchaklarida kuchlarning uchiga yo'nalish qo'ymasak ham bo'ladi, chunki sohalarni soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tish qoidasi kuchning boshi va uchini bir qiymatli aniqlaydi. Tashqi kuchlarni ularni yo'nalishiga mos ravishda ma'lum masshtabda fermani soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tishda uchraydigan tartibda qo'ya boramiz va $cdec$ ni olamiz; tashqi kuchlar parallel bo'lgani uchun kuchlar ko'pburchagi bir chiziqda yotadi (4.8-rasm,b). Bu kuchlar ta'sirida ferma muvozanatda bo'lgani uchun mazkur ko'pburchak yopiq bo'ladi.

Endi tugunni kesish usulidan foydalanamiz. I tugunni ma'lum kuch dan boshlab soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tamiz, \overline{ec} kuch shaklida tasvirlangan, shu sababli kuch ko'pburchagida I tugunga ta'sir etuvchi \overline{cf} va \overline{fe} kuchlarni qurish kifoya. Buning uchun e nuqtadan 1-sterjenga va C nuqtadan 2-sterjenga parallel chiziqlar o'tkazamiz; bu chiziqlarning kesishgan nuqtasi f nuqtani ifodalaydi. \overline{cf} kuch I tugundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgan, shu sababli 2-sterjen cho'ziladi; \overline{fe} kuch I tugun tomon yo'nalgan shu sababli I sterjen siqiladi.

II tugunni EFGC tartibda soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylanib o'tamiz. f nuqtada 3-sterjenga parallel, e nuqtada 4-sterjenga parallel chiziqlar o'tkazamiz: ularning kesishgan nuqtasi g nuqtani ifodalaydi; \overline{fg} kuch II tugundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgani uchun 3-sterjen cho'ziladi; \overline{ge} kuch II tugunga yo'nalgani tufayli 4-sterjen siqiladi.

III tugunni CDGFC tartibda aylanib o'tib, 5-sterjenga mos \overline{dg} reaksiya kuchini aniqlaymiz. Buning uchun d va g nuqtalarni birlashtiramiz. \overline{dg} kuch III tugundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgani uchun 5 sterjen cho'ziladi. Shu tartibda yasalgan (4.8-rasm, b) dagi figura Maksvell-Kremon diagrammasi deyiladi. Kuch uchun qabul qilingan masshtabdan foydalanib, sterjenlarning reaksiya kuchlarini topish mumkin.

4.5 Matritsalar usuli

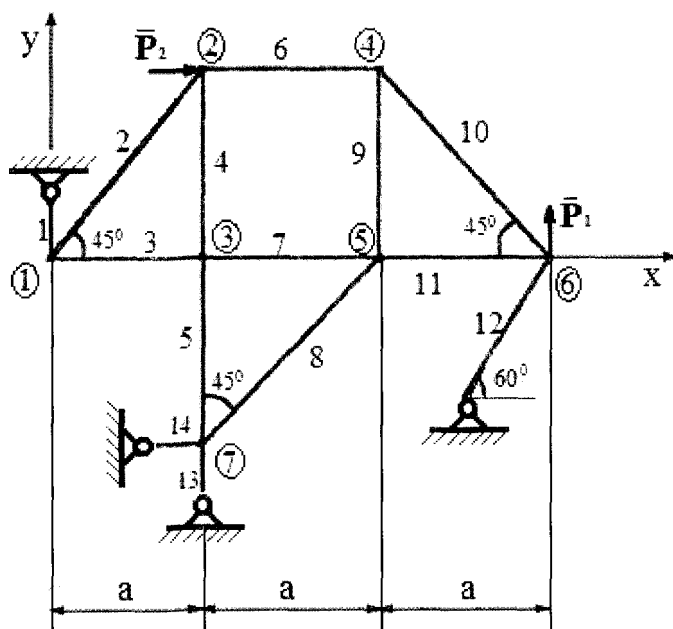
Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarini aniqlashning yana bir usuli MATRITSALAR USULI deb nomlanadi.

Yassi ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarini matritsalar usuli yordamida hisoblash tartibini bir masalaning yechilishi davomida ko'rib chiqamiz.

MASALA SHARTI: Berilgan yuklanishlar ta'siridagi yassi ferma sterjenlarida hosil bo'ladigan zo'riqish kuchlari aniqlansin. Fermalarning xossalari chizmada keltirilgan bo'lib, masalani yechish uchun kerakli ma'lumotlar jadvalda keltirilgan. Chizmada ferma sterjenlariga ta'sir qila-

yotgan tashqi kuchlar, oraliqlar uzunliklari va sterjenlarning o'q bilan tashkil qilgan burchaklari ko'rsatilgan.

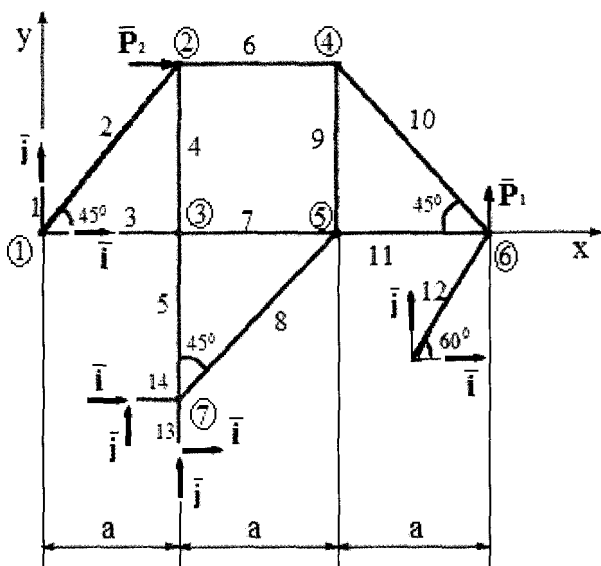
$P_1=20$ kN, $P_2=10$ kN (4.9-rasm)



4.9-rasm

YECHISH:

1. Ferma sterjenlaridagi birlik vektorlarning yo'nalishlarini tanlaymiz (4.10-rasm.).
2. Ferma tuzilishini ifodalovchi I matritsani tuzamiz. I-Matritsa $n \times m$ o'lchamda bo'ladi, bunda n – tugunlar soni (tayanchlar hisobga olinmagan holda), m – ferma sterjenlari soni. Ushbu matritsa elementlari +1, 0, -1 bo'lishi mumkin. Agar birlik zo'riqish kuchining yo'nalishi tugundan chiqqan bo'lsa +1 ni, birlik zo'riqish kuchining yo'nalishi tugun tomon yo'nalgan bo'lsa -1 ni, birlik zo'riqish kuchi ushbu tugunga taaluqli bo'lmasa 0 dan foydalanamiz.



4.10-rasm

Ushbu masalada ferma konstruksiyasi 7 ta tugun ($n=7$) va 14 ta sterjendan tashkil topgan ($m=14$), shuning uchun matritsa 7 qator va 14 ustundan iborat bo'ladi. Matritsaning 1-qatorini to'ldiramiz. 2-chizmaga 1-tugunda 3 ta zo'riqish kuchlari joylashgan bo'lib, uchalasi ham ushbu tugundan chiqish yo'nalishida ekanligi ko'rinadi. Shuning uchun matritsamizning 3 ta hadiga 1 ni yozamiz va qolgan zo'riqish kuchlari 1-tugunga taalluqli bo'lmaganligi sababli qolgan barcha matritsa hadlari 0 dan iborat bo'ladi.

2-tugunga qaraydigan bo'lsak, ushbu tugundan 4-6-tugunlarga 2 ta chiquvchi zo'riqish kuchlari va bitta 2-sterjendan chiquvchi zo'riqish kuchlari mavjud. Shuning uchun ikkinchi ustunga -1, 4-va ustunlarga 1 ni yozamiz va qolgan ustunlarga 0 yoziladi.

3-tugunga qaraymiz. Ushbu tugunga 3- va 4-sterjenlar orqali 2 ta kiruvchi va 5-7-sterjenlar orqali 2 ta chiquvchi zo'riqish kuchlari mavjud.

Shuning uchun 3-4-ustunlarga -1 , 5-7-ustunlarga esa 1 ni yozamiz, qolgan barcha ustunlarga 0 yoziladi:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4-tugundan 9-0 sterjenlar orqali 2 ta chiquvchi va 6- sterjen orqali bitta kiruvchi zo'riqish kuchi ta'sir qiladi. Shuning uchun matritsaning 6-ustuniga -1 , 9-10 ustunlariga esa 1 ni yozamiz , qolgan barcha ustunlarga 0 yoziladi.

5-tugunda 4 ta zo'riqish kuchi bo'lib, 7-9-sterjenlar orqali 2 ta kiruvchi va 8-11 sterjenlardan 2 ta chiquvchi zo'riqish kuchlari ta'sir qiladi. Shuning uchun matritsaning 5-qator 7-9-ustunlariga -1 , 8-11-ustunlariga ega 1 ni yozamiz. Qolgan barcha ustunlarga 0 yoziladi.

6-tugunga 10-11 sterjenlar orqali 2 ta kiruvchi, 12-sterjen orqali bitta chiquvchi zo'riqish kuchi ta'sir qiladi. Shuning uchun matritsaning 6- qator 10-11-ustunlariga -1, 12-ustuniga esa 1 ni yozib, qolgan barcha ustunlariga 0 ni yozamiz.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7- tugunda 5-8-sterjenlar orqali 2 ta kiruvchi, 13-14-sterjenlar orqali 2 ta chiquvchi zo'riqish kuchlari ta'sir qiladi. Shuning uchun matritsaning 7-qatori 5-8-ustunlariga -1, 13-14-ustunlariga esa 1, qolgan barcha ustunlarga 0 ni yozamiz.

Mana shu yo'l bilan istalgan ko'rinishdagi fermalar uchun yuqoridagi ko'rinishdagi matritsalarini tuzib olishimiz mumkin.

3. V_x vektor ustuni, ya'ni barcha sterjenlardagi birlik zo'riqish kuchlarining X o'qiga proyeksiyalarining vektor ustunlarini tuzamiz. Ushbu ustunning o'lchami $m \times 1$, ya'ni 14×1 ga teng.

$$V_x^T = \left[0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad -0.5 \quad 0 \quad -1 \right]$$

4. V_y vektor ustuni, ya'ni barcha sterjenlardagi birlik zo'riqish kuchlarining Y o'qiga proyeksiyalarining $m \times 1$ o'lchamidagi vektor ustunlarini tuzamiz:

$$V_y^T = \left[1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -1 \quad 0 \right]$$

Yuqorida tuzilgan V_x va V_y vektor-ustunlaridan foydalanib kelgusida D_x va D_y $m \times m$ matritsalar tuziladi (bizning holatimizda 14×14).

5. Ferma tugunlariga qo'yilgan tashqi kuchlarning P vektor ustunlarini tuzamiz. Vektor-ustun o'lchami $2n \times 1$, ya'ni $2 \cdot 7 \times 1$. Bunda $1 - n$ ta qator ferma tugunlariga qo'yilgan tashqi kuchlarining X o'qidagi proyeksiyalari, qolgan qatorlar esa barcha tashqi kuchlarning Y o'qidagi proyeksiyalari yoziladi:

$$P^T = [0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0]$$

6. Chiziqli muvozanat tenglamalar sistemasi koeffisientlari A matritsani shakllantiramiz:

$$A_{2n \times m} = \begin{bmatrix} I_{n \times m} & O_{n \times m} \\ O_{n \times m} & I_{n \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x, m \times m} \\ D_{y, m \times m} \end{bmatrix}$$

Bu yerda : $O_{n \times m}$ - $n \times m$ o'lchamidagi (7×14) nolli elementlardan tashkil topgan matritsa.

7. Matritsa ko'rinishidagi muvozanat tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$AS + P = 0$$

Bu yerda : S - $2n \times 1$, ya'ni $2 \cdot 7 \times 1$ o'lchamidagi ferma sterjenlaridagi noma'lum zo'riqish kuchlaridan tashkil topgan vektor-ustun.

8. Ushbu tenglamalar sistemasining yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$S = -A^{-1} * P$$

Ushbu masalani Mathcad dasturida hisoblash tartibini ko'rib chiqamiz:

1. Fermani ushbu dastur bo'yicha hisoblash uchun 4.9-rasmda keltirilgan konstruksiyaga asoslanamiz.

2. Berilgan ma'lumotlarni dasturga kiritamiz:

$$P_1 = 20 \text{ kN}, P_2 = 10 \text{ kN}$$

3. Ferma konstruksiyasidagi V^T - tugunlar va sterjenlar sonini dasturga kiritamiz: $n_{uzlov} := 7$, $n_{stergnej} := 14$.

4. I_1 hisoblash matritsasini tuzamiz:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} I := \text{augment}(I_1, I_2).$$

5. V_x, V_y va P matritsalarini shakllantiramiz:

$$V_x = \left[0 \frac{\sqrt{2}}{2} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ 1 \ -0.5 \ 0 \ -1 \right]$$

$$V_y = \left[1 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \ -1 \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ -\frac{\sqrt{3}}{2} \ -1 \ 0 \right]$$

$$P = \left[0 \ P2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ P1 \ 0 \right]$$

6. V_x va V_y matritsalarini diagonal D_x, D_y matritsalariga aylantiramiz:

$$DX = \text{diag}(YX^T) \quad DY = \text{diag}(YY^T)$$

7. $n \times m$ (bizning holat uchun (7×14) deb olinadi) o'lchamdagi $O_{n \times m}$ hisoblash matritsasini tuzamiz:

$$i = 1, \dots, n \text{ uzlov}, j = 1, \dots, N \text{ stergnej} \quad O_{ij} = 0$$

8. Chiziqli muvozanat tenglamalar sistemasi koeffitsientlari A hisoblash matritsasini shakllantiramiz:

$$XY = \text{stack}(DX, DY)$$

$$\mathbf{A} := \text{stack}(\text{augment}(\mathbf{t}, \mathbf{0}), \text{augment}(\mathbf{0}, \mathbf{I})) * \mathbf{XY}$$

9. Muvozanat tenglamalar sistemasini yozamiz va yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan foydalanib ushbu sistemani yechamiz:

$$\mathbf{S} := -\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{P}^T$$

Muvozanat tenglamalar sistemasini yechish natijalari jadvalda keltirilgan.

Hisob kitob natijalari shuni ko'rsatadiki, 2-6-10-va 12-sterjenlar cho'zilgan (chunki ishoralar musbat), qolgan sterjenlar esa siqilgan. Olingan natijalar sterjenlarda hosil bo'ladigan zo'riqishlarni matritsalar usuli yordamida aniqlashda qabul qilingan ishoralari boshqa tugunlarni kesish, Ritter usullari bilan bir xil ekanligini ko'rsatadi.

Masalani Mathcad dasturida hisoblash natijalari jadvali.

Sterjen №	Sterjenda hosil bo'lgan zo'riqish miqdori, kN	Sterjen №	Sterjenda hosil bo'lgan zo'riqish miqdori, kN
1.	-13,660	8.	-5,176
2.	19,319	9.	-3,660
3.	-13,660	10.	5,176
4.	-13,660	11.	-17,321
5.	-13,660	12.	27,321
6.	3,660	13.	-17,321
7.	-13,660	14.	-3,660

4.6 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi fermaning tayanch nuqtalaridagi tayanch reaksiyalari va sterjenlarida hosil bo'luvchi zo'riqish kuchlari aniqlansin

(4.11-rasm, a).

Berilgan: $P_1 = 2 \text{ kN}, P_2 = 4 \text{ kN}, P_3 = 6 \text{ kN}, a = 4 \text{ m}, h = 3 \text{ m}$

YECHISH:

1. Berilgan yassi fermanni erkin holatga keltiramiz. Buning uchun qo'yilgan tayanchlarni tashlab yuborib ularni tayanch reaksiya kuchlari bilan

almashtiramiz. Barcha tashqi kuchlar va reaksiya kuchlarini chizmada ko'rsatamiz (4.11-rasm, b).

2. Erkin holatga keltirilgan yassi ferma uchun statika bo'limida ko'rib o'tilgan tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz hamda nomalum tayanch reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$\sum F_{Kx} = 0;$$

$$\sum F_{Ky} = 0;$$

$$\sum m_0(\bar{F}_K) = 0;$$

$$X_A - P_2 - P_1 = 0 \quad (4.6)$$

$$Y_A - R_B - P_3 = 0 \quad (4.7)$$

$$R_B \cdot 4 + P_2 \cdot 6 + P_1 \cdot 9 = 0 \quad (4.8)$$

1-tenglamadan foydalanib X_A ni aniqlaymiz:

$$X_A = P_1 + P_2 = 2 + 4 = 6\text{kN}$$

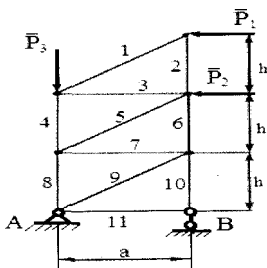
3-tenglamadan foydalanib R_B ni aniqlaymiz:

$$R_B = \frac{-4 \cdot 6 - 2 \cdot 9}{4} = \frac{-42}{4} = -10,5\text{kN}$$

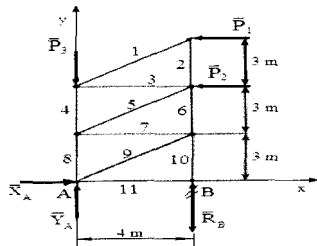
2-tenglamadan foydalanib Y_A ni aniqlaymiz:

$$Y_A = P_3 - R_B = 6 + 10,5 = 16,5\text{kN}$$

a)



b)



4.11-rasm

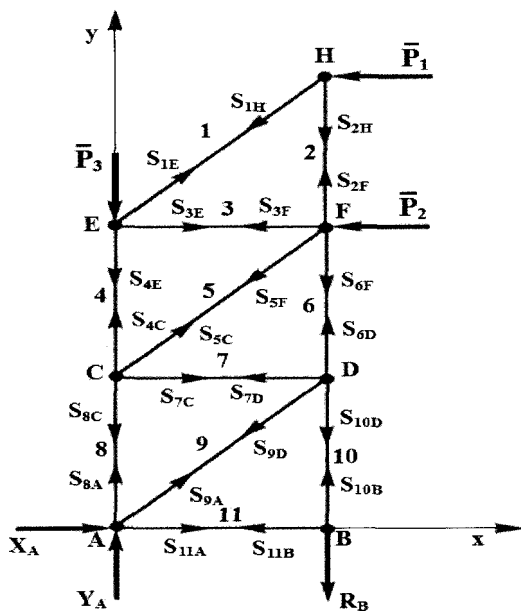
R_B reaksiya kuchining miqdori manfiy ishorada chiqqanligi uchun chizmada uning yo'nalishini teskari yo'nalishga o'zgartiramiz.

Demak, ferma tayanchlaridagi reaksiya kuchlari $X_A=6$ kH, $Y_A=16,5$ kH, $R_B=10,5$ kN ga teng ekanligi aniqlandi.

3. Sterjenlar yassi fermadagi asosiy konstruksiyalar bo'lib, ular bog'lanishlar vazifasini o'taydi. Bog'lanishlarni xayolan tashlab yuborib chizmada ularning o'rniga zo'riqish kuchlarini ko'rsatamiz. Sterjenlardagi zo'riqish kuchlarini uning nomeri bilan belgilab har bir tugunni harflar bilan belgilab chiqamiz (4.12-rasm).

Zo'riqish kuchlarining yo'nalishi tugundan chiqishiga qarab yo'naltirilgan va 1-holatda sterjenlar cho'zilgan deb qaraymiz. Masalan, yechish davomida agar zo'riqish kuchlarining qiymatlari manfiy ishora bilan chiqsa, demak shu sterjen siqilishiga ishlayotganini bildiradi:

$$\overline{S}_{iM} = \overline{S}_{iN}, \quad (4.9)$$



4.12-rasm.

Har bir tugun uchun ikkitadan muvozanat tenglamalarini tuzamiz va sterjenlardagi zo'riqish kuchlarini aniqlaymiz:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad (4.10)$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad (4.11)$$

H tugun uchun:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad -P_1 - S_{1H} \cdot \cos \alpha = 0, \quad (4.12)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad -S_{2H} - S_{1H} \cdot \sin \alpha = 0, \quad (4.13)$$

$$(4.12) \text{ dan } S_{1H} = -\frac{P_1}{\cos \alpha} = -\frac{2}{4/5} = -2.5 \text{ kN}$$

$$(4.13) \text{ dan } S_{2H} = -S_{1H} \cdot \sin \alpha = 2.5 \cdot \frac{3}{5} = 1.5 \text{ kN}$$

E tugun uchun:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{1E} \cdot \cos \alpha + S_{3E} = 0, \quad (4.14)$$

$$S_{1E} = S_{1H} = -2.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad -P_3 + S_{1E} \cdot \sin \alpha - S_{4E} = 0, \quad (4.15)$$

$$(4.14) \text{ dan } S_{3E} = -S_{1E} \cdot \cos \alpha = -(-2.5) \cdot \frac{4}{5} = 2.0 \text{ kN}$$

$$(4.15) \text{ dan } S_{4E} = -P_3 + S_{1E} \cdot \sin \alpha = -6 - 2.5 \cdot \frac{3}{5} = -7.5 \text{ kN}$$

F tugun uchun:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad -P_2 - S_{3F} - S_{5F} \cdot \cos \alpha = 0, \quad (4.16)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{2F} - S_{6F} - S_{5F} \cdot \sin \alpha = 0, \quad (4.17)$$

$$(4.16) \text{ dan } S_{5F} = \frac{-P_2 - S_{3F}}{\cos \alpha} = \frac{-4 - 2}{4/5} = -\frac{6}{4/5} = -7.5 \text{ kN}$$

$$(4.17) \text{ dan: } S_{6F} = S_{2F} - S_{5F} \cdot \sin \alpha = 1.5 + 7.5 \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ kN}$$

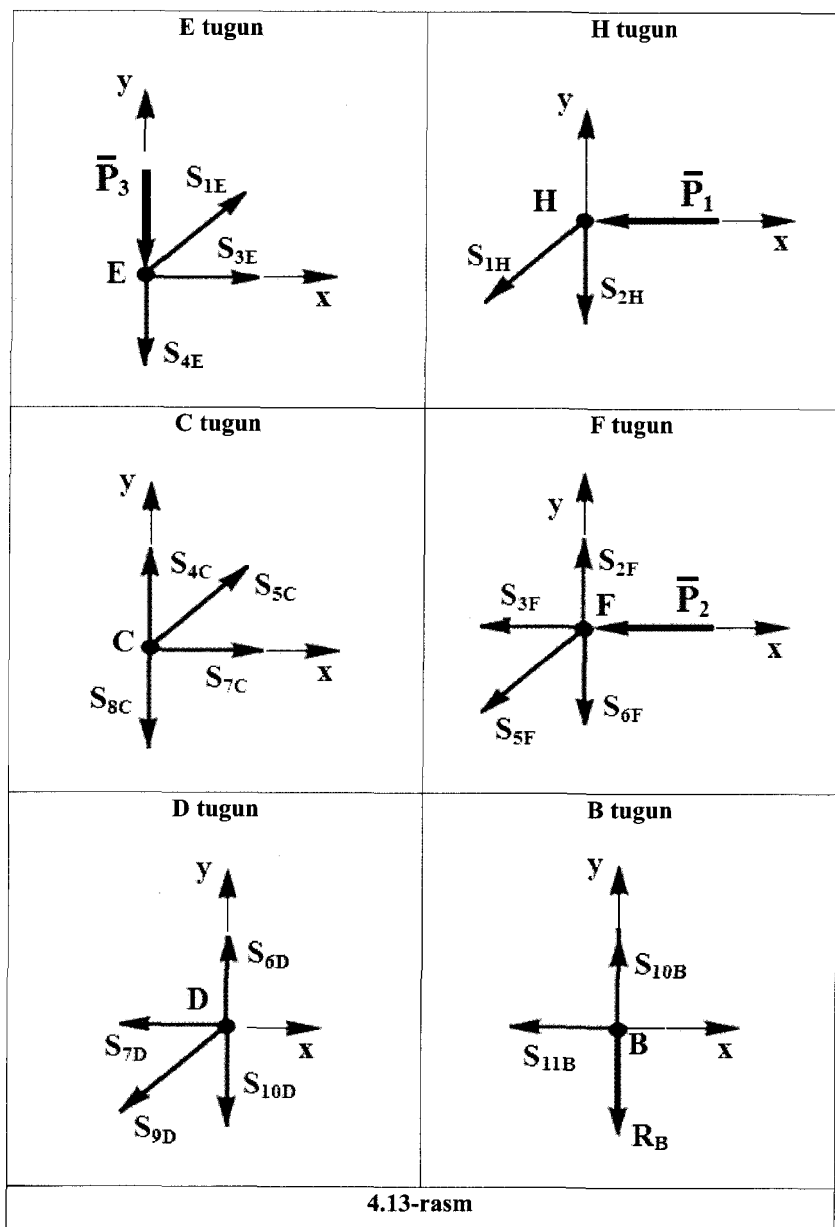
C tugun uchun:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{7C} + S_{5C} \cdot \cos \alpha = 0, \quad (4.18)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{4C} - S_{8C} + S_{5C} \cdot \sin \alpha = 0, \quad (4.19)$$

$$(4.18) \text{ dan } S_{7C} = -S_{5C} \cdot \cos \alpha = 7.5 \cdot \frac{4}{5} = 60 \text{ kN}$$

$$(4.19) \text{ dan } S_{8C} = S_{4C} + S_{5C} \cdot \sin \alpha = -7.5 - 7.5 \cdot \frac{3}{5} = -12 \text{ kN}$$



D tugun uchun:

$$\sum F_{kx} = 0 - S_{7D} - S_{9D} \cdot \cos \alpha = 0 \quad (4.20)$$

$$\sum F_{ky} = 0 S_{6D} - S_{10D} - S_{9D} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (4.21)$$

$$(4.20) \text{ dan } S_{9D} = -\frac{S_{7D}}{\cos \alpha} = -\frac{6}{\frac{4}{5}} = -7.5 \text{ kN}$$

$$(4.21) \text{ dan } S_{10D} = S_{6D} - S_{9D} \cdot \sin \alpha = 6 + 7.5 \cdot \frac{3}{5} = 10.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{11B} = 0 \quad (4.22)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{10B} - R_B = 0 \quad (4.23)$$

$$S_{10B} = R_B = 10.5 \text{ kN}$$

$$S_{11} = 0$$

Aniqlangan barcha zo'riqish kuchlarini jadval ko'rinishida yoki umumiy holatda keltirish mumkin.

2-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi fermaning 4, 5 va 8-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin (4.14-rasm, a).

Berilgan: $P_1 = 2 \text{ kN}, P_2 = 4 \text{ kN}, P_3 = 6 \text{ kN}, a = 4 \text{ m}, h = 3 \text{ m}$

S_4 va S_5 zo'riqish kuchlarini aniqlash uchun yassi fermani I-I kesim bilan xayolan kesamiz (4.14-rasm, b). Tashlab yuborilgan qismining ta'sirini S_4, S_5 va S_6 kuchlar orqali almashtiramiz. Bu yerda ham sterjenlarni cho'zilgan deb hisoblaymiz, agar natija manfiy ishora bilan chiqsa sterjen siqilgan hisoblanadi.

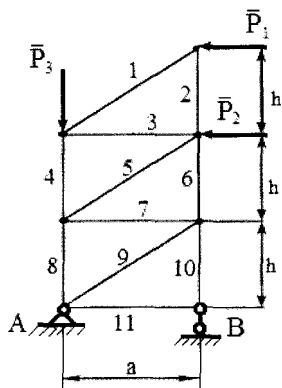
S_4 zo'riqish kuchini aniqlash uchun F nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz:

$$S_4 \cdot a + P_1 \cdot h + P_3 \cdot \alpha = 0, \quad (4.24)$$

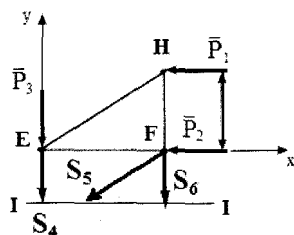
(4.24) dan foydalabib S_4 ni aniqlaymiz:

$$S_4 = \frac{-P_1 \cdot h - P_3 \cdot \alpha}{a} = \frac{-2 \cdot 3 - 6 \cdot 4}{4} = -7.5 \text{ kN}$$

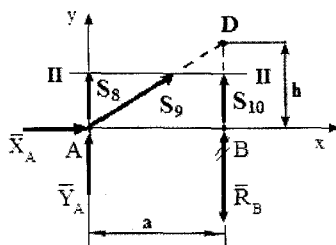
a)



b)



c)



4.14-rasm

S_5 zo'riqish kuchini aniqlash uchun esa X o'qiga nisbatan proeksiya olamiz:

$$\sum F_{kx} = 0 - P_1 - S_5 \cdot \cos \alpha - P_2 = 0, \quad (4.25)$$

(4.25) dan foydalanib S_5 ni aniqlaymiz:

$$S_5 = \frac{-P_1 - P_2}{\cos \alpha} = \frac{-2 - 4}{4/5} = -7.5 \text{ kN}$$

S_8 zo'riqish kuchini aniqlash uchun yassi fermi 8-9-10-sterjenlar bo'ylab II-II kesim bilan xayolan kesamiz (4.14-rasm, c).

Ushbu holatda noma'lumlardan qutulish uchun D nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz:

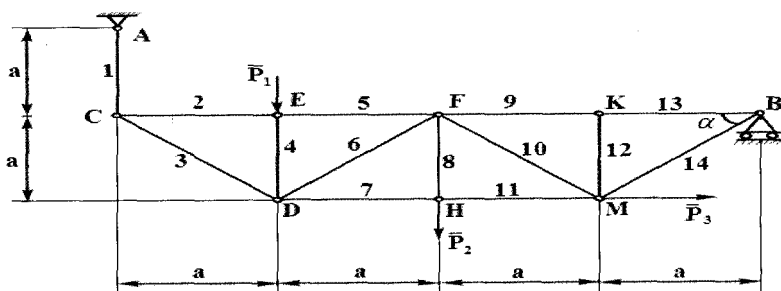
$$\sum \overline{m}_D(F_k) = 0 \quad X_A \cdot h - Y_A \cdot a - S_8 \cdot a = 0, \quad (4.26)$$

(4.26) dan foydalabib S_8 ni aniqlaymiz:

$$S_8 = \frac{X_A \cdot h - Y_A \cdot a}{a} = \frac{6 \cdot 3 - 16.5 \cdot 4}{4} = \frac{18 - 66}{4} = \frac{-48}{4} = -12 \text{ kN}$$

Biz yuqorida keltirilgan ikkala masalada bitta fermaning sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarini ikki usul yordamida aniqladik. Ikkala usulda ham zo'riqish kuchlarining miqdorlari bir xil natijani berdi. Demak, zo'riqish kuchlari to'g'ri aniqlangan.

3-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi ferma sterjenlarida hosil bo'luvchi tayanch reaksiyalari va zo'riqish kuchlari aniqlansin. (4.15-rasm). Berilgan: $\bar{P}_1 = 12 \text{ kN}$, $\bar{P}_2 = 8 \text{ kN}$, $\bar{P}_3 = 2 \text{ kN}$, $a = 6 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$



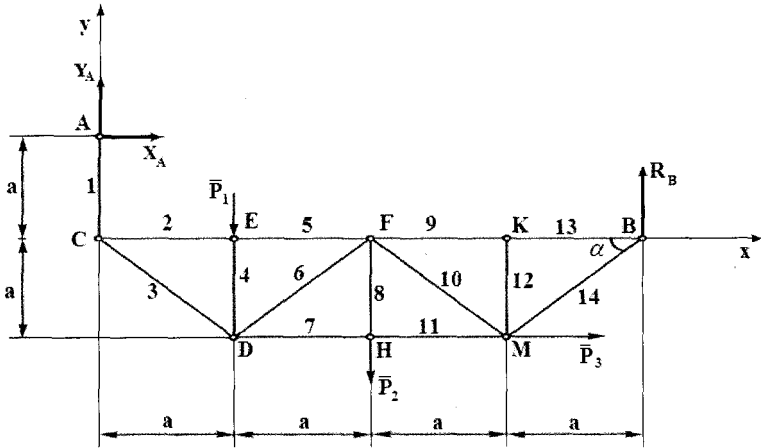
4.15-rasm

YECHISH:

1. Berilgan yassi fermanni erkin holatga keltiramiz. Yassi fermaning A nuqtasiga sharnirli qo'zg'almas tayanch, B nuqtasiga esa sharnirli qo'zg'aluvchan tayanch o'rnatilgan. A nuqtaga ikkita X_A va Y_A reaksiya kuchlarini B nuqtaga esa bitta \bar{R}_B reaksiya kuchini qo'yamiz.

Yassi ferma 14 ta sterjendan tashkil topgan bo'lib, 8 ta tugundan iborat. Har bir tugunni alohida harflar bilan belgilab olamiz (4.16-rasm).

2. Erkin holatga keltirilgan yassi ferma uchun tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



4.16-rasm

$$\sum F_{kx} = 0 \quad P_3 + X_A = 0, \quad (4.28)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad R_B - P_1 - P_2 + Y_A = 0, \quad (4.29)$$

$$\sum \overline{m}_B(\overline{F}_k) = 0 \quad P_3 \cdot \alpha + P_2 \cdot 2\alpha + P_1 \cdot 3\alpha - X_A \cdot \alpha - Y_A \cdot 4\alpha = 0, \quad (4.30)$$

(4.28)-tenglamadan X_A noma'lum reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$X_A = -P_3$$

$$X_A = -2kN$$

(4.29)-tenglamadan Y_A noma'lum reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$Y_A = \frac{P_3 \cdot \alpha + P_2 \cdot 2\alpha + P_1 \cdot 3\alpha - X_A \cdot \alpha}{4\alpha}$$

$$Y_A = \frac{2 \cdot 6 + 8 \cdot 12 + 12 \cdot 18 + 2 \cdot 6}{24} = \frac{12 + 96 + 216 + 12}{24}$$

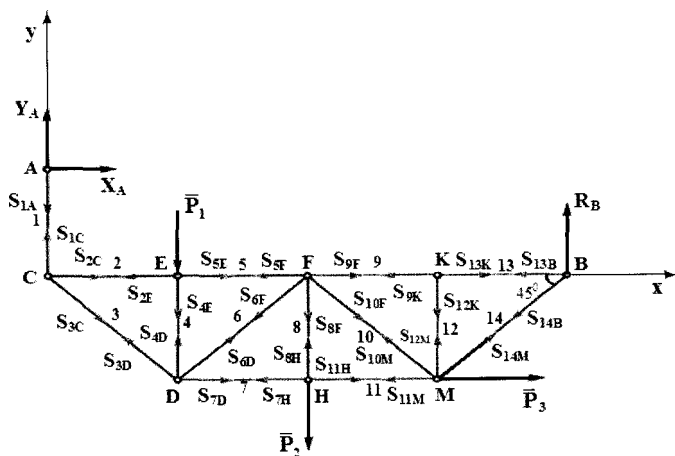
$$Y_A = \frac{336}{24} = 14kN$$

(4.30)-tenglamadan R_B noma'lum reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$R_B = P_1 + P_2 - Y_A$$

$$R_B = 12 + 8 - 14 = 6kN$$

Yuqorida yechib ko'rsatilgan masalalarda reaksiya kuchlarining ishoralariga alohida ahamiyat berish lozim. Muvozanat tenglamalaridan foydalanilib ishora manfiy ekanligi aniqlansa, masalani yechishda chizmada ushbu reaksiya kuchining yo'nalishini o'zgartirish zarur.



4.17-rasm

3. Tugunlarni kesish usulidan foydalanib barcha tugunlardagi zo'riqish kuchlarini aniqlaymiz. Har bir sterjenda hosil bo'ladigan zo'riqish kuchlarini chizmada ko'rsatamiz (4.17-rasm).

4. Ma'lum ketma-ketlikda noma'lumlar sonini hisobga olib har bir tugunni alohida chizib olamiz (4.18-rasm) va tugunlardagi zo'riqish kuchlarini statikaning muvozanat tenglamalari yordamida aniqlaymiz :

1. B tugun uchun

$$\sum F_{ky} = 0 - S_{13B} - S_{14B} \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad (4.31)$$

$$\sum F_{ky} = 0 R_B - S_{14B} \cdot \sin 45^\circ = 0 \quad (4.32)$$

(4.31)-tenglamadan

$$S_{14B} = \frac{R_B}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8.5 \text{ kN}$$

(4.32)-tenglamadan

$$S_{13B} = -S_{14B} \cdot \cos 45^\circ = -8.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -6kN$$

2. K tugun uchun: $\sum F_{kx} = 0 \quad S_{13K} - S_{9K} = 0$ (4.33)

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{12K} = 0$$
 (4.34)

(4.33)-tenglamadan $S_{9K} = S_{13K} = -6kN$

$$S_{13B} = S_{13K} \text{ bo'lgani uchun;}$$

3. M tugun uchun:

$$\sum F_{ky} = 0 \quad P_3 - S_{11M} + S_{14M} \cdot \cos 45^\circ - S_{10M} \cdot \cos 45^\circ = 0$$
 (4.35)

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{12M} + S_{10M} \cdot \sin 45^\circ + S_{14M} \cdot \sin 45^\circ = 0$$
 (4.36)

(4.36)-tenglamadan

$$S_{10M} = \frac{-S_{12M} + S_{14M} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = -S_{14M} = -8.5kN$$

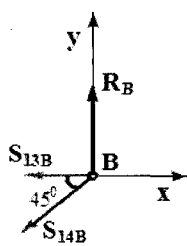
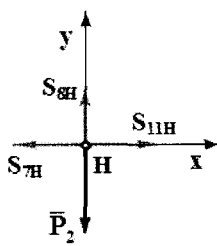
$$S_{12M} = S_{12K} = 0 \quad S_{10M} = -8.5kN$$

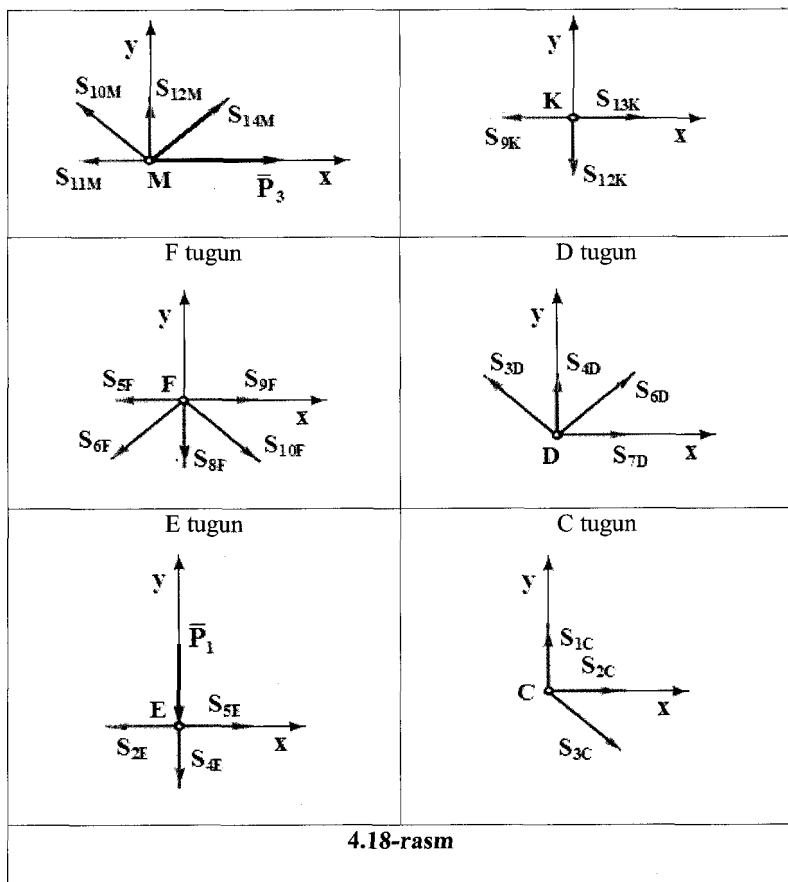
(4.35)-tenglamadan

$$S_{11M} = P_3 - S_{14M} \cdot \cos 45^\circ - S_{10M} \cdot \cos 45^\circ$$

$$S_{11M} = 2 - 8.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 8.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{11M} = 2kN$$

<p style="text-align: center;">B tugun</p> 	<p style="text-align: center;">H tugun</p> 
M tugun	K tugun



4.H tugun uchun: $\sum F_{kx} = 0 \quad S_{11M} - S_{7H} = 0 \quad (4.37)$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{8H} - P_2 = 0 \quad (4.38)$$

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{11M} - S_{7H} = 0 \quad (4.37)$$

(4.37)-tenglamadan

$$S_{7H} = S_{11M} = 2 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{8H} - P_2 = 0 \quad (4.38)$$

(4.38)-tenglamadan

$$S_{8H} = P_2 = 8 \text{ kN}$$

5. F tugun uchun:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{9F} - S_{5F} + S_{10F} \cdot \cos 45^\circ - S_{6F} \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad (4.39)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad -S_{8F} - S_{6F} \cdot \sin 45^\circ - S_{10F} \cdot \sin 45^\circ = 0 \quad (4.40)$$

(4.40)-tenglamadan

$$S_{6F} = \frac{-S_{8F} - S_{10F} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{-8 + 8.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2.8 \text{ kN}$$

(4.39)-tenglamadan

$$S_{5F} = S_{9F} + S_{10F} \cdot \cos 45^\circ - S_{6F} \cdot \cos 45^\circ$$

$$S_{5F} = -6 + 8.5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{5F} = -10 \text{ kN}$$

6. E tugunuchun:

(4.41)-tenglamadan

$$\sum F_{kx} = 0 \quad S_{5E} - S_{2E} = 0 \quad (4.41)$$

$$S_{2E} = S_{5E} = -10 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad -S_{4E} - P_1 = 0 \quad (4.42)$$

$$S_{5E} = S_{5F} = -10 \text{ kN}$$

(4.42)-tenglamadan

$$S_{4E} = -P_1$$

$$S_{4E} = -12 \text{ kN}$$

7. D tugun uchun:

$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{4D} + S_{3D} \cdot \sin 45^\circ + S_{6D} \cdot \sin 45^\circ = 0, \quad (4.43)$$

(4.43)-tenglamadan

$$S_{3D} = \frac{-S_{4D} - S_{6D} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{12 + 2.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 19.8 \text{ kN}$$

8. C tugun uchun:

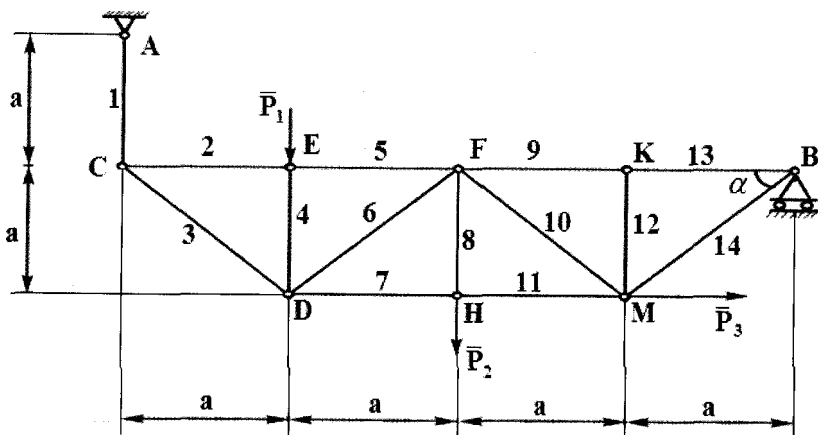
$$\sum F_{ky} = 0 \quad S_{1C} - S_{3C} \cdot \sin 45^\circ = 0, \quad (4.44)$$

(4.44)-tenglamadan

$$S_{1C} = S_{3C} \cdot \sin 45^\circ = 14 \text{ kN}$$

4-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi ferma 5-6-11-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin (4.19-rasm).

Berilgan: $\bar{P}_1 = 12 \text{ kN}, \bar{P}_2 = 8 \text{ kN}, \bar{P}_3 = 2 \text{ kN}, a = 6 \text{ m}, \alpha = 45^\circ$



4.19-rasm

Masala shartiga ko'ra Ritter usuli yordamida 5-6-11-sterjenlardagi zo'riqish kuchlarini aniqlaymiz.

YECHISH:

1. Berilgan yassi fermani erkin holatga keltiramiz. Yassi fermaning A nuqtasiga sharnirli qo'zg'almas tayanch, B nuqtasiga esa sharnirli qo'z-g'aluvchan tayanch o'rnatilgan. A nuqtaga ikkita X_A va Y_A reaksiya kuchlarini B nuqtaga esa bitta \bar{R}_B reaksiya kuchini qo'yamiz.

Yassi ferma 14 ta sterjendan tashkil topgan bo'lib, 8 ta tugundan iborat. Har bir tugunni alohida harflar bilan belgilab olamiz (4.19-rasm).

2. Erkin holatga keltirilgan yassi ferma uchun tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz. C nuqtadan x, y o'qlarini o'tqazamiz:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad P_3 + X_A = 0, \quad (4.45)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad R_B - P_1 - P_2 + Y_A = 0, \quad (4.46)$$

$$\sum \overline{m}_B(\overline{F}_k) = 0 \quad P_3 \cdot \alpha + P_2 \cdot 2\alpha + P_1 \cdot 3\alpha - X_A \cdot \alpha - Y_A \cdot 4\alpha = 0, \quad (4.47)$$

(4.45)-tenglamadan X_A nomalum reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$X_A = -P_3$$

$$X_A = -2kN$$

(4.47)-tenglamadan Y_A nomalum reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$Y_A = \frac{P_3 \cdot \alpha + P_2 \cdot 2\alpha + P_1 \cdot 3\alpha - X_A \cdot \alpha}{4\alpha}$$

$$Y_A = \frac{2 \cdot 6 + 8 \cdot 12 + 12 \cdot 18 + 2 \cdot 6}{24} = \frac{12 + 96 + 216 + 12}{24}$$

$$Y_A = \frac{336}{24} = 14kN$$

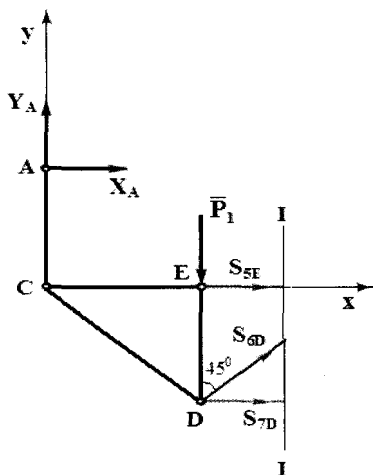
(4.46)-tenglamadan R_B nomalum reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$R_B = P_1 + P_2 - Y_A$$

$$R_B = 12 + 8 - 14 = 6kN$$

Yuqorida yechib ko'rsatilgan masalalarda reaksiya kuchlarining ishoralariga alohida ahamiyat berish lozim. Agar ishora manfiy ekanligi aniqlansa, masalani yechishda chizmada ushbu reaksiya kuchining yo'nalishini o'zgartirish zarur.

3. Yassi fermani I-I va II-II kesimlar bilan xayolan kesib har bir qismning muvozanatini alohida ko'rib chiqamiz. S_5 zo'riqish kuchini aniqlash uchun 4.20-rasmdan foydalanib D nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz:



$$\sum \overline{m_D}(F_k) = 0$$

$$-S_{5E} \cdot a - X_A \cdot 2a - Y_A \cdot a = 0, \quad (4.48)$$

$$S_{5E} = -X_A \cdot 2 - Y_A$$

$$S_{5E} = 2 \cdot 2 - 14 = -10 \text{ kH}$$

\overline{S}_6 zo'riqish kuchini aniqlash uchun esa Y o'qiga nisbatan barcha kuchlarning proyeksiyalari yig'indisini hisoblaymiz (4.20-rasm):

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$Y_A - P_1 + S_{6D} \cdot \cos 45^\circ = 0, \quad (4.49)$$

4.20-rasm

$$S_{6D} = \frac{P_1 - Y_A}{\cos 45^\circ} = \frac{12 - 14}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2,8 \text{ kN}$$

S_{11} zo'riqish kuchini aniqlash uchun yassi fermani F-H va K-M tugunlar orasidagi sterjenlar o'rtasidan xayolan kesamiz (4.21-rasm).

S_{11} zo'riqish kuchini aniqlash uchun 4.21-rasmdagi feraning chap qismi uchun F nuqtaga nisbatan barcha kuchlardan moment olamiz :

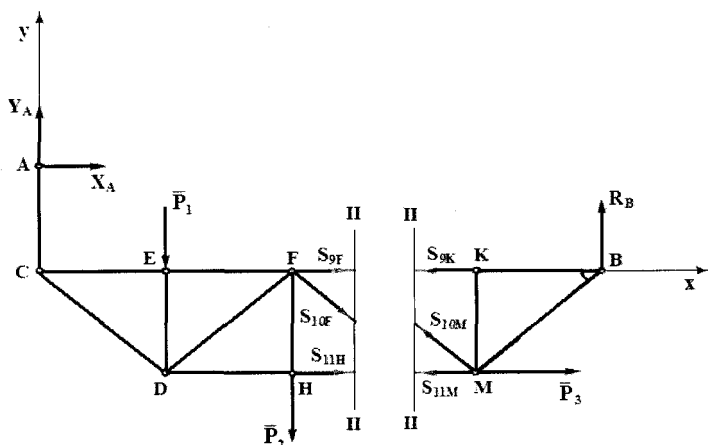
$$\sum \overline{m_F}(F_k) = 0$$

$$S_{11N} \cdot a + P_1 \cdot a - X_A \cdot a - Y_A \cdot 2a = 0, \quad (6.46)$$

$$S_{11N} = \frac{X_A \cdot a + Y_A \cdot 2a - P_1 \cdot a}{a}$$

$$S_{11N} = X_A + 2Y_A - P_1 = -2 + 2 \cdot 14 - 12$$

$$S_{11N} = 14 \text{ kN}$$



4.21-rasm

Zo'riqish kuchlarining to'g'ri aniqlanganligini tekshirish uchun 4.21-rasmdagi fermaning o'ng qismi uchun Y o'qiga nisbatan barcha kuchlarning proyeksiyalari yig'indisini hisoblaymiz:

$$\sum F_{ky} = 0 \quad R_B + S_{10M} \cdot \sin 45^\circ = 0, \quad (6.47)$$

$$S_{10M} = -\frac{R_B}{\sqrt{2}/2} = -\frac{6}{0.707}$$

$$S_{10M} = -8,5 \text{ kN}$$

$$\sum m_k(F_k) = 0 \quad R_B \cdot a + P_3 \cdot a - S_{11M} \cdot a - S_{10M} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = 0, \quad (6.48)$$

$$S_{11M} = \frac{R_B \cdot a + P_3 \cdot a - S_{10M} \cdot a \cdot \cos 45^\circ}{a}$$

$$S_{11M} = 6 + 2 + 8,5 \cdot \sqrt{2}/2 = 14 \text{ kN}$$

$$S_{11M} = S_{11N} = 14 \text{ kN}$$

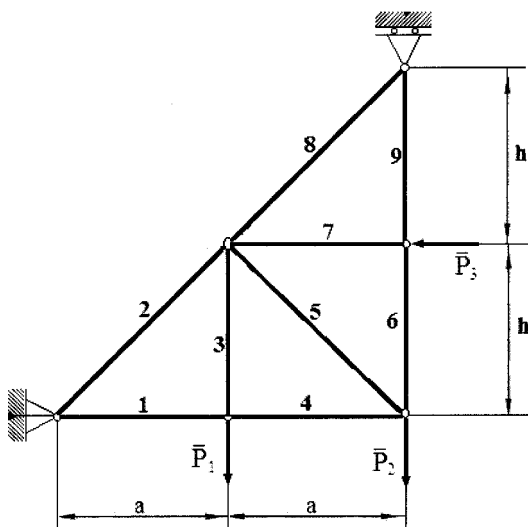
Biz yuqorida keltirilgan ikkala masalada bitta fermaning sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarini ikki usul yordamida aniqladik. Aniqlangan zo'riqish kuchlarining qiymatlari har ikkala usulda ham bir xil miqdorga

ega ekanligi yassi ferma sterjenlarida hosil bo'ladigan zo'riqish kuchlarining to'g'ri aniqlanganligini bildiradi.

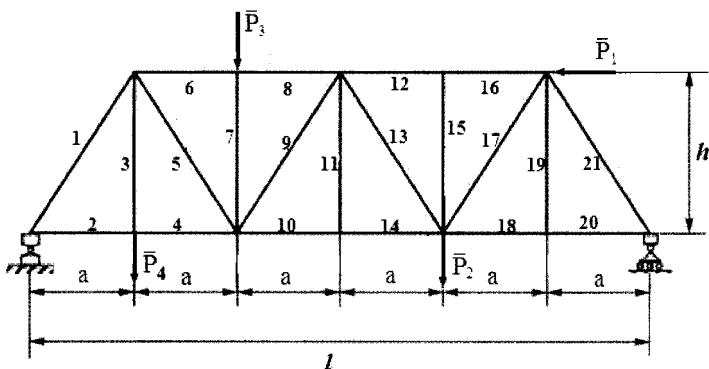
4.7 Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi ferma sterjenlarida hosil bo'luvchi tayanch reaksiyalari va zo'riqish kuchlari aniqlansin. Tugunlarni kesish usuli bilan barcha sterjenlardagi zo'riqish kuchlari hamda 6-7-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin.

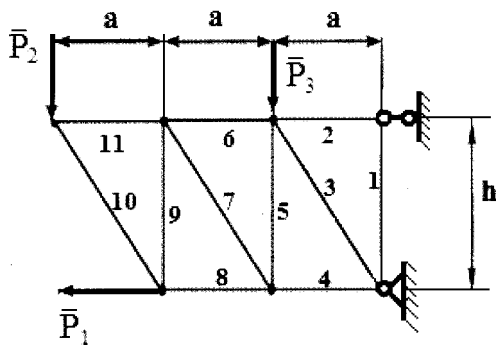
$$\bar{P}_1 = 8kN, \bar{P}_2 = 12kN, \bar{P}_3 = 9kN, a = 3m, h = 4m$$



2-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi ferma tayanch reaksiyalari va 6-7-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin. $\bar{P}_1 = 4kN, \bar{P}_2 = 8kN, \bar{P}_3 = 12kN, \bar{P}_4 = 2kN, a = 2m, h = 4m$

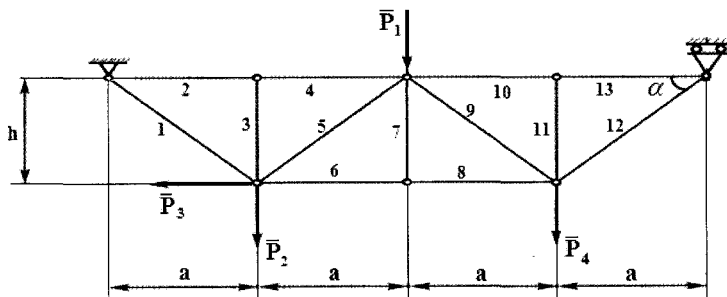


3-masala. Berilgan kuchlar ta'siridagi yassi ferma sterjenlarida hosil bo'luvchi tayanch reaksiyalari va zo'riqish kuchlari aniqlansin. Tugunlarni kesish usuli bilan barcha sterjenlardagi zo'riqish kuchlari hamda 6-8-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin. $\bar{P}_1 = 10kN$, $\bar{P}_2 = 15kN$, $\bar{P}_3 = 5kN$, $a = 3m$, $h = 5m$



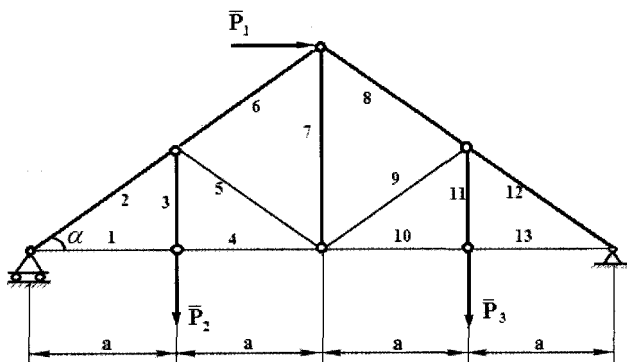
4-masala. Berilgan kuchlar ta'siridagi yassi ferma uchun tugunlarni kesish usuli bilan barcha sterjenlardagi zo'riqish kuchlari hamda 6-8-10-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin.

$$\bar{P}_1 = 12kN, \bar{P}_2 = 8kN, \bar{P}_3 = 4kN, \bar{P}_4 = 6kN, a = 6m, h = 4m$$



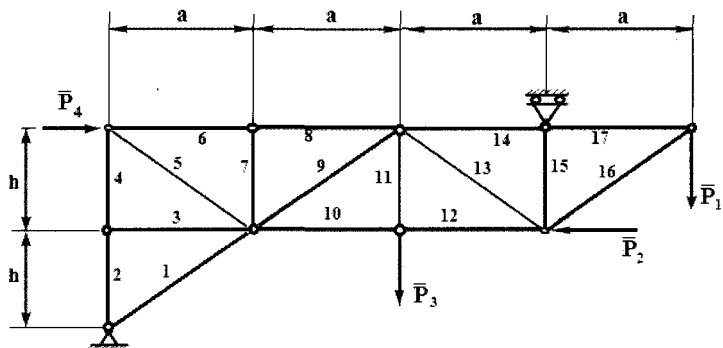
5-masala. Berilgan yassi ferma uchun tugunlarni kesish usuli bilan barcha sterjenlardagi zo'riqish kuchlari aniqlansin.

$$\bar{P}_1 = 6kN, \bar{P}_2 = 8kN, \bar{P}_3 = 4kN, a = 4m, \alpha = 30^\circ$$



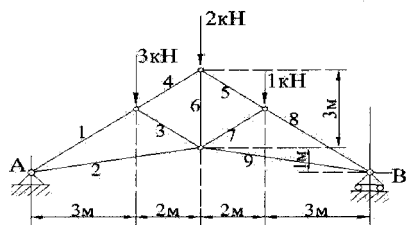
6-masala. Berilgan kuchlar tasiridagi yassi ferma sterjenlarida hosil bo'luvchi tayanch reaksiyalari va zo'riqish kuchlari aniqlansin. Tugunlarni kesish usuli bilan barcha sterjenlardagi zo'riqish kuchlari hamda 8, 10, 12, 14-sterjenlardagi zo'riqish kuchlari Ritter usulidan foydalanib aniqlansin.

$$\bar{P}_1 = 2kN, \bar{P}_2 = 8kN, \bar{P}_3 = 4kN, \bar{P}_4 = 6kN, a = 4m, h = 3m$$



7-masala. Rasmda ta'sir qiluvchi kuchlar bilan birga ko'rsatilgan stropila firmasining tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

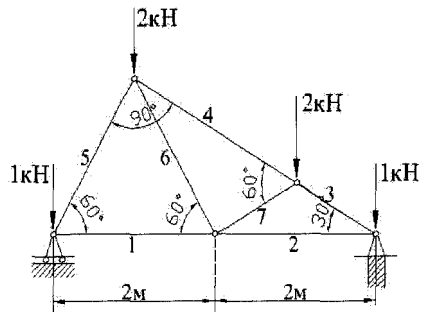
(javob: $R_A = 3,4\text{kN}$, $R_B = 2,6\text{kN}$.)



Sterjenning nomeri.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zo'riqishlar, kN.	-7,3	+5,8	- 2,44	-4,7	-4,7	+3,9	-0,81	-5,5	+4,4

8-masala. Rasmda ta'sir qiluvchi kuchlar bilan birga ko'rsatilgan suyri firmaning tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

(javob: $R_A = 3,25kN$, $R_B = 2,75kN$.)



Sterjenning nomeri.	1	2	3	4	5	6	7
Zo'riqishlar, kN.	+1,3	+3,03	-3,5	-2,5	-2,6	+1,73	-1,73

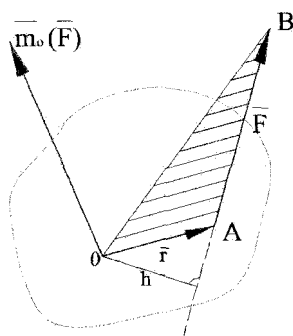
NAZORAT SAVOLLARI:

1. Ferma deb nimaga aytiladi?
2. Tugun deb nimaga aytiladi?
3. Geometrik o'zgarmas ferma deganda nimani tushunasiz?
4. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
5. Qachon tugunlarni kesish usulidan foydalaniladi?
6. Ritter usulidan qachon foydalaniladi?
7. Maksvell – Kremon diagrammasidan qachon foydalaniladi?
8. Sterjenlar soni bilan tugunlar soni orasida qanday bog'lanish bor?

5.1 Kuchning markazga nisbatan moment-vektori

\vec{F} kuchning O markaz atrofida aylantirish effekti: 1) moment moduliga, ya'ni kuchning yelkaga bo'lgan ko'paytma $F \cdot h$ ning kattaligiga, 2) O markaz va \vec{F} kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan OAB aylanish tekisligiga; 3) shu tekislikda aylanish yo'nalishi bilan xarakterlanadi. Jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlar va O markaz bitta tekislikda yotgan bo'lsa, har gal OAB aylanish tekisligini aniqlashga ehtiyoj qolmaydi. Bu holda kuch momenti $\pm F \cdot h$ ga teng skalyar kattalik bilan aniqlanadi. Ko'paytma oldidagi \pm ishora jismning markaz atrofida aylanish yo'nalishini ko'rsatadi.

Jismga fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, har bir kuchning aylantirish tekisligini alohida ko'rsatishga to'g'ri keladi. Aylanish tekisligining fazodagi holatini va aylanish yo'nalishini mazkur tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar vektor bilan aniqlash mumkin.



5.1-rasm

Agar bu vektoring modulini kuchning momenti moduliga teng va uning yo'nalishini kuchning aylantirish yo'nalishini ifodalaydigan tarzda tanlab olsak, bunday vektor yordamida kuchning O nuqtaga nisbatan momentini xarakterlovchi har uchala faktorni ham aniqlash mumkin. Shu sababli \vec{F} kuchning O markazga nisbatan moment-vektorini O markazga qo'yilgan va bu markaz hamda kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan $\vec{m}_0(\vec{F})$ vektor bilan tasvirlaymiz. $\vec{m}_0(\vec{F})$ vektoring yo'nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan qara-

ganimizda kuch jismni O markaz atrofida soat mili harakati yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda aylantirishga intilsin.

Shunday qilib $\vec{m}_0(\vec{F})$ vektor bir vaqtning o‘zida, moment modulini, turli kuchlar uchun OAB aylantirish tekisligini va shu tekislikda aylanish yo‘nalishini xarakterlaydi. $\vec{m}_0(\vec{F})$ vektor moment markaziga qo‘yiladi.

\vec{OA} va \vec{F} vektorlarning $\vec{OA} \times \vec{F}$ vektorial ko‘paytmasini ko‘rib chiqamiz (5.1-rasm). Ta‘rifga ko‘ra*

$$|\vec{OA} \cdot \vec{F}| = 2S_{\Delta OAB}, \quad (5.1)$$

$\vec{m}_0(\vec{F})$ vektorning moduli ham $2S_{\Delta OAB}$ ga teng.

Shunga ko‘ra

$$|\vec{OA} \cdot \vec{F}| = 2S_{\Delta OAB} = |\vec{m}_0(\vec{F})|, \quad (5.2)$$

OAB tekislikka perpendikulyar $\vec{OA} \times \vec{F}$ vektor shunday yo‘nalganki uning uchidan qaralganda \vec{OA} vektorni \vec{F} vektor ustiga (ular bir nuqtada qo‘yilganda) tushirish uchun soat mili aylanishiga teskari yo‘nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Demak, $\vec{OA} \times \vec{F}$ va $\vec{m}_0(\vec{F})$ vektorlar miqdorlari teng va bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab bir tomonga yo‘nalgan ekan. Shu bilan birga ularning o‘lchov birliklari ham bir xil ekanligi ko‘rinib turibdi. Bundan

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}, \quad (5.3)$$

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (5.4)$$

bu yerda $\vec{r} = \vec{OA}$ A nuqtaning O markazga nisbatan radius-vektori.

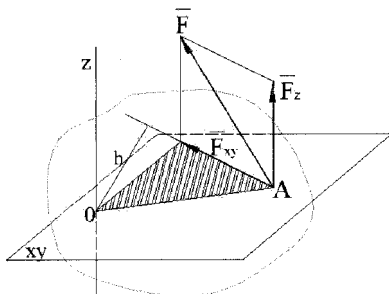
Demak, kuchning markazga nisbatan momenti vektor kattalik bo‘lib, kuch qo‘yilgan nuqtaning moment markaziga nisbatan radius vektori bilan shu kuchning vektorial ko‘paytmasiga teng.

* \vec{a} va \vec{b} vektorlarning $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorial ko‘paytmasi deb, \vec{c} vektorga aytiladi, \vec{a} ning moduli \vec{a} va \vec{b} vektorlar asosida qurilgan parallelogrammning yuzasiga teng va shu yuzaga perpendikulyar, uning uchidan qaralganda \vec{a} vektorni \vec{b} vektor ustiga eng qisqa burchakka burib tushirish uchun soat mili aylanishiga teskari yo‘nalishda burish lozim.

5.2 Kuchning o'qqa nisbatan momenti

Fazodagi kuchlar sistemasining jismga ta'sirini o'rganishda kuchning markazga nisbatan momenti bilan birga kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti, kuch ta'sirida jismni berilgan o'q atrofida aylantirish effektini xarakterlaydi. Vertikal yo'nalgan z o'q atrofida aylana oladigan qattiq jism berilgan bo'lsin (5.2-rasm).



5.2-rasm.

Qattiq jismni A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan. A nuqta orqali o'tuvchi z o'qqa perpendikulyar xy tekisligini o'tkazamiz va \vec{F} kuchni z o'qqa parallel bo'lgan \vec{F}_z va xy tekisligida yotuvchi \vec{F}_{xy} (\vec{F}_{xy} bir vaqtning o'zida \vec{F} kuchning xy tekisligidagi proyeksiyasi hisoblanadi) tashkil etuvchilarga ajratamiz. z o'qqa parallel yo'nalgan \vec{F}_z tashkil etuvchi jismni o'q atrofida aylantira olmaydi (u jismni z o'qi bo'ylab siljitishi mumkin). \vec{F} kuchning z o'q atrofida aylantirish effekti shu o'q atrofida \vec{F}_{xy} tashkil etuvchining aylantirish effekti bilan bir xil bo'ladi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb uning shu o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasining o'q bilan mazkur tekislik kesishgan nuqtasiga nisbatan momentiga aytiladi. \vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momenti $m_z(\vec{F})$ bilan belgilanadi; ta'rifga ko'ra

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_{xy}), \quad (5.5)$$

$$m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h, \quad (5.6)$$

Kuchning o'qqa nisbatan momenti skalyar kattalik bo'lib, o'qning musbat uchidan qaraganda kuchning o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasi jismni o'q atrofida soat mili harakatiga teskari yo'nalishda

aylantirishga intilsa, kuch momenti musbat, aks holda manfiy ishora bilan olinadi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti quyidagi xossalarga ega:

- 1) Agar kuch o'qqa parallel yo'nalgan bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng ($\bar{F}_{xy}=0$ bo'lgani uchun);
- 2) Kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi. ($h=0$ bo'lgani uchun).

5.3 Kuchning o'qlarga nisbatan momentlari uchun Varin'on teoremasi

Tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining (avvalgi bobning 3.2-qismida keltirilgan) biror nuqtaga nisbatan momenti sistema tarkibidagi barcha kuchlarning shu nuqtaga nisbatan momentlari-ning algebraik yig'indisiga tengligini **Varin'on teoremasi** orqali isbotlab ko'rsatgan edik.

Agar (3.9) vektor ifodaning har ikkala tomonini O nuqtadan o'tuvchi z o'qqa proyeksiyalasak quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$m_z(\bar{R}) = \sum m_z(\bar{F}_k), \quad (5.7)$$

Demak, teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasi istalgan o'qqa nisbatan momentlar uchun ham o'rinlidir. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini aniqlashda Varin'on teoremasi juda qulaydir. Buning uchun kuchni koordinata o'qlariga nisbatan tashkil etuvchilarga ajratish yoki shu o'qlarga proyeksiyalash lozim.

Kuchning o'qlarga nisbatan momentlari uchun Varin'on teoremasi:

Fazoviy kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining biror o'qqa nisbatan momenti sistema tarkibidagi barcha kuchlarning shu o'qqa nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

5.4 Kuchning koordinatalar o'qlarga nisbatan momentlarining analitik usulda berilishi.

Koordinatalari x, y, z bo'lgan nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuchni $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ tashkil etuvchilarga ajratamiz (5.3-rasm). U holda Varin'on teoremasiga ko'ra quyidagini yozamiz:

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_x) + m_x(\vec{F}_y) + m_x(\vec{F}_z), \quad (5.8)$$

\vec{F}_x tashkil etuvchi x o'qiga parallel \vec{F}_y va \vec{F}_z tashkil etuvchilar esa ularga perpendikulyar bo'lgani uchun

$$m_x(\vec{F}_x) = 0; \quad m_x(\vec{F}_y) = -z \cdot F_y; \quad m_x(\vec{F}_z) = yF_z, \quad (5.9)$$

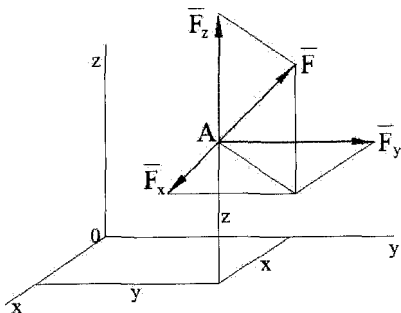
natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad (5.10)$$

Xuddi shu usulda \vec{F} kuchni qolgan y va z o'qlarga nisbatan momentlari aniqlanadi.

Demak,

$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y \\ m_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z \\ m_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (5.11)$$



5.3-rasm

(11) formula kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasidir. (11) ning chap tomoni $\vec{m}_0 = (\vec{F})$ vektorning koordinata o'qlardagi proyeksiyalari bo'lgani uchun shu tengliklar yordamida $\vec{m}_0(\vec{F})$ vektorning modulini aniqlash mumkin:

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = \sqrt{[m_x(\vec{F})]^2 + [m_y(\vec{F})]^2 + [m_z(\vec{F})]^2} \quad (5.12)$$

5.5 Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish

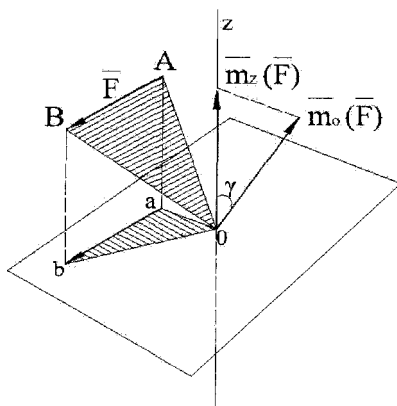
Kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan kuchning shu nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan momenti orasidagi bog'lanishni keltirib chiqaramiz (5.4-rasm).

Ma'lumki:

$$M_0(\bar{F}) = 2S_{\Delta OAB}$$

$$m_z(\bar{F}) = 2S_{\Delta Oab} \quad , (5.13)$$

Uchburchak Oab uchburchak OAB ning z o'qqa perpendikulyar xy tekislikdagi proyeksiyasi bo'lib hisoblanadi.



5.4-rasm

ΔOAB ning yuzasi bilan ΔOab ning yuzasi orasidagi burchak bu yuzalarga tushirilgan perpendikulyarlar orasidagi burchakka teng. Shunga ko'ra:

$$S_{\Delta Oab} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma \quad , (5.14)$$

Tenglikning har ikkala tomonini 2 ga ko'paytiramiz.

$$2S_{\Delta Oab} = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma \quad , (5.15)$$

bu yerda

$$2S_{\Delta Oab} = m_z(F) \quad , \quad 2S_{\Delta OAB} = m_o(\bar{F}) \quad , (5.16)$$

bularni e'tiborga olsak tenglik quyidagi ko'rinishini oladi.

$$m_z(\bar{F}) = [m_o(\bar{F})] \cos \gamma \quad , (5.17)$$

yoki

$$m_z(\bar{F}) = [\bar{m}_o(\bar{F})]_z \quad (5.18)$$

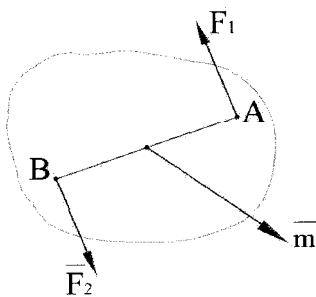
Kuchning o'qqa nisbatan momenti uning shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan moment vektorining shu o'qdagi proyeksiyasiga teng.

5.6 Juft kuch moment – vektori

Juft kuchning jismga ko'rsatadigan ta'siri:

1) juft momenti moduli; 2) juftning ta'sir tekisligi, 3) tekislikdagi aylanish yo'nalishi bilan xarakterlanadi. Bir tekislikda yotmagan juftlarni ko'rib chiqilayotganida har bir juft uchun yuqoridagi uchta elementning har birini ko'rsatish lozim. Qayd etilgan uchta faktorni aniqlashda juft momenti u yotgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan vektor bilan belgilab olinadi. U \bar{m} yoki \bar{M} harfi bilan belgilanadi. Juft momenti vektorining moduli (belgilangan masshtabda) juft momenti moduliga, ya'ni juftni tashkil etuvchilaridan birini juft yelkasi uzunligiga ko'paytmasiga teng hamda juftning ta'sir tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaraganda, juft jismni soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirsin (5.5-rasm).

Juft kuch moment vektori kuchning markazga nisbatan moment vektoridan farq qilib, uni jismni istalgan nuqtasiga qo'yish mumkin (bunday vektorga erkin vektor deyiladi). Haqiqatdan ham vektor berilgan bo'lsa juftni o'zini aniqlash mumkin.



5.5-rasm

Buning uchun vektorga perpendikulyar tekislik o'tkaziladi, bu tekislik juftning ta'sir tekisligi bo'lib hisoblanadi, vektorning uzunligi juftning moduliga teng, vektorning yo'nalishiga qarab juftni aylanish yo'nalishi aniqlanadi.

Bizga ma'lumki juft momentining moduli juftni kuchlaridan birini ikkinchi kuch qo'yilgan nuqtasiga nisbatan momentiga teng.

Demak,

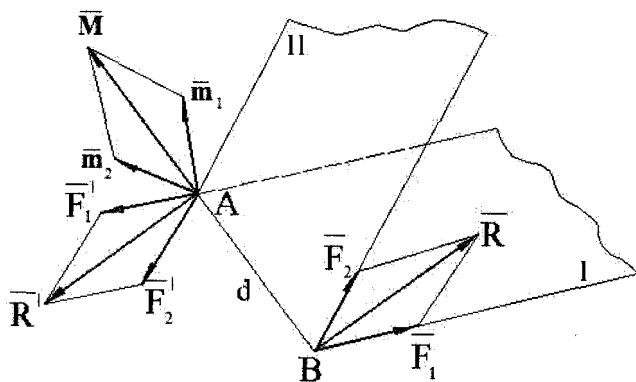
$$m = m_A(\overline{F}_2) = m_B(\overline{F}_1), \quad (5.19)$$

5.7 Fazodagi juftlarni qo'shish

Teorema. Absolyut qattiq jismga qo'yilgan juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarning geometrik yig'indisiga teng.

Isbot. Avvalo I va II tekisliklarda yotgan momentlari \overline{m}_1 va \overline{m}_2 bo'lgan juftlarni qo'shamiz. Ikkala tekislik kesishgan $AB=d$ kesmani olib, berilgan juftlarni o'z tekisligida umumiy d yelkaga keltiramiz (5.6-rasm).

Juftlarning xossalriga asosan A va B nuqtalarga momentlari \overline{m}_1 ga teng bo'lgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ va momentlari \overline{m}_2 bo'lgan $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ juftlarni keltirib qo'yamiz. Bunda $m_1 = F_1 d$, $m_2 = F_2 d$ shart bajarilsin. A va B nuqtalarda qo'yilgan kuchlarni qo'shib haqiqatdan ham $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ va $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ juftlar bitta $(\overline{R}, \overline{R}')$ juftga ekvivalent ekanligiga ishonch hosil qilamiz.



5.6-rasm

Bu juftning momenti \bar{M} ni aniqlaymiz:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \bar{R}^1 = \bar{F}_1^1 + \bar{F}_2^1, \quad (5.20)$$

Bu juftning moment vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{M} = \bar{AB} \times \bar{R} = \bar{AB} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = (\bar{AB} \times \bar{F}_1) + (\bar{AB} \times \bar{F}_2)$$

$$\bar{AB} \times \bar{F}_1 = \bar{m}_1, \quad \bar{AB} \times \bar{F}_2 = \bar{m}_2$$

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2, \quad (5.21)$$

\bar{M} vektor \bar{m}_1 va \bar{m}_2 vektorlar asosida qurilgan parallelogramning diagonaliga teng. Teorema ikkita juft uchun isbotlandi.

Agar qattiq jismga momentlari $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$ bo'lgan n ta juft ta'sir etayotgan bo'lsa, (5.21) formulani qo'llab ularni birin-ketin qo'shib chiqilsa, bu juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent ekanligi aniqlanadi. Bu juftning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum \bar{m}_k \quad (5.22)$$

\bar{M} vektor juftlar momentlari vektorlari asosida qurilgan ko'pburchakning yopuvchi tomoni bo'lib hisoblanadi.

Agar qo'shiluvchi vektorlar bir tekislikda yotmagan bo'lsa, hisoblashni analitik usulda olib borish kerak. Koordinata o'qlarini o'tkazib yig'indi vektorning o'qdagi proyeksiyasi haqidagi teoremaga asosan (5.22) dan quyidagini yozamiz:

$$M_x = \sum m_{kx}; M_y = \sum m_{ky}; M_z = \sum m_{kz}, \quad (5.23)$$

(5.23) ga asosan \bar{M} vektorni qurish mumkin, uning moduli quyidagiga teng bo'ladi:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (5.24)$$

Demak, juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun $\bar{M} = 0$ yoki

$$\sum \bar{m}_k = 0, \quad (5.25)$$

shart bajarilishi kerak, qattiq jismga ta'sir etuvchi juftlar momenti vektorlaridan qurilgan ko'pburchak yopiq bo'lishi kerak. Endi

muvozanatning analitik shartini aniqlaymiz. $M=0$ bo'lishi uchun $M_x=0$, $M_y=0$, $M_z=0$ bo'lishi lozim, u holda (5.23) ga ko'ra quyidagini yozamiz:

$$\sum m_{kx} = 0; \quad \sum m_{ky} = 0, \quad \sum m_{kz} = 0; \quad (5.26)$$

5.8 Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlarni berilgan markazga keltirish

Qattiq jismga ixtiyoriy yo'nalgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ fazoviy kuchlar sistemasi ta'sir etayotgan bo'lsin (5.7-rasm, a). Ixtiyoriy O nuqta tanlab, uni keltirish markazi deb ataymiz.

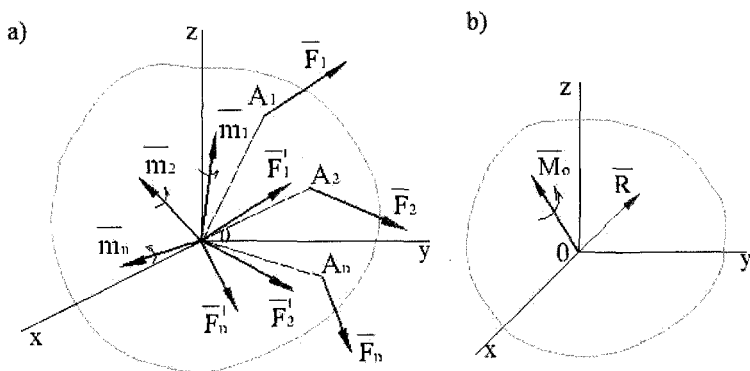
Puanso lemmasini qo'llab berilgan kuchlarni shu O markazga keltiramiz. Bunda keltirilayotgan kuchlarga mos juftlarni qo'shib olamiz. Natijada qattiq jismga

$$\vec{F}_1^1 = \vec{F}_1, \vec{F}_2^1 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n^1 = \vec{F}_n, \quad (5.27)$$

kuchlar sistemasi va momentlari

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2), \dots, \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_n), \quad (5.28)$$

bo'lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^{11}), (\vec{F}_2, \vec{F}_2^{11}), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n^{11})$ qo'shilgan juftlar sistemasi ta'sir qila boshlaydi, aniqlik uchun rasmda $n=3$ ta kuch ko'rsatilgan.



5.7-rasm

O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1^1 = \vec{F}_1, \vec{F}_2^1, \dots, \vec{F}_n^1$ kuchlarni geometrik qo'shib ularning teng ta'sir etuvchisi \vec{R}^1 kuchni hosil qilamiz.

$$\vec{R}^1 = \sum \vec{F}_k^1 \text{ yoki } \vec{R} = \sum \vec{F}_k, \quad (5.29)$$

Kuchlarni O nuqtaga keltirishda qo'shib olingan juftlar moment vektorlarini geometrik usulda qo'shamiz. Natijada juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'ladi. Bu juftning momenti $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_k$, yoki

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k), \quad (5.30)$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi kabi bu yerda ham \vec{R} barcha fazoviy kuchlar sistemasining geometrik yig'indisi bo'lib, sistemaning bosh vektori, \vec{M}_0 kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan momentlarning geometrik yig'indisi bo'lib, kuchlar sistemasining shu O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi.

Shunday qilib biz quyidagi teoremani isbotladik:

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bu kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor \vec{R} ga teng bitta kuch bilan momenti \vec{M}_0 ga teng bitta juftga ekvivalent bo'ladi (5.7-rasm, b).

Ko'pincha \vec{R} va \vec{M}_0 vektorlar analitik usulda, ya'ni ularning o'qlardagi proyeksiyalari orqali aniqlanadi, ya'ni

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}, \quad (5.31)$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_k), \quad M_y = \sum m_y(\vec{F}_k), \quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_k), \quad (5.32)$$

5.9 Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatining zaruriy va yetarli sharti quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{R} = 0, \bar{M}_0 = 0, \quad (5.33)$$

\bar{R} va \bar{M}_0 vektorlar faqat va faqat $R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$ va $M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0$ shart bajarilganda nolga teng bo'ladi.

O'z navbatida

$$\begin{aligned} R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum F_{kz} = 0 \\ M_x = \sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad M_y = \sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad M_z = \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

U holda quyidagini yozamiz:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0 \\ \sum m_x(F_k) = 0, \quad \sum m_y(F_k) = 0, \quad \sum m_z(F_k) = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Bu tenglamalar fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartlarini ifodalaydi:

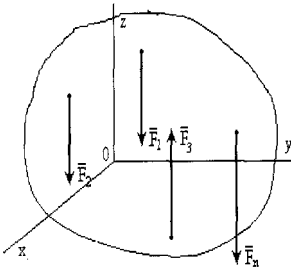
Fazoviy kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining x, y, z koordinata o'qlaridagi proyekt-siyalarining yig'indisi va shu o'qlarga nisbatan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi shart va yetarlidir.

(5.35) tengliklar sistemasi qattiq jismga ta'sir etuvchi istalgan fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ifodalaydi.

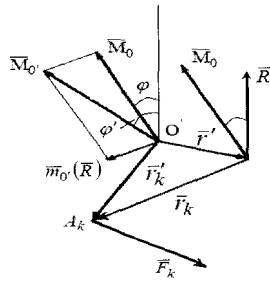
Parallel kuchlar bo'lgan hol. Agar jismga ta'sir etuvchi fazoviy kuchlar parallel kuchlardan iborat bo'lsa, koordinata sistemasini shunday tanlash lozimki, o'qlardan biri masalan, z o'qi kuchlarga parallel tanlanishi kerak (5.8-rasm). Bunday holda kuchlarning x va y o'qlardagi proyekt-siyalari yig'indisi va z o'qqa nisbatan momentlari yig'indisi nolga teng bo'ladi. U holda (5.34) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum F_{kz} = 0; \quad \sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad (5.36)$$

Ushbu holatda qolgan tenglamalar esa ayniyatga aylanadi.



5.8-rasm.



5.9-rasm.

Shunday qilib, fazoviy parallel kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartlari quyidagicha ifodalanadi:

Fazoviy parallel kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning parallel o'qdagi proyeksiyalari-ning yigindisi va qolgan ikki o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

5.10 Fazoviy kuchlar sistemasining invariantlari

Berilgan kuchlar sistemasini unga ekvivalent bo'lgan sistema bilan almashtirishda o'zgarmay qoladigan vektor yoki skalyar kattalik kuchlar sistemasining invarianti deyiladi.

Kuchlar sistemasining bosh momenti $\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$ esa keltirish markaziga nisbatan invariant xossasiga ega emas, chunki keltirish markazi o'zgarsa, kuchlar sistemasining shu markazga nisbatan bosh momenti ham o'zgaradi.

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ kuchlar sistemasini qandaydir O markazga keltirilganda shu O markazga qo'yilgan kuchlar sistemasining $\bar{R} = \bar{R}'$ bosh vektorga hamda momenti O markazga nisbatan bosh moment $\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$ ga teng bo'lgan juftga ega bo'lamiz.

Endi biz keltirish markazi qilib O' nuqtani olaylik (5.9-rasm). \bar{F}_k kuch A_k nuqtaga qo'yilgan bo'lsin. A_k nuqtaning O markazga nisbatan

radius – vektori \bar{r}_k , O markazga nisbatan radius – vektori \bar{r}'_k ga teng. U holda hosil bo'lgan $A_k OO'$ uchburchakdan

$$\bar{r}'_k = \bar{r}' + \bar{r}_k, \quad (5.37)$$

ni yozamiz. Bu yerda $\overline{OO'} = \bar{r}'$ deb belgilanadi. \bar{F}_k kuchni O va O' markazga nisbatan momentlari (3.8) formulaga ko'ra quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$m_0(\bar{F}_k) = \bar{r}'_k \times \bar{F}_k, \quad (5.38)$$

$$m_{O'}(\bar{F}_k) = \bar{r}'_k \times \bar{F}_k = (\bar{r}' + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = \bar{r}' \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{r}' \times \bar{F}_k + \bar{m}_0(\bar{F}_k), \quad (39)$$

Kuchlar sistemasining yangi keltirish markazi O' ga nisbatan bosh momenti quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{M}_{O'} = \Sigma m_{O'}(\bar{F}_k) = \Sigma(\bar{r}' + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = \Sigma \bar{m}_0(\bar{F}_k) = \Sigma(\bar{r}' \times \bar{F}_k) + \bar{M}_0, \quad (5.40)$$

$$\Sigma(\bar{r}' \times \bar{F}_k) = \bar{r}' \times \Sigma \bar{F}_k = \bar{r}' \times \bar{R}, \quad (5.41)$$

$$\bar{m}_{O'}(\bar{R}) = \bar{r}' \times \bar{R}, \quad (5.42)$$

U holda yuqoridagi (40) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_0 + \bar{m}_{O'}(\bar{R}), \quad (5.43)$$

$$\bar{M}_{O'} - \bar{M}_0 = \bar{m}_{O'}(\bar{R}), \quad (5.44)$$

Keltirish markazini o'zgartirish natijasida bosh momentning o'zgarishi avvalgi keltirish markazi O ga qo'yilgan kuchlar sistemasi bosh vektori \bar{R} ning yangi keltirish markazi O' ga nisbatan momentiga teng.

$\bar{m}_{O'}(\bar{R}) \perp \bar{R}$ bo'lganligi uchun $\bar{m}_{O'}(\bar{R})$ vektorning \bar{R} yo'nalgan to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lganligi uchun (4.38) ning shu yo'nalishdagi proyeksiyasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$M_{O'} \cos \varphi' = M_0 \cos \varphi, \quad (5.45)$$

Bu yerda:

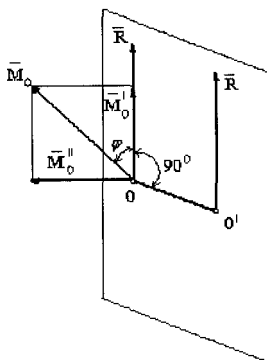
φ - \bar{R} va \bar{M}_0 vektorlar orasida hosil bo'lgan burchak;

φ' - \bar{R} va $\bar{M}_{O'}$ vektorlar orasida hosil bo'lgan burchak;

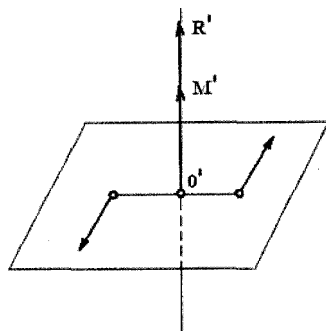
Shunday qilib, kuchlar sistemasi bosh vektorining bosh momentga skalyar ko'paytmasi yoki bosh momentning bosh vektordagi proyeksiyasi kuchlar sistemasining skalyar invarianti deyiladi.

5.11 Fazoviy kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish

Berilgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirilganda biz bosh vektor \bar{R} va bosh moment \bar{M}_0 ga ega bo'lamiz. Bosh vektor \bar{R} bilan bosh moment \bar{M}_0 vektorlari orasidagi φ burchak istalgan qiymatga ega bo'lishi mumkin. Biz $\varphi \neq 90^\circ$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz.



5.10-rasm



5.11-rasm

Bosh moment \bar{M}_0 ni bosh vektor \bar{R} bo'ylab yo'nalgan \bar{M}'_0 va unga perpendikulyar yo'nalgan \bar{M}''_0 tashkil etuvchilarga ajratamiz (5.10-rasm):

$$M'_0 = |M_0 \cos \varphi|, \quad (5.46)$$

Agar $\varphi < 90^\circ$ bo'lsa, \bar{M}'_0 vektor \bar{R} vektorning ustiga tushadi va bir tomonga yo'nalgan bo'ladi. Agar $\varphi > 90^\circ$ bo'lsa, bu vektorlar qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

Kuchlar sistemasi bosh momentining bosh vektor yoʻnalgan oʻqdagi proeksiyasi oʻzgarmas kattalik boʻlib, keltirish markaziga bogʻliq boʻlmaydi. Demak, \overline{M}_o' vektor keltirish markaziga nisbatan invariantdir.

$\overline{M}_o'' \perp \overline{R}$ boʻlgani uchun $(\overline{R}, \overline{M}_o'')$ sistema O' markaz orqali oʻtuvchi bitta \overline{R} kuchga keltiriladi. OO' masofa esa quyidagicha topiladi:

$$OO' = \frac{M_0''}{R} = \frac{M_0 \sin \varphi}{R}, \quad (5.47)$$

Natijada O' markazga qoʻyilgan \overline{R} kuchga va bu kuchga parallel yoʻnalgan momenti $\overline{M}_0' = \overline{M}'$ juftga ega boʻlamiz. \overline{M}_o' vektor erkin vektor boʻlgani uchun uni O' markazga keltiramiz. Natijada 5.11-rasmda koʻrsatilgan sistemaga ega boʻlamiz.

Bitta kuch va shu kuchga perpendikulyar tekislikda yotuvchi juftdan tashkil topgan sistemaga dinamik vint deyiladi.

Fazoda O' nuqtani shunday tanlash kerakki, berilgan kuchlar sistemasi shu nuqtada dinamik vintni tashkil etsin, yaʼni bosh vektor \overline{R} bilan bosh moment \overline{M}' bir toʻgʻri chiziq boʻylab yoʻnalsin. Bu toʻgʻri chiziq berilgan kuchlar sistemasining markaziy oʻqi deyiladi.

Markaziy oʻq tenglamasini keltirib chiqaramiz. Markaziy oʻq ustida yotuvchi ixtiyoriy O' nuqta olamiz va berilgan kuchlar sistemasini O nuqtadan O' nuqtaga koʻchiramiz (5.12-rasm).

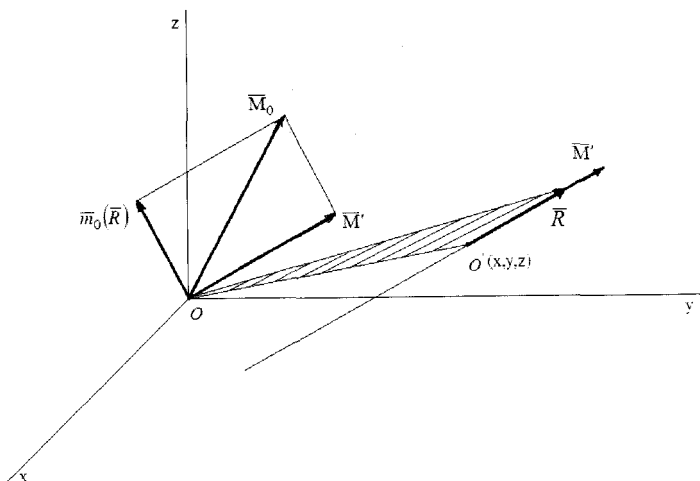
U holda (5.44) ga koʻra quyidagini yozamiz:

$$\overline{M}_0 = \overline{M}' + \overline{m}_0(\overline{R}), \quad (5.48)$$

Tenglikni koordinata oʻqlariga proyeksiyalaymiz:

$$\begin{aligned} M_{0x} &= M'_x + m_{0x}(R) \\ M_{0y} &= M'_y + m_{0y}(R) \\ M_{0z} &= M'_z + m_{0z}(R) \end{aligned}, \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}
 M'_x &= M_{ox} - m_{ox}(R) \\
 M'_y &= M_{oy} - m_{oy}(R), \\
 M'_z &= M_{oz} - m_{oz}(R)
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$



5.12 –rasm.

(5.11) formulaga ko‘ra quyidagilarni yozamiz:

$$\begin{aligned}
 m_{ox}(R) &= yR_z - zR_y \\
 m_{oy}(R) &= zR_x - xR_z, \\
 m_{oz}(R) &= xR_y - yR_x
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

Yuqoridagilarni o‘rniga qo‘yamiz:

$$\begin{aligned}
 M'_x &= M_{ox} - (yR_z - zR_y) \\
 M'_y &= M_{oy} - (zR_x - xR_z), \\
 M'_z &= M_{oz} - (xR_y - yR_x)
 \end{aligned}
 \tag{5.52}$$

\bar{M}' va \bar{R} vektorlar bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘nalgani uchun ularni koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari proporsionaldir:

$$\frac{M'_x}{R_x} = \frac{M'_y}{R_y} = \frac{M'_z}{R_z}, \quad (5.53)$$

$$\frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}, \quad (5.54)$$

Bu markaziy o'q tenglamasi hisoblanadi.

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalar chiqaramiz:

1. Agar $\bar{R} \neq 0, \bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi.
2. Agar $\bar{R} \neq 0, \bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.
3. Agar $\bar{R} = 0, \bar{M}_0 \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bitta juftga keltiriladi. Ushbu holatda bosh moment keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qanday xossalarga ega?
3. Kuchning o'qqa nisbatan momenti ishorasi qanday aniqlanadi?
4. Kuchning o'qlarga nisbatan momentlari uchun Varin'on teoremasi qanday ifodalanadi?
5. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qanday hollarda nolga teng bo'ladi?
6. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik usulda berilishini keltirib chiqaring.
7. Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish qanday ifodalanadi?
8. Qachon juft kuch momenti-vektor deb olinadi?
9. Fazodagi juftlarni qo'shishda qanday teoremadan foydalanamiz?
10. Qattiq jismga ta'sir etuvchi fazodagi juftlar sistemasi muvozanatining analitik sharti qanday ifodalanadi?
11. Fazodagi ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish natijasida qanday natijaga erishamiz?
12. Bosh vektor deb nimaga aytiladi?

13. Bosh moment deb nimaga aytiladi?
14. Fazodagi juftlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti qanday formulalar bilan aniqlanadi?
15. Kuchlar sistemasining vektorli invarianti deb nimaga aytiladi?
16. Fazodagi kuchlar sistemasining skalyar invarianti deb nimaga aytiladi?
17. Dinamik vint nima?
18. Qachon kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi?
19. Dinamik vint o'qi deb qanday chiziqqa aytiladi?
20. Vint parametri nima uchun va qanday aniqlanadi?
21. Dinamik vint ta'siridagi jism qanday harakatda bo'ladi?
22. Fazodagi qanday chiziqqa kuchlar sistemasining markaziy o'qi deyiladi?

5.12 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala (5.13-rasm, a) da tasvirlangan gorizontaal plitaga ta'sir etuvchi \bar{P} va \bar{Q} kuchlarning x , y va z o'qlarga nisbatan momentlarini aniqlang?

Yechilishi: 1. Plitaning \bar{P} og'irlik kuchi vertikal pastga yo'nalgan. y z o'qqa parallel, x va y o'qlarga perpendikulyar. Bu o'qlardan \bar{P} kuchgacha bo'lgan masofa tegishli $\frac{b}{2}$ va $\frac{a}{2}$. U holda quyidagini yozamiz.

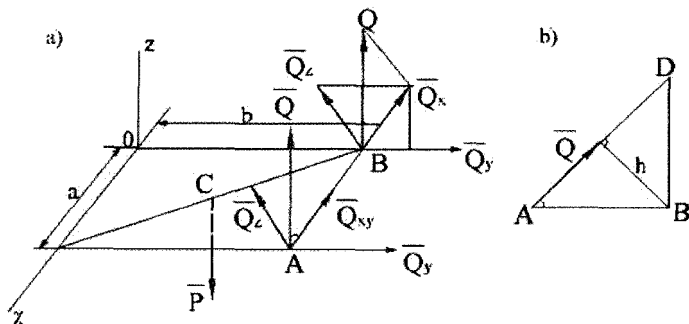
$$m_x(\bar{P}) = -P \frac{b}{2}; \quad m_y[\bar{P}] = P \frac{a}{2}; \quad m_z(\bar{P}) = 0;$$

2. Q kuchning yz tekisligidagi proyeksiyasi $Q_{yz} = Q \sin \alpha$, Q_{yz} ning x o'qiga nisbatan momenti $m_x(\bar{Q}) = bQ \sin \alpha$ kuch ABD tekisligida yotganligi uchun u , y o'qiga perpendikulyar bo'lib u o'qni B nuqtada kesib o'tadi. U holda $Q_{xz} = Q$, Yelka $h = a \sin \alpha$ (5.13-rasm b).

Demak, $m_y(\bar{Q}) = -Qa \sin \alpha$ \bar{Q} kuchning xy tekislikdagi proyeksiyasi

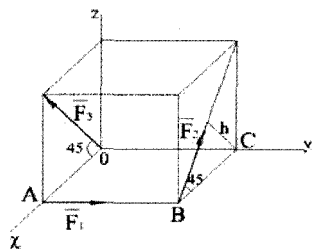
Q_{xy} ; $Q_{xy} = Q \cos \alpha$. z o'qqa nisbatan yelkasi b ga teng

$$m_z(\bar{Q}) = bQ \cos \alpha$$



5.13-rasm

2-masala. 5.14-rasmda ko'rsatilgan fazoviy kuchlar sistemasining $x, y,$ va z o'qlarga va O nuqtaga nisbatan bosh momentlarini aniqlang. \bar{F}_1 kuch kubning qirrasi bo'ylab, \bar{F}_2 va \bar{F}_3 kuchlar yon tomoni diagonali bo'ylab yo'nalgan, kub tomoni $a = 2m,$ $F_1 = 10kH,$ $F_2 = F_3 = 12\sqrt{2}kN$



5.14-rasm

Yechilishi: Kuchlar sistemasining o'qlarga nisbatan bosh momenti, kuchlar sistemasining har bir o'qlarga nisbatan momentlarining yig'indisiga teng,

ya'ni

$$M_x = \sum m_x(\bar{F}_K), \quad M_y = \sum m_y(\bar{F}_K), \quad M_z = \sum m_z(\bar{F}_K)$$

yoki,

$$M_x = m_x(\bar{F}_1) + m_x(\bar{F}_2) + m_x(\bar{F}_3);$$

$$M_y = m_y(\bar{F}_1) + m_y(\bar{F}_2) + m_y(\bar{F}_3);$$

$$M_z = m_z(\bar{F}_1) + m_z(\bar{F}_3) + m_z(\bar{F}_3);$$

hisoblaymiz.

$$M_x = O + F_2 \sin 45^\circ \cdot a = 12\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 24\kappa N$$

$$M_y = -F_2 \sin 45^\circ \cdot a = -24\kappa N$$

$$M_z = F_1 \cdot a + F_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot a = 10 \cdot 2 + 24 = 44\kappa N$$

Kuchlarni barchasining ta'sir chiziqlari O nuqtada kesishadi. Kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momentini aniqlaymiz.

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{24^2 + (-24)^2 + 44^2} = 55,5\kappa N$$

yo'naltiruvchi kosinuslari esa

$$\cos(x, \wedge \bar{M}_0) = \frac{M_x}{M_0} = \frac{24}{55,5} = 0,43;$$

$$\cos(y, \wedge \bar{M}_0) = \frac{M_y}{M_0} = \frac{-24}{55,5} = -0,43;$$

$$\cos(z, \wedge \bar{M}_0) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{44}{55,5} = 0,79;$$

Demak,

$$(x, \wedge \bar{M}_0) = 63^\circ, (y, \wedge \bar{M}_0) = 115^\circ, (z, \wedge \bar{M}_0) = 38^\circ$$

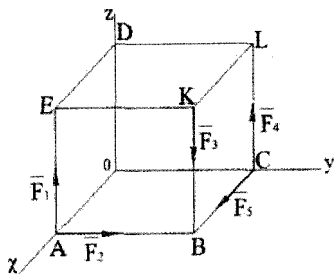
burchak ostida yo'nalgan.

3-masala. To'g'ri burchakli OABCDEKL parallelepipedning A, K va C uchlariga qo'yilgan $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ va F_5 kuchlar sistemasini sodda holga keltiring (5.15-rasm).

$$F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F,$$

$$F_2 = 2F, \quad OC = a, \quad OA = \frac{a}{2}.$$

Yechilishi: Keltirish markazi qilib koordinata boshi O nuqtani olamiz. Kuchlar sistemasining bosh vektori R ni aniqlaymiz. Buni uchun kuchlar sistemasini x, y, z o'qlarga nisbatan bosh



5.15-rasm

vektorining R_x , R_y , R_z , proyeksiyalarini aniqlab olamiz.

$$R_x = \sum F_{kx} = F_5; \quad R_y = \sum F_{ky} = F_2;$$

$$R_z = \sum F_{kz} = F_1 - F_3 + F_4 = F$$

Qiymatlarini o'rniga qo'yamiz:

$$R_x = F, \quad R_y = 2F, \quad R_z = F$$

Kuchlar sistemasi bosh vektorning modulini aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{F^2 + 4F^2 + F^2} = F\sqrt{6}$$

Kuchlar sistemasining x, y va z o'qlarga nisbatan bosh momentlarini aniqlaymiz.

$$M_x = \sum m_x(\bar{F}_K) = -F_3 \cdot a + F_4 \cdot a,$$

$$M_y = \sum m_y(\bar{F}_K) = F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_3 \cdot \frac{a}{2},$$

$$M_z = \sum m_z(\bar{F}_K) = F_2 \cdot \frac{a}{2} - F_5 \cdot a$$

Hisoblaymiz:

$$M_x = -F \cdot a + F \cdot a = 0; \quad M_y = -F \cdot \frac{a}{2} + F \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad M_z = 2F \cdot \frac{a}{2} - Fa = 0$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Demak kuchlar sistemasining O markazga nisbatan bosh momenti $\bar{M}_0 = 0$ ekan. Kuchlar sistemasining bosh momenti nolga teng bo'lsa, kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.

$$\bar{R} = F\sqrt{6}$$

Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i

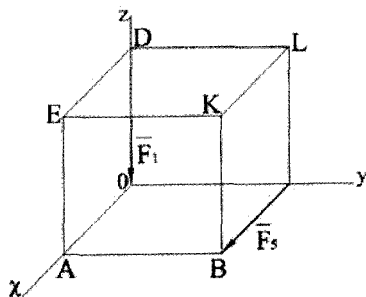
$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z} \quad \text{dan aniqlanadi, ya'ni}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

4-masala. 5.16-rasmda tasvirlangan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlardan iborat sistemani sodda holga keltiring.

$$F_1 = F_2 = F, \quad OA = \frac{a}{2}$$

Yechilishi: Keltirish markazi qilib O nuqtani olamiz. x, y, z , koordinata o'qlarini kub qirralari bo'ylab yo'naltiramiz. Kuchlar sistemasi bosh vektori \vec{R} ning x, y, z , koordinata o'qlaridagi R_x, R_y , va R_z proyeksiyalarini aniqlaymiz:



5.16-rasm

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx} = F_2 \\ R_y &= \sum F_{ky} = 0 \\ R_z &= \sum F_{kz} = -F_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Hisoblashni bajaramiz.

$$R_x = F, \quad R_y = 0, \quad R_z = -F \quad (2)$$

Shunday qilib bosh vektor

$$\vec{R} = F\vec{i} - F\vec{k} \quad (3)$$

Uning moduli.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{F^2 + 0 + (-F)^2} = F\sqrt{2}; \quad (4)$$

Kuchlar sistemasining x, y, z o'qlarga nisbatan bosh momentlarini aniqlaymiz.

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_K) = 0, \quad M_y = \sum m_y(\vec{F}_K) = 0, \quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_K) = -F_2 \cdot a \quad (5)$$

shartga ko'ra $|\vec{F}_2| = F$ bo'lgani uchun

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = -F \cdot a \quad (6)$$

Shunday qilib bosh moment

$$\vec{M}_0 = -F \cdot a \cdot \vec{k} \quad (7)$$

Uning moduli

$$M_0 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{0 + 0 + (-Fa)^2} = Fa; \quad (8)$$

\vec{F}_1, \vec{F}_2 kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisi $\vec{R} = F\vec{i} - F\vec{k}$ ga va momenti O markazga nisbatan bosh momentga, ya'ni $\vec{M}_0 = -Fak\vec{k}$ teng juftga keltirilgan ekan. Bundan ko'rinadiki, \vec{R} va \vec{M}_0 vektorlar o'zaro perpendikulyar emas. Demak, ular dinamik vintga keladi.

Endi markaziy o'q tenglamasini chiqaramiz.

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z}$$

O'rniga qo'yib hisoblaymiz.

$$\frac{0 - y(-F) + zF}{F} = \frac{0 - z \cdot F + x(-F)}{0} = \frac{-F \cdot a - x \cdot 0 + y \cdot F}{-F}$$

$$\frac{y \cdot F + z \cdot F}{F} = \frac{-zF - xF}{0} = \frac{F \cdot \frac{a}{2} - y \cdot F}{F} = \frac{y+z}{1} = \frac{-z-x}{0} = \frac{\frac{a}{2} - y}{1}$$

$$y = \frac{a}{2}; \quad z = x$$

5.13 Mustaqil yechish uchun masalalar

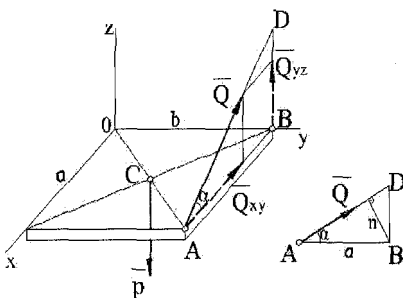
1-masala. Rasmda tasvirlangan gorizontal plitaga ta'sir etayotgan \vec{P} va \vec{Q} kuchlarning x, y va z o'qlarga nisbatan momentlari aniqlansin.

(Javob:

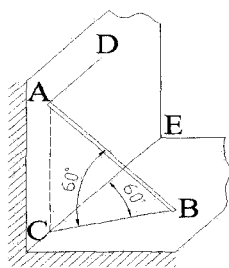
$$m_x(\vec{Q}) = bQ \sin \alpha,$$

$$m_y(\vec{Q}) = -Qh = -Q a \sin \alpha,$$

$$m_z(\vec{Q}) = bQ \cos \alpha)$$



2-masala. AB sterjenni ikkita gorizontal AD va BC arqonlar qiya holda ushlab turadi. Bunda sterjen A nuqtaga vertikal devorga, B nuqtaga esa gorizontal polda tiralgan. D nuqta ham vertikal devorda yotadi. A va C nuqtalar bir vertikal chiziqda yotadi. Sterjenning og'irligi $8N$. A va B nuqtalardagi ishqalanishni hisobga olmaymiz. Sterjenning muvozanat holatda qolish mumkinligi tekshirilsin va arqonlarning T_A va T_B tortilish kuchlari hamda tayanch tekisliklarning reaksiyalari aniqlansin: $\angle ABC = \angle BCE = 60^\circ$.



(Javob: $R_B = P = 8H$, $R_A = \frac{1}{4}(2R_B - P) = 2H$, $T_A = \frac{1}{4\sqrt{3}}(R_B - P) = 1,15N$, $T_B = 2T_A = 2,3N$)

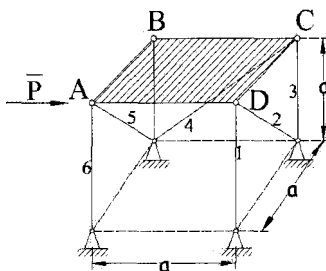
3-masala. Og'irligi $200N$ bo'lgan bir jinsli to'g'ri burchakli rom A sharli sharnir va B xalqa yordami bilan devorga birlashtirilgan bo'lib, uni CE arqon gorizontal holda ushlab turadi, arqon devorning A bilan bir vertikalidagi E nuqtatasiga qoqilgan mixga va romning C nuqtasiga bog'langan; $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$. Arqondagi tortilish kuchi va tayanchlardagi reaksiyalar aniqlansin.

(Javob: $x_B = 0$, $T = P = 200N$, $z_B = \frac{1}{2}(P - T) = 0$,

$$z_A = P - z_B - \frac{1}{2}T = 100N, \quad y_A = \frac{3}{4}T = 150N,$$

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{4}T - x_B = 86,6N.)$$

4-masala. ABCD kvadrat plitaning BD tomoni bo'ylab gorizontal P kuch ta'sir qilsa, uni ushlab turadigan oltita tayanch sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin. O'lchamlar shaklda ko'rsatilgan.

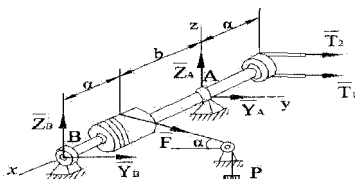


(Javob:

$$S_2 = -\sqrt{2}P, \quad S_1 = P - \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 = 2P, \quad S_4 = -\sqrt{2}P,$$

$$S_5 = \sqrt{2}P, \quad S_6 = -2P, \quad S_3 = -P.)$$

5-masala. A va B podshipniklarga o'rnatilgan gorizontal valning o'qiga perpendikulyar holda radiusi $r_1=20$ sm -li shkiv va radiusi $r_2=15$ sm li baraban o'rnatilgan. Val shkivga o'ralgan

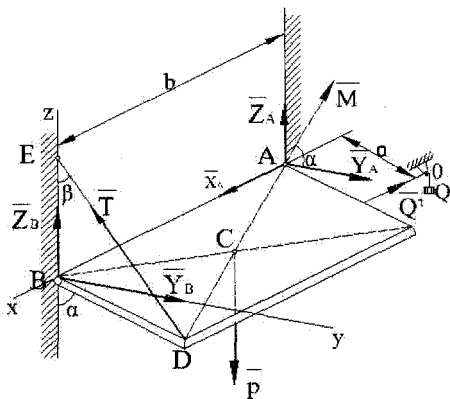


tasma orqali aylanma harakatga keltiriladi. Barabanga o'ralgan arqon orqali o'zgarmas tezlik bilan $R=540$ N og'irlikdagi yuk yuqoriga ko'tarilmoqda. Valning, barabanning va shkivning xususiy og'irligini e'tiborga olmagan holda, A va B podshipniklarning reaksiya kuchlarini, hamda yetaklovchi tasmaning tortilish kuchini aniqlang. Yetaklovchi tasmaning yetaklovchi tortilish kuchi T_1 , yetaklanuvchi tortilish kuchi T_2 - dan ikki marta katta deb hisoblansin. Bu yerda $a=40$ sm, $b=60$ sm va $\alpha=30^\circ$.

(Javob: $T_1=810$ N, $Y_A=-1890$ N, $Z_A=108$ N, $Y_B=205$ N, $Z_B=162$ N.)

6-masala. Og'irligi $R=120\text{N}$

bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli plita, vertikal bilan $\alpha=60^\circ$ burchak tashkil qilgan holda gorizontaldagi AB o'qqa mahkamlangan. A nuqtada tovonsimon podshipnikka, B nuqtada esa silindrik podshipnikka mahkamlangan. Qopqoq DE arqon bilan devorga tortib qo'yilgan va O blokning



ustidan oshirib tashlangan ip orqali og'irligi $Q=200\text{N}$ yuk bilan tortib qo'yilgan. (KO chiziq AB ga parallel). $BD=BE$, $AK=a=0,4\text{m}$ $AB=b=1\text{m}$. A va B podshipniklarning reaksiya kuchlari va DE arqonning tortilish kuchi aniqlansin.

(Javob: $T \approx 104\text{ N}$, $X_A=200\text{ N}$, $Y_A \approx 69\text{ N}$, $Z_A=20\text{ N}$, $Y_B=-17\text{ N}$, $Z_B=10\text{ N}$)

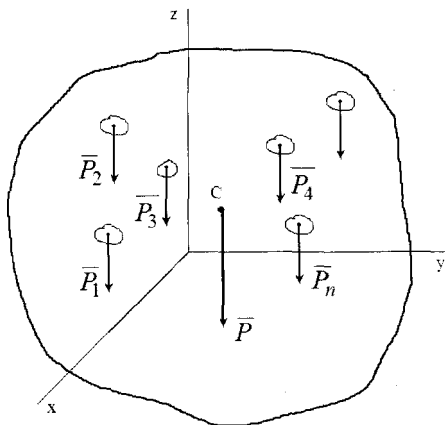
7-masala. Yuqoridagi 82-masalada qopqoqqa qo'shimcha ravishda momenti $M=120\text{N}\cdot\text{m}$ bo'lgan va qopqoqning tekisligida ta'sir etuvchi juft kuch qo'yilgan bo'lsin; juftning yo'nalishi (qopqoqning ustidan qaralganda) soat strelkasiga teskari yo'nalishda bo'lgan holda, masala yechilsin.

(Javob : $T \approx 104\text{ N}$, $X_A=200\text{ N}$, $Y_A \approx 173\text{ N}$, $Z_A=-40\text{ N}$, $Y_B=-121\text{ N}$, $Z_B=70\text{N}$.)

VI BOB. QATTIQ JISMNING OG'IRLIK MARKAZI

6.1 Parallel kuchlar markazi

Har qanday qattiq jismni juda kichik bo'lakchalar to'plamidan iborat deb qarash mumkin (6.1-rasm). Yer sirtiga yaqin bo'lgan bo'lakchalarni Yer o'ziga tortishi tufayli, har bir bo'lakchaga vertikal pastga yo'nalgan kuchlar ta'sir etadi. Bu kuchlarga og'irlik kuchlari deyiladi. Jismning o'lchami Yerning o'lchamidan juda kichik bo'lgani uchun bo'lakchalarning og'irlik kuchlarini parallel kuchlardan iborat deb qarash mumkin.



6.1-rasm

Bo'lakchalarning og'irlik kuchlarini tegishlicha $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_n$ desak, ularning teng ta'sir etuvchisining moduli quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$P = \sum P_k, \quad (6.1)$$

Qattiq jismni istalgan burchakka burganda bo'lakchalarga ta'sir etuvchi kuchlarning faqatgina yo'nalishi o'zgaradi, qo'yilish nuqtasi esa o'zgarmaydi. Bo'lakchalar og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi \overline{P}

kuchning qo'yilish nuqtasi C qattiq jismning og'irlik markazi, \bar{P} kuchga esa og'irlik kuchi deyiladi.

Jismlarning og'irliklari markazlari holatini aniqlashda parallel kuchlar markazi haqidagi tushunchadan foydalaniladi. Avvalo, tekislikdagi ikkita parallel kuchlar markazini aniqlaymiz. Qattiq jismning A_1 va A_2 nuqtalariga o'zaro parallel \bar{F}_1 , \bar{F}_2 kuchlar qo'yilgan bo'lsin (6.2-rasm). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ga teng va qo'shiluvchi kuchlarga parallel, ta'sir chizig'i esa A_1 , A_2 kesmada yotuvchi C nuqtadan o'tadi (6.2-rasm, a).

C nuqtaning o'rini Varin'on teoremasidan foydalanib aniqlaymiz:

$$m_C(\bar{R}) = m_C(\bar{F}_1) + m_C(\bar{F}_2), \quad (6.2)$$

$$m_C(\bar{R}) = 0, \quad m_C(\bar{F}_1) = F_1 h_1, \quad m_C(\bar{F}_2) = F_2 h_2, \quad (6.3)$$

(6.3) da aniqlangan ifodalarni (6.2)ga olib borib qo'yamiz:

$$0 = F_1 h_1 - F_2 h_2, \quad (6.4)$$

$$0 = F_1 A_1 C \cos \alpha - F_2 A_2 C \cos \alpha, \quad (6.5)$$

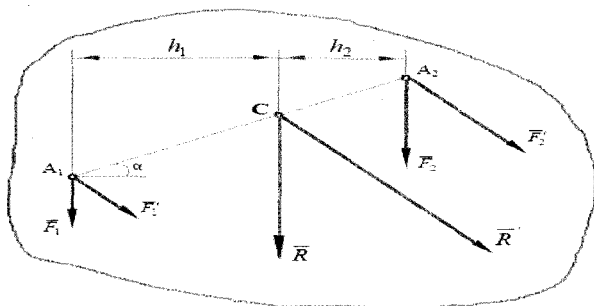
bundan

$$F_1 \cdot A_1 C = F_2 \cdot A_2 C, \quad (6.6)$$

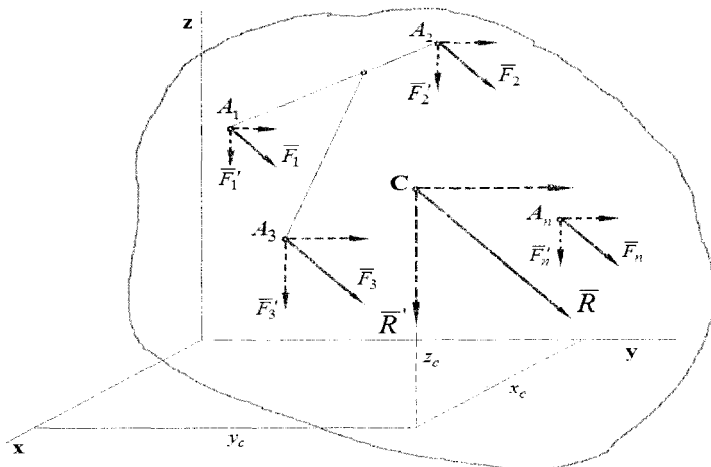
(6.6) ifodadan quyidagi nisbat kelib chiqadi:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_2 C}{A_1 C}, \quad (6.7)$$

a)



b)



6.2-rasm

Agar bizga \bar{F}_1 va \bar{F}_2 kuchlarning modullari ma'lum bo'lsa, (6.7) nisbatdan foydalanib \bar{R} kuchning haqiqiy o'rnini aniqlaymiz. Aniqlangan C nuqtaning jismga ta'sir etuvchi istalgan parallel kuchlar sistemasi uchun ham o'zgartmasligini isbotlaymiz.

Buning uchun \bar{F}_1 va \bar{F}_2 kuchlarni A_1 va A_2 nuqtalar atrofida biror α burchakka bursak, \bar{F}'_1 va \bar{F}'_2 parallel kuchlarga ega bo'lamiz (6.2-rasm, a). Bu kuchlar ham A_1 va A_2 nuqtalarga qo'yilgan bo'lib, momentlari \bar{F}_1 va \bar{F}_2 kuchlar momentlariga teng bo'ladi. \bar{F}'_1 va \bar{F}'_2 kuchlar uchun ham (6.7) tenglik o'rinli, ularning teng ta'sir etuvchisi \bar{R}' ning ta'sir chizig'i ham C nuqtadan o'tadi. Bu C nuqtaga \bar{F}'_1 va \bar{F}'_2 parallel kuchlar markazi deyiladi.

Endi qattiq jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan bir tomonga yo'nalgan o'zaro parallel $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ kuchlar sistemasini ko'rib chiqamiz. Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \bar{R} bo'lib, uning moduli quyidagi formula yordamida topiladi:

$$R = \sum F_K, \quad (6.8)$$

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ kuchlarning modullaridan foydalanib (6.7) nisbatdan yuqoridagi ketma-ketlikda \bar{R} kuchning qo'yilish o'rnini aniqlaymiz.

Agar kuchlar sistemasining har birini qo'yilish nuqtasi atrofida bir tomonga va bir xil burchakka bursak, qattiq jismga ta'sir etuvchi boshqa bir parallel kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (6.2-rasm, b).

Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisining moduli avvalgi kuchlar sistemasining moduliga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan barcha kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining ta'sir chizig'i faqat C nuqtadan o'tishini ko'rsatamiz. Avval \bar{F}_1 va \bar{F}_2 kuchlarni o'zaro (6.8) formula yordamida qo'shamiz. Ularning teng ta'sir etuvchisi \bar{R}_1 ning ta'sir chizig'i C_1 nuqtadan o'tishini hamda (6.7) tenglikni qanoatlanirishini aniqlaymiz. Endi \bar{R}_1 va \bar{F}_3 kuchlarni qo'shamiz: $\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ga teng edi. Demak, \bar{F}_1, \bar{F}_2 va \bar{F}_3 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\bar{R}_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$ ning ta'sir chizig'i C_1A_3 kesmada yotuvchi C_2 nuqtadan o'tishini aniqlaymiz. Shu usulda qolgan kuchlarni ham qo'shamiz va ta'sir chizig'i doimo C nuqtadan o'tuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \bar{R} ga ega bo'lamiz. C nuqtaga parallel kuchlar markazi deyiladi.

Endi parallel kuchlar markazi C nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Qattiq jism orqali Oxyz koordinatalar sistemasini o'tkazamiz. U holda kuchlar qo'yilgan nuqtalarning koordinatalarini $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ ko'rinishda yozamiz. Kuchlar sistemasini qo'yilish nuqtalari atrofida z o'qiga parallel joylashadigan qilib burib $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n$ kuchlar sistemasini hosil qilamiz. Bunda $\bar{F}_1 = \bar{F}'_1, \bar{F}_2 = \bar{F}'_2, \bar{F}_3 = \bar{F}'_3, \dots, \bar{F}_n = \bar{F}'_n$ shart bajariladi. Varin'on teoremasini qo'llab kuchlar sistemasini y o'qiga nisbatan momentlarini aniqlaymiz:

$$m_y(\bar{R}') = \sum m_y(\bar{F}'_k), \quad (6.9)$$

6.2-rasmdan $m_y(\bar{R}') = R \cdot x_c$ ekanligini topamiz, bunda $\bar{R}' = \bar{R}$ yoki $m_y(\bar{F}_1') = F_1' \cdot x_1$, $m_y(\bar{F}_2') = F_2' \cdot x_2$ va hakozi. Bularni (6.9) tenglikka keltirib qo'ysak

$$R \cdot x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum F_k \cdot x_k, \quad (6.10)$$

$$x_c = \frac{\sum F_k \cdot x_k}{R}, \quad (6.11)$$

Shu usulda y_c va z_c larni aniqlab olamiz. Buning uchun kuchlar sistemasining Ox o'qiga nisbatan momentlarini olamiz. z_c ni aniqlash uchun barcha kuchlarni Oy o'qiga parallel yo'naladigan qilib Ox o'qiga nisbatan momentlarini topamiz:

$$-Rz_c = -F_1 z_1 + (-F_2 z_2) + \dots + (-F_n z_n), \quad (6.12)$$

(6.12) tenglikdan z_c ni aniqlaymiz.

Natijada quyidagicha parallel kuchlar markazi koordinatalari uchun formulalarni hosil qilamiz:

$$x_c = \frac{1}{R} \sum F_k \cdot x_k, \quad y_c = \frac{1}{R} \sum F_k \cdot y_k, \quad z_c = \frac{1}{R} \sum F_k z_k, \quad (6.13)$$

Qattiq jismning istalgan holatida uni tashkil etuvchi bo'lakchalarning og'irlik kuchlari teng ta'sir etuvchisining ta'sir chizig'i o'tadigan nuqta **qattiq jismning og'irlik markazi** deyiladi.

Qattiq jism og'irlik markazi koordinatalari (6.13) ifodaga uni tashkil etuvchi bo'lakchalarning og'irlik kuchlarini olib kelib qo'yish orqali aniqlanadi, ya'ni:

$$x_c = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot x_k, \quad y_c = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot y_k, \quad z_c = \frac{1}{P} \sum P_k \cdot z_k, \quad (6.14)$$

bu yerda: x_k, y_k, z_k – qattiq jism bo'lakchasi og'irlik kuchi qo'yilish nuqtasining koordinatalari.

6.2 Bir jinsli jismlar uchun og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash

Bir xil moddadan tashkil topgan jismlarga bir jinsli jismlar deyiladi. Bizga og'irligi P ga, hajmi V ga teng bo'lgan jism berilgan bo'lsin. Agar birlik hajmga to'g'ri kelgan solishtirma og'irlikni γ bilan belgilasak, u holda bir jinsli jismning istalgan V_k hajmdagi bo'lakchasining og'irligi P_k shu bo'lakchalarning hajmi V_k ga proporsional, ya'ni $P_k = \gamma V_k$,

U holda V hajmga ega bo'lgan jismning og'irligi P ni jism hajmi V ga proporsional, ya'ni $P = \gamma V$ deb qabul qilish mumkin. P va P_k larning qiymatlarini (14) ifodaga qo'yib V hajmga ega bo'lgan qattiq jism og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash formulalarini hosil qilamiz:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum v_k \cdot x_k, \quad y_c = \frac{1}{V} \sum v_k \cdot y_k, \quad z_c = \frac{1}{V} \sum v_k \cdot z_k, \quad (6.15)$$

Agar jism bir jinsli yupqa, yassi plastinkadan iborat bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$x_c = \frac{1}{S} \sum s_k \cdot x_k, \quad y_c = \frac{1}{S} \sum s_k \cdot y_k, \quad (6.16)$$

bu yerda S – plastinka yuzasi; s_k – bitta bo'lakchanning yuzasi.

Xuddi shu usul yordamida chiziq (ip, arqon, tros)ning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum l_k \cdot x_k, \quad (6.17)$$

bu yerda: L – chiziqning uzunligi, l_k – bo'lakchanning uzunligi.

Endi biz bir jinsli jism og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash usullarini ko'rib chiqamiz.

1. Simmetriya usuli.

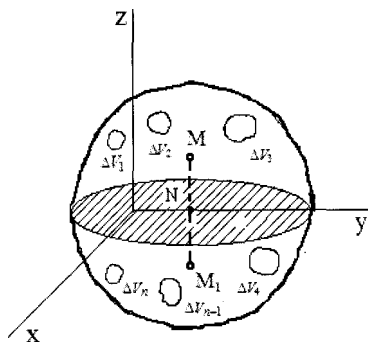
Agar bir jinsli jism simmetriya o'qi yoki simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, uning og'irlik markazi simmetriya o'qida yoki simmetriya tekisligida yotadi.

6.3-rasmda simmetriya tekisligiga ega bo'lgan jism tasvirlangan. x va y o'qlarini simmetriya tekislikligida joylashtiramiz, z o'qni esa tekislikka perpendikulyar qilib yo'naltiramiz. Jismdan xOy tekisligiga simmetrik

joylashgan ikkita M, M_1 nuqtalarini olamiz. Nuqtalar yonida hajmi ΔV_k hajmchalarni ajratamiz.

M, M_1 nuqtalar xOy tekisligiga o'tkazilgan perpendikulyarlardan va bu tekislikdan bir xil masofa uzoqlikda yotadi, ya'ni $MN = M_1N$ (6.3-rasm). Demak, bu nuqtalarning z va z_1 koordinatalari o'zaro teng va teskari ishoraga ega:

$$M(x; y; z), M_1(x_1; y_1; -z)$$

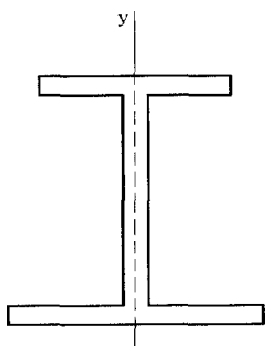


6.3-rasm

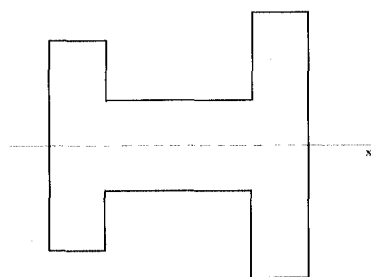
Yuqoridagilarga ko'ra $z_k \Delta V_k$ ko'paytmalarni qo'shib chiqsak $\sum z_k \Delta V_k = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Jism og'irlik markazi z_c (13) ga ko'ra aniqlanadi:

$$z_c = \frac{\sum z_k \cdot \Delta V_k}{V} = 0, \quad (6.18)$$

a)



b)



6.4-rasm

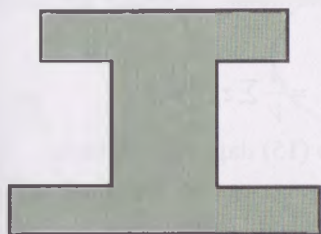
6.4-a) rasmda keltirilgan shaklning og'irlik markazi y o'qining, 6.4-b) rasmda keltirilgan shaklning og'irlik markazi esa x o'qining ustida yotadi. Simmetriya o'qiga ega bo'lgan istalgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida yotadi.

Shunday qilib, simmetriya tekisligiga yoki o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari simmetriya tekisligida yoki o'qida yotadi.

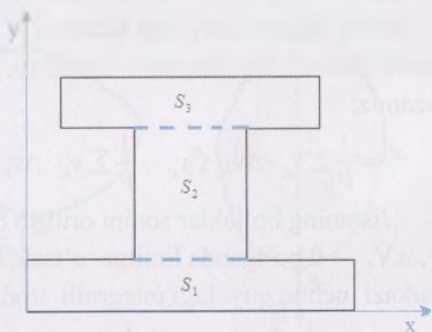
2. Bo'laklarga ajratish usuli.

Ba'zida murakkab jismni shunday oddiy bo'laklarga bo'lish mumkinki, bu bo'laklarning og'irlik markazlari oldindan ma'lum bo'ladi. Bunday jismlarning og'irlik markazi bo'laklarga ajratish usuli bilan (16) formulalar yordamida aniqlanadi.

a)



b)



6.5-rasm

Ushbu usul yordamida 6.5-rasmda keltirilgan bir jinsli plastinkaning og'irlik markazini aniqlash quyidagi tartibda olib boriladi:

1. Berilgan o'lchamlar asosida plastinka ma'lum masshtabda chizib olinadi.
2. Murakkab shakldagi plastinka standart yuzalarga ajratib olinadi. Standart yuzalar deganda to'g'ri burchakli uchburchak, to'g'ri to'rtburchak, doira kabi aniq hisoblash formulasiga ega bo'lgan

yuzalarni tushunamiz. Ushbu holatda murakkab shakl uchta to'g'ri to'rtburchakka bo'linadi (6.5-rasm, b).

3. Ajratib olingan har bir to'g'ri to'rtburchaklarning alohida yuzalari va umumiy plastinkaning yuzasi aniqlab olinadi.
4. Chizmadan xOy koordinatalar sistemasini o'tkazamiz.
5. xOy koordinatalar sistemasiga nisbatan ajratib olingan har bir to'g'ri to'rtburchakning og'irlik markazlari koordinatalarini aniqlaymiz.
6. Plastinkaning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlaymiz.
7. Chizmada plastinkaning og'irlik markazini ko'rsatamiz.

3. Manfiy yuza usuli.

Bu usul bo'laklarga ajratish usulining xususiy holidir. Bu usul bir qismi qirqib olib tashlangan jismlarga nisbatan qo'llaniladi. Bunday jismlarning og'irlik markazini aniqlash yuqoridagi (1-7) tartibda olib boriladi.

4. Integrallash usuli.

Agar jismni og'irlik markazining holati aniq bo'lgan bo'lakchalarga ajratish mumkin bo'lmasa, integrallash usulidan foydalaniladi.

Ushbu holatda jism juda kichik ΔV hajmga ega bo'lgan bo'lakchalarga ajratib olinadi. Bo'lakchalar uchun (6.15) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum x_k \cdot \Delta v_k; y_c = \frac{1}{V} \sum y_k \cdot \Delta v_k; z_c = \frac{1}{V} \sum z_k \cdot \Delta v_k, \quad (6.19)$$

Jismning bo'laklar sonini orttirib borib (15) dagi yig'indilarda $n \rightarrow \infty$, $\Delta V_k \rightarrow 0$ bo'lganda limitga o'tsak, V hajmga ega bo'lgan jism og'irlik markazi uchun quyidagi integralli ifodalarni hosil qilamiz:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dv, \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dv, \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dv, \quad (6.20)$$

Xuddi shuningdek, integrallash usulidan foydalanib S yuzaga ega bo'lgan plastinkani va L uzunlikdagi chiziqning og'irlik markazlari quyidagicha aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{s} \int_{(s)} x ds, \quad y_c = \frac{1}{s} \int_{(s)} y ds, \quad (6.21)$$

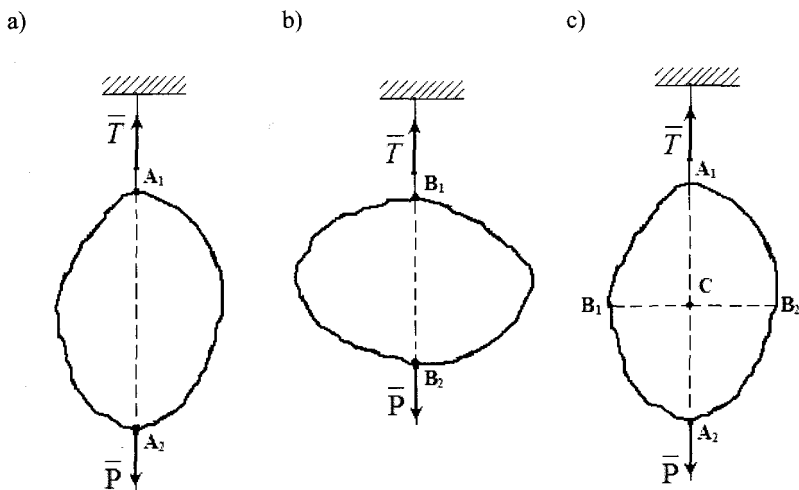
$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad (6.22)$$

5. Tajriba usuli. Bir jinsli bo'lmagan murakkab shaklli jismlarning og'irlik markazini aniqlashda **ipga osish** va **tarozi**da **tortish** tajriba usullaridan foydalaniladi.

5.1. Ipga osish usuli.

Tajriba usullaridan biri bo'lgan ipga osish usuli quyidagi tartibda bajariladi:

1. Berilgan jismdan ixtiyoriy to'rtta A, B, C, D nuqtalarni tanlab olamiz.
2. Jismni birinchi holatda A nuqtasidan ipga osamiz (6.6-rasm, a). Jism ipning taranglik va og'irlik kuchlari ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Ipning yo'nalishini davom ettirib jismda og'irlik kuchining ta'sir chizig'ini A_1A_2 bilan belgilaymiz.



6.6-rasm

3. Endi jismni ikkinchi B nuqtadan ipga osamiz. Yana jism ipning taranglik va og'irlik kuchlari ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Ushbu holat uchun ham ipning yo'nalishini davom ettirib jismda og'irlik kuchining ta'sir chizig'ini B_1B_2 bilan belgilaymiz (6.6-rasm, b).

4. Xuddi shu tarzda jismning qolgan nuqtalaridan osib og'irlik kuchining ta'sir chiziqlari chizib olinadi (6.6-rasmda faqat ikkita nuqta uchun ko'rsatilgan).

5. Ta'sir chiziqlarning kesishgan nuqtasi C berilgan jismning og'irlik markazi bo'lib hisoblanadi (6.6-rasm, c).

Ushbu usulda jismning osilish nuqtalari sonini kamida 4 ta olish va ta'sir chiziqlarining aniq o'tkazilishiga erishish natijaning yanada aniq bo'lishiga zamin yaratadi.

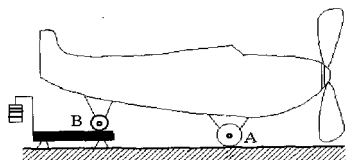
5.2. Tarozida tortish usuli.

Bir jinsli bo'lmagan murakkab shaklli jismlarning og'irlik markazlari tarozida tortish usuli bilan aniqlanadi. Ushbu usuldan mashinasozlik san'atida har xil mashina-mexanizmlarning og'irlik markazlarini aniqlashda keng foydalaniladi.

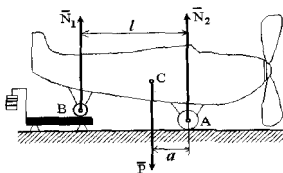
Ushbu usul yordamida 6.7-rasmda keltirilgan bir jinsli bo'lmagan murakkab shaklli samolyotning og'irlik markazini aniqlashni ko'rib chiqamiz. U quyidagi tartibda olib boriladi:

1. Samolyotning aniq o'lehamlari asosida hisobiy sxemasi chizib olinadi;
2. Agar $AB=l$ ga teng bo'lsa (6.7-rasm, a), samolyotning og'irlik markazi uning ko'ndalang kesim yuzasining simmetriya o'qida yotadi.
3. Samolyotning A g'ildirigidan a masofada joylashgan C nuqta samolyotning og'irlik markazi bo'ladi (6.7-rasm, b).
4. Samolyotning B g'ildiragini taroziga qo'yib, g'ildirakning taroziga beradigan bosim kuchni aniqlaymiz. Bu bosim kuchi tarozi tomonidan samolyotga beradigan \bar{N}_1 reaksiya kuchiga teng (6.7-rasm, b).

a)



b)



6.7- rasm

5. Xuddi shu usulda \bar{N}_2 reaksiya kuchini ham aniqlaymiz.

6. C nuqtani moment markazi deb qabul qilib, Varin'on teoremasiga ko'ra kuchlarning shu nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlab nolga tenglashtiramiz, ya'ni

$$-N_1(l-a) + N_2a = 0, \quad (6.23)$$

$$a = \frac{lN_1}{N_1 + N_2}, \quad (6.24)$$

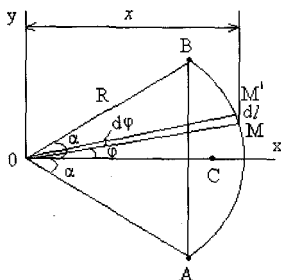
bu yerda: $N_1 + N_2 = P$ - samolyotning umumiy og'irligi.

7. a masofadan foydalanib samolyotning og'irlik markazi C nuqta aniqlanadi.

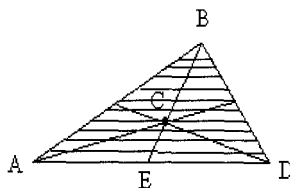
6.3. *Ayrim bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari*

Statika masalalarni echishda bizga geometriya kursidan ma'lum bo'lgan tekis shakllar va jismlarning og'irlik markazlarini bilish kerak bo'ladi.

1. *Aylana yoyining og'irlik markazi.* Markaziy burchagi $AOB=2\alpha$, radiusi R bo'lgan AB yoyning og'irlik markazini aniqlaymiz.



6.8-rasm



6.9-rasm

Koordinata boshi qilib O nuqtani olib x va y o'qlarini o'tkazamiz (6.8-rasm). Aylana yoyi x o'qiga simmetrik bo'lgani uchun uning og'irlik

markazi x o'qi ustida yotadi ($y_c=0$). Og'irlik markazining x_c koordinatasini (22) formuladan foydalanib aniqlaymiz.

Buning uchun AB yoydan uzunligi $dl=Rd\varphi$ bo'lgan MM' bo'lagini olamiz. MM' bo'lakchanning x koordinatasi $x=R\cos\varphi$ ekanligini inobatga olib x va dl ning qiymatini (22) ga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{L} \int_{\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin\alpha, \quad (6.25)$$

bu yerda: L – uzunligi $R \cdot 2\alpha$ ga teng bo'lgan AB yoyning uzunligi.

Yuqoridagilarga ko'ra

$$x_c = \frac{R \sin\alpha}{\alpha}, \quad (6.26)$$

Shunday qilib, aylana yoyining og'irlik markazi O nuqtadan x_c masofada simmetriya o'qidagi C nuqtada yotar ekan.

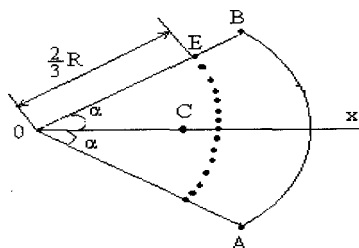
2. Uchburchak yuzasining og'irlik markazi. ABD uchburchakni AD tomonga parallel bo'lgan kichik bo'laklarga ajratamiz (5.9-rasm). Bu bo'laklarning og'irlik markazi BE medianada yotadi. Qolgan ikkita mediana uchun ham olingan natija xuddi shunday bo'ladi. Demak, uchburchak yuzasining og'irlik markazi uning medianalari kesishgan nuqtada yotadi, ya'ni

$$CE = \frac{1}{3} BE \quad (6.27)$$

2. Doira sektori yuzasi og'irlik markazi.

Radiusi R markaziy burchagi 2α ga teng doira sektori yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun x o'qini sektor yuzining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz (6.10-rasm).

OAB sektor yuzasini fikran bir qancha elementar sektorlarga bo'lib chiqamiz. Har bir elementar sektorning balandligi R ga teng uchburchak deb qarasaq, uning og'irlik markazi $\frac{2}{3}R$ masofada yotadi. 6.10-rasm



Demak, doira sektorining og'irlik markazi O markazdan $\frac{2}{3}R$ ga teng aylana yoyining og'irlik markazi bilan ustma – ust tushadi. (22) ga asosan

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}, \quad (6.28)$$

Yarim doira uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ekanligini nazarda tutsak,

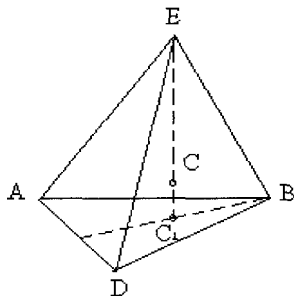
$$x_c = \frac{4}{3\pi} R = 0,424R, \quad (6.29)$$

4. Piramida hajmi (yoki konus)ning og'irlik markazi.

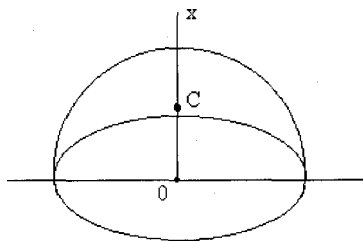
Piramidaning og'irlik markazi C_1E chiziq ustida yotadi (6.11-rasm). E – piramida uchi, C_1 -piramida asosining og'irlik markazi hisoblanadi:

$$CC_1 = \frac{1}{4} EC_1, \quad (6.30)$$

Bu formula barcha ko'pburchakli piramidalar va konus uchun o'rinni.



6.11-rasm



6.12-rasm

5. Yarim shar hajmining og'irlik markazi.

Yarim sharning og'irlik markazi C nuqta Ox (simmetriya o'qi) o'qi ustida yotadi (6.12-rasm):

$$x_c = OC = \frac{3}{8}R, \quad (6.31)$$

bu yerda: R – yarim sharning radiusi.

NAZORAT SAVOLLARI:

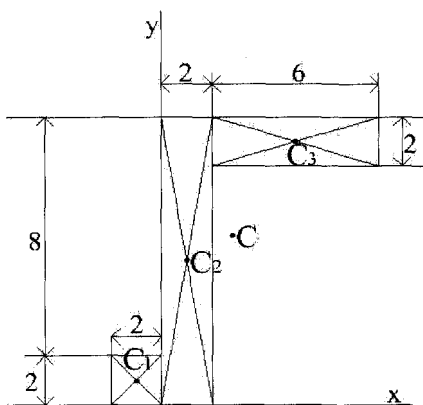
1. Ikkita parallel kuchning markazi qanday usulda topiladi?
2. Parallel kuchlar markazining koordinatalari qanday formulalarda ifodalanadi?
3. Qattiq jismning og'irlik markazi koordinatalari qanday ifodalanadi?
4. Bir jinsli jismlar (hajm, yuza, chiziq) larning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash formulalari qanday ifodalanadi?
5. Og'irlik markazini aniqlashning simmetriya usuli?
6. Og'irlik markazini aniqlashning bo'laklarga bo'lish usuli?
7. Og'irlik markazini aniqlashning manfiy yuza (hajm) usuli?
8. Og'irlik markazini aniqlashning tajriba usuli?
9. Og'irlik markazini aniqlashning integrallash usuli?
10. Aylana yoyining og'irlik markazi qanday topiladi?
11. Uchburchak yuzasi og'irlik markazi qanday topiladi?
12. Doiraviy sektor yuzasi og'irlik markazi qanday topiladi?
13. Yarim shar hajmining og'irlik markazi qanday topiladi?

6.4 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala. 6.13-rasmda tasvirlangan bir jinsli plastinkaning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlang. O'lchamlar santimetrlarda berilgan.

Yechilishi:

1. Berilgan plastinkani ma'lum masshtabda chizib olamiz.
2. Chizmaga x , y koordinata o'qlarini o'tkazamiz.
3. Plastinkani 3 ta to'g'ri to'rt burchakdan iborat yuzalarga ajratamiz.



6.13-rasm

4. Plastinkaning har bir bo'lakchalarning yuzalarini va uning to'liq yuzasini aniqlaymiz:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 20 + 12 = 36 \text{ sm}^2$$

5. Har bir bo'lakchanning koordinatalari va yuzasini aniqlaymiz.

№	1	2	3
x_k	-1	1	5
y_k	1	5	9
s_k	4	20	12

6. Plastinka og'irlik markazi koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{s} = \frac{(-1) \cdot 4 + 1 \cdot 20 + 5 \cdot 12}{36} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} \approx 2,1 \text{ sm}$$

$$y_c = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{s} = \frac{1 \cdot 4 + 5 \cdot 20 + 4 \cdot 12}{36} = \frac{4 + 100 + 108}{36} \approx 5,9 \text{ sm}$$

Plastinkaning og'irlik markazi rasmda ko'rsatilgan bo'lib, u plastinkadan tashqarida ekan.

2-masala. Radiusi $r_2 = \frac{r_1}{2}$ doiraviy kesimga ega bo'lgan bir jinsli radiusi

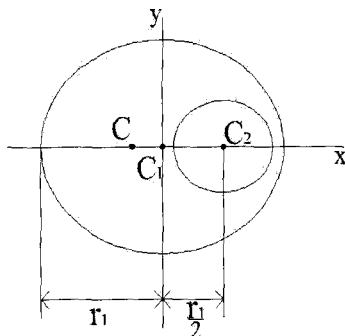
r_1 bo'lgan diskning og'irlik markazini aniqlang (6.14-rasm).

Yechilishi:

1. Masalani yechish uchun x , y koordinata o'qlarini o'tkazamiz.

2. Diskning og'irlik markazi C_1 C_2 chiziqda yotadi, chunki bu chiziq simmetriya o'qidir.

3. x_c koordinatani aniqlash uchun diskni to'ldiramiz.



6.14-rasm

4. To'liq disk yuzasidan qirqib tashlangan doira yuzasini ayirib tashlaymiz. Bunda qirqib tashlangan doira yuzasi manfiy ishorada olinadi:

$$s_1 = \Pi r_1^2; \quad s_2 = \Pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 = \frac{\Pi r_1^2}{4}$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{r_1}{2}; \quad y_c = 0$$

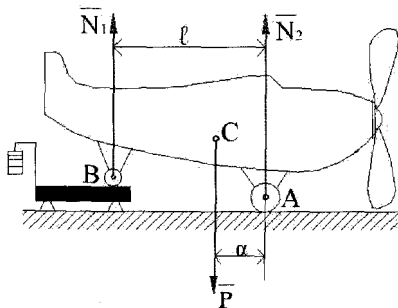
$$x_c = \frac{x_1 s_1 - x_2 s_2}{s_1 - s_2} = \frac{0 - \frac{r_1}{2} \cdot \frac{\Pi r_1^2}{4}}{\Pi r_1^2 - \frac{\Pi r_1^2}{4}} = -\frac{r_1}{6}$$

Aniqlangan C og'irlik markazi C_1 og'irlik markazidan chap tomonda yotadi.

3-masala. Agar $AB=l$ berilgan bo'lsa samolyot og'irlik markazining bitta koordinatasi a ni tortish usuli bilan aniqlashni ko'rsating (6.15-rasm).

Yechilishi:

1. Samolyotning B g'ildiragini taroziga qo'yib, g'ildirakning taroziga beradigan bosim kuchni aniqlaymiz. Bu bosim kuchi tarozi tomonidan samolyotga beradigan \bar{N}_1 reaksiya kuchiga teng.



6.15-rasm

2. Xuddi shu usulda \bar{N}_2 reaksiya kuchini ham aniqlaymiz.

3. C nuqtani moment markazi qilib Varin'on teoremasiga ko'ra kuchlar-ning shu nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlab nolga tenglashtiramiz, ya'ni

$$-N_1(l-a) + N_2a = 0$$

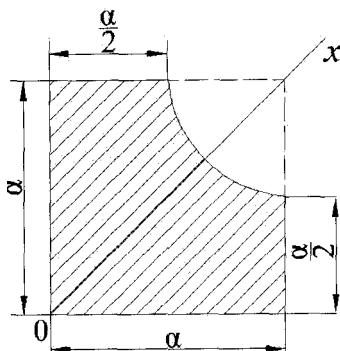
bundan

$$\alpha = \frac{lN_1}{N_1 + N_2}$$

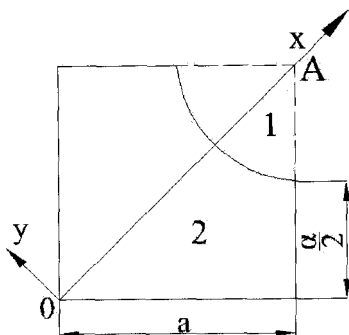
bu yerda $N_1 + N_2 = P$ – samolyotning og'irligi.

4-masala. Rasmda tasvirlangan figura og'irlik markazining koordinatalari topilsin (6.16a-rasm).

a)



b)



6.16-rasm

Yechilishi:

1. Agar kvadrat to'liq shaklda bo'lganda, uning og'irlik markazini osongina topish mumkin edi, lekin bu masalada kvadrat to'liq shaklda emas. Shuning uchun og'irlik markazini aniqlash uchun kvadratni to'liq shaklda deb tasavvur qilamiz.

2. Doiraviy sektor og'irlik markazi koordinatasi topamiz.

Bizga ma'lumki diagonal uzunligi $OA = a\sqrt{2}$ ga teng va doiraviy sektor uchun $x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} a$.

3. Aniqlangan doiraviy sektor og'irlik markazi koordinatasini kvadratning og'irlik markazi koordinatasidan ayirib hisoblaymiz (6.16b-rasm):

$$\text{Shunday ekan } x_1 = OA - x_0 = a\sqrt{2}\left(1 - \frac{2}{3\pi}\right),$$

$$x_2 = OA/2 = a\sqrt{2}/2,$$

Endi alohida yuzalarni aniqlashga o'tamiz.

$$S_1 = \pi a^2 / 16,$$

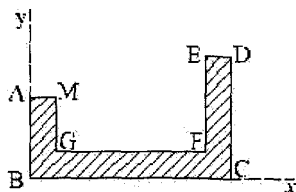
$$S_2 = a^2$$

Topilgan qiymatlarni inobatga olib, figuraning og'irlik markazi koordinatlarini aniqlaymiz

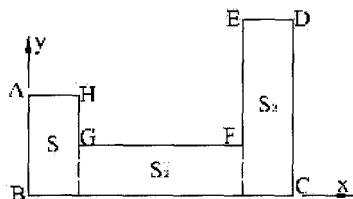
$$x_c = \frac{S_2 \cdot x_2 - S_1 \cdot x_1}{S_2 - S_1} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2} / 2 - \pi a^3 \sqrt{2} (1 - \frac{2}{3}) / 16}{-\pi a^2 / 16 + a^2} = 0,61a.$$

5-masala. Rasmda ko'rsatilgan bir jinsli plastinka og'irlik markazining koordinatalari topilsin. Quyidagilar berilgan: AH=2sm, HG=1,5sm, AB=3sm, BC=10sm, EF=4sm, ED=2sm (6.17-rasm).

a)



b)



6.17-rasm

Yechilishi:

1. Berilgan plastinkani ma'lum masshtabda chizib olamiz.
2. Chizmaga x, y koordinata o'qlarini o'tkazamiz.
3. Plastinkani 3 ta to'g'ri to'rt burchakdan iborat yuzalarga ajratamiz.
4. Plastinkaning har bir bo'lakchalarning yuzalarini va uning to'liq yuzasini aniqlaymiz:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 6 + 9 + 11 = 26 \text{ sm}^2$$

5. Har bir bo‘lakchanning koordinatalari va yuzasini aniqlaymiz:

№	1	2	3
x_k	1	5	9
y_k	1,5	0,75	2,75
S_k	6	9	11

6. Plastinka og‘irlik markazi koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{6 \cdot 1 + 9 \cdot 5 + 11 \cdot 9}{6 + 9 + 11} = \frac{75}{13} \text{ sm.}$$

$$y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{6 \cdot 1,5 + 9 \cdot 0,75 + 11 \cdot 2,75}{6 + 9 + 11} = \frac{23}{13} \text{ sm.}$$

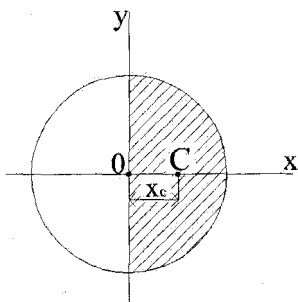
6-masala. Yarim doira va yarim aylana og‘irlik markazlarini aniqlang.

Yechilishi:

1. x o‘qini yarim doiraning simmetriya o‘qi bo‘ylab, y o‘qini esa diametri bo‘ylab yo‘naltiramiz (6.18-rasm).

2. Yarim doira y o‘qi atrofida aylantirilganda shar hosil bo‘ladi, uning hajmi:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$



6.18-rasm

3. Yarim doiraning yuzasi esa quyidagiga teng bo‘ladi:

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2$$

4. Yarim doiraning og'irlik markazi x_c x o'qi ustida yotadi

$$x_c = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,424R$$

5. Yarim aylananing og'irlik markazini topish uchun x o'qini uning simmetriya o'qi bo'ylab, y o'qini esa diametri bo'ylab yo'naltiramiz. Yarim aylananing og'irlik markazi x o'qi ustida yotadi.

6. Yarim aylananani y o'q atrofida aylantirishak shar sirti hosil bo'ladi. Uning yuzasi esa quyidagiga teng bo'ladi:

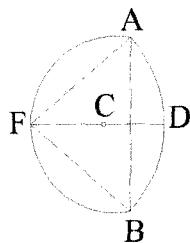
$$S = 4\pi R^2$$

7. Yarim aylana uzunligi $L = \pi R$, u holda yarim aylananing og'irlik markazi quyidagicha topiladi:

$$x_c = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \pi R} = \frac{2}{\pi} R \approx 0,6366R$$

6.5 Mustaqil yechish uchun masalalar:

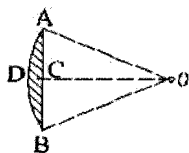
1-masala. Sterjenli AFBD konturning C og'irlik markazining vaziyati aniqlansin? Kontur $FD=R$ radiusli aylananing to'rtidan biriga teng bo'lgan ADB yoy va diametri AB vatar bo'lgan AFB yarim aylana yoyidan tashkil topgan. Sterjenlarning chiziqli zichligi bir xil.



(javob: $CF = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2}) = 0,524R$.)

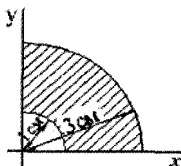
2-masala. Radiusi $AO=30\text{sm}$ bo'lgan ADB doiraviy segment yuzining C og'irlik markazi topilsin.

(javob: $OC=27,7\text{sm}$).



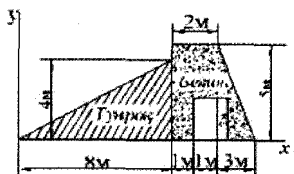
3-masala. Rasmda tasvirlangan chorak halqa og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin.

(javob: $x_c = y_c = 1,38\text{sm}$.)



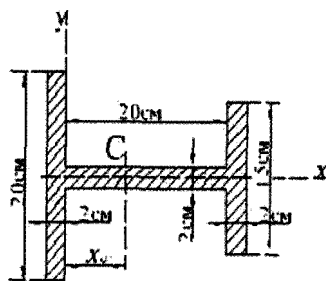
4-masala. Betonning solishtirma og'irligi 24kN/m^3 , tuproqniki esa 16kN/m^3 deb qabul qilib, rasmda ko'rsatilgan platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazi topilsin.

(javob: $x_c = 8,19\text{m}$, $y_c = 1,9\text{m}$.)



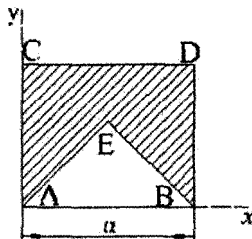
5-masala. O'lchovlari rasmda ko'rsatilgan qo'shtavr profilning og'irlik markazi topilsin.

(javob: $x_c = 9\text{sm}$.)



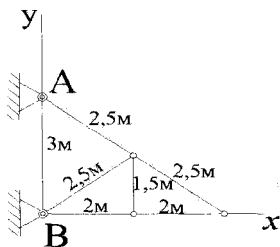
6-masala. Tomoni a ga teng ABCD kvadrat berilgan. Bu kvadratning ichida shunday E nuqta topilsinki, kvadratdan teng yonli AEB uchburchak kesib olinganda, bu nuqta kvadratdan qolgan yuzaning og'irlik markazi bo'lsin.

(javob: $x_E = a/2, y_E = a/2$.)



7-masala. Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari topilsin? Ferma 7 ta sterjendan tuzilgan bo'lib, ularning uzunliklari rasmda ko'rsatilgan. Hamma sterjenlar har bir metrining og'irligi bir xil.

(javob: $x=1,47m, y=0,94m$).

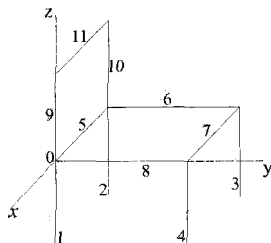


8-masala. Suv sig'imi 45000kN bo'lgan og'irliги 300kN bo'lgan yuk kemaning oldingi qismidan ketingi qismiga 60 m masofaga surilgan. Yuk va kemaning umumiy og'irlik markazi qancha suriladi?

(javob: 0,4 m).

9-masala. Stul ko'rinishidagi jism og'irlik markazining koordinatalari topilsin, bu jism bir xil uzunlik va bir xil og'irlikdagi sterjenlardan tuzilgan. Sterjenlarning uzunligi 44 sm.

(javob: $x=-22\text{ sm}, y=16\text{ sm}, z=0$).



VII BOB. KINEMATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI. NUQTA KINEMATIKASI.

7.1 Kinematikaning asosiy tushuncha va qoidalari

Jismlarning harakatini ularga ta'sir etuvchi kuchlar va inertligini (massasini) e'tiborga olmay, sof geometrik nuqtayi nazardan o'rganuvchi nazariy mexanikaning bir qismiga kinematika deyiladi.

Kinematika so'zi yunoncha «kinema» so'zidan olingan bo'lib, harakat ma'nosini anglatadi. Jismning vaqtga bog'liq ravishda fazoda boshqa jismlarga nisbatan vaziyatini o'zgartirishiga mexanik harakat deyiladi.

Harakat tushunchasi fazo, vaqt* va jism (nuqta) tushunchalari bilan chambarchas bog'liq. Vaqtning turli momentlarida harakatlanuvchi jism (yoki nuqta) ning boshqa jismlarga nisbatan holatini aniqlash uchun sanoq sistemasini tanlanadi. Sanoq sistemasini shartli ravishda qo'zg'almas deb olish yoki harakatdagi jismga birlashtirilgan deb qarash mumkin.

Jismning fazoda qiladigan harakati vaqt o'tishi bilan sodir bo'ladi. Mexanikada fazo uch o'lchovli Yevklid fazosi deb qaraladi. Undagi barcha o'lchashlar Yevklid geometriyasi usullari asosida olib boriladi. Uzunlik o'lchov birligi qilib l m olingan.

Vaqt uzluksiz o'zgaruvchan va skalyar kattalik. Kinematika masalalarida t vaqt mustaqil o'zgaruvchan (argument) deb qabul qilinadi. Qolgan boshqa o'zgaruvchan kattaliklar (masofa, tezlik va b.q.) vaqt o'tishi bilan o'zgaruvchan kattaliklar yoki t vaqtning funksiyasi hisoblanadi. Vaqtni hisoblash boshlang'ich moment ($t=0$) dan boshlab olib boriladi.

Ko'chish va harakat tushunchalari kinematikaning asosiy tushunchalaridir. Nuqtaning ma'lum vaqt oralig'ida fazoda bir holatdan boshqa holatga ixtiyoriy ravishda o'tishi ko'chish deyiladi. Nuqtaning boshlang'ich holatdan oxirgi holatga vaqtga bog'liq holda aniq bir usulda o'tishiga harakat deyiladi. Fazoda harakatlanayotgan nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan holati bilan vaqt orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga nuqtaning harakat qonuni deyiladi.

*Mexanikada vaqt barcha sanoq sistemalari uchun bir xilda o'tadi va absolyut deb hisoblanadi. Vaqtning o'lchov birligi qilib 1 soniya (1s) qabul qilingan.

Kinematikaning asosiy masalasi nuqtaning (jismning) harakat qonunlarini o'rganishdan iborat. Agar nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan harakat qonuni berilgan bo'lsa, nuqta harakatining kinematik xarakteristikalari: trayektoriya, tezlik va tezlanishlarni aniqlash mumkin bo'ladi. Biror sanoq sistemasiga nisbatan harakatlanuvchi nuqtaning qoldirgan iziga trayektoriya deyiladi.

Har qanday qattiq jismni nuqtalar to'plamidan iborat deb qarash mumkin. Shu sababli jism harakatini o'rganish uchun uning nuqtalari harakatini o'rganishga to'g'ri keladi. Dastlab nuqta kinematikasini o'rganib, undan keyin qattiq jism kinematikasini o'rganishga o'tiladi.

7.2 Nuqta harakatining berilish usullari

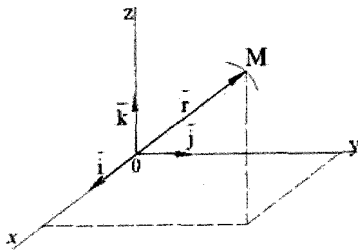
Nuqta harakati quyidagi uchta usul yordamida beriladi:

- 1) Vektor usuli,
- 2) Koordinatalar usuli,
- 3) Tabiiy usul.

Nuqta harakatining vektor usulda berilishi. M nuqta qandaydir $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo'lsin. Vaqtning istalgan paytida nuqtaning holatini M nuqta va koordinata boshi O ni tutashtirishdan hosil bo'lgan \vec{r} radius-vektor orqali aniqlash mumkin (7.1-rasm). M nuqta harakatlanayotganida vaqtga bog'liq ravishda \vec{r} radius-vektorning moduli ham, yo'nalishi ham o'zgarib boradi. Demak, radius-vektor t vaqtning vektorli funksiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (7.1)$$

(7.1) tenglamaga nuqtaning vektor shaklidagi harakat tenglamasi deyiladi. Radius-vektorlarning uchlarini tutashtirishda hosil bo'lgan chiziqqa vektorlar



7.1-rasm

godografi deyiladi. Vektorlar godografi harakatlanuvchi nuqtaning trayektoriyasi bo‘lib hisoblanadi.

Vektorni analitik usulda berish uchun uning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari berilgan bo‘lishi lozim. \vec{r} vektorning to‘g‘ri burchakli Dekart koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha belgilanadi:

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z$$

bu yerda: x, y, z – M nuqtaning koordinatalari.

Agar koordinata o‘qlarining birlik vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deb belgilasak \vec{r} radius-vektor uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (7.2)$$

(7.2) tenglik harakatning vektorli va Dekart koordinatalari orqali aniqlash usullari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

Nuqtaning fazodagi holatini uning x, y, z Dekart koordinatalari orqali aniqlash mumkin. Nuqta harakatlanganda uning koordinatalari vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaradi, ya‘ni x, y, z koordinatalar vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (7.3)$$

(7.3) tenglamalarga nuqta harakatining Dekart koordinatalaridagi tenglamalari deyiladi. Bu tenglamalar yordamida nuqtaning harakati koordinatalar usulida berilganda harakat qonunini aniqlaydi.

Agar nuqta faqat bitta tekislikda harakatlansa, nuqtaning harakat tenglamalari bittaga kamayadi, ya‘ni

$$x = f_1(t), y = f_2(t) \quad (7.4)$$

Agar nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan bo‘lsa, u holda Ox o‘qini shu to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘naltiramiz. Nuqtani harakat tenglamasi bitta tenglama bilan ifodalanadi:

$$x = f(t) \quad (7.5)$$

(7.5) ga nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakat tenglamasi deyiladi.

Nuqtaning trayektoriyasi avvaldan ma‘lum bo‘lsa, harakatni tabiiy usulda berish maqsadga muvofiqdir. Nuqta O_1xyz koordinatalar sistemasi nisbatan qandaydir AB egri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan bo‘lsin (7.2-rasm). Shu trayektoriya ustidan ixtiyoriy qo‘zg‘almas O nuqta tanlaymiz. O nuqtani sanoq boshi deb ataymiz hamda musbat va manfiy

harakat yo'nalishini belgilab olamiz. U holda M nuqtaning trayektoriyadagi holati egri chiziqli $S = \vec{O}^u \vec{M}$ yoy koordinatasi bilan aniqlanadi. M nuqta harakatlanishi natijasida M_1, M_2, \dots holatlarni egallaydi va vaqt o'tishi bilan s masofa o'zgarib boradi va t vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo'ladi:

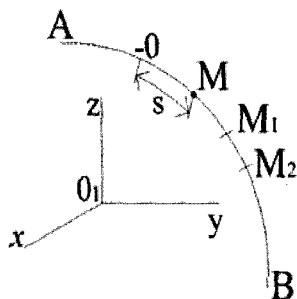
$$s = f(t) \quad (7.6)$$

(7.6) tenglamaga M nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat tenglamasi yoki harakat qonuni deyiladi.

Agar 1) nuqtaning trayektoriyasi,

2) trayektoriyada musbat yoki manfiy harakat yo'nalishini ko'rsatuvchi sanoq boshi,

3) nuqtaning trayektoriya bo'ylab qiladigan $s=f(t)$ harakat qonunlari avvaldan ma'lum bo'lsa, nuqtaning harakati tabiiy usulda beriladi.



7.2-rasm

Shuni ta'kidlash lozimki (7.6) dagi S kattalik nuqtaning bosib o'tgan yo'lini emas, balki nuqtaning holatini aniqlaydi. Masalan, nuqta O sanoq boshidan harakatlanib M_1 nuqta kelib, yana iziga qaytib M nuqtaga kelsin. Bunday holda nuqtaning koordinatasi $S = OM$ bo'ladi. Bosib o'tgan yo'li $OM + M_1M$ ga teng bo'ladi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Kinematika deb nimaga aytiladi?
2. Fazo nima?
3. Vaqt qanday kattalik?
4. Ko'chish deb nimaga aytiladi?
5. Harakat deb nimaga aytiladi?
6. Kinematikaning asosiy masalasi nima?
7. Harakat vektor usulida qanday ifodalanadi?
8. Harakat koordinata usulida qanday ifodalanadi?

7.3 Harakati vektor, koordinata hamda tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi va tezlanishi.

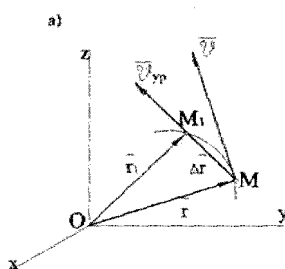
To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan M nuqta harakatlanayotgan bo'lsin. Nuqta vaqtning t paytida \vec{r} radius-vektor bilan aniqlanuvchi M nuqtada, vaqtning t_1 paytida M_1 holatni egallab, radius-vektori \vec{r}_1 bo'lsin (7.3-rasm, a).

U holda nuqta $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'ida $\overline{MM_1} = \Delta \vec{r}$ ga ko'chadi. OMM_1 uchburchakdan quyidagini yozamiz.

$$\overline{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}$$

Ko'chish vektori $\Delta \vec{r}$ ni shu ko'chish sodir bo'ladigan Δt vaqtga nisbati nuqtaning mazkur vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik vektori deyiladi.

$$\vec{g}_{o'rt} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (7.7)$$



7.3-rasm

O'rtacha tezlik vektori $\vec{g}_{o'rt} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ vektor bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Δt vaqt oralig'i qancha kichik qilib olinsa, nuqta harakatini xarakterlovchi $\vec{g}_{o'rt}$ kattalik shuncha aniq bo'ladi. Nuqtaning harakati to'g'risida aniq xarakteristikaga ega bo'lish uchun berilgan ondagi nuqtaning tezligi tushunchasi kiritiladi.

Nuqta o'rtacha tezlik vektorining Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan ondagi tezlik (oniq tezlik) vektori deyiladi va \vec{g} bilan belgilanadi:

$$\vec{g} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{g}_{o'rt}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

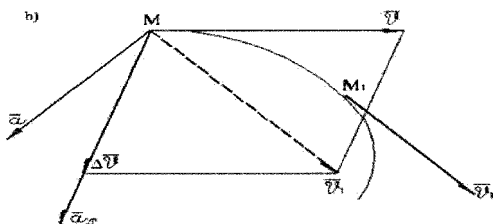
yoki

$$\vec{g} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (7.8)$$

Demak, nuqtaning tezlik vektori uning radiusi-vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Tezlik vektorining o'lchov birligi $[\vec{g}] = \frac{[uzunlik]}{[vaqt]} = \frac{s}{t}$, tezlik asosan $\frac{m}{s}$ yoki $\frac{km}{soat}$ larda o'lchanadi.

Biror vaqt oralig'ida nuqta tezligi moduli va yo'nalishining o'zgarishini xarakterlovchi kattalikka tezlanish deyiladi. Vaqtning qandaydir t paytida nuqta M holatda bo'lib tezligi \vec{v} , vaqtning t_1 paytida nuqta M_1 holatga kelib tezligi \vec{v}_1 bo'lsin (7.3-rasm, b). $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'ida nuqtaning tezligi $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ ortirma oladi. $\Delta \vec{v}$ tezlik orttirmasini aniqlash uchun \vec{v}_1 M_1 tezlik vektorini M nuqtaga o'z-o'ziga parallel ko'chirib, \vec{v} va \vec{v}_1 tezlik vektorlari asosida parallelogram quramiz.



7.3-rasm

Parallelogramning ikkinchi tomoni $\Delta \vec{v}$ tezlik orttirmasi bo'lib hisoblanadi. Shuni qayd qilish kerakki, $\Delta \vec{v}$ tezlik vektori doimo trayektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

$\Delta \vec{v}$ tezlik orttirmasini Δt ga nisbati nuqtaning o'rtacha tezlanishi deyiladi:

$$\vec{a}_{ovt} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (7.9)$$

\vec{a}_{ovt} vektorning yo'nalishi $\Delta \vec{v}$ vektorning yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Nuqtaning o'rtacha tezlanish vektori \vec{a}_{ovt} ni Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan paytdagi tezlanish vektori deyiladi:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (7.10)$$

Demak, nuqtaning berilgan paytdagi tezlanish vektori nuqta tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga yoki radiusvektordan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasiga teng.

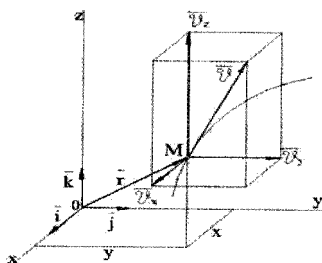
Tezlanishning o'lchov birligi $\frac{\text{uzunlik}}{(\text{vaqt})^2}$, tezlanish asosan $\frac{m}{s^2}$ da o'lchanadi.

Agar nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa tezlanish vektori shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Agar trayektoriya egri

chiziqdan iborat bo'lsa, tezlanish vektori trayektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi.

Harakat koordinatalar usulida berilganda nuqta tezligining moduli va yo'nalishini aniqlaymiz.

Nuqta $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ qonuniyat bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. Koordinata o'qlarining birlik vektorlarini \vec{i}, \vec{j} va \vec{k} bilan belgilab, M nuqtani koordinata boshi O nuqta bilan tutashtirib \vec{r} radius-vektorini o'tkazamiz (7.4-rasm).



7.4-rasm

Parallelepipedning yasovchilarini Oxyz koordinata o'qlariga parallel yo'naltiramiz. U holda \vec{r} radius-vektor va \vec{g} tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (7.11)$$

$$\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k} \quad (7.12)$$

(7.8) ni e'tiborga olib (11) tenglikdan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\vec{g} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (7.13)$$

(7.12) va (7.13) larning birlik vektorlari oldidagi koeffitsiyentlar o'zaro tengligidan quyidagilarni hosil qilamiz.

$$g_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad g_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad g_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (7.14)$$

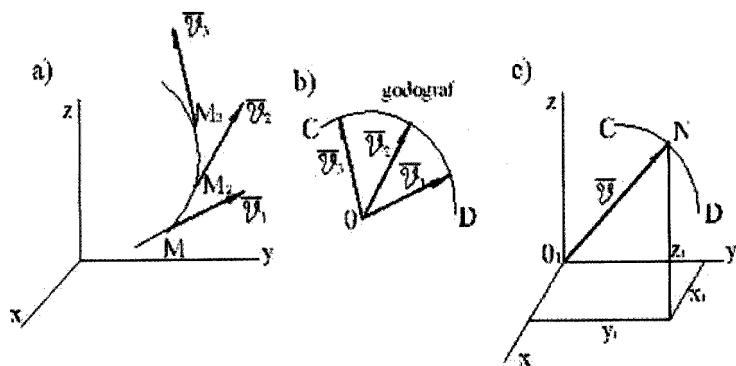
(7.14) tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaydi.

Shunday qilib, nuqta tezligining biror qo'zg'almas Dekart koordinata o'qidagi proyeksiyasi, nuqtaning shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga teng.

Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi.

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \quad (7.15)$$

$$\cos\alpha = \frac{g_x}{g}, \quad \cos\beta = \frac{g_y}{g}, \quad \cos\gamma = \frac{g_z}{g} \quad (7.16)$$

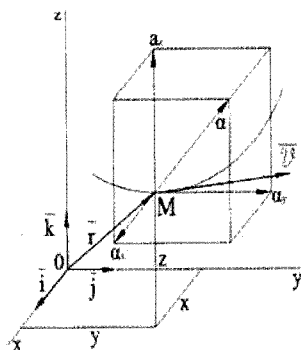


7.5-rasm

Egri chiziqli notekis harakatda nuqta tezligining moduli ham yoʻnalishi ham oʻzgaradi. Nuqta $Oxyz$ koordinata sistemasiga nisbatan notekis egri chiziqli harakat qilayotgan boʻlsin (7.5-rasm, a). Nuqtaning trayektoriyada egallagan bir necha M_1, M_2, M_3 , ketma-ket holatlariga mos tezliklarning barchasini miqdor va yoʻnalishlarini oʻzgartirmay biror O_1 qutbga keltiraylik (7.5-rasm, b).

Bu holda tezlik vektorining uchlarini tutashtirishda hosil boʻlgan CD egri chiziq nuqta tezligining godografi deyiladi.

Ixtiyoriy $O_1 xyz$ koordinata sistemasi olib CD tezlik godografini unga parallel qilib koʻchiramiz (7.5-rasm, c).



7.6-rasm

Tezlik godografi ixtiyoriy N nuqtasining radius-vektori \vec{a} tezlikdan iborat boʻladi. Godograf nuqtasining koordinatalari tegishli x_1, y_1, z_1 boʻlsa, u holda

$$x_1 = \vartheta_x = \dot{x}, \quad y_1 = \vartheta_y = \dot{y}, \quad z_1 = \vartheta_z = \dot{z} \quad (7.17)$$

Bu tenglamalar tezlik godografining parametrik tenglamalarini ifodalaydi.

Nuqtaning harakati $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ ko‘rinishdagi tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. M nuqtaning radius-vektori \vec{r}

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Nuqtaning tezlanishi radius-vektordan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng, \vec{i} , \vec{j} va \vec{k} vektorlar o‘zgarmas bo‘lganligidan (7.6 – rasm)

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

\vec{a} tezlanish vektorining koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagi ko‘rinishda yoziladi.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

a_x, a_y, a_z - \vec{a} tezlanishning x, y, z o‘qlaridagi proyeksiyalari. Tezlanishni aniqlovchi ikki formulani o‘zaro solishtirib quyidagini hosil qilamiz.

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\vartheta_x}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\vartheta_y}{dt} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\vartheta_z}{dt} = \ddot{z} \quad (7.18)$$

Demak, tezlanish vektorining biror qo‘zg‘almas Dekart koordinatalar o‘qidagi proyeksiyasi, nuqtaning mos koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi hosilasiga yoki tezlik vektorining mos koordinata o‘qlaridagi proyeksiyasidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilasiga teng bo‘ladi.

Nuqta tezlanishining moduli va yo‘nalishi quyidagi formulalardan topiladi:

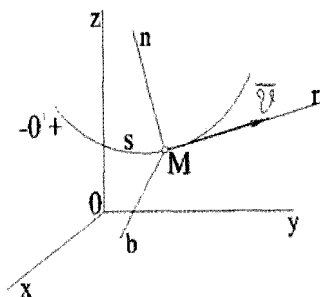
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (7.19)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a} \quad (7.20)$$

bu yerda $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - tezlanish vektorining koordinata o‘qlari bilan tashkil qilgan burchaklari.

Nuqtaning harakati $s=f(t)$ ko'rinishda ya'ni tabiiy usulda berilganda uning tezligi va tezlanishini aniqlaymiz.

Biz shu paytgacha nuqtani \bar{v} tezlik, \bar{a} tezlanish vektorlarining modullarini qo'zg'almas Oxyz koordinata sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlagan edik. Harakat tabiiy usulda berilganda nuqtaning \bar{v} tezlik va \bar{a} tezlanish vektorlarining modullarini qo'zg'almas Oxyz koordinata sistemasiga emas, balki nuqta bilan birgalikda harakatlanuvchi $M\tau nb$ koordinata sistemasi o'qlaridagi



7.7-rasm

proyeksiyalari orqali aniqlanadi. $M\tau$ o'q nuqtaning trayektoriyasiga urinma qilib yo'naltiriladi. Mn o'q $M\tau$ o'qqa perpendikulyar trayektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'naltiriladi. Bu o'qqa bosh normal o'qi deyiladi. Ikkala o'qqa perpendikulyar qilib Mb o'qi yo'naltiriladi. Bu o'qqa binormal o'qi deyiladi (7.7-rasm).

Nuqtaning \bar{v} tezlik vektori trayektoriyaga urinma bo'ylab yo'nalgan. Uning $M\tau$ o'qdagi proyeksiyasi ϑ , $\vartheta_z = \vartheta$ yoki $\vartheta_z = -\vartheta$ bo'lishi mumkin. Bundan keyin ϑ_z ni ϑ bilan belgilaymiz. ϑ ning qiymatini aniqlashga o'tamiz. Nuqta vaqtning t paytida trayektoriyaning M nuqtasida, $t_1 + \Delta t$ vaqtdan keyin M_1 nuqtasiga kelsin. Δt vaqt oralig'ida nuqta egri chiziqli trektoriya bo'ylab $\Delta s = \overset{\curvearrowright}{MM_1}$ ga ko'chadi. Δs - nuqta koordinatasi orttirmasi. Nuqtaning o'rtacha tezligi $\vartheta_{o'rt.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ formula yordamida aniqlanadi. Nuqtaning berilgan ondagi tezligi o'rtacha tezlikdan Δt ni nolga intiltirib olingan limitga teng

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

yoki

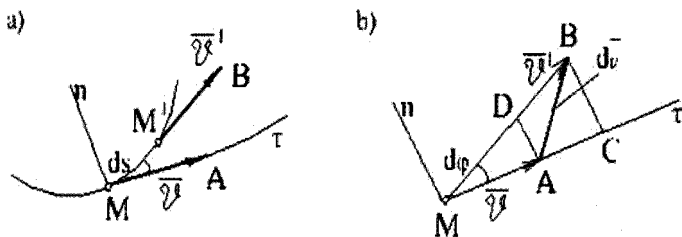
$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (7.21)$$

Nuqtaning tezligi masofadan (egri chiziqli koordinatadan) vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga teng.

Nuqta M_m tekisligida harakatlanganligi uchun nuqta tezlanish vektorining M_b o'qdagi proyeksiyasi ($a_b = 0$) nolga teng. Chunki M_b - o'q bu tekislikka perpendikulyar yo'nalgan. Nuqta tezlanishining M_τ va M_n o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun (7.10) tenglikni M_τ va M_n o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_\tau = \frac{(d\vartheta)_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{(d\vartheta)_n}{dt} \quad (7.22)$$

Nuqtaning M va M' holatlardagi tezliklarining farqini $d\bar{\vartheta}$ vektor bilan belgilaymiz (7.8-rasm,a), u holda



7.8-rasm

$$d\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta}. \quad \bar{\vartheta} = \overline{MA} \quad \text{va} \quad \bar{\vartheta}' = \overline{MB}$$

$\bar{\vartheta} = \overline{MA}$ va $\bar{\vartheta}' = \overline{MB}$ vektorlarni umumiy bo'lgan M nuqtaga ko'chiramiz, (7.8-rasm,b) natijada $d\bar{\vartheta} = \overline{AB}$ bo'ladi. $d\varphi$ burchak juda kichik bo'lsa, $ABCD$ figurani to'g'ri burchakli deb qarash mumkin. U holda:

$$(d\vartheta)_\tau = AC = DB = MB - MA = \vartheta' - \vartheta = d\vartheta$$

Yoyni vatarga nisbatidan olingan limit birga teng bo'lgani uchun AD , MA radiusning elementar yoyi hisoblanadi, u holda

$$(d\vartheta)_n = AD = MA d\varphi = \vartheta d\varphi$$

$(d\vartheta)_\tau$ va $(d\vartheta)_n$ larning qiymatlarini (7.22) ga qo'yib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad a_n = g \frac{d\varphi}{dt}, \quad (7.23)$$

(7.23) ning ikkinchi tengligini o'ng tomonini o'zgartiramiz:

$$g \frac{d\varphi}{dt} = g \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt}$$

bu yerda: $\frac{d\varphi}{ds} = k$ – egri chiziqning egrilik koeffitsiyenti. Uni quyidagi ko'rinishda belgilaymiz:

$$k = \frac{1}{\rho} \quad (7.24)$$

bu yerda: ρ – egri chiziqning egrilik radiusi.

(7.21) va (7.24) ni e'tiborga olsak (7.23) ning ikkinchi tengligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$a_n = g \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = g \cdot \frac{1}{\rho} \cdot g = \frac{g^2}{\rho}$$

Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{g^2}{\rho}, \quad a_b = 0 \quad (7.25)$$

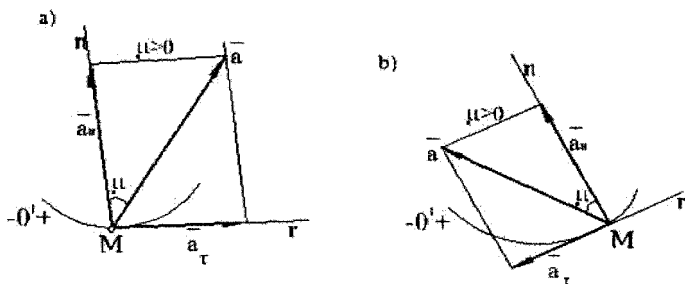
a_τ – nuqtaning urinma (tangensial) tezlanishi,

a_n – nuqtaning normal tezlanishi.

Shunday qilib, nuqta tezlanishining urinmadagi proyeksiyasi tezlikning algebraik qiymatidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasiga yoki nuqtani yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilasiga teng, nuqta tezlanishining bosh normaldagi proyeksiyasi, nuqta tezligi kvadratning trayektoriyani berilgan nuqtadagi egrilik radiusi nisbatiga teng.

Nuqtaning tezlanish vektori \bar{a} , urinma tezlanish \bar{a}_τ va normal tezlanish \bar{a}_n larning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$



7.9-rasm

Tezlanish moduli va yoʻnalishi

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{g^2}{\rho}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_r}{a_n} \quad (7.26)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

bu yerda $-\mu > 0$ boʻlsa $-\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$ boʻladi, u holda \bar{a} tezlanish vektori Mn normaldan M_r oʻqi tomon ogʻgan boʻladi (7.9-rasm, a), $\mu < 0$ boʻlsa teskari tomonga ogʻadi (7.9-rasm, b).

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezligi formulasi qanday ifodalanadi?
2. Harakat vektor usulda berilganda nuqtaning tezlanishi formulasi qanday ifodalanadi?
3. Nuqta tezligining Dekart koordinata oʻqlaridagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
4. Tezlik godografi deganda nimani tushunasiz, uning parametrik tenglamalari?

5. Nuqta tezlanishining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari nimaga teng?
6. Nuqtaning tezlik va tezlanish moduli qanday aniqlanadi?
7. Tabiiy koordinata sistemasida Dekart koordinata sistemasidan qanday farq qiladi?
8. Harakat tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi qanday aniqlanadi?
9. Nuqtaning urinma tezlanishi qanday formula bilan aniqlanadi?
10. Nuqtaning normal tezlanishi qanday formula yordamida aniqlanadi?
11. Nuqtaning to'la tezlanishi modulini ifodalovchi tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?
12. Nuqtaning qanday harakatida normal tezlanish nolga teng?
13. Nuqtaning qanday harakatida urinma tezlanish nolga teng?

7.4 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala. Nuqtaning harakat tenglamasi $x = 8t - 4t^2$, $y = 6t - 3t^2$ ko'rinishda berilgan (x, y – metrlarda, t – soniyalarda). Nuqtaning trayektoriyasi, tezligi va tezlanishini aniqlang.

Yechilishi: Nuqtaning harakat tenglamasiga ko'ra uning trayektoriya tenglamasini topish uchun harakat tenglamadagi t vaqtini chiqarib tashlash lozim. Buning uchun birinchi tenglamaning har ikkala tomonini 3 ga, ikkinchi tenglamaning har ikkala tomonini 4 ga ko'paytiramiz:

$$x = 8t - 4t^2 \quad |3$$

$$y = 6t - 3t^2 \quad |4$$

$$3x = 24t - 12t^2$$

$$4y = 24t - 12t^2$$

Birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz.

$$3x - 4y = 0 \quad \text{yoki} \quad y = \frac{3}{4}x$$

Bu nuqtaning trayektoriya tenglamasi. Nuqtaning trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat ekan.

y	0	0,75	1,5	3	-0,75	-1,5	-3
x	0	1	2	4	-1	-2	-4

Nuqtaning tezligini aniqlaymiz. Nuqtaning harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$g_x = \frac{dx}{dt} = 8 - 8t = 8(1-t)$$

$$g_y = \frac{dy}{dt} = 6 - 6t = 6(1-t)$$

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{8^2(1-t)^2 + 6^2(1-t)^2} = \sqrt{(8^2 + 6^2)(1-t)^2} = \sqrt{(64 + 36)(1-t)^2} = 10(1-t)$$

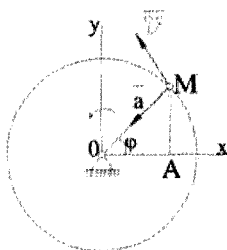
Nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz.

$$a_x = \frac{dg_x}{dt} = -8; \quad a_y = -6;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10 \text{ m/s}^2$$

Nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlari AB to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan.

2-masala. Qo'zg'almas O markaz atrofida aylanma harakat qiluvchi $OM = r$ krivoshining oxirgi uchi M nuqtasining harakat tenglamasi, tezligi va tezlanishini aniqlang. Krivoshining gorizontal o'qqa nisbatan burilish burchagi $\varphi = \omega t$ qonun bo'yicha o'zgaradi (7.10-rasm).



7.10-rasm

Yechilishi: O nuqtani koordinata boshi qilib x, y o'qlarini o'tkazamiz.

M nuqtaning koordinatasi

$$x = OA = OM \cos \varphi = r \cos \omega t$$

$$y = AM = OM \sin \varphi = r \sin \omega t$$

M nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz.

$$g_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t$$

$$g_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t$$

Endi M nuqta tezligining modulini aniqlaymiz.

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = r \cdot \omega = \text{const}$$

M nuqtaning tezligi o'zgarmas kattalik ekan. Tezlik yo'nalishini esa quyidagicha bo'ladi

$$\cos(\vec{g}, \hat{x}) = \frac{g_x}{g} = \frac{-r\omega \sin \omega t}{r\omega} = -\sin \varphi$$

$$\cos(\vec{g}, \hat{y}) = \frac{g_y}{g} = \frac{r\omega \cos \omega t}{r\omega} = \cos \varphi$$

M nuqtaning tezlanishini topamiz.

$$a_x = \frac{dg_x}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{dg_y}{dt} = -r\omega^2 \sin \omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r\omega^2 \cos\omega t)^2 + (-r\omega^2 \sin\omega t)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2\omega^4 \cos^2\omega t + r^2\omega^4 \sin^2\omega t} = r\omega^2 = \text{const}$$

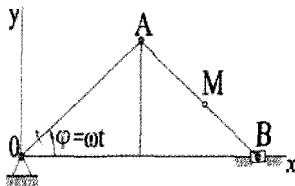
M nuqtaning tezlanishi ham o'zgarmas miqdor ekan. M nuqta tezlanishning yo'nalishini esa:

$$\cos(a \wedge x) = \frac{a_x}{a} = \frac{-r\omega^2 \cos\omega t}{r\omega^2} = -\cos\varphi$$

$$\cos(a \wedge y) = \frac{a_y}{a} = \frac{-r\omega^2 \sin\omega t}{r\omega^2} = -\sin\varphi$$

Demak, krivoshipning M uchi O markaz atrofida tekis aylanma harakat qiladi.

3-masala. OA krivoship $\omega = 10 \text{ rad/s}$ doimiy burchak tezlik bilan aylanadi. Uzunlik $OA = AB = 80 \text{ sm}$. Shatun o'rtasidagi M nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriyasi, shuningdek B polzunning harakat tenglamasi topilsin (7.11-rasm) Koordinata o'qlari rasmda ko'rsatilgan.



7.11-rasm

Yechilishi: Masalani yechish uchun O nuqtani koordinata boshi sifatida tanlab olamiz. Biz M nuqtaning harakat holatini o'rganishimiz uchun M nuqtaning koordinata o'qlaridagi holatlarini aniqlashimiz zarur:

$$x_M = \left(OA + \frac{AB}{2}\right) \cos\varphi$$

$$y_M = \frac{AB}{2} \sin\varphi$$

$$\varphi = \omega t = 10t$$

$$x_M = \left(80 + \frac{80}{2}\right) \cos 10t$$

$$y_M = \frac{80}{2} \sin 10t$$

o'rinlidir. Ifodani soddalashtirsak quyidagi ko'rinish oladi.

$$x = 120 \cos 10t$$

$$y = 40 \sin 10t$$

Bu tenglamalarni sistema shaklida yechsak M nuqtaning trayektoriyasini aniqlashimiz mumkin.

$\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$ Bundan ko'rinadiki M nuqtaning harakat holati ellipsdan iborat ekan.

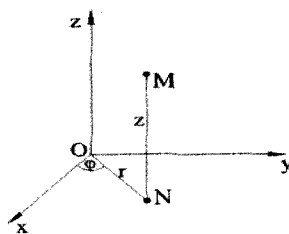
4-masala. Nuqta $x = a \cos kt$, $y = a \sin kt$, $z = \mathcal{H}t$ vint chizig'i bo'ylab harakatlanadi. Nuqta harakatining tenglamalari silindrik koordinatalarda aniqlansin (7.12-rasm).

Yechilishi: M nuqtaning silindrik koordinatalar sistemasidagi ko'rinishi bizga ma'lum bo'lib u quyidagicha bo'ladi.

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = z$$



7.12-rasm

Bu tenglamani Nuqtaning $x = a \cos kt$, $y = a \sin kt$, $z = \mathcal{H}t$ vint chizig'i bo'ylab harakatlanish qonuniyati bilan birgalikda yechamiz.

$$a \cos kt = r \cos \varphi,$$

$$a \sin kt = r \sin \varphi,$$

$$z = \mathcal{H}t$$

$$\cos kt = \cos \varphi,$$

$$\sin kt = \sin \varphi,$$

$$z = \mathcal{H}t$$

$$r = a,$$

bundan $\varphi = kt$, ekanligini ko'rish mumkin.

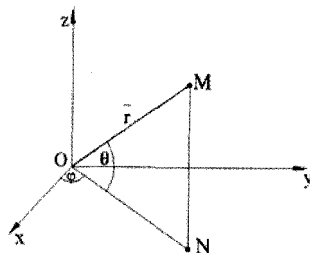
$$z = \mathcal{H}t$$

5-masala. Nuqtaning Dekart koordinatalar sistemasida berilgan harakat tenglamasiga asosan uning trayektoriyasi va sferik koordinatalar sistemasidagi harakat tenglamalari topilsin (7.13-rasm).

$$x = R \cos^2 \frac{kt}{2}, \quad y = \frac{R}{2} \sin kt, \quad z = R \sin \frac{kt}{2}.$$

Yechilishi: Dastavval, nuqtaning x va z o'qidagi harakat tenglamasini ikkilangan burchak formulasiga qo'yib quyidagicha yozib olamiz.

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos kt) \quad z = \frac{R}{2}(1 - \cos kt)$$



7.13-rasm

Endi har uchala tenglamani kvadratlarga oshirib yig'indisini hisoblaymiz. Unga ko'ra :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{R^2}{4}(1 + \cos kt)^2 + \frac{R^2}{4} \sin^2 kt + R^2 \sin^2 \frac{kt}{2} = \\ &= \frac{R^2}{4}(1 + 2 \cos kt + \cos^2 kt + \sin^2 kt) + \frac{R^2}{2}(1 - \cos kt) = \\ &= \frac{R^2}{2}(1 + \cos kt + 1 - \cos kt) = R^2 \end{aligned}$$

Tenglamaning yechimi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera bilan $(x - \frac{R}{4})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ silindrning kesishish chizig'i.

Endi bu nuqtaning sferik koordinatalar sistemasidagi harakat tenglamalarini topamiz:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi, \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi, \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Bu tenglamalarni nuqtaning Dekart

Koordinatalar sistemasidagi berilgan harakat tenglamalariga qo'yib, mos holda tenglashtirib sistemani birgalikda yechsak ushbu natijaga ega bo'lamiz:

$$r = R, \quad \varphi = \frac{kt}{2}, \quad \theta = \frac{kt}{2}$$

6-masala. Poyezd 72 km/soat tezlik bilan harakat qiladi. Tormoz qilinganda u $0,4 \frac{m}{s^2}$ ga teng sekinlashish oladi. Poyezdni stansiyaga kelmasdan qancha vaqt oldin va stansiyadan qancha narida tormozlay boshlash kerakligi topilsin.

Yechilishi: Masala shartiga binoan harakat sekinlanuvchan. Demak $\frac{d^2x}{dt^2} = -0,4$ boshlang'ich shartlarni e'tiborga olsak

$$\begin{aligned} t &= 0, \\ x &= 0, \\ \dot{x} &= 20m/s \end{aligned}$$

Tenglamani vaqt bo'yicha integrallasak $\frac{dx}{dt} = -0,4t + 20$ bundan $x = -0,4 \frac{t^2}{2} + 20t$ ga ega bo'lamiz. Harakat sekinlanuvchan bo'lganligi sababli uning oxirgi tezligi 0 ga teng bo'ladi. Shu sababli tezlanish formulasi orqali bu tezlikni hisobga olmasdan bosib olingan vaqtni topish mumkin:

$$t = \frac{20}{0,4} = 50s$$

Topilgan vaqtni qiymatidan foydalanib bosib o'tilgan yo'lni aniqlaymiz:

$$S = -0,2 \cdot 50^2 + 20 \cdot 50 = 500m$$

7-masala. Suv tomchilari vertikal naychaning teshigidan har 0,1 sekundda bir marta tomadi va $9,81 \frac{m}{s^2}$ tezlanish bilan pastga tushadi. Birinchi tomchi oqib chiqqan paytdan 1 sekund o'tgandan so'ng birinchi va ikkinchi tomchilar orasidagi masofaning qancha bo'lishi aniqlansin (7.14-rasm).

Yechilishi: Bu masalani ham 9-masala kabi tezlanishning diffirensial ko'rinishi orqali noma'lumlarni aniqlashdan

boshlaymiz. $\frac{d^2x}{dt^2} = g$ boshlang'ich shartlar quyidagicha $x = 0,$
 $\dot{x} = 0$



7.14-rasm

tenglamani integrallab x ni qiymatini topish mumkin. $\frac{dx}{dt} = gt$ $x = \frac{gt^2}{2}$

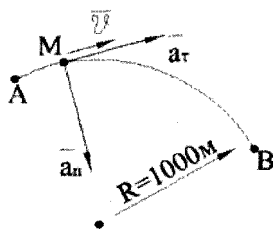
Tomchilar tomish interval vaqtini e'tiborga olsak

$$t_1 = 1s$$

$$t_2 = t_1 - 0,1 = 1 - 0,1 = 0,9s$$

1- va 2-tomchilar orasidagi masofa tushayotgan balandliklari farqi orqali aniqlanadi. $x_1 - x_2 = \Delta x = \frac{g}{2}(1 - 0,81) = 0,932m$

8-masala. Poyezdning boshlang'ich tezligi 54 km/soat bo'lib birinchi 30 s da u 600 m yo'l bosdi. Poyezd radiusi $R=1$ km bo'lgan aylanma yo'lda o'zgaruvchan harakat qiladi deb hisoblab, uning 30 s oxiridagi tezligi va tezlanishi aniqlansin (7.15-rasm).



7.15-rasm

Yechilishi: Urinma tezlanish tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng $\frac{dv}{dt} = a_t$ ekanligidan foydalanib, integrallash orqali tezlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin $v = a_t t + v_0$. Poyezdning bosib o'tgan masofasi esa $s = a_t \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t$. Poyezd aylanma harakat uchun 30 s vaqt sarflaganini e'tiborga olsak, urinma tezlanish $a_{t(t=30s)} = \frac{600 - 450}{900} \cdot 2 = \frac{1}{3} m/s^2$ tezlik esa $v_{(t=30s)} = 10 + 15 = 25 m/s$. Normal tezlanish esa quyidagicha $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{5}{8} m/s^2$. To'la tezlanish esa urinma va normal tezlanishlar kvadratlarining yig'indisiga teng. $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0,708 m/s^2$.

9-masala. Radiusi $R=20$ sm bo'lgan aylana yoyi bo'ylab nuqta harakatlanadi. Uning trayektoriya bo'ylab harakat qilish qonuni $s = 20 \sin \pi t$ (t -sekundlar, s -santimetrlar hisobida). $t=5s$ bo'lgan payt uchun nuqta

tezligining miqdori va yo'nalishi, urinma, normal va to'la tezlanishi topilsin?

Yechilishi: Nuqtaning harakat trayektoriyasi tenglamasi ma'lum va undan olingan hosila nuqtaning harakat tezligi tenglamasini ifodalashi ma'lum. Shunga ko'ra dastlab tezlik tenglamasini aniqlaymiz.

$$s = 20 \sin \pi$$

$$g = 20 \pi \cos \pi$$

Urinma tezlanish tenglamasi esa tezlik tenglamasida olingan birinchi tartibli hosila yoki trayektoriya tenglamasidan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng. $a_t = -20\pi^2 \sin \pi$ Normal tezlanish esa $a_n = \frac{g^2}{\rho} = 20 \cdot \pi^2 \cos^2 \pi$.

Nuqtaning $5s$ vaqt davomida harakat holatini o'rganishimiz zarur. Shunday ekan aniqlangan tenglamalardagi vaqt t ning o'rniga $5s$ ni qo'yib miqdoriy o'lchovini aniqlaymiz. Unga ko'ra

$$g = -20\pi \text{ sm/s}, \quad a_t = 0, \quad a_n = 20\pi^2 \text{ sm/s}^2$$

10-masala. $x = -a \sin 2\omega t$, tenglamalarga muvofiq Lissaju shaklini chizuvchi nuqta trayektoriyasining $x = y = 0$ holatdagi egrilik radiusi topilsin?

Yechilishi: Nuqtaning berilgan harakat tenglamalariga ko'ra birinchi tartibli hosila olib, nuqtaning tezligini umumiy holda aniqlaymiz.

$\dot{x} = -2a\omega \cos 2\omega t$, nuqtaning topilgan o'qlardagi tezliklari tenglamasini $y = -a\omega \cos \omega t$ inobatga olgan holda ularning kvadratlari yig'indisidan nuqta tezligini aniqlaymiz (trayektoriyasini aniqlashni yuqoridagi masalalarda ko'rgan edik).

Unga ko'ra:

$$g = a\omega \sqrt{4\cos^2 \omega t + \cos^2 \omega t}$$

Shartlarni inobatga olsak:

$$t=0 \quad (x=y=0) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Demak

$$t=0 \quad \ddot{x}=0 \quad \ddot{y}=0$$

bundan ko‘rishimiz mumkinki normal tezlanish ham nolga teng. Shunday ekan egrilik radiusi

$$\rho = \frac{g^2}{a_n} = \infty$$

cheksizlikdan iborat.

7.5 Mustaqil yechish uchun masalalar:

1-masala. Nuqtaning koordinata usulida berilgan harakat tenglamalariga ko‘ra uning trayektoriya tenglamasi topilsin va rasmda harakat yo‘nalishi ko‘rsatilsin.

$$1) \quad x=3t-5 \quad y=4-2t.$$

(javob: $x=-5, y=4$ nuqtadan boshlanadigan $2x+3y-2=0$ yarim to‘g‘ri chiziq)

$$2) \quad x=2t, \quad y=8t^2$$

(javob: $x=0, y=0$ nuqtadan boshlanadigan $y=2x^2$ parabolaning o‘ng tarmog‘i)

$$3) \quad x=5\sin 10t, \quad y=3\cos 10t$$

(javob: $x=0, y=3$ nuqtadan boshlanadigan $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellips)

$$4) \quad x=2-3\cos 5t, \quad y=4\sin 5t-1$$

(javob: $x=-1, y=-1$ nuqtadan boshlanadigan $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ ellips)

2-masala. Ko‘prikli kran ustaxona bo‘ylab $x=t$ tenglamaga muvofiq, harakatlanadi. Aravacha kran bo‘ylab $y=1,5t$ (x va y – metr lar, t – sekundlar hisobida) tenglamaga muvofiq ko‘ndalang yo‘nalishda g‘ildirab boradi. Zanjir $0,5$ m/s tezlik bilan qisqaradi. Yuk og‘irlik markazining

trayektoriyasi topilsin. Boshlang'ich paytda yukning og'irlik markazi Oxy gorizontal tekislikda bo'lgan; Oz o'q vertikal ravishda yuqoriga yo'nalgan.

(javob: Trayektoriya – to'g'ri chiziq: $y = 1,5x, z = 0,5x$)

3-masala. Lissaju shaklini chizuvchi nuqtaning harakati

$$x = 3\sin t,$$

$$y = 2\cos 2t$$

(t –sekundlar hisobida) tenglamalar bilan berilgan. Trayektoriya tenglamasi topilsin, trayektoriya chizilsin va nuqta harakatining har xil vaqtlardagi yo'nalishi ko'rsatilsin. Shuningdek, harakat boshlangandan keyin trayektoriya Ox o'qni kesib o'tgan eng oldingi t_1 vaqt ko'rsatilsin.

(javob: $4x^2 + 9y = 18$ parabolaning bir qismi, chiziq bo'ylab

$$|x| \leq 3, |y| \leq 2, t_1 = \pi/4s.)$$

4-masala. Elastik arqon bilan ko'tariluvchi yuk $x = a \sin(kt + \frac{3\pi}{2})$ tenglamaga

muvofiq tebranma harakat qiladi. Bunda a –santimetrlar hisobida, k –rad/s hisobida o'lchangan. Agar harakat davri $0,4s$ va boshlang'ich vaqtda $x_0 = -4 sm$ bo'lsa, yuk tebranishi amplitudasi va doiraviy chastotasining qancha bo'lishi aniqlansin. Masofalar egri chizig'i chizilsin.

(javob: $a = 4sm, k = 5\pi rad/s$)

5-masala. Chastotasi bir xil, lekin amplituda va fazalari har xil bo'lgan ikkita garmonik tebranma harakatda bir vaqtda qatnashuvchi nuqtaning trayektoriyasi aniqlansin. Tebranma harakatlar ikkita o'zaro perpendikulyar o'qlar bo'ylab yuzaga keladi:

$$x = a \sin(kt + \alpha) \quad y = b \sin(kt + \beta)$$

(javob: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$ - ellips)

6-masala. Avtomobil to'g'ri chiziqli yo'lda o'zgarmas $20 m/s$ tezlik bilan harakatlanadi, uning $R = 1m$ radiusli g'ildiragi gardishida yotuvchi

nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriyasi aniqlansin. G'ildirakni sirg'anmasdan g'ildiraydi deb hisoblansin; koordinata boshini Ox o'q sifatida olingan yo'lining harakat boshlanadigan nuqtasida olinsin.

(javob: Sikloida $x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$.)

7-masala. Snaryadning harakati $x = \vartheta_0 \cos \alpha t$, $y = \vartheta_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$ tenglamalar bilan berilgan, bu yerda ϑ_0 – snaryadning boshlang'ich tezligi, α – gorizont tal o'q x bilan ϑ_0 orasidagi burchak, g – og'irlik kuchining tezlanishi. Snaryadning harakat trayektoriyasi, H - balandligi, L – uchish uzoqligi va T uchish vaqti aniqlansin?

(javob: Trayektoriyasi $y = tg \alpha \cdot x - \frac{g}{2\vartheta_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$ – parabola, balandligi esa

$$H = \frac{\vartheta_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \text{ uchish uzoqligi } L = \frac{\vartheta_0^2}{g} \sin 2\alpha \text{ uchish vaqti } T = 2 \frac{\vartheta_0}{g} \sin \alpha)$$

8-masala. Oldingi masalaning shartlaridan foydalanib α otish burchagining qanday qiymatida L uchish uzoqligi eng katta bo'lishi aniqlansin. Unga mos keluvchi ko'tarilish balandligi va uchish vaqti topilsin.

(javob: $\alpha = 45^\circ$, $L_{\max} = \frac{\vartheta_0^2}{g}$, $H = \frac{\vartheta_0^2}{4g}$, $T = \sqrt{2} \frac{\vartheta_0}{g}$.)

9-masala. Nuqta $x = a \sin kt$ qonunga muvofiq garmonik tebranma harakat qiladi. $x = x_1$ bo'lganda $\vartheta = \vartheta_1$ va $x = x_2$ da esa $\vartheta = \vartheta_2$ deb olib, tebranishlar amplitudasi a va doiraviy chastotasi k aniqlansin?

(javob: $a = \sqrt{\frac{\vartheta_1^2 x_2^2 - \vartheta_2^2 x_1^2}{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}}$, $k = \sqrt{\frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.)

10-masala. Ellipsograf lineykasining uzunligi $AB=40$ sm, krivoshipning uzunligi $OC=20$ sm, $AC=CB$. Krivoship O atrofida ω burchak tezlik bilan bir tekis aylanadi. Lineykaning A uchidan $MA=10$ sm masofada yotuvchi M nuqtaning trayektoriyasi bilan tezlik godografi tenglamalari topilsin?

(javob: $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} = 1, \frac{x^2}{900\omega^2} + \frac{y^2}{100\omega^2} = 1$)

11-masala. Tik qirg'og'dagi uchta punktdan $50, 75$ va 100 m/s ga teng bo'lgan gorizont tezlik bilan bir vaqtda otilgan uchta o'q suvga bir vaqtda tushadi. Shu punktlarning suv sathidan balandliklari h_1, h_2 va h_3 aniqlansin. Birinchi o'q tushgan nuqtadan qirg'oqgacha bo'lgan masofa 100 m ga teng. Faqat og'irlik kuchining tezlanishi $g=9,81$ m/s² e'tiborga olinsin. Shuningdek, o'qlarning uchish vaqti T va ularning suvga tushish paytdagi ϑ_1, ϑ_2 va ϑ_3 tezliklari aniqlansin ?

(javob: $h_1 = h_2 = h_3 = 19,62$ m, $T = 2$ s, $\vartheta_1 = 53,71$ m/s, $\vartheta_2 = 77,52$ m/s, $\vartheta_3 = 101,95$ m/s)

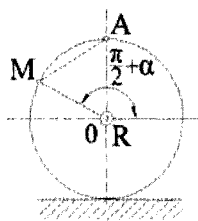
12-masala. O'qi gorizont bilan 30° burchak tashkil qilgan to'pdan 500 m/s tezlik bilan snaryad otiladi. Snaryad faqat $g=9,81$ m/s² og'irlik kuchi tezlanishga ega deb faraz qilib, uning tezlik godografi va godograf chizuvchi nuqtaning tezligi topilsin?

(javob: Godograf – koordinatalar boshidan 432 m/s narida turuvchi vertikal to'g'ri chiziq kesmasi $\vartheta_1 = 9,81$ m/s²).

13-masala. Radiusi $R=1$ m bo'lgan elektrovoz g'ildiragining o'qdan $a=0,5$ m narida yotuvchi nuqtasining harakat tenglamalari va trayektoriyasi aniqlansin. G'ildirak gorizont va to'g'ri chizikli yo'lda sirg'anmasdan g'ildirab boradi. G'ildirak o'qining tezligi $\vartheta=10$ m/s. Ox o'q rels bilan ustma-ust tushadi, Oy o'q nuqtaning boshlang'ich pastki holatidagi radiusga

mos keladi. Shuningdek, g'ildirakning shu nuqta yotgan diametri gorizont va vertikal holatni egal-lagan paytlarda nuqta tezligining qancha bo'lishi aniqlansin?

(javob: qisqartirilgan sikloida
 $x = 10t - 0,5\sin 10t$, $y = 1 - 0,5\cos 10t$. Tezlik: 11,18 m/s, 5 m/s, 15 m/s)



7.16-rasm

14-masala. Elektrovozning tezligi $\vartheta_0 = 72 \text{ km/soat}$, g'ildiragining radiusi $R = 1\text{m}$. G'ildirak to'g'ri chiziqli temir izda sirpanmasdan g'ildirab boradi.

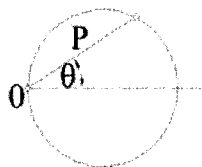
1) G'ildirak gardishidagi M nuqtaning radiusi ϑ_0 tezlik yo'nalishi bilan $\frac{\pi}{2} + \alpha$ burchak hosil qilgan paytda shu nuqta ϑ tezligining miqdori va yo'nalishi aniqlansin (7.16-rasm)

2) M nuqtaning tezlik godografi chizilsin va godograf chizuvchi nuqtaning ϑ_1 tezligi aniqlansin (7.17-rasm).

(javob: 1. Tezlik $\vartheta = 40\cos\frac{\alpha}{2} \text{ m/s}$, va MA to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan.

2. $\rho = 2\vartheta_0 \cos\theta$ (bunda $\theta = \frac{\alpha}{2}$) radiusi $r = \vartheta_0$ bo'lgan

aylana; $\vartheta_1 = \frac{\vartheta_0^2}{R} = 400\text{m/s}^2$)



7.17-rasm

15-masala. Vagon g'ildiragida o'qdan $a=0,6\text{m}$ masofada bo'lgan va boshlang'ich paytda relsdan $0,1\text{m}$ pastda turgan M nuqtaning harakat tenglamalari va trayektoriyasi aniqlansin. Vagon g'ildiragining radiusi $0,5\text{m}$. Vagon to'g'ri chiziqli yo'lda $\vartheta=10\text{m/s}$ tezlik bilan harakat qiladi. Shuningdek, shu nuqta o'zining eng pastki va yuqorigi holatidan o'tgandagi vaqtlar va bu paytlardagi nuqta tezligining Ox va Oy o'qlardagi

proyeksiyalari topilsin. Ox o'q rels bo'ylab yo'nalgan. Oy o'q nuqtaning boshlang'ich pastki holatidan o'tadi.

(javob: cho'ziq sikloida: $x = 10t - 0,6 \sin 20t$ $y = 0,5 - 0,6 \cos 20t$ $t = \frac{\pi k}{10} s$ bo'lganda nuqta pastki

holatda bo'ladi $\vartheta_x = -2 m/s, \vartheta_y = 0, t = \frac{\pi}{20}(1+2k)s$ bo'lganda nuqta yuqorigi holatni egallaydi, $\vartheta_x = 22 m/s, \vartheta_y = 0$ bunda $k = 0, 1, 2, 3, \dots$).

16-masala. Kopyor to'qmog'i qoziqqa urilib to'xtaguncha qoziq bilan birga $0,02 s$ mobaynida harakat qiladi, bunda qoziq yerga $6 sm$ kiradi. Qoziq harakatini tekis sekinlanuvchan harakat deb hisoblab, qoziqning boshlang'ich tezligi topilsin.

(javob: $6 m/s$)

17-masala. Samolyotning yerga qo'nish tezligini $400 km/soat$ deb hisoblab, qo'nish vaqtida samolyotning $l=1200m$ li yo'lda sekinlanishi aniqlansin. Sekinlanish doimiy deb hisoblansin.

(javob: $a = 5,15 m/s^2$)

18-masala. Kopyor to'qmog'i $2,5 m$ balandlikdan pastga tushadi, uni o'sha balandlikka ko'tarish uchun, shuncha joydan tushishiga qaraganda uch marta ko'proq vaqt ketadi. Agar kopyor to'qmog'i pastga $g = 9,81 m/s^2$ tezlanish bilan erkin tushadi deb hisoblansa, u bir minutda necha marta uradi.

(javob: $21 zarba$)

19-masala. Polzun to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchi bo'ylab $a_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t m/s^2$ tezlanish bilan harakat qiladi. Agar polzun ning boshlang'ich tezligi $\vartheta_{0x} = 2\pi m/s$ boshlang'ich holati esa polzunning koordinata boshi deb qabul qilingan o'rta holatiga to'g'ri kelsa, polzun harakatining tenglamasi topilsin. Masofa, tezlik va tezlanish egri chiziqlari chizilsin.

(javob: $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t m.$)

20-masala. Poyezd stansiyadan jo'naganda tezligi bir tekis ortib, 3 minutdan keyin 72 km/soatga yetadi. Yo'l, radiusi 800m bo'lgan burilishda joylashgan. Stansiyadan jo'nagan paytdan 2 minut keyin poyezdning urinma, normal va to'la tezlanishi aniqlansin.

(javob: $a_r = \frac{1}{9} m/s^2$, $a_n = \frac{2}{9} m/s^2$, $a = 0,25 m/s^2$)

21-masala. Radiusi $R = 800m$ bo'lgan aylana yoyi bo'ylab poyezd tekis sekinlanuvchan harakat qiladi va $s = 800 m$ yo'l bosadi. Uning boshlang'ich tezligi $g_0 = 54 km/soat$ va oxirgi tezligi $g = 18km/soat$. Poyezdning yoy boshidagi va oxiridagi to'la tezlanishi, shuningdek shu yoy bo'ylab qancha vaqt harakatlanishi aniqlansin.

(javob: $a_0 = 0,308 m/s^2$, $a = 0,129 m/s^2$, $T = 80s$).

22-masala. Radiusi $R = 20 sm$ bo'lgan aylana yoyi bo'ylab nuqta harakatlanadi. Uning trayektoriya bo'ylab harakat qilish qonuni: $s = 20 \sin \pi t$ (t -sekundlar, s - santimetrlar hisobida). $t = 5 s$ bo'lgan payt uchun nuqta tezligining miqdori va yo'nalishi, urinma, normal va to'la tezlanishi topilsin? Shuningdek, tezlikning, urinma va normal tezlanishlarning grafiklari chizilsin.

(javob: Tezlik miqdori $20\pi sm/s$ ga teng bo'lib, s yoyini hisoblashning musbat yo'nalishiga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan: $a_r = 0$, $a = a_n = 20\pi^2 sm/s^2$)

23-masala. Nuqta $s = \frac{g}{a^2}(at + e^{-at})$ qonunga muvofiq to'g'ri chiziqli harakat qiladi, bunda a va g - doimiy miqdorlar. Nuqtaning boshlang'ich tezligi, shuningdek, uning tezlanishi $g_0 = 0$, a^1 tezlikning funksiyasi sifatida aniqlansin.

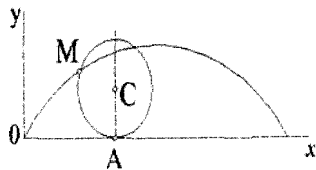
(javob: $g_0 = 0$, $a^1 = g - a g$)

24-masala. Ishga tushirish davrida dizel krivoshi paletsining harakati $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \sin 4t^2$ (x , y - santimetrlar, t - sekundlar hisobida)

ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan. Paletsning tezligi, urinma va normal tezlanishi topilsin.

(javob: $v = 600t \text{ sm/s}$, $a_t = 600 \text{ sm/s}^2$, $a_n = 4800t^2 \text{ sm/s}^2$)

25-masala. Ox gorizontal o'q bo'ylab sirpanmasdan dumalovchi g'ildirak nuqtasi tezlanishining miqdori va yo'nalishi hamda trayektoriyasining egrilik radiusi topilsin (7.18-rasm). Nuqta quyidagi tenglamalarga asosan sikloida chizadi



7.18-rasm

$x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$ (t - sekundlar,

x va y metrlar hisobida). Shuningdek $t=0$ bo'lganda egrilik radiusi aniqlansin?

(javob: Tezlanish $a = 400 \text{ m/s}^2$, bo'lib dumalovchi g'ildirakning C markaziga MC bo'ylab yo'nalgan $\rho = 2MA$, $\rho_0 = 0$).

26-masala. Nuqta $x = 2 \cos 4t$, $y = 2 \sin 2t$, $z = 2t$ tenglamalar bilan ifodalanadigan vint harakati qiladi, bunda uzunlik birligi uchun metr olingan. Trayektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin?

(javob: $\rho = 2\frac{1}{8} \text{ m}$)

VIII BOB. QATTIQ JISM KINEMATIKASI.

8.1 Qattiq jismning ilgarilanma harakati

Barcha qattiq jismlarni kinematikada ham statikadagi kabi absolyut qattiq jism deb qaraladi. Qattiq jism kinematikasida uchraydigan masalalar ikki qismga bo'linadi:

- 1) butun jismning harakati va bu harakatning kinematik xarakteristikalarini aniqlash;
- 2) jism har bir nuqtasining harakatini o'rganish.

Dastlab qattiq jismning ilgarilanma harakatini o'rganishdan boshlaymiz.

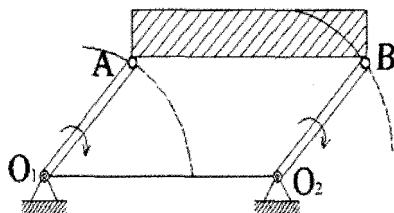
Jismda olingan har qanday kesma jism harakati davomida hamma vaqt o'z-o'ziga parallel ko'chsa., jismning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi.

Ilgarilanma harakatni to'g'ri chiziqli harakat bilan almashtirish kerak. Masalan, to'g'ri chiziqli relsda harakatlanayotgan vagon kuzovining harakati ilgarilanma harakat bo'lib kuzov nuqtalarining trayektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat.

AB sparnik O_1A va O_2B krivoshiplari atrofida aylanishi natijasida ilgarilanma harakat qiladi. AB sparnik hamma vaqt o'z-o'ziga parallel ko'chadi. Sparnikning A va B nuqtalari markazlari O_1 , O_2 nuqtalarda yotgan aylanalar chizadi. Bu holda sparnikning nuqtalari aylana bo'ylab harakat qiladi (8.1- rasm).

Ilgarilanma harakatning xossalari quyidagi teoremdan aniqlanadi.

Teorema. Ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi va har onda moduli va yo'nalishi bir xil bo'lgan tezlik va tezlanishlarga ega bo'ladi.

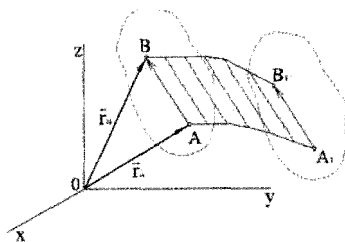


8.1-rasm

Isbot. Teoremani isbotlash uchun Oxyz koordinata sistemasiga nisbatan ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismni ko'rib chiqamiz. Qattiq jismdan ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalarni olamiz. Vaqtning t paytida ularning holatlari tegishli \vec{r}_A va \vec{r}_B radius-vektorlar orqali aniqlansin (8.2-rasm). Bu nuqtalarni tutashtiruvchi \overline{AB} vektorni o'tkazamiz, u holda

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (8.7)$$

Qattiq jism absolyut qattiq jism bo'lganligi uchun \overline{AB} – vektor o'zgarmas kattalik, shuningdek qattiq jism ilgarilanma harakatlanayotgani uchun uning yo'nalishi ham o'zgarmaydi. Shunday qilib qattiq jism harakatlanayotganida \overline{AB} vektor o'zgarmaydi ($\overline{AB} = const$). Demak A va B nuqtalarning trayektoriyalari bir xil egri chiziqdan iborat. A va B nuqtalarning tezliklarini topish uchun (8.1) tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:



8.2-rasm

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

\overline{AB} o'zgarmas bo'lgani uchun uning hosilasi nolga teng. \vec{r}_A va \vec{r}_B radius – vektorlarning vaqt bo'yicha olingan hosilalari A va B nuqtalar tezliklarini beradi, ya'ni

$$\vec{g}_A = \vec{g}_B$$

Vaqtning istalgan payti uchun A va B nuqtalarning tezliklarining moduli va yo'nalishi bir xil bo'ladi. Oxirgi tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\frac{d\vec{g}_A}{dt} = \frac{d\vec{g}_B}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Demak, vaqtning istalgan paytida A va B nuqtalar tezlanishlarining modullari ham yo'nalishlari ham bir xil bo'ladi.

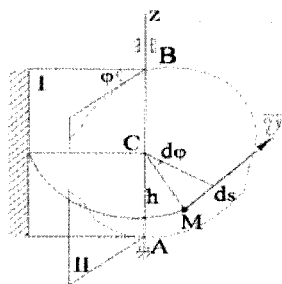
A va B nuqtalar ixtiyoriy tanlangan edi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki vaqtning istalgan paytida jismning barcha nuqtalarining trayektoriyalari, shuningdek tezlik va tezlanishlari bir xil bo'ladi. Shunday qilib teorema isbotlandi.

Teoremadan yana shu narsani bilib olish mumkinki, qattiq jismning ilgariylanma harakatini uning bitta nuqtasi harakati orqali aniqlab olish mumkin. Yana shu narsani ta'kidlash lozimki, tezlik va tezlanish tushunchalari faqat jismning ilgariylanma harakati uchun taaluqli. Qolgan barcha hollar uchun qattiq jism nuqtalari turli xil tezlik va tezlanishlar bilan harakatlanadi.

Qattiq jismning bunday harakatlarida "jismning tezligi", yoki "jismning tezlanishi" degan terminlar mazmunini yo'qotadi.

8.2 Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakati

Qattiq jismning qandaydir ikkita nuqtasi uning harakati davomida qo'zg'almasdan qolsa, bunday harakatga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat deyiladi. Qo'zg'almas A va B nuqtalar orqali o'tuvchi AB to'g'ri chiziqqa aylanish o'qi deyiladi. Aylanma harakatda qattiq jismning o'q ustida yotgan barcha nuqtalari qo'zg'almas bo'ladi. Jismning qolgan barcha nuqtalari, aylanish o'qiga perpendikulyar tekislikda markazi aylanish o'qida yotgan aylanalar chizadi. Aylanma harakat qilayotgan jismning



8.3-rasm

holatini aniqlash uchun aylanish o'qi orqali qo'zg'almas I tekislik, qattiq jismga birlashtirilgan va u bilan birgalikda aylanuvchi II tekislikni o'tkazamiz (8.3-rasm). Qattiq jismni vaqtning istalgan paytdagi holati tekisliklar orasidagi burilish burchagi deb ataluvchi φ burchak orqali aniqlanadi. φ burchak musbat yoki manfiy ishorada bo'lishi mumkin. Az o'qning musbat uchidan qaraganimizda qattiq jism o'q atrofida soat mili aylanishiga teskari

yoʻnalishda aylansa, burilish burchagi musbat, aks holda manfiy ishorada olinadi.

Burilish burchagi φ —radianlarda oʻlchanadi. Jismni vaqtning istalgan paytidagi holatini aniqlash uchun burilish burchagi φ ning t vaqtga bogʻliqligini bilish zarur, yaʼni:

$$\varphi = f(t) \quad 8.2$$

(8.2) qattiq jismning qoʻzgʻalmas oʻq atrofidagi aylanma harakati tenglamasi.

Qattiq jism aylanma harakatining kinematik xarakteristikalarini aniqlashga oʻtamiz. Vaqtning t paytidagi burilish burchagi φ boʻlib, vaqtning $t_1 = t + \Delta t$ paytida burilish burchagi $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ ga teng boʻlsin. Qattiq jism Δt vaqt oraligʻida $\Delta\varphi$ burchakka buriladi. Burilish burchagi $\Delta\varphi$ ning Δt ga nisbati oʻrtacha burchak tezlik deyiladi.

$$\omega_{o'rt.} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Jismning qoʻzgʻalmas oʻq atrofidagi aylanma harakatining berilgan ondagi burchak tezligini topish uchun oʻrtacha burchak tezligining Δt nolga intilgandagi limitini olamiz.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (8.3)$$

Shunday qilib, jismning burchak tezligi burilish burchagidan vaqt boʻyicha olingan birinchi hosilasiga teng. Qattiq jism oʻq atrofida soat mili aylanishiga teskari yoʻnalishda aylanayotgan boʻlsa $\omega > 0$, soat mili aylanishi boʻyicha aylanayotgan boʻlsa $\omega < 0$ boʻladi. burchak tezligining oʻlchami $\frac{1}{t}$ yoki $\frac{1}{vaqt}$. Oʻlchov birligi $\frac{1}{s}$, (s^{-1}). Chunki radian oʻlchamsiz kattalik.

Burchak tezlik vektor koʻrinishda ifodalanadi. Uning moduli $|\vec{\omega}|$ ga teng. Burchak tezlik vektori jismning aylanish oʻqi boʻylab yoʻnalgan va

uning musbat yoʻnalishidan qaralganda aylanish soat mili aylanishiga teskari yoʻnalgan boʻladi.

Burchak tezlanish, burchak tezligini vaqtga bogʻliq ravishda oʻzgarishini xarakterlovchi kattalik.

Vaqtning t paytida jismning burchak tezligi ω vaqtning $\Delta t = t_1 + \Delta t$ paytida burchak tezligi ω_1 boʻlsin $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oraligʻida jism burchak tezligi orttirmasa $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$ ga teng boʻladi. $\Delta\omega$ ning Δt ga nisbati jismning shu vaqtdagi oʻrtacha burchak tezlanishi deyiladi.

$$\varepsilon_{o'rt.} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Oʻrtacha burchak tezlanishining Δt nolga intilgandagi limiti jismning berilgan ondagi burchak tezlanishi deyiladi.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

(8.3) ni eʼtiborga olsak

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad (8.4)$$

koʻrinishda yoziladi.

Shunday qilib jismning berilgan ondagi burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqt boʻyicha olingan birinchi hosilasiga, burilish burchagidan vaqt boʻyicha olingan ikkinchi hosilasiga teng.

Oʻlchami $\frac{1}{t^2}$ yoki $\frac{1}{vaqt^2}$, oʻlchov birligi $\frac{rad}{s^2}$ yoki $\frac{1}{s^2}$ (s^{-2})

Agar vaqt oʻtishi bilan burchak tezligining moduli ortib borsa, jismning aylanishi tezlanuvchan aylanma harakat, kamaya borsa, sekinlanuvchan aylanma harakat boʻladi. ω va ε bir hil ishorada boʻlsa aylanma harakat tezlanuvchan, har xil ishorada sekinlanuvchan boʻladi.

Burchak tezlanishi ham vektor koʻrinishda ifodalanadi. Bu holda u quyidagicha ifodalanadi.

$$\varepsilon = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (8.5)$$

Agar jism tezlanuvchan aylanayotgan bo'lsa $\bar{\varepsilon}$ va $\bar{\omega}$ vektorlar bir tomonga yo'nalgan bo'ladi sekinlanuvchan aylanma harakatda esa $\bar{\varepsilon}$ va $\bar{\omega}$ vektorlari qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

8.3 Tekis va tekis o'zgaruvchan aylanma harakat

Jism harakati davomida uning burchak tezligi o'zgarmay qolsa ($\omega = \text{const}$), jismning bunday aylanishiga tekis aylanma harakat deyiladi. Tekis aylanma harakat qonunini aniqlaymiz. (8.3) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$d\varphi = \omega dt$$

Tenglikning chap tomonini φ_0 dan φ gacha, o'ng tomonini 0 dan t chegaralarda integrallaymiz.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt \text{ yoki: } \varphi - \varphi_0 = \omega t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (8.6)$$

Bu jismning tekis aylanma harakat tenglamasi.

agar $\varphi_0 = 0$ bo'lsa, $\varphi = \omega t$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (8.7)$$

Texnikada ko'pincha, jism tekis aylanma harakat qilayotgan bo'lsa, u minutdagi aylanishlar soni bilan ifodalanadi. Jism bir marta to'liq aylanganda burilish burchagi $\varphi = 2\pi$ bo'ladi. Jism bir minutda n marta aylansa, tekis aylanma harakat burchak tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 \pi s^{-1} \quad (8.8)$$

Jism harakati davomida burchak tezlanishi o'zgarmay qolsa ($\varepsilon = \text{const}$) uning bunday harakatiga tekis o'zgaruvchan aylanma harakat deyiladi.

Buning uchun (8.5) tenglikning quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$d\omega = \varepsilon dt$$

tenglikning chap tomonini ω_0 dan ω gacha, o‘ng tomonini 0 dan t gacha chegaralarda integrallaymiz.

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$$

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (8.9)$$

(8.9) ifodani quyidagi ko‘rinishda keltiramiz.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon t \\ d\varphi &= \omega_0 dt + \varepsilon t dt \end{aligned}$$

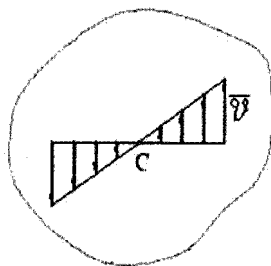
Tenglikni ikkinchi marta integrallaymiz.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (8.10)$$

Bu jismning tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi.

8.4 Aylanma harakat qilayotgan jism nuqtasining tezlik va tezlanishi

Qattiq jismning aylanish o‘qidan h masofada joylashgan M nuqtasini ko‘rib chiqamiz. Jism aylanma harakatlanayotganida, M nuqta aylanish o‘qiga perpendikulyar tekislikda radiusi h ga teng bo‘lgan markazi aylanish o‘qida yotgan aylana chizadi. Jism dt vaqt oralig‘ida $d\varphi$ burchakka burilsa, M nuqta aylana bo‘ylab harakatlanib $ds = hd\varphi$ yoy koordinatasini o‘tadi.



8.4-rasm

U holda nuqtaning tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

yoki

$$\vartheta = \omega \cdot h \quad (8.11)$$

Ayrim hollarda $\bar{\vartheta}$ tezlikni chiziqli tezlik deb ham ataydilar.

Shunday qilib, aylanma harakat qilayotgan qattiq jism nuqtasining tezligi miqdor jihatdan jism burchak tezligini aylanish o'qidan nuqtagacha bo'lgan masofaga bo'lgan ko'paytmaga teng. Nuqtaning chiziqli tezligi nuqta chizayotgan aylanaga harakat yo'nalishi bo'yicha o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'naladi.

Jism barcha nuqtalarining burchak tezliklari har onda o'zaro teng bo'ladi. Shu sababli qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalarining chiziqli tezliklari mazkur nuqtalardan aylanish o'qiga bo'lgan masofalarga proporsional bo'ladi (8.4-rasm).

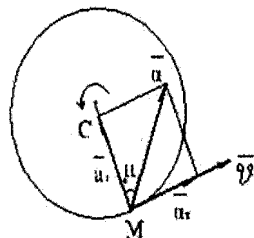
M nuqtaning tezlanishini $a_r = \frac{d\vartheta}{dt}$ va $a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}$ formulalar yordamida aniqlaymiz. $\rho = h$ deb olib, ϑ tezlikning (8.11) tenglikdagi qiymatini yuqoridagi tengliklarga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz.

$$a_r = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h}$$

yoki

$$a_r = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2 \quad (8.12)$$

Urinma tezlanish \bar{a}_r nuqtaning traektoriyasiga urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (tezlanuvchan aylanma harakatda nuqtaning harakat yo'nalishi bilan, sekinlanuvchan aylanma harakatda esa unga teskari yo'nalgan bo'ladi); normal tezlanish \bar{a}_n doimo MC radius bo'ylab aylanish o'qi tomon yo'nalgan bo'ladi (8.5-rasm).



8.5-rasm

M nuqtaning to'liq tezlanishi va yo'nalishi quyidagi ifodalar yordamida aniqlanadi.

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (8.12)$$

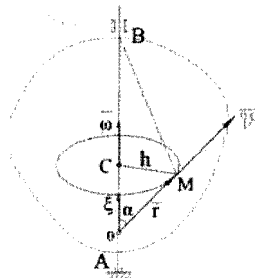
$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_r}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (8.13)$$

M nuqtani AB aylanish o'qida yotgan O nuqta bilan tutashtirib \bar{r} radius-vektorini o'tkazamiz (8.6- rasm) va $h = r \sin \alpha$ tenglikni (8.11) ga qo'yamiz.

$$|\mathcal{G}| = |\omega|h = |\omega|r \sin \alpha \quad \text{yoki} \quad |\mathcal{G}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$$

$[\bar{\omega} \times \bar{r}]$ vektorining moduli M nuqtaning tezligi moduliga teng $[\bar{\omega} \times \bar{r}]$ vektor bilan $\bar{\mathcal{G}}$ vektorining yo'nalishi ustma-ust tushadi, demak

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (8.14)$$



8.6-rasm

Aylanma harakat qilayotgan jismning istalgan nuqtasining tezlik vektori jismning burchak tezligi bilan shu nuqta radius-vektorining vektorial ko'paytmasiga teng. (8.14) formulaga Eylér formulasi deyiladi.

(8.14) tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$a = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{\mathcal{G}}) \quad (8.15)$$

(8.15) tenglama aylanma harakat qilayotgan jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish vektorini aniqlash formulasi. (8.15) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qavs urinma tezlanish, ikkinchi qavs esa normal tezlanish ekanligini e'tiborga olsak quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \bar{a}_r &= \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \\ \bar{a}_n &= \bar{\omega} \times \bar{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Qattiq jismning qanday harakatiga ilgariylanma harakat deyiladi va bu harakatning asosiy xususiyatlari?
2. Qattiq jismning qanday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat deyiladi?
3. Aylanma harakat tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning burchak tezlik va burchak tezlanish modullari qanday formula bilan aniqlanadi?
5. Qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat qilayotgan qattiq jism burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlari qanday yo'nalgan bo'ladi?
6. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning chiziqli tezligi qanday formula orqali ifodalanadi?
7. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning chiziqli tezlanishi qanday formula orqali ifodalanadi?
8. Eyler formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
9. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlik vektori qanday ifodalanadi?
10. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanish vektori qanday ifodalanadi?

8.5 Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar

1-masala. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi maxovikning aylanish o'qidan $r = 0,3m$ masofadagi nuqtasi $S = 3t + t^3$ qonunga muvofiq harakat qiladi. (S -metrda, t -sekundda) $t_1 = 3s$ bo'lgan paytda maxovikning burchak tezligi va tezlanishi topilsin.

Yechilishi: r radiusli aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqta tezligining moduli

$$g = \frac{dS}{dt}$$

tenglamadan foydalanib topiladi.

$$g = \frac{dS}{dt} = \frac{d(3t + t^3)}{dt} = 3 + 3t^2$$

Nuqtaning urinma tezlanishining moduli $a_r = \frac{d\vartheta}{dt}$ orqali topilishini inobatga olsak uning qiymati

$$a_r = 6t$$

Nuqta tezligi va urinma tezlanishlarining modullari burchak tezlik va burchak tezlanishlar orqali ifodalanadi, ya'ni

$$\vartheta = \omega r, \quad a_r = \varepsilon r$$

Bu formulalardan ϑ , a_r larni aniqlab vaqtning 3 s holatini qo'yamiz.

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3(1+t^2)}{0,3} = 10(1+t^2) \quad \varepsilon = \frac{6t}{0,3} = 20t$$

Tegishli amallarni bajarsak burchak tezlik va burchak tezlanish qiymatlarini aniqlaymiz. Unga ko'ra $\omega = 100 \frac{1}{s}$ $\varepsilon = 60 \frac{1}{s^2}$ ga teng bo'ladi.

2-masala. Barabanga o'ralgan AB ipning uchiga osilgan A yuk tinch holatdan tekis tezlanuvchan harakatlanib pastga tushishi natijasida, baraban aylanma harakatga keladi. 3 s ichida baraban 9 marta aylanadi. Barabanning diametri $D=30$ sm bo'lsa 5 – s oxirida baraban chetidagi nuqtani va A yukning tezligi va tezlanishini aniqlang (8.7-rasm).

Yechilishi: Masalani shartiga ko'ra $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$ u holda tekis tezlanuvchan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (1)$$

$$\omega = \varepsilon t \quad (2)$$

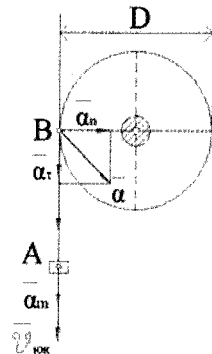
$t=3$ s ichida baraban 9 marta aylanadi va $\varphi = 2\pi N$ burchakka o'zgaradi. (1) dan

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{4\pi \cdot 9}{9} = 2 \frac{ayl}{c^2} = 4\pi s^{-2}$$

5 s oxirida barabanning burchak tezligi

$$\omega = 4\pi \cdot 5 = 20\pi s^{-1}$$

Barabanning B nuqtasining tezligi yukning tezligiga teng bo'ladi.



8.7-rasm

$$g = R\omega = 0,15 \cdot 20\pi = 9,42 \frac{m}{s}$$

Yukning tezlanishi B nuqtaning urinma tezlanishiga teng.

$$a_r = R\varepsilon = 0,15 \cdot 4\pi = 1,88 \frac{m}{s^2}$$

B nuqtaning normal tezlanishi

$$a_n = R\omega^2 = 0,15 \cdot 400\pi^2 = 591,6 \frac{m}{s^2}$$

B nuqtaning to'liq tezligi

$$a = \sqrt{a_r + a_n^2} = \sqrt{1,88^2 + 591,6^2} \approx 591,6 \frac{m}{s^2}$$

3-masala. $n=90 \frac{ayl}{min}$ burchak tezlik bilan aylanayotgan val dvigatel o'chirilgandan so'ng tekis sekinlanuvchan harakatlanib $t_1=40$ s dan so'ng to'xtaydi. Shu vaqt oralig'ida val necha marta aylangan.

Yechilishi: Val tekis sekinlanuvchan aylanma harakat qilayotganligi sababli $\varphi_0 = 0$, u holda

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

Valning dvigatel o'chirilishida qanday burchak tezlik bilan aylanayotgan bo'lsa, shu burchak tezlik uning boshlang'ich burchak tezligidan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$$

Valning to'xtash $t=t_1$ paytdagi burchak tezligi $\omega=0$ bo'ladi. U holda (1) ning ikkinchi tengligi quyidagi ko'rinishni oladi.

$$0 = \frac{\pi n}{30} + \varepsilon t \quad \text{bundan} \quad \varepsilon = -\frac{\pi n}{30 \cdot t_1}$$

Dvigatel o'chirilgandan so'ng valning aylanishlar sonini N bilan belgilaymiz (n bilan N ni aralashtirib yubormaslik kerak), u holda valning shu paytdagi burilish burchagi $\varphi_1 = 2\pi N$. ε va φ_1 larning bu qiymatlarini (1) ning birinchi tengligiga qo'yamiz.

$$2\pi N = \left(\frac{\pi n}{30}\right)t_1 - \left(\frac{\pi n}{60}\right)t_1 = \frac{\pi n}{60}t_1$$

bundan

$$N = \frac{nt_1}{120} = 30 \text{ ayl}$$

4-masala. Radiusi $R=0,6$

m bo'lgan maxovik $n=90$ ayl/min tezlik bilan tekis aylanma harakat qilmoqda. Shu maxovikning gardishidagi nuqtaning tezlik va tezlanishi aniqlansin.

Yechilishi: Maxovikning gardishidagi tezlik $\vartheta = \omega R$ formula orqali hisoblanadi. Masalada, burchakli tezlik ayl/min - larda berilgan, shu sababli uni rad/s -larga aylantiramiz. U holda $\omega = \frac{\pi n}{30} = 3\pi$ va $\vartheta = 3\pi R \approx 5,7 \text{ m/s}$

$\omega = \text{const}$ bo'lgani uchun $\varepsilon = 0$ va $a_r = \varepsilon \cdot R = 0$ bo'ladi, shunga ko'ra,

$$a = a_n = \omega^2 \cdot R = 9\pi^2 \cdot R \approx 53,3 \text{ m/s}^2$$

Nuqtaning tezlanish vektori M nuqtadan aylanish o'qiga qarab yo'nalgan bo'ladi.

5-masala. Tinch holatda bo'lgan val tekis tezlanish bilan aylana boshlaydi. Birinchi 5 sekundda u 12,5 marta aylanadi. Shu 5 s o'tgandan so'ng uning burchak tezligi qancha bo'ladi?

Yechilishi: Dastavval, valning 5 sekunddagi tezlanishini aniqlaylik. $\varphi_0 = 0$ ekanligini hisobga olsak

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

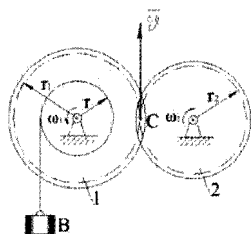
$$12,5 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{\varepsilon \cdot 25}{2}$$

$\varepsilon = 2\pi \text{ rad/s}^2$ ekanligini ko'rish mumkin.

Jismning burchak tezligi aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan hosilaga tengligidan

$$\omega = \dot{\varphi} = \varepsilon t_{t=5s} = 10 \cdot \pi \text{ rad/s.}$$

6-masala. B yuk radiusi r -ga teng bo'lgan valni aylanma harakatga keltirmoqda, bu val esa radiusi r_1 - teng bo'lgan tishli g'ildirak 1 -ga mahkamlangan bo'lib ular bitta o'q atrofida aylanma harakat qiladilar. Yukning boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lib, o'zgarmas a -tezlanish bilan harakat qilmoqda. 1 -tishli g'ildirak bilan tishlashib turgan r_2 - radiusli shesternya 2 -ning harakat qonuni aniqlansin (8.8-rasm).



8.8-rasm

Yechilishi: B yukning boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lgani uchun ixtiyoriy vaqtdagi tezligi ($v_B = at$) -qonun orqali aniqlanadi. 1 - g'ildirakning gardishidagi nuqtalar ham xuddi shunday chiziqli tezlik bilan harakat qiladilar. Ikkinchi tomondan olsak 1 -g'ildirakning gardishidagi nuqtalarning tezliklari $r\omega_1$ -ga teng bo'ladi, bu erda ω_1 - val bilan 1 - g'ildirakning burchakli tezligi. Demak,

$$r\omega_1 = at,$$

bundan

$$\omega_1 = at/r$$

bo'ladi. Endi 2 - shesternyaning burchakli tezligini aniqlaymiz. 1 -g'ildirak bilan 2 -shesternyalar tishlashib turgan C nuqtaning tezliklari o'zaro teng bo'lganliklari sababli

$$v_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

bundan

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 = \frac{r_1 a}{r_2 r} t$$

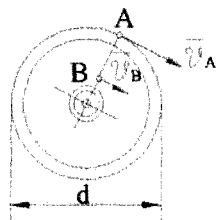
Shunday qilib 2 -shesternyaning burchakli tezligi vaqtga proporsional ravishda o'zgarar ekan. $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$ (φ_2 - 2 shesternyaning burilish burchagi) ekanligidan foydalanib,

$$d\varphi_2 = \frac{r_1 a}{r_2 r} t dt$$

aniqlaymiz. So'ngra $t=0$ da $\varphi_2=0$ ekanligini e'tiborga olib, oxirgi tenglamaning ikkala tarafini integrallab, 2-shesternyaning tekis o'zga-ruvchan aylanma harakat qonunini keltirib chiqaramiz.

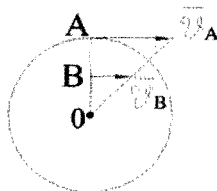
$$\varphi_2 = \frac{r_1 a}{2r_2 r} t^2$$

7-masala. Shkivning gardishidagi A nuqta 50 sm/s tezlik bilan harakat qiladi. A nuqta bilan bir radiusda yotuvchi boshqa B nuqta esa 10 sm/s tezlik bilan harakatlanadi; AB masofa 20 sm ga teng. Shkivning burchak tezligi ω hamda diametri aniqlansin (8.9-rasm).



8.9-rasm

Yechilishi: Chizmadan ko'rinib turibdiki, biz uchun dastavval shkivning radiusini topib olish muhim ahamiyat kasb etadi. Biz o'rganishimiz zarur bo'lgan har ikkala nuqta ham bir shkivga tegishli ekanligidan bu nuqtalarning doiraviy aylanish chastotalari bir xil bo'ladi (8.10-rasm).



8.10-rasm

Shuni inobatga olgan holda quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{v_A}{AO} = \frac{v_B}{BO} = \frac{v_A - v_B}{AB}$$

$$\text{Bundan } AO = AB \frac{v_A}{v_A - v_B} = 20 \cdot \frac{50}{40} = 25 \text{ sm}$$

diametr radiusning ikkilanganiga teng

$$d = 2 \cdot AO = 50 \text{ sm}$$

burchak tezlik

$$\omega = \frac{v_A}{AO} = 2 \text{ rad/s}$$

ga tengdir.

8-masala. Radiusi $R=2m$ bo'lgan maxovik tinch holatdan boshlab tekis tezlanish bilan aylanadi; to'g'inda yotuvchi nuqtalar $t=10$ s dan keyin $g=100\text{ m/s}$ chiziqli tezlikka ega bo'ladi. G'ildirak to'g'indagi nuqtaning $t=15$ s bo'lgan vaqtdagi tezligi, urinma va normal tezlanishlari topilsin.

Yechilishi: Ushbu masala shartiga binoan $\varphi_0=0$ $\omega_0=0$ u holda tekis tezlanuvchan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \varepsilon t$$

Maxovikning aylanish tezligi

$$g = R \cdot \omega$$

$\omega = \varphi = \varepsilon t$ ekanligini inobatga olgan holda to'g'indagi nuqtalar 10 s keyin quyidagi tezlanishga ega bo'ladi

$$\varepsilon = \frac{100}{20} = 5\text{ rad/s}^2$$

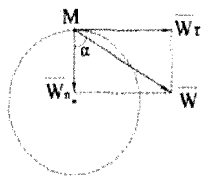
endi nuqtaning 15 sekunddagi tezligini aniqlashimiz mumkin:

$$g = \omega \cdot R = \varepsilon \cdot t \cdot R = 2 \cdot 5 \cdot 15 = 150\text{ m/s}$$

Masalani yechish uchun kerak qo'shimcha kattaliklar ma'lum bo'ldi. Endi ulardan foydalangan holda urinma va normal tezlanishlarni aniqlay olamiz:

$$a_n = \frac{g^2}{R} = \frac{150^2}{2} = 1125\text{ m/s}^2 \quad a_r = \varepsilon \cdot R = 5 \cdot 2 = 10\text{ m/s}^2$$

9-masala. Maxovik to'g'indagi nuqtaning to'la tezlanishi radius bilan 60° ga teng burchak hosil qiladi. Shu paytda nuqtaning urinma tezlanishi $w_r = 10\sqrt{3}\text{ m/s}^2$ Aylanish o'qidan $r = 0,5\text{ m}$ masofada turgan nuqtaning normal tezlanishi topilsin. Maxovikning radiusi $R = 1\text{ m}$.



8.11-rasm

Yechilishi: To'la tezlaniishi radius bilan 60° ga teng burchak hosil qilishi, bu to'la tezlaniishning normal tezlaniish bilan ham shunday burchak hosil qilishidir. Shunday ekan bu burchakning tangensi urinma tezlaniishning normal tezlaniishga nisbatiga teng kattalikdir (8.11-rasm). U holda normal tezlaniish:

$$a_n = \frac{a_r}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10 \text{ m/s}^2$$

Umumiy holda normal tezlaniish

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

ifoda orqali aniqlanishidan ω^2 ni qiymatini topish mumkin

$$\omega^2 = \frac{a_n}{R} = \frac{10 \text{ m/s}^2}{1 \text{ m}} = 10 \text{ rad/s}^2$$

uruima tezlaniish ifodasidan

$$a_r = \varepsilon \cdot R$$

burchak tezlaniishni topish mumkin $\varepsilon = \frac{a_r}{R} = 10 \cdot \sqrt{3} \text{ rad/s}^2$.

Aylanish o'qidan $r = 0,5 \text{ m}$ masofada turgan nuqtaning normal tezlaniishini topa olamiz $a_n = \omega^2 r = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ m/s}^2$.

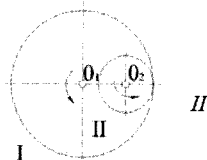
10-masala. Diametri D_1 bo'lgan I tishli g'ildirakning

burchak tezligi $\frac{10\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}}$ ga teng. I g'ildirak bilan ichki

biriktirilgan va burchak tezligi unga qaraganda uch

marta katta bo'lgan II tishli g'ildirakning diametri

qanchaga teng bo'lishi kerak (8.12-rasm).



8.12-rasm

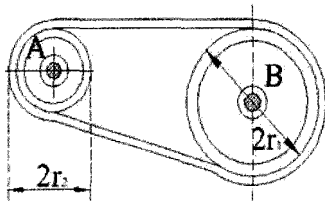
Yechilishi: I va II g'ildiraklar ichma joylashgani sababli ular bir xil aylanish tezligiga ega bo'ladi. $\vartheta_1 = \vartheta_2$ tezliklarning mos ifodalarini qo'ysak. $\vartheta_1 = R \cdot \omega$, $\vartheta_2 = r \cdot 3\omega$ u holda

$$R \cdot \omega = r \cdot 3\omega$$

Bundan $r = \frac{R}{3} = \frac{D_1}{2 \cdot 3} = 60 \text{ mm}$ (R orqali I shkiv radiusi r orqali II shkiv radiuslari belgilangan)

$$D_2 = 2 \cdot r = 120 \text{ mm}$$

11-masala. Tinch holatdagi A shkivli stanok elektromotorning B shkividan tortilgan uzluksiz tasma bilan harakatga keltiriladi. Shkivlarning radiuslari $r_1 = 75\text{sm}$, $r_2 = 30\text{sm}$ elektromotorning harakatga keltirilgandan keyingi burchak tezlanishi $0,4\pi\text{ rad/s}^2$. Tasmaning shkivlar bo'ylab sirg'anishini hisobga olmay, stanok qancha vaqtdan keyin $10\pi\text{ rad/s}$ ga teng burchak tezlikka ega bo'lishi aniqlansin (8.13-rasm).



8.13-rasm

Yechilishi: Dastlab A va B shkivlar gardishlaridagi nuqtalarning urinma tezlanishlarini topib olish muhim.

$$a_r^A = \varepsilon_A \cdot r_2$$

$$a_r^B = \varepsilon_B \cdot r_1$$

Tasma shkivlar bo'ylab sirg'anmaydi. Shuning uchun A va B nuqtalardagi urinma tezlanishlar bir xil bo'ladi

$$\varepsilon_A \cdot r_2 = \varepsilon_B \cdot r_1$$

Bundan
$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_B \cdot r_1}{r_2} = \frac{75\text{sm}}{30\text{sm}} \cdot 0,4\pi\text{ rad/s}^2 = \pi\text{ rad/s}^2.$$

A shkiv tekis tezlanuvchan harakatda bo'ladi, shuning uchun uning burchak tezligi quyidagicha aniqlanadi $\omega_A = \omega_{A0} + \varepsilon_A \cdot t$

A shkivning boshlang'ich burchak tezligi $\omega_{A0} = 0$, $t = T$ paytda $\omega_A = 10\pi\text{ rad/s}$ ga teng. Bular yuqoridagi tenglamalarga qo'yiladi

$$10\pi\text{ rad/s} = \pi\text{ rad/s}^2 \cdot T$$

Bundan $t = 10\text{ s}$ ekanligi aniqlanadi. Masalani boshqa bir holatda yechilishini ko'rishimiz mumkin.

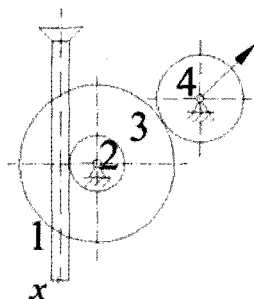
Shkivlarning A va B nuqtalardagi tezliklari bir xil qiymat kasb etadi.

$$\text{Demak } r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2$$

Bundan $\omega_2 = \frac{r_1 \cdot \omega_1}{r_2}$ tenglama o'rinlidir. $\omega_1 = \varepsilon \cdot t$ ekanligidan foydalanib t ning qiymatini aniqlash mumkin:

$$10\pi = \frac{r_1}{r_2} \cdot 0,4\pi t, \quad t = \frac{25 \cdot 30}{75} = 10s$$

12-masala. Strelkali indikator mexanizmidagi harakat o'lchov shtiftining 1 reykasidan 2 shesternyaga uzatiladi. 2 shesternyaning o'qiga 3 tishli g'ildirak o'rnatilgan. 3 g'ildirak esa strelka biriktirilgan 4 shesternya bilan tishlashadi. Agar shtiftning harakati $x = a \sin kt$ tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari tegishli r_2, r_3, r_4 bo'lsa, strelkaning burchak tezligi aniqlansin (8.14-rasm).



8.14-rasm

Yechilishi: Shtiftning harakati tenglamasi $x = a \sin kt$ ko'rinishida berilgan. Bu harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha 1-tartibli hosila olamiz.

$$\dot{x} = ak \cos kt$$

$$\vartheta = \dot{x} = r_2 \cdot \omega_2$$

Topilgan ifoda shtiftning harakat tezligidir. 2 shesternyaning o'qiga 3 tishli g'ildirak o'rnatilganligi sababli shesternyaning ω_2 burchak tezligining r_3 radiusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan tezligi mos ravishda 4 - shesternyaning burchak tezlik va radiuslari ko'paytmasiga teng bo'lgan kattaligi bilan aynan tengdir:

$$\omega_4 \cdot r_4 = r_3 \cdot \omega_2$$

Bundan

$$\omega_4 = \frac{r_3 \cdot \omega_2}{r_4} = \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{\vartheta}{r_2} = \frac{r_3}{r_2 \cdot r_4} \cdot a \cdot k \cdot \cos kt$$

Ekanligini ko'rishimiz mumkin.

13-masala. Radiusi r_1 bo'lgan tishli konus shaklidagi O_1 g'ildirakning qancha vaqtdan keyin $144\pi \text{ rad/s}$ ga teng burchak tezligiga ega bo'lishi aniqlansin. Tinch holatdagi bu g'ildirakni radiusi $r_2 = 15 \text{ sm}$ ga teng va 4 rad/s^2 burchak tezlanishga ega bo'lib, tekis tezlanish bilan aylanadigan konus shaklidagi O_2 g'ildirak aylantiradi (8.15-rasm).

Yechilishi: O_2 g'ildirak aylanish burchak tenglamasi $\varphi_2 = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ orqali ifodalanadi. Bunda $\varphi_0 = 0$ $\omega_0 = 0$ shart o'rinaldir. O_2 g'ildirak aylanish burchak tezligi quyidagicha

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \varepsilon \cdot t \quad (1)$$

Har ikkala g'ildirak ham bir xil doiraviy tezlikda harakatlanadi. Shu bois

$$r_2 \omega_2 = r_1 \omega_1 \quad (2)$$

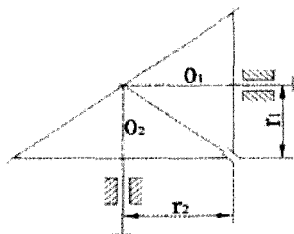
(1) va (2) larni birgalikda bajarsak

$$t = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\omega_1}{\varepsilon} = 24 \text{ s}$$

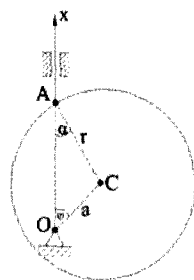
natijaga ega bo'lamiz.

14-masala. Ekssentrikning diametri $d=2r$, aylanish o'qi O esa diskning C o'qidan $OC=a$ masofada turadi. Sterjenning harakat qonuni topilsin (8.16-rasm). Ox o'q sterjen bo'ylab yo'nalgan. Sanoq boshi – aylanish o'qida, $\frac{a}{r} = \lambda$

Yechilishi: Chizmadan ko'rinadiki α va φ burchaklar orqali sinuslar teoremasini qo'llash mumkin $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \varphi}{r}$ bunda a va r uchburchak tomonlari shaklida tasvirlangan.



8.15-rasm



8.16-rasm

Bu ifodadan α burchakning sinusini aniqlaymiz:

$$\sin \alpha = \frac{a}{r} \cdot \sin \varphi$$

Masala shartiga binoan $\frac{a}{r} = \lambda$. Shuning uchun bu ifoda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\sin \alpha = \lambda \cdot \sin \varphi$$

Trigonometriyaning asosiy ayniyatlari orqali shu burchakni kosinusini topamiz:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Harakat yo‘nalishini inobatga olgan holda sterjenning x o‘q bo‘ylab harakatlanish qonuniyatini tuzamiz:

$$x = a \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \varphi + r \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

8.6 Mustaqil yechish uchun masalalar:

1-masala. Bug‘ turbinasi diskini ishga tushirish davridagi aylanish tenglamasi yozilsin; aylanish burchagi vaqt kubiga proporsional va $t = 3s$ bo‘lganda diskning burchak tezligi $\omega = 27\pi \text{ rad/s}$ ga to‘g‘ri keladi.

(javob: $\varphi = \pi^3$)

2-masala. AB vertikal o‘q atrofida aylanuvchi markazdan qochuvchi regulyatorning mayatnigi minutiga 120 marta aylanadi. Boshlang‘ich paytda aylanish burchagi $\pi/6 \text{ rad}$ ga teng. $t = 1/2 \text{ s}$ vaqt ichida mayatnikning aylanish burchagi va ko‘chish burchagi topilsin.

(javob: $\varphi = \frac{13\pi}{6} \text{ rad}$. $\Delta\varphi = 2\pi \text{ rad}$.)

3-masala. Tinch holatda bo‘lgan jism tekis tezlanish bilan aylana boshlab, birinchi 2 minutda 3600 marta aylanadi. Burchak tezlanish aniqlansin.

(javob: $\varepsilon = \pi \text{ rad/s}^2$)

4-masala. Tinch holatda turgan maxovik tekis tezlanish bilan aylana boshlaydi; harakat boshlangandan 10 minut keyin uning burchak tezligi $4\pi \text{ rad/s}$ ga to'g'ri keladi. Shu 10 minut ichida g'ildirak necha marta aylanadi?

(javob: 600 aylanish)

5-masala. Qo'zg'almas o'qli g'ildirak $2\pi \text{ rad/s}$ ga teng bo'lgan boshlang'ich burchak tezligi olgan. G'ildirak 10 marta aylangandan keyin podshipniklardagi ishqalanish tufayli to'xtadi. G'ildirakning burchak tezlanishini doimiy deb hisoblab, uning miqdori ε aniqlansin.

(javob: $\varepsilon = 0,1\pi \text{ rad/s}^2$, aylanish sekinlanuvchan)

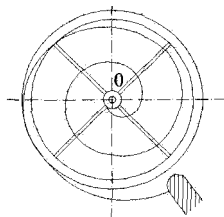
6-masala. Motor o'chirilgan paytda $40\pi \text{ rad/s}$ ga to'g'ri keladigan burchak tezligi bilan aylanayotgan samolyot propelleri to'xtaguncha 80 marta aylanadi. Propeller aylanishini tekis sekinlanuvchan deb hisoblab, motor o'chirilganidan propeller to'xtagunigacha qancha vaqt o'tishi topilsin.

(javob: 8 sekund)

7-masala. Jism qo'zg'almas o'q atrofida tebranma harakat qiladi, bunda aylanish burchagi $\varphi = 20^\circ \sin \psi$ tenglama bilan beriladi. ψ burchak esa graduslarda $\psi = (2t)^\circ$ (t -sekundlar hisobida) munosabat bilan ifodalangan. Jismning $t=0$ paytdagi burchak tezligi, aylanish yo'nalishi o'zgaradigan eng yaqin t_1 va t_2 vaqtlar hamda tebranish davri T aniqlansin.

(javob: $\omega = \frac{1}{180} \pi^2 \text{ rad/s}$, $t_1 = 45\text{s}$, $t_2 = 135\text{s}$, $T = 180\text{s}$)

8-masala. Soat balansiri $T = 1/2\text{s}$ davr bilan buralma garmonik tebranma harakat qiladi. Balansir gardishidagi nuqtaning muvozanat holatiga nisbatan hosil qilgan eng katta burchagi $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ga teng. Balansir muvozanat holatidan o'tganidan 2 s keyin



balansirning burchak tezligi va burchak tezlanishining qancha bo'lishi topilsin.

(javob: $\omega = 2\pi^2 \text{ rad/s}, \varepsilon = 0$)

9-masala. Mayatnik O gorizontaal o'q atrofida vertikal tekislikda tebranadi. Boshlang'ich paytda muvozanat holatidan chiqib, $2/3 \text{ s}$ dan keyin $\alpha = \frac{\pi}{16} \text{ rad}$ eng katta burchakka og'adi.

a) Mayatnik garmonik tebranma harakat qiladi deb hisoblab, uning tebranish qonuni yozilsin.

b) Mayatnik qanday holatda eng katta burchak tezligi oladi va u qanchaga teng?

(javob: $\varphi = \frac{\pi}{16} \sin \frac{3}{4} \pi \text{ rad}$)

10-masala. Yerning o'z o'qi atrofidagi aylanishinigina hisobga olib, yer yuzasining Leningraddagi nuqtasining tezligi g va tezlanishi a aniqlansin. Leningradning kengligi 60° . Yerning radiusi 6370 km .

(javob: $g = 232 \text{ m/s}, a = 0,0169 \text{ m/s}^2$)

11-masala. Radiusi $0,5 \text{ m}$ bo'lgan maxovik o'z o'qi atrofida bir tekis aylanadi. G'ildirak to'g'inida yotgan nuqtalarning tezligi 2 m/s ga teng. G'ildirak bir minutda necha marta aylanadi?

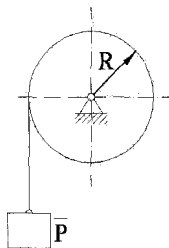
(javob: $n = 38,2 \text{ ayl./min}$)

12-masala. Ekvatorda turgan jism yer atrofida maxsus yo'naltiruvchilarda ekvator bo'ylab bir tekis harakatlenganda erkin tushish tezlanishiga ega

bo'lishi uchun jismga qanday gorizontal tezlik ϑ berilishi topilsin. Shuningdek, jism o'zining avvalgi holatiga qaytib kelguncha o'tadigan T vaqt ham aniqlansin. Yer radiusi $R = 637 \cdot 10^6$ sm, ekvatorida og'irlik kuchining tezlanishi $g = 978$ sm/s².

(javob: $\vartheta = 7,9$ km/soat, $T = 1,4$ soat)

13-masala. Radiusi $R=10$ sm bo'lgan A val unga ipda osilgan P tosh bilan aylantiriladi. Toshning harakati $x=100t^2$ tenglama bilan ifodalanadi, bunda x - toshdan qo'zgalmas OO_1 gorizontalgacha bo'lgan, santimetrilar hisobida ifodalangan masofa, t - vaqt (sekundlar hisobida). t paytda valning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε , shuningdek, val sirtidagi nuqtaning to'la tezlanishi a aniqlansin.

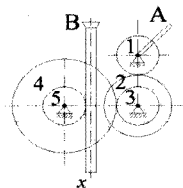


(javob: $\omega = 20t$ rad/s, $\varepsilon = 20$ rad/s², $a = 200 \cdot \sqrt{1+400t^4}$ sm/s)

14-masala. Val gardishida yotuvchi nuqtalarning tezlanishini tosh bosib o'tgan x masofa orqali ifodalab, 161- masala umumiy ko'rinishda yechilsin. G'ildirakning radiusi R va toshning tezlanishi $\ddot{x} = \omega_0 = const$

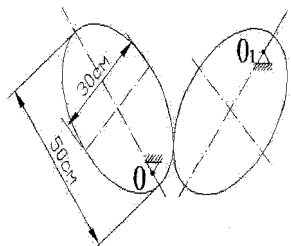
(javob: $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+4x^2}{R}}$)

15-masala. Domkrat mexanizmida A dasta aylanganda 1, 2, 3, 4 va 5 shesternyalar aylana boshlaydi bular domkratning B tishli reykasini harakatga keltiradi. Agar A dasta $\pi rad/s$ ga teng burchak tezlik bilan aylansa, tishli reyka tezligining qancha bo'lishi aniqlansin. Shesternya tishlarining soni: $z_1 = 32$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; beshinchi shesternyaning radiusi $r_5 = 4 sm$.



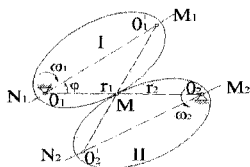
(javob: $v_B = 7,8 mm/s$)

16-masala. Davriy suratda o'zgaruvchi burchak tezliklarni hosil qilish uchun ikkita bir xil elliptik tishli g'ildiraklar ilashtirilgan. Bularning biri O o'q atrofida $\omega = 9\pi rad/s$ burchak tezlik bilan tekis aylanadi, ikkinchisini esa birinchi gildirak O_1 o'q atrofida aylantiradi. O va O_1 o'qlar parallel bo'lib, ellipslarning fokuslaridan o'tadi. OO_1 oraliq $50 sm$ ga teng. Ellipslarning yarim o'qlari $25 sm$ va $15 sm$. O_1 g'ildirakning eng katta va eng kichik burchak tezliklari topilsin.



(javob: $\omega_{min} = \pi rad/s$, $\omega_{max} = 81\pi rad/s$)

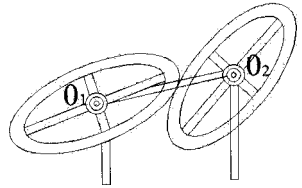
17-masala. Yarim o'qlari a va b bo'lgan bir juft elliptik tishli g'ildiraklarning aylanma harakatini uzatish qonuni chiqarilsin. I g'ildirakning burchak tezligi $\omega_1 = const$. O'qlar orasidagi masofa $O_1O_2 = 2a$, φ aylanish o'qlarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bilan I elliptik g'ildirakning katta o'qi orasidagi burchak. O'qlar ellipslarning fokuslari orqali o'tadi.



(javob: $\omega_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2accos\varphi + c^2} \cdot \omega_1$ bunda c ellipslarning chiziqli eksentrisiteti:

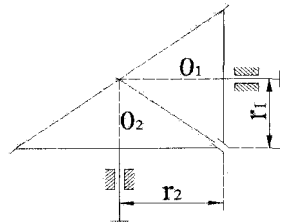
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

18-masala. $8\pi \text{ rad/s}$ burchak tezlikka ega bo'lgan O_1 , g'ildirak bilan tutashtirilgan O_2 oval g'ildirakning eng katta va eng kichik burchak tezligi topilsin. G'ildiraklarning aylanish o'qlari ovallarning markazlarida joylashgan. O'qlar orasidagi masofa 50 sm ga teng. Ovallarning yarim o'qlari 40 va 10 sm ga teng.



(javob: $\omega_{\min} = 2\pi \text{ rad/s}$, $\omega_{\max} = 32\pi \text{ rad/s}$)

19-masala. Radiusi $r_1 = 10 \text{ sm}$ bo'lgan tishli konus shaklidagi O_1 g'ildirakning qancha vaqtdan keyin $144\pi \text{ rad/s}$ ga teng burchak tezligiga ega bo'lishi aniqlansin. Tinch holatdagi bu g'ildirakni radiusi $r_2 = 15 \text{ sm}$ ga teng va 4 rad/s^2 burchak tezlanishga ega bo'lib, tekis tezlanish bilan aylanadigan konus shaklidagi O_2 g'ildirak aylantiradi.



(javob: $t=24 \text{ s}$)

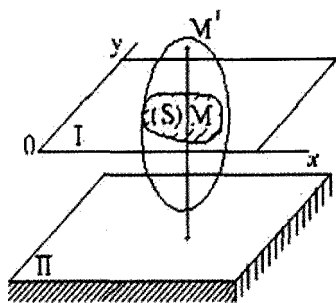
IX BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

9.1 Qattiq jismning tekis parallel harakati

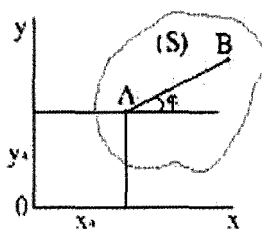
Barcha nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel harakatlanuvchi qattiq jismning harakatiga tekis parallel harakat deyiladi.

Jismning tekis parallel harakatiga misol qilib g'ildirakning to'g'ri chiziqli yo'lda dumalashi, shatunning krivoship – shatun mexanizmdagi harakati va boshqa harakatlarni ko'rsatish mumkin. Qattiq jismni qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati, tekis parallel harakatning xususiy holi hisoblanadi.

Jismning tekis parallel harakatini ko'rib chiqamiz. Biror qo'zg'almas Π tekislikka nisbatan harakatlanayotgan qattiq jism berilgan bo'lsin.



9.1-rasm



9.2-rasm

Qattiq jismni qo'zg'almas Π tekislikka parallel bo'lgan Oxy tekislik bilan kesamiz. Kesimda S qirqim hosil bo'ladi (9.1 – rasm). Kelgusida S qirqimni tekis shakl deb ataymiz. Tekis parallel harakat ta'rifiga ko'ra, jismning harakati davomida bu S tekis shakl qo'zg'almas Π tekislikka parallel bo'lgan Oxy tekisligida harakatlanadi. S tekis shaklga perpendikulyar MM^1 kesma, jism harakati davomida doimo o'z-o'ziga parallel ko'chadi, demak kesma ilgariylanma harakat qiladi. Shunday qilib, qattiq jismning tekis parallel harakatini o'rganish uchun jismda Π qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan S tekis shaklning Oxy tekisligidagi harakatini bilish kifoya.

S tekis shaklning Oxy tekislikdagi holati tekis shaklda o'tkazilgan qandaydir AB kesmaning holati bilan aniqlanadi (9.2 - rasm).

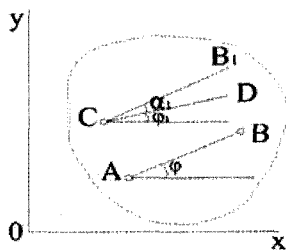
O'z navbatida AB kesmaning holati A nuqtani x_A, y_A koordinatalari va AB kesmaning x o'qi bilan tashkil qilgan φ burchak yordamida aniqlash mumkin. S tekis shaklning holatini aniqlash uchun tanlangan A nuqtani bundan keyin qutb deb ataymiz. Tekis shakl harakatlenganda x_A, y_A koordinatalar va φ burchak t vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradi.

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t) \quad (9.1)$$

Harakat qonunini aniqlovchi (9.1) tenglamalar tekis shaklning harakat tenglamalari yoki bo'lmasa, qattiq jismning tekis parallel harakat tenglamalari deyiladi. (9.1) tengliklarning birinchi ikkitasi, $\varphi = const$ bo'lganda tekis shaklning harakat tenglamasini ifodalaydi. Bu harakat ilgarilanma harakat bo'lib hisoblanadi. Uchinchi tenglama $x_A = const, y_A = const$ bo'lganda tekis shaklning A qutb atrofida aylanma harakatini ifodalaydi.

Yuqoridagilardan shu narsani bilib olish mumkinki, tekis shakl o'z tekisligida qiladigan tekis parallel harakati uning barcha nuqtalari xuddi qutb kabi harakat qiluvchi ilgarilanma va qutb atrofida aylanma harakatlarning yig'indisidan iborat ekan.

Tekis parallel harakatning asosiy kinematik karakteristikalari, qutbning tezlik va tezlanishiga teng bo'lgan ilgarilanma harakat tezligi va tezlanishi ($\vec{v}_{Hl} = \vec{v}_A, \vec{a}_{Hl} = \vec{a}_A$) va qutb atrofida aylanishi natijasida olgan burchak tezlik va burchak tezlanishlar bo'lib hisoblandi. Vaqtning istalgan t payti uchun karakteristikalarning qiymatlari (9.1) tenglamalardan foydalanib topiladi.



9.3-rasm

Harakatni o'rganishda qutb deb tekis shaklning istalgan nuqtasini olish mumkin. Qutb deb A nuqtani emas, tekis shaklning qandaydir C nuqtasini

B nuqtaning qo'zg'aluvchi $Ax|y|_1$ koordinata sistemasiga nisbatan radius-vektorini \vec{r} bilan belgilab (9.4-rasm) quyidagini yozamiz.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}'$$

Tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila

$$\text{olamiz: } \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Bunda $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ A qutbning tezligi, $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{BA}$ B nuqtaning A nuqta atrofida aylanishida olgan tezligi, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (9.3)$$

B nuqtaning A qutb atrofida aylanishida olgan \vec{v}_{BA} tezligini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

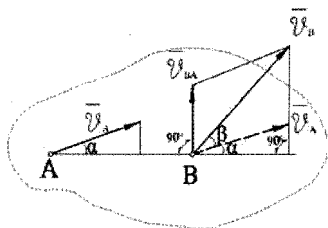
$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{BA} \quad (\vec{v}_{BA} \perp \vec{BA}) \quad (9.4)$$

ω – tekis shaklning burchak tezligi.

Shunday qilib, tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezligi, qutb deb tanlangan A nuqtaning tezligi bilan B nuqtani qutb atrofida aylanishida olgan tezliklarining geometrik yig'indisiga teng. \vec{v}_B tezlikning moduli va yo'nalishi parallelogramm asosida topiladi (9.5 – rasm).

9.3 Jism ikki nuqtasi tezliklarining proyeksiyalari haqida teorema

Tekis shakl (yoki tekis parallel harakat qilayotgan jism) nuqtasining tezligini (9.3) formula yordamida aniqlash bir muncha murakkab hisoblashlar bilan bog'liq.



9.6-rasm

Tekis shakl nuqtasining tezligini aniqlashning amaliy jihatdan qulay va sodda usullari ham mavjudki quyida shu usullardan biri bilan tanishamiz.

Teorema. Qattiq jism ikkita nuqtasi tezliklarining shu nuqtalardan o'tuvchi o'qdagi proyeksiyalari o'zaro teng.

Isbot. Tekis shaklning qandaydir ikkita A va B nuqtalarni ko'rib chiqamiz. A nuqtani qutb deb olamiz (9.6-rasm), u holda (9.3) formulaga ko'ra B nuqtaning tezligi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$

Tenglikning har ikkala tomonini AB bo'ylab yo'nalgan o'qqa proyeksiyalaymiz:

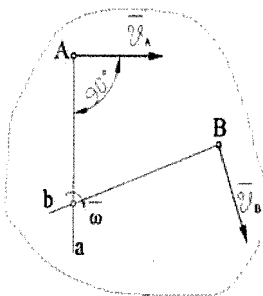
$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha \quad (9.5)$$

\overline{v}_{BA} vektor AB o'qqa perpendikulyar yo'nalgani uchun uning o'qdagi proyeksiyasi nolga teng.

Agar (47) tenglik bajarilmasa u holda tekis shakl (yoki jism) harakatlanayotganida A va B nuqtalar orasidagi masofa o'zgarishi kerak, bunday bo'lishi mumkin emas, chunki qattiq jismni absolyut qattiq jism deb olamiz. Teorema isbotlandi.

9.4 Tekis shakl nuqtasining tezligini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash

Tekis parallel harakat qiladigan qattiq jism nuqtasining tezligini aniqlashning sodda usuli tezliklarning oniy markazi tushunchasiga asoslanadi. Berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan tekis shakl nuqtasiga tezliklarning oniy markazi deyiladi.



9.7-rasm

Agar tekis shakl (jism) ilgari lanma bo'lmagan harakat qilayotgan bo'lsa, vaqtning istalgan paytida tezligi nolga teng bo'lgan nuqtasi mavjud bo'ladi. Vaqtning t paytida tekis shaklning A va B nuqtalari o'zaro parallel bo'lmagan \overline{v}_A va \overline{v}_B tezliklarga ega bo'lsin (9.7-rasm). \overline{v}_A va \overline{v}_B tezlik vektorlariga Aa va Bb perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlar

qandaydir P nuqtada kesishadi. P nuqta tezliklarining oniy markazi bo'ldi ($\mathcal{G}_P = 0$). Faraz qilaylik $\mathcal{G}_P \neq 0$ bo'lsin. U holda tezliklarning proeksiyalari haqidagi teorema asosan $\overline{\mathcal{G}}_P$ vektor bir vaqtning o'zida AP va BP larga perpendikulyar bo'lishi lozim, lekin bunday bo'lishi mumkin emas. Teoremadan shu narsa kelib chiqadiki, vaqtning shu paytida tekis shaklning tezligi nolga teng bo'lmagan boshqa bir nuqtasi mavjud bo'lmaydi.

Agar vaqtning shu paytida P nuqtani qutb deb olsak (9.3) formulaga ko'ra A nuqtaning tezligi quyidagicha aniqlanadi.

$$\overline{\mathcal{G}}_A = \overline{\mathcal{G}}_P + \overline{\mathcal{G}}_{PA}$$

Bizga ma'lumki $\overline{\mathcal{G}}_P = 0$, u holda A nuqtaning tezligi $\overline{\mathcal{G}}_A = \overline{\mathcal{G}}_{PA}$. (9.4) formulaga ko'ra

$$\mathcal{G}_A = \omega \cdot \overline{PA} \quad (\overline{\mathcal{G}}_A \perp \overline{PA}) \quad (9.5)$$

Xuddi shuningdek B nuqtaning tezligi

$$\mathcal{G}_B = \omega \cdot \overline{PB} \quad (\overline{\mathcal{G}}_B \perp \overline{PB}) \quad (9.6)$$

(9.6) va (9.6¹) tengliklardan quyidagi nisbatni yozamiz

$$\frac{\mathcal{G}_A}{PA} = \frac{\mathcal{G}_B}{PB} \quad (9.7)$$

Tekis shakl nuqtalarining tezliklari shu nuqtalardan tezliklarining oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional.

Olingan natijalardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi.

1. Tekis shakl ikkita A va B nuqtalari tezliklarining yo'nalishlari ma'lum bo'lsin (9.7-rasm). A va B nuqtalardan $\overline{\mathcal{G}}_A$ va $\overline{\mathcal{G}}_B$ tezlik vektorlariga perpendikulyarlar o'tkazsak ularning kesishgan P nuqtasi tezliklar oniy markazi bo'lib hisoblanadi.

2. Tekis shakl istalgan nuqtasining tezligini aniqlash uchun, tekis shaklda biror A nuqtasining tezligini moduli va yo'nalishi boshqa bir B nuqtani tezligining yo'nalishini bilish kerak. A va B nuqtalardan $\overline{\mathcal{G}}_A$ va $\overline{\mathcal{G}}_B$ tezlik vektorlariga perpendikulyarlar tushirib tezliklar oniy markazi P nuqtani va

$\overline{\mathcal{G}}_A$ tezlik vektorining yo'nalishiga qarab, tekis shaklning aylanish yo'nalishini aniqlaymiz. $\overline{\mathcal{G}}_A$ ni bilgan holda (9.7) formuladan tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezligi aniqlanadi. $\overline{\mathcal{G}}_B$ tezlik vektori PB ga perpendikulyar tekis shakl aylanish yo'nalishi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

3. Tekis shaklning burchak tezligi vaqtning berilgan paytda qandaydir nuqtasi tezligining tezliklar oniy markazdan shu nuqtagacha bo'lgan masofaga bo'lgan nisbatga teng:

$$\omega = \frac{\mathcal{G}_B}{PB} \quad (9.8)$$

ω ning boshqacha ifodalanishini topamiz.

(9.3) va (9.4) tengliklardan

$$\overline{\mathcal{G}}_{BA} = (\overline{\mathcal{G}}_B - \overline{\mathcal{G}}_A) \text{ va } \overline{\mathcal{G}}_{BA} = \omega \cdot AB .$$

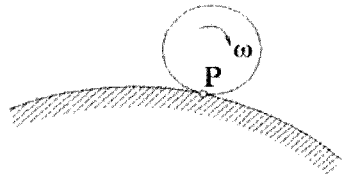
bulardan quyidagini hosil qilamiz.

$$\omega = \frac{\mathcal{G}_{BA}}{AB} = \frac{\overline{\mathcal{G}}_B - \overline{\mathcal{G}}_A}{AB} \quad (9.9)$$

Tezliklar oniy markazini topishning xususiy hollari bilan tanishamiz:

a) Silindr shaklidagi jism qo'zg'almas sirt ustida sirpanmasdan dumalayotgan bo'lsa, dumalayotgan jismning qo'zg'almas sirtga tutinish P nuqtasi, sirpanish bo'lmaganda tezligi nolga ($\overline{\mathcal{G}}_P = 0$) teng

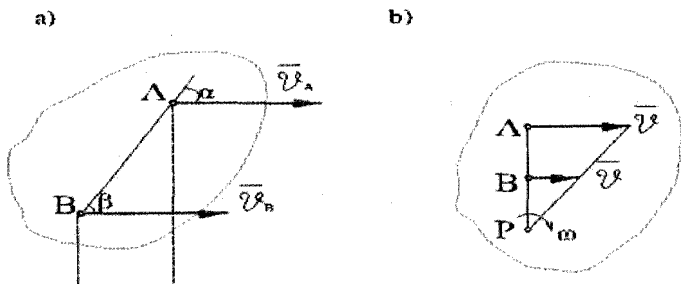
bo'ladi. Demak, P nuqta tezliklar oniy markazi bo'lib hisoblanadi. Bunga g'ildirakning rels ustida dumalashini misol qilib ko'rsatish mumkin (9.8-rasm);



9.8-rasm

b) Tekis shakl A va B nuqtalarning tezlik vektorlari o'zaro parallel, hamda AB chiziq $\overline{\mathcal{G}}_A$ ga perpendikulyar bo'lmasa (9.9-rasm, a) bunday holda tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi. Tekis shakl barcha nuqtalarning tezliklari $\overline{\mathcal{G}}_A$ ga parallel bo'ladi. Tezliklarning proyeksiyalari haqidagi

teoremaga ko'ra $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$ bundan $v_A = v_B$. Demak, vaqtning shu paytida jism barcha nuqtalari moduli va yo'nalishi bir xil bo'lgan tezlikka ega bo'lib jism ilgarilanma harakat qiladi. Shu paytda jismning ω burchak tezligi (9.9) formulaga ko'ra nolga teng;



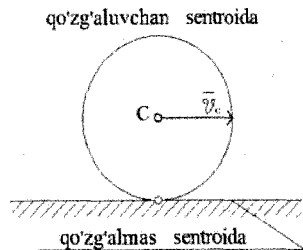
9.9-rasm

c) Tekis shakl A va B nuqtalarning tezlik vektorlari o'zaro parallel hamda AB chiziq \vec{v}_A vektorga perpendikulyar bo'lsa, bunday holda tezliklar oniy markazi P (9.9-rasm,b) da ko'rsatilgandek topiladi. Bu holda oldingilarga qaraganda tezliklar oniy markazini topishda \vec{v}_A va \vec{v}_B tezliklarning yo'nalishidan tashqari ularning modullari ham ma'lum bo'lishi kerak.

d) Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining \vec{v}_B tezlik vektori va burchak tezligi ω ma'lum bo'lsa \vec{v}_B tezlik vektori ustida yotuvchi tezliklar oniy markazi P (9.9-rasm,b) gacha bo'lgan masofa (9.8) formuladan topiladi.

9.5 Sentroidalar haqida tushuncha

Umumiy holda tezliklar oniy markazi vaqtning o'tishi bilan tekis shaklning harakat tekisligida o'z holatini o'zgartira boradi. Agar tezliklar oniy markazining har ondagi holatini tekis shaklda va harakat tekisligida belgilab borasak, ularning geometrik o'rni ikkita chiziqni ifodalaydi.



9.10-rasm

Tezliklar oniy markazining tekis shakl harakati tekisligidagi geometrik o'rni qo'zg'almas sentroida deyiladi.

Tezliklar oniy markazining tekis shaklga bog'langan tekislikdagi geometrik o'rni qo'zg'aluvchan sentroida deyiladi.

Masalan qo'zg'almas rels ustida sirpanmay dumalayotgan g'ildirak uchun qo'zg'almas sentroida to'g'ri chiziq, qo'zg'aluvchi sentroida g'ildirak gardishidagi aylanadan iborat (9.10-rasm).

Har onda qo'zg'almas va qo'zg'aluvchan sentroidalar tezliklar oniy markazi P nuqtada umumiy urinish nuqtasiga ega bo'ladi. Shu sababli qattiq jismning tekis parallel harakatini geometrik tarzda quyidagicha talqin qilish mumkin: tekis shaklning harakati qo'zg'aluvchan sentroidani qo'zg'almas sentroida ustida sirpanmasdan dumalashidir.

9.6 Tekis shakl nuqtasining tezlanishini qutb yordamida aniqlash

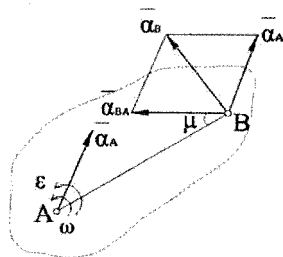
Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishi tekis shaklning ilgariylanma va aylanma harakatlarida olgan tezlanishlarining geometrik yig'indisidan iborat ekanligini ko'rsatamiz. B nuqtaning Oxy koordinata sistemasiga nisbatan holati (9.4-rasmga qarang) quyidagicha aniqlangan edi: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}'$ bu yerda $\vec{r}' = \overline{AB}$.

Tenglikni har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz.

$$\overline{a}_B = \frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$$

Tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi had A nuqtaning \overline{a}_A tezlanishini, ikkinchi qo'shiluvchi had esa tekis shaklning A qutb atrofida aylanishida olgan \overline{a}_{BA} tezlanishini beradi, u holda:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} \quad (9.10)$$



9.11-rasm

Tezlanish $\overline{a_{BA}}$ aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanishi kabi (8.12) formula yordamida topiladi

$$\overline{a_{BA}} = BA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (9.11)$$

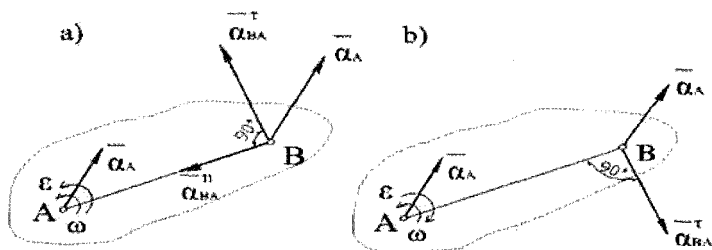
bu yerda ω va ε - tekis shaklning burchak tezligi va burchak tezlanishi, $\mu - \overline{a_{BA}}$ tezlanish vektori bilan BA kesma orasidagi burchak (9.11-rasm).

Shunday qilib, tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishi, qutb deb tanlangan nuqtaning tezlanishi va tekis shaklning qutb atrofida aylanishida B nuqtaning olgan tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng. $\overline{a_B}$ tezlanishning moduli va yo'nalishi parallelogramm qurish asosida topiladi (9.11-rasm). B nuqtaning $\overline{a_B}$ tezlanishini tasvirlangan parallelogramm yordamida hisoblash bir oz qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Avval μ ning qiymatini, keyin esa $\overline{a_{BA}}$ va $\overline{a_A}$ vektorlar orasidagi burchakni aniqlash lozim. Shunga ko'ra masalalarni yechishda $\overline{a_{BA}}$ tezlanish vektori $\overline{a_{BA}^r}$ urinma va $\overline{a_{BA}^n}$ normal tashkil etuvchilar bilan almashtiriladi, u holda (9.10) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^r} + \overline{a_{BA}^n} \quad (9.12)$$

$\overline{a_{BA}^r}$ vektor AB kesmaga doimo perpendikulyar bo'lib, tezlanuvchan harakatda aylanish yo'nalishi bo'ylab (9.12-rasm, a), sekinlanuvchan harakatda esa aylanish yo'nalishiga teskari yo'nalgan bo'ladi (9.12-rasm, b). $\overline{a_{BA}^n}$ vektor doimo AB bo'ylab B nuqtadan A nuqtaga tomon yo'nalgan bo'ladi. Son jihatidan bu tezlanishlar quyidagiga teng.

$$\overline{a_{BA}^r} = AB \cdot \varepsilon, \quad \overline{a_{BA}^n} = AB \cdot \omega^2 \quad (9.13)$$



9.12-rasm

Agar qutb deb tanlangan A nuqta ilgari tanlangan harakat qilmasa, u holda uning tezlanishini ham \vec{a}_A^r urinma va \vec{a}_A^n normal tashkil etuvchilar yig'indisidan iborat deb qarash lozim, u holda (9.12) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi.

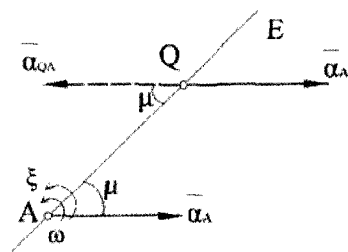
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n \quad (9.14)$$

9.7 Tekis shakl nuqtasining tezlanishini tezlanishlar oniy markazi yordamida aniqlash

Agar tekis shakl ilgari tanlangan bo'lmagan harakat qilsa vaqtning istalgan paytida unda tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqta mavjud bo'ladi. Tekis shaklni vaqtning istalgan paytida tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi. Tezlanishlar oniy markazini aniqlaymiz. Aytaylik tekis shaklning qandaydir biror A nuqtasining tezlanishi \vec{a}_A , tekis shaklning burchak tezligi ω berilgan bo'lsin.

1) Burchak μ ni aniqlaymiz: $\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

2) A nuqtadan \vec{a}_A vektor bilan μ burchak tashkil etuvchi AE to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (9.13-rasm). Bunda AE to'g'ri chiziq aylanish tezlanuvchan bo'lsa \vec{a}_A vektordan aylanish yo'nalishi tomon, agar aylanish sekinlanuvchan bo'lsa, aylanishga qarama-qarshi tomonga og'gan bo'lishi kerak, aniqlrog'i, ε burchak tezlanishi yo'nalgan tomonga og'gan bo'ladi:



9.13-rasm

$$AQ = \frac{\vec{a}_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} \quad (9.15)$$

AQ ga teng kesmani AE to'g'ri chiziq ustiga qo'yib Q nuqtani aniqlaymiz. Q nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'lib hisoblanadi. Haqiqatdan ham A nuqtani qutb deb olib, Q nuqtaning tezlanishini (9.10) va (9.11) formulalar yordamida hisoblaymiz:

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}$$

Bunda

$$\vec{a}_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

$$\vec{a}_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

AQ ning bu qiymatini (9.15) formulaga qo'ysak $\vec{a}_{QA} = \vec{a}_A$ kelib chiqadi.

\vec{a}_{QA} vektor AQ bilan μ burchak tashkil etadi. Demak, \vec{a}_{QA} vektor \vec{a}_A vektorga parallel lekin qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Shunga ko'ra

$$\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A \quad \text{va} \quad \vec{a}_Q = 0$$

Agar Q nuqtani qutb deb tanlasak, u holda $\bar{a}_Q = 0$ bo'ladi. Tekis shakl ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishi (9.10) formulaga ko'ra

$$\bar{a}_{QA} = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ} = \bar{a}_{BQ} \quad (9.16)$$

(9.11) formulaga ko'ra B nuqtaning tezlanishi son jihatdan quyidagiga teng.

$$\bar{a}_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (9.17)$$

(9.15) va (9.17) formulalardan

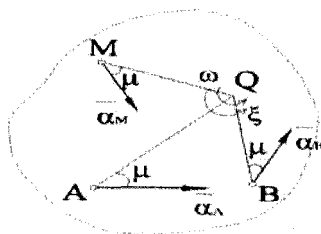
$$\frac{\bar{a}_Q}{BQ} = \frac{\bar{a}_A}{AQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (9.18)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Demak, tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari, shu nuqtalardan tezlanishlar oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi.

Tezlanishlarning taqsimlanishi 9.14-rasmda tasvirlangan. Tezliklar oniy markazi P bilan tezlanishlar oniy markazi Q vaqtning bu paytida ustma-ust tushmaydi. Masalan, to'g'ri chiziqli rels bo'ylab

markazi C o'zgarmas tezlik ($\bar{v}_C = const$) harakatlanayotgan g'ildirakning tezliklar oniy markazi g'ildirak bilan rels tutinib turgan P nuqtasi hisoblanadi ($\bar{v}_P = 0$) lekin, P nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'la olmaydi chunki $\bar{a}_P \neq 0$. Bu holda tezlanishlar oniy markazi to'g'ri chiziqli tekis harakatlanayotgan g'ildirakning C markazi bo'ladi, bu nuqtaning tezlanishi $\bar{a}_C = 0$. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jismda tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi ustma-ust tushadi.



9.14-rasm

NAZORAT SAVOLLARI:

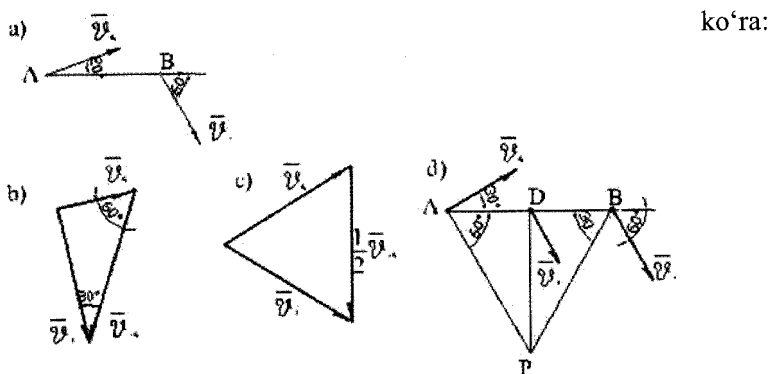
1. Tekis shaklning qanday nuqtasiga tezliklar oniy markazi deyiladi?
2. Tezliklar oniy markazini aniqlashning qanday usullari mavjud?
3. Sentroida nima?
4. Qo'zg'aluvchan sentroida deb nimaga aytiladi?
5. Qo'zg'almas sentroida deb nimaga aytiladi?
6. Qutb yordamida tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini aniqlash formulasini keltirib chiqaring?
7. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini geometrik usulda qanday topiladi?
8. Tekis shaklning qanday nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi?
9. Tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi ustma-ust tushadimi?

markazini, sterjenning burchak tezligini aniqlang. Shuningdek, sterjenning o'rtasidagi D nuqtaning tezligini ham aniqlang.

Yechilishi: Graffo analitik usulda yechish. (45) formulaga ko'ra B nuqtaning tezligi

$$\overline{g}_B = \overline{g}_A + \overline{g}_{BA} \quad (1)$$

(1) formulaga ko'ra tezliklar uchburchagini quramiz. (9.16-rasm,b) bu uchburchakning bitta tomoni va barcha burchaklari ma'lum, shunga



9.16-rasm

$$g_{BA} = \frac{g_A}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ m/s};$$

$$g_B = g_A \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ m/s} \approx 8,05 \text{ m/s} \quad (2)$$

bu yerda

$$g_{BA} = \omega \cdot BA = 2 \cdot \omega \quad (3)$$

(1) va (3) lardan ω ni aniqlaymiz.

$$2 \cdot \omega = 10$$

$$\omega = \frac{10 \text{ rad.}}{2 \text{ s}} = 5 \frac{\text{rad.}}{\text{s}}$$

Sterjen o'rtasidagi D nuqtaning tezligini aniqlaymiz.

$$\vartheta_B = \vartheta_A + \frac{1}{2} \vartheta_{BA}$$

Tezliklar uchburchagini quramiz (9.16-rasm,c) bu uchburchakning ikkita tomoni o‘zaro teng, ya‘ni:

$\vartheta_A = \frac{1}{2} \vartheta_{BA} = 5 \text{ m/s}$ Bu ikkala tomon orasidagi burchak 60° . Demak bu uchburchak teng tomonli. D nuqtaning tezligi ham $\vartheta_D = 5 \text{ m/s}$

Endi bu masalani tezliklar oniy markazi yordamida yechamiz. Buning uchun A va B nuqtalar tezlik vektorlariga perpendikulyarlar tushiramiz. Bu perpendikulyarlar qandaydir P nuqtada kesishadi. P nuqta tezliklar oniy markazi bo‘lib hisoblanadi. Uchburchak ABP ning bitta tomoni va barcha burchaklari ma‘lum. Uchburchakning AP va BP tomonlarini aniqlaymiz (9.16– rasm,d).

$$AP = AB \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ m}$$

$$BP = AB \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ m}$$

AB sterjenning burchak tezligi

$$\omega = \frac{\vartheta_A}{AP} = \frac{5}{1} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

B nuqtaning tezligi

$$\vartheta_B = \omega BP = 5 \cdot 1,73 = 8,65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

D nuqtaning tezligining aniqlash uchun D nuqtani P nuqta bilan tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan $\triangle ADP$ dan $AD=AP=1 \text{ m}$. Demak uchburchak teng tomonli. Shunga ko‘ra $DP=1 \text{ m}$, u holda $\vartheta_D = \omega \cdot DP = 5 \cdot 1 \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$

D nuqtaning tezligi DP ga perpendikulyar yo‘nalgan.

3-masala: Krivoship mexanizmining OA krivoshipi O nuqta atrofida ω_{OA} burchak tezlik bilan aylanmoqda $OA=r$ va $AB=l$ deb olib, OA krivoship porshenning yo‘naltiruvchi o‘qi bilan φ burchak hosil qilganda AB

shatunning burchak tezligi va B porshenning tezligining aniqlang. (9.17-rasm, a).

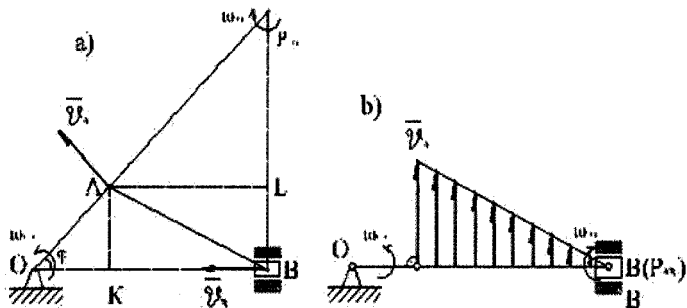
Yechilishi: Krivoshipning burchak tezligi va uzunligini bilgan holda krivoship A nuqtasi (barmoq) ning tezligini aniqlaymiz:

$$\vartheta_A = \omega_{OA} \cdot OA = r \cdot \omega_{OA}$$

Krivoship A nuqtasining tezligi OA ga perpendikulyar B porshenning tezligi esa OB bo‘ylab yo‘nalgan A va B nuqtalarning tezlik vektorlariga perpendikulyarlar o‘tkazamiz, ular qandaydir nuqtada kesishadi. Bu nuqta tezliklar oniy markazi bo‘lib hisoblanadi. Uni P_{AB} deb belgilaymiz. A nuqtadan tezliklar oniy markazigacha bo‘lgan masofani hisoblaymiz.

$$AP_{AB} = \frac{AL}{\cos \varphi}$$

lekin $AL = KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$



9.17-rasm

AL ning o‘rniga qiymatini qo‘yamiz.

$$AP_{AB} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

AB shatunning burchak tezligi

$$\omega_{AB} = \frac{\mathcal{G}_A}{AP_{AB}} = \frac{r\omega_{OA}}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{r\omega_{OA} \cdot \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi}$$

B porshenning tezligini topish uchun BP_{AB} ni aniqlaymiz.

$$BP_{AB} = LP_{AB} + LB = AP_{AB} \sin \varphi + AK = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi + r \sin \varphi$$

B porshenning tezligi

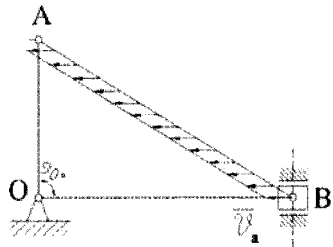
$$\mathcal{G}_B = BP_{AB} \omega_{AB} = \left(\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi + r \sin \varphi \right) \cdot \frac{r\omega_{OB} \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} = \left(r^2 \sin \varphi + \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \omega_{OA}$$

$\varphi = 0$ bo'lganda, shatunning tezliklar oniy markazi B nuqta bilan ustma-ust tushadi. Natijada shatunning barcha nuqtalari B nuqta atrofida aylanalari chizadi (9.17-rasm,b).

Shatunning burchak tezligi

$$\omega_{AB} = \frac{\mathcal{G}_A}{PA} = \frac{r}{l} \omega_{OA}$$

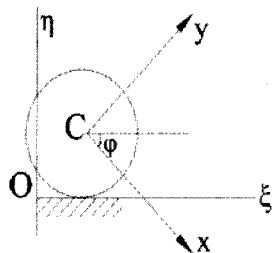
B porshenning tezligi $\mathcal{G}_B = 0$, $\varphi = 90^\circ$, bo'lganda krivoshipning A nuqtasi va B porshenning tezliklari o'zaro parallel bo'ladi. Shunga ko'ra AB shatunning tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi (9.18-rasm).



9.18-rasm

Bu paytda AB shatunning barcha nuqtalari bir xil $\overline{\mathcal{G}_A}$ tezlikka ega bo'ladi. Chunki $\omega_{AB} = 0$.

4-masala. Radiusi R bo'lgan g'ildirak gorizontol to'g'ri chiziq bo'ylab sirpanmasdan g'ildiraydi. G'ildirak markazi C ning tezligi o'zgarmas va ϑ ga teng. G'ildirak bilan bog'langan y o'q boshlang'ich paytda vertikal bo'lib, qo'zg'almas η o'q shu paytda g'ildirakning C markazi orqali o'tadi. G'ildirakning harakat tenglamalari aniqlansin. C nuqta qutb deb olinsin (9.19-rasm).



9.19-rasm

Yechilishi: Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlaymiz.

G'ildirakning C markazi ξ o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab ϑ o'zgarmas tezlik bilan tekis harakat qilgani uchun uning η koordinatasi o'zgarmas va R ga teng, ya'ni $\eta_c = R$

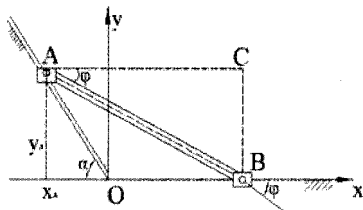
ξ koordinatasi esa quyidagiga teng: $\xi_c = \vartheta \cdot t$

Endi φ burchakni topamiz. G'ildirak φ burchakka burilganda uning chetidagi nuqtalar $R\varphi$ ga teng yoy chizadi va g'ildirak markazining $\vartheta \cdot t$ ko'chishiga teng bo'ladi, ya'ni

$$R\varphi = \vartheta \cdot t$$

bundan $\varphi = \frac{\vartheta}{R} t$

5-masala. To'g'ri chizikli yo'naltiruvchi bo'ylab sirpanuvchi A va B nuqtalar l uzunlikdagi AB sterjen bilan birlashtirilgan. A mufta ϑ_A o'zgarmas tezlik bilan harakatlanadi. A muftani O nuqtadan harakatlana boshlagan deb hisoblab, AB sterjenning harakat tenglamalari yozilsin. Qutb uchun A nuqta olinsin. BOA burchak $\pi - \alpha$ ga teng (9.20-rasm).



9.20-rasm

Yechilishi: A nuqtaning x_A, y_A koordinatalarini topamiz. Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilgandek qilib tanlaymiz. Shakldan ma'lumki:

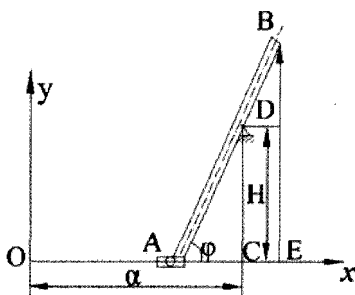
$$x_A = OA \cos \alpha, \quad y_A = OA \sin \alpha$$

A nuqta o'zgarmas tezlik bilan tekis harakat qilgani uchun $OA = \vartheta_A \cdot t$ ga teng bo'ladi. Demak A nuqta

$$x_A = \vartheta_A t \cos \alpha, \quad y_A = \vartheta_A t \sin \alpha$$

tenglamalarga muvofiq harakatlanadi.

6-masala. AB sterjenning A uchi ϑ o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchida sirpanadi va bunda sterjen harakat vaqtida D shtiftga tayanadi. Sterjen va uning B uchi harakati tenglamalari yozilsin. Sterjen uzunligi l ga teng. Shtift to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchidan H balandlikka o'rnatilgan. Harakatning boshlanishida sterjenning A uchi qo'zg'almas koordinatalar sistemasini boshi O nuqta bilan ustma-ust tushgan. $OM = a$.



9.21-rasm

A nuqtani qutb deb olinsin (9.21-rasm).

Yechilishi: Sterjenning A qutb atrofida aylanishini φ burchak orqali belgilaymiz. A nuqta x o'qi bo'ylab yo'nalgani uchun hamma vaqt $y_0 = 0$. Endi x_A koordinatasi topiladi. A nuqta ϑ tezlik bilan tekis harakat qilgani uchun $x_A - OA = \vartheta t$ bo'ladi.

Shakldan ko'rinadiki

$$\frac{H}{AC} = \operatorname{tg} \varphi \quad AC = a - \vartheta t$$

bundan

$$\frac{H}{a - \vartheta t} = \operatorname{tg} \varphi \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{H}{a - \vartheta t}$$

Endi B nuqtani koordinatalari topiladi.

$$x_B = OA + AE \quad OA = \vartheta t \quad AE = l \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a - \vartheta t}{\sqrt{(a - \vartheta t)^2 + H^2}}$$

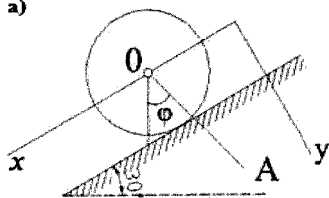
Natijada

$$x_B = \vartheta t + \frac{a - \vartheta t}{\sqrt{(a - \vartheta t)^2 + H^2}} l$$

$$y_B = BE = l \sin \varphi = \frac{Hl}{\sqrt{(a - \vartheta t)^2 + H^2}}$$

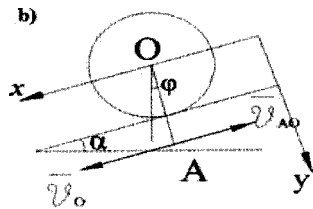
7-masala. G'ildirak gorizontga 30° og'gan qiya tekislik bo'ylab dumalaydi. a) G'ildirakning

O markazi $x_0 = 10t^2$ sm qonun bilan harakatlanadi. Bunda x - qiya tekislikka parallel yo'nalgan o'q. G'ildirak O markaziga uzunligi 36 sm ga teng OA sterjen ilib qo'yilgan. Bu sterjen O nuqtadan rasm tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi gorizonttal o'q atrofida $\varphi = \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} t$ rad. qonunga binoan aylanib tebranadi. $t = 1$ s payt uchun OA sterjen A uchining tezligi topilsin (9.22-rasm, a).



9.22-rasm (a)

Yechilishi: Tezlikning yo'nalishlarini chizmada ko'rsatilgan kabi bo'ladi. Bunda g'ildirakning boshlang'ich tezligi qiya tekislik bo'ylab yo'nalgan bo'lib harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha olingan hosilaga tengdir (9.22-rasm, b).



9.22-rasm

$$v_0 = \frac{dx_0}{dt} = 20t$$

$t=1$ s da boshlang'ich tezlik 20 sm/s tezlikka erishadi.

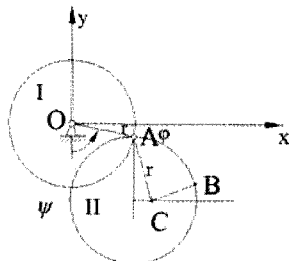
$$\vartheta_{AO} = \omega \cdot AO = \frac{d\varphi}{dt} \cdot AO$$

qiymat o'rinli bo'lib u harakat tekisligiga qarama-qarshi yo'naladi. Vaqtni hisobga olgan holda tezlikni aniqlaymiz. Unga ko'ra

$$\vartheta_{AO} = \sqrt{3}\pi^2 \text{ sm/s}^2$$

Sterjen A nuqtasining tezligi esa tezliklar farqi $\vartheta_A = \vartheta_0 - \vartheta_{AO}$ ga teng bo'lib uning miqdoriy qiymati $2,9$ sm/s bo'ladi.

8-masala. Har birining radiusi r bo'lgan ikkita bir xil disk A silindrik sharnir vositasida birlashtirilgan. I disk O qo'zg'almas gorizontaal o'q atrofida $\varphi = \varphi(t)$ qonunga binoan aylanadi. II disk A gorizontaal o'q atrofida $\psi = \psi(t)$ qonunga asosan aylanadi. O va A o'qlar rasm tekisligiga perpendikulyar. φ va ψ burchaklar vertikalidan soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda hisoblanadi. II disk C markazining tezligi topilsin (9.23-rasm).



9.23-rasm

Yechilishi: Shakldan foydalanib C nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz.

$$x_c = r \sin \varphi + r \sin \psi$$

$$y_c = -r \cos \varphi - r \cos \psi$$

Bu tenglamalardan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilalarni olib C nuqta tezligining proyeksiyalari aniqlanadi.

$$\vartheta_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = r\dot{\varphi} \cos \varphi + r\dot{\psi} \cos \psi$$

$$\vartheta_{cy} = \frac{dy_c}{dt} = r\dot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\psi} \sin \psi$$

C nuqta tezligining modulini topamiz

$$g_c = \sqrt{g_{ct}^2 + g_{cv}^2} = r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)}$$

9-masala. Uzunligi 0,5 m bo'lgan AB sterjen rasm tekisligida harakatlanadi.

g_A tezlik 2 m/s bo'lib sterjen bilan ustma-ust tushgan x o'q bilan 45° burchak hosil qiladi. B nuqtaning g_B tezligi x o'q bilan 60° burchak hosil qiladi. B nuqta tezligining kattaligi va sterjenning burchak tezligi topilsin (9.24-rasm).

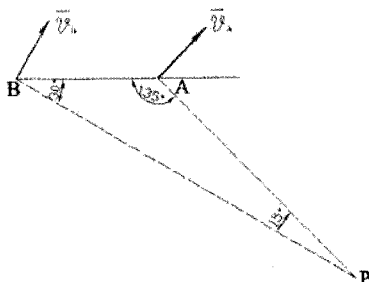


9.24-rasm

Yechilishi: Tekis shakl nuqtasining tezligini proyeksiya usuli bilan aniqlashga oid teoremaga asosan bu ikki nuqtaning shu nuqtalardan o'tuvchi o'qqa nisbatan proyeksiyalari o'zaro tengdir. Ya'ni:

$$g_B \cos \beta = g_A \cos \alpha$$

$$g_B = \frac{g_A \cos \alpha}{\cos \beta} = 2,82 \text{ m/s}$$



9.25-rasm

Bu ikki A va B nuqtalar uchun bitta P nuqta topiladiki bu nuqta oniy markaz hisoblanadi. Tekis shakl nuqtalarining tezliklari shu nuqtalardan tezliklar oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi (9.25-rasm).

Sinuslar teoremasiga asosan AP masofani topib olamiz

$$\frac{AP}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 15^\circ}$$

bundan $AP = 0,966m$ hosil bo'ladi. Bu ikkala nuqta uchun P nuqtaga nisbatan burchak tezliklari bir xil bo'ladi.

$$\omega_{AB} = \frac{\vartheta_A}{AP} = 2,06 \text{ rad/s}$$

10-masala. Sharnirli $ABCD$ to'rt zvenolikda yetakchi AB krivoship $\omega_0 = 6\pi \text{ rad/s}$ o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanadi. AB krivoship bilan BC sterjen bir to'g'ri chiziqda yotgan paytda CD krivoship va BC sterjenning o'ny burchak tezliklari topilsin (9.26-rasm). $BC=3AB$.

Yechilishi: Chizmadan ma'lumki B nuqta tezligidan o'tkazilgan perpendikulyar C nuqtadan ham o'tadi. Demak C nuqta shaklning o'ny aylanish markazi bo'ladi. A doimiy aylanish markaziga nisbatan B nuqta tezligi topiladi.

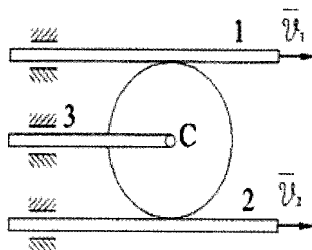
$$\begin{aligned}\omega_B &= AB \cdot \omega_0 \\ \omega_B &= BC \cdot \omega_{BC}\end{aligned}$$

bundan

$$\omega_{BC} = \frac{AB \cdot \omega_0}{BC} = \frac{AB}{3AB} \omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$$

hosil bo'ladi. Qaralayotgan holda C nuqtaga nisbatan DC sterjen tinch holatda turibdi, shuning uchun $\omega_{CD} = 0$ o'rindir.

11-masala. Rasmda harakatlarni qo'shadi-gan mexanizm tasvirlangan. O'zaro parallel ikkita 1- va 2- reykarlar ϑ_1 va ϑ_2 o'zgarmas tezliklar bilan bir tomonga harakatlanishadi. Reykalar orasiga r radiusli, reykarlar bo'ylab sirpanmay dumalaydigan disk qisilgan. Diskning C o'qiga mahkamlangan 3-reykaning tezligi 1- va 2- reykarlar tezliklari yig'indisining yarmiga tengligi ko'rsatilsin. Shuningdek diskning burchak tezligi topilsin (9.26-rasm).



9.26-rasm

Yechilishi: Chizmadan tezliklar yo'nalishini belgilaymiz va shunday P nuqta topamizki bu nuqta oniy markaz bo'lsin (9.27-rasm). Bunda burchak tezliklar bir xil bo'ladi va $\vartheta = \omega \cdot r$

formuladan barcha ω larni tenglashtiramiz.

$$\frac{\vartheta_1}{2r+a} = \frac{\vartheta_2}{a} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2r}$$

$$\frac{\vartheta_1}{2r+a} = \frac{\vartheta_c}{r+a} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{r}$$

Bundan $\vartheta_c = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$; va $\omega = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2r}$ hosil bo'ladi.

Yechilishi: Chizmadan tezliklar yo'nalishini belgilaymiz va shunday P nuqta topamizki bu nuqta oniy markaz bo'lsin (9.27-rasm). Bunda burchak tezliklar bir xil bo'ladi va $\vartheta = \omega \cdot r$

formuladan barcha ω larni tenglashtiramiz.

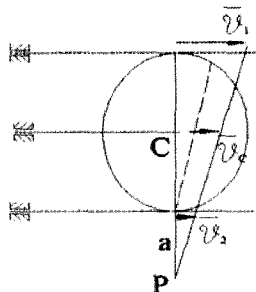
$$\frac{\vartheta_1}{2r+a} = \frac{\vartheta_2}{a} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2r}$$

$$\frac{\vartheta_1}{2r+a} = \frac{\vartheta_c}{r+a} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{r}$$

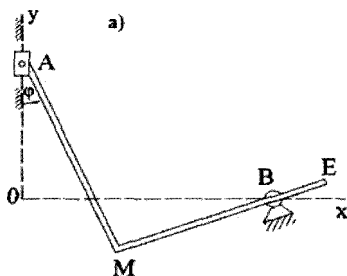
Bundan $\vartheta_c = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$; va $\omega = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2r}$ hosil bo'ladi.

12-masala. Mustahkam biriktirilgan AME to'g'ri burchak shaklidagi mexa-nizm shunday harakatlanadiki, bunda

A nuqta har doim Oy qo'zg'almas o'qda qoladi. Boshqa ME tomoni esa, aylanuvchi B sharnir orqali o'tadi. Masofa $MA=OB=a$. A nuqtaning ϑ_A tezligi o'zgarmas. M nuqtaning tezlanishi φ burchakning funksiyasi sifatida aniqlansin (9.28-rasm, a).



9.27-rasm



9.28-rasm

Yechilishi: Tekis mexanizmning A va B nuqtalarining tezliklaridan perpendikulyar chiqarib, P niy aylanish markazi topiladi (9.28-rasm,b). Bu markazga nisbatan $\vartheta_A = AP \cdot \omega$ bundan $\omega = \frac{\vartheta_A}{AP}$.

Shakldan ma'lumki $\cos \varphi = \frac{CP}{AP} = \frac{MP}{AB}$

bundan $AP = \frac{MP}{\cos \varphi}$.

$$ON = \frac{a \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}; NB = OB - ON = \frac{a}{1 + \sin \varphi}$$

$\cos \varphi = \frac{MB}{NB}$ ifodadan

$$MB = \frac{a \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}; AP = \frac{a}{1 + \sin \varphi}.$$

Shaklning A nuqtasi vertikal

bo'ylab o'zgaras tezlik bilan harakatlangani uchun uning tezlanishi nolga teng. Shuning uchun tezlanishlar markazi sifatida A nuqta olinadi. Shu A nuqtaga nisbatan M nuqtaning tezlanishlari topiladi.

$$a_{MA}^{(n)} = AM \cdot \omega^2 = a \cdot \frac{\vartheta_A^2 (1 + \sin \varphi)^2}{a^2} = \frac{\vartheta_A^2 (1 + \sin \varphi)^2}{a}$$

$$a_{MA}^{(r)} = \frac{\vartheta_A^2}{a} \cos^2 \varphi (1 + \sin^2 \varphi)$$

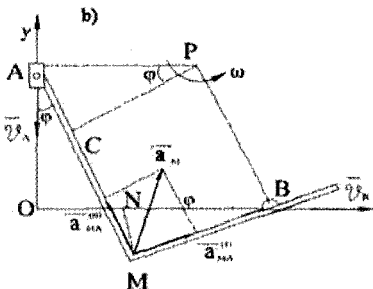
To'la tezlanish quyidagicha topiladi:

$$a_A = \sqrt{(a_{MA}^{(n)})^2 + (a_{MA}^{(r)})^2} = \frac{\sqrt{2} \vartheta_A^2}{2} (1 + \sin \varphi)^{3/2}$$

Endi tezlanishning yo'nalishi topiladi:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\cos \varphi (1 + \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi)^2} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

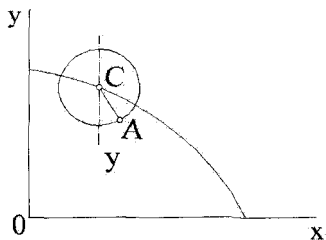
yoki $\operatorname{tg} \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.



9.28-rasm

9.9 Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Radiusi 20 sm bo'lgan diskning xy vertikal tekislikdagi harakatida uning C markaz $x_c = 10t, y_c = 100 - 4,9t^2\text{ m}$ tenglamalarga asosan harakatlanadi. Shu bilan birga, disk o'zining tekisligiga perpendikulyar bo'lgan C gorizontol o'q atrofida $\omega = \frac{\pi}{2}\text{ rad/s}$ o'zgarimas



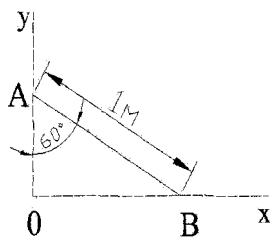
burchak tezlik bilan aylanadi. $t=0$ bo'lgan paytda disk gardishidagi A nuqtaning tezligi aniqlansin. A nuqtaning diskdagi holati vertikalga nisbatan soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda hisoblanadigan $\varphi = \alpha t$ burchak bilan aniqlanadi.

(javob: Tezlik gorizontol bo'ylab o'ng tomonga yo'nalgan va qiymati $10,31\text{ m/s}$ ga teng)

2-masala. Oldingi masalaning shartlarini saqlagan holda, A nuqtaning $t=1\text{ s}$ paytga mos keluvchi tezligi aniqlansin.

(javob: $\vartheta_{Ax} = 10\text{ m/s}, \vartheta_{Ay} = -9,49\text{ m/s}, \vartheta_A = 13,8\text{ m/s},$)

3-masala. Uzunligi 1 m bo'lgan AB sterjen doimo o'zining uchlari bilan o'zaro tik Ox va Oy to'g'ri chiziqlarga tayanib harakat qiladi. Burchak $\angle OAB = 60^\circ$ bo'lgan paytda tezliklar oniy markazining x va y koordinatalari topilsin.

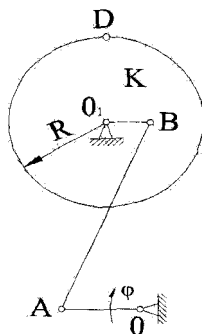


(javob: $x=0,866\text{ m}, y=0,5\text{ m})$

4-masala. AB to'g'ri chiziq rasm tekisligida harakatlanadi. Bir paytda A nuqtaning ϑ_A tezligi 180 sm/s ga teng bo'lib, AB to'g'ri chiziq bilan 30° burchak tashkil qiladi. Shu paytda B nuqta tezligining yo'nalishi AB to'g'ri chiziq yo'nalishi bilan bir xilda bo'ladi. B nuqtaning ϑ_B tezligi aniqlansin.

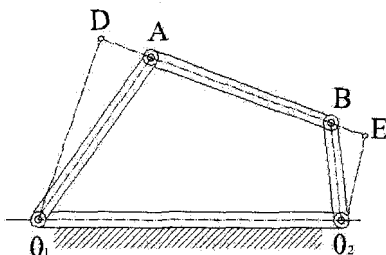
(javob: $\vartheta_b = 156 \text{ sm/s}$)

5-masala. Charxlovchi stanok, O o'q atrofida $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} t \text{ rad}$. qonun bilan tebranuvchi $OA=24 \text{ sm}$ pedal bilan harakatga keltiriladi (φ burchak gorizontol ga nisbatan hisoblanadi). K charx tosh AB sterjen yordamida O_1 o'q atrofida aylanadi. O va O_1 o'qlar rasm tekisligiga perpendikulyar. $t=0$ bo'lgan paytda OA va O_1B zvenolar gorizontol holatda joylashgan deb, radiusi $R=2BO_1$ ga teng K charxlovchi tosh gardishidagi D nuqtaning shu paytdagi tezligi topilsin.



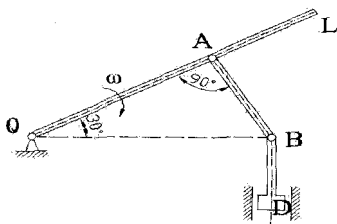
(javob: $\vartheta_D = 39,44 \text{ sm/s}$)

6-masala. Sharnirli to'rt zvenoli mexanizm OA sterjenining burchak tezligi ω_1 ga teng. O_2B sterjenining ω_2 burchak tezligi O_1A va O_2B sterjenlarning aylanish o'qlaridan AB shatungacha bo'lgan eng qisqa masofalar O_1D va O_2E hamda ω_1 orqali ifodalansin.



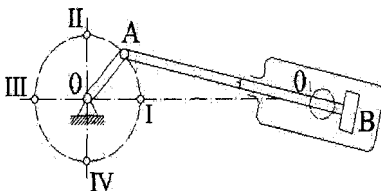
(javob: $\omega_2 = \omega_1 \frac{O_1D}{O_2E}$)

7-masala. Gidravlik pressning D por-sheni $OABD$ sharnir-richag mexanizmi vositasida harakatga keltiriladi. Rasmda tasvirlangan holatda OL richag $\omega = 2 \text{ rad/s}$ burchak tezlikka ega. Agar $OA=15 \text{ sm}$ bo'lsa, D porshenning tezligi va AB zvenoning burchak tezligi aniqlansin.



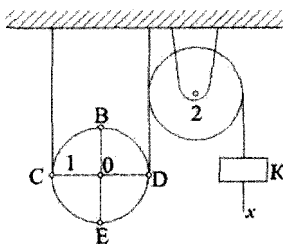
(javob: $\vartheta_D = 34,6 \text{ sm/s}$, $\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$)

8-masala. Tebranuvchi silindrlı ma-
shınadagi krivoshipning uzunlıgı
 $OA = 15 \text{ sm}$. Krivoshipning burchak
tezlıgı $\omega_0 = 15 \text{ rad/s} = \text{const}$ Krivoship
shatunga tik bo'lgan paytda porshen
tezlıgı va silindrning burchak tezlıgı
topılsın.



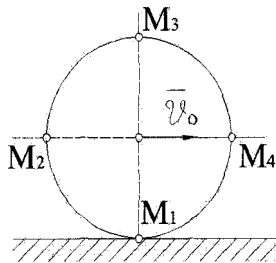
(javob: $\vartheta = 225 \text{ sm/s}$, $\omega = 0$)

9-masala. 1 qo'zg'aluvchan va 2 qo'zg'almas
bloklar cho'zilmaydigan ip bilan bog'langan.
Ipning uchıgı birıktırılğan K yuk $x = 2t^2 \text{ (m)}$
qonun bilan vertikal bo'ylab pastga tushadı.
 $t = 1 \text{ s}$ bo'lgan paytda rasmda tasvırlangan holat
uchun harakatlanuvchi blok gardıshıdın
yotuvchi C, D, B va E nuqtalarning tezıkları
topılsın. Qo'zg'aluvchi 1 blok radiusı $0,2 \text{ m}$ ga teng.
 $CB \perp BE$. Shuningdek, 1
blokning burchak tezlıgını ham toping.



(javob: $\vartheta_C = 0$, $\vartheta_D = 2 \text{ m/s}$, $\vartheta_B = \vartheta_E = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$)

10-masala. $R = 0,5 \text{ m}$ radiuslı g'ildirak to'g'ri
chızıqlı yo'l uchastkasıdın sırg'anmay g'ıldı-
raydı. G'ildirak markazınıg tezlıgı o'zgarmas
bo'lib, $\vartheta_0 = 10 \text{ m/s}$ ga teng. G'ildirakning vertıkal
va gorizontıl diameırlarınıg uchları bo'l-mısh
 M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalarning tezıkları,
shuningdek, g'ildirakmıg burchak tezlıgı
anıqlansın.

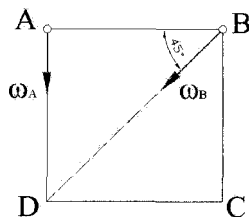


(javob: $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \vartheta_4 = 14,4 \text{ m/s}, \omega = 20 \text{ rad./s}$)

11-masala. Tekis parallel harakat qilayotgan

12 sm uzunlikdagi bir jinsli AB sterjen uchlarning tezlanishlari AB ga perpendikulyar va bir tomonga yo'nalgan bo'lib,

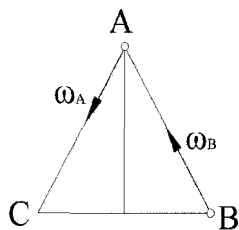
$a_A = 24 \text{ sm/s}^2, a_B = 12 \text{ sm/s}^2$. Sterjenning burchak tezligi va burchak tezlanishi shuningdek uning C og'irlik markazining tezlanishi topilsin.



(javob: $\omega = 0, \varepsilon = 1 \text{ rad./s}^2$ C nuqtaning tezlanishi AB ga perpendikulyar, A va B nuqtalar tezlanishlari yo'nalishda bo'lib miqdori 18 sm/s^2 ga teng).

12-masala. Teng tomonli ABC uchburchak rasm tekisligida harakatlanadi. Uchburchak A va B uchlarning tezlanishlari biror paytda 16 sm/s^2 ga teng bo'lib, uchburchak tomonlari bo'ylab yo'nalgan. Uchburchakning C uchining tezlanishi aniqlansin.

(javob: $a_c = 16 \text{ sm/s}^2$ va C dan B ga yo'nalgan).



X BOB. MODDIY NUQTANING MURAKKAB HARAKATI

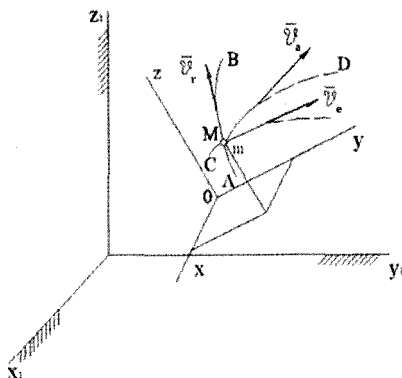
10.1 Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakati

Biz shu vaqtga qadar nuqta yoki jismning harakatini bitta sanoq sistemasiga nisbatan o'rganib keldik. Ayrim hollarda mexanika masalalarini yechishda nuqta yoki jismning harakatini bir vaqtning o'zida ikkita: bulardan biri shartli ravishda qo'zg'almas, ikkinchisi esa birinчисiga nisbatan harakatda bo'lgan sanoq sistemalariga nisbatan o'rganishga to'g'ri keladi.

Bir vaqtning o'zida ikki yoki undan ortiq harakatlarga ishtirok etuvchi nuqtaning harakatiga murakkab harakat deyiladi. Suzib ketayotgan kema palubasida dumalayotgan koptokning harakati qirg'oqqa nisbatan murakkab harakatda bo'ladi. Koptokning harakatining ikkita sodda harakatga ajratish mumkin.

M nuqta biror $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo'lsin. O'z navbatida M nuqta bu koordinatalar sistemi bilan birgalikda qo'zg'almas deb olingan $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin (10.1-rasm). Odatda har ikkala kordinatalar sistemi ham ma'lum jismlarga birlashtirilgan deb qaraladi. Quyidagi qoidalarni kiritamiz.

1. M nuqtaning qo'zg'aluvchan $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatiga nisbiy harakat deyiladi (bunday harakatni shu sanoq sistemi bilan bog'liq bo'lgan va shu sanoq sistema bilan birgalikda harakatlanayotgan kuzatuvchi ko'radi). Nuqtaning nisbiy harakatida qoldirgan AB trayektoriyasiga nisbiy trayektoriya deyiladi. M nuqtaning $Oxyz$ koordinata sistemasiga nisbatan harakat tezligiga nisbiy tezlik (\vec{v}_r), tezlanishiga nisbiy tezlanishi (\vec{a}_H) deyiladi. (\vec{v}_r) va (\vec{a}_H) kattaliklarni aniqlashda $Oxyz$ koordinatalar sistemasini qo'zg'almas deb qarash mumkin.



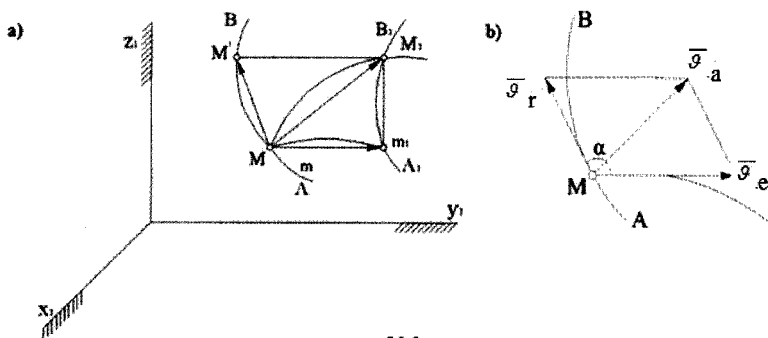
10.1-rasm

2. Qo'zg'aluvchan $Oxyz$ koordinatalar sistemasi va u bilan o'zgarmas ravishda bog'langan jism (nuqta) ning qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati ko'chirma harakat deyiladi.

Vaqtning berilgan paytida harakatdagi M nuqta bilan ustma-ust tushuvchi qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi m nuqtasining tezligi ko'chirma tezlik (\vec{g}_e), tezlanishiga ko'chirma tezlanish (\vec{a}_e) deyiladi.

$$\vec{g}_e = \vec{g}_m, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_m \quad (10.1)$$

3. M nuqtaning qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatiga absolyut yoki murakkab harakat deyiladi. Nuqtaning harakat paytida qoldirgan CD traektoriyasiga absolyut trayektoriya, tezligiga absolyut tezlik (\vec{g}_a), tezlanishiga esa absolyut tezlanish (\vec{a}_a) deyiladi:



10.2-rasm

Yuqorida keltirilgan misolimizda koptokning kema palubasiga nisbatan harakati nisbiy harakat koptokning tezligi esa nisbiy tezlik; kemaning qirg'oqqa nisbatan harakati koptok uchun ko'chirma harakat, kema palubasining shu paytda koptok tegib turgan nuqtasining tezligi ko'chirma tezlik, koptokning qirg'oqqa nisbatan harakati absolyut harakat, koptokning tezligi absolyut tezlik bo'ladi.

Kinematikaga oid shu masalalarni yechishda, nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut tezliklar miqdori va tezlanishlari orasidagi bog'lanishlarni aniqlash lozim.

10.2 Tezliklarni qo'shish haqida teorema

M nuqtaning murakkab harakatini ko'rib chiqamiz. M nuqta $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'ida AB trayektoriya bo'ylab nisbiy harakatlanib, M nuqtadan M' nuqtaga kelsin (10.2-rasm,a). Shu vaqt oralig'ida AB egri chiziq qo'zg'aluvchan $Oxyz$ sistemasi bilan birgalikda harakatlanib A_1, B_1 holatni egallaydi. Vaqtning t paytida AB egri chiziqning m nuqtasi bilan ustma-ust tushuvchi M nuqta, shu vaqtning ichida ko'chirma harakat qilib, M (m) nuqtadan m_1 nuqtaga keladi. Natijada M nuqta Δt vaqt oralig'ida absolyut harakat qilib, M_1 holatni egallaydi. Vektorlarni yig'indi shaklida ifodalab va tenglikning har ikkala tomonini Δt ga bo'lib, Δt ni 0 ga intiltirib limit olamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}$$

Yuqorida aytilganga ko'ra

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{\vartheta_a}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} = \overline{\vartheta_c}$$

yozamiz. Δt nolga intilganda A_1, B_1 egri chiziq AB bilan ustma-ust tushishga intiladi, u holda

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M_1m_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \overline{\vartheta_r}$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\overline{\vartheta_a} = \overline{\vartheta_r} + \overline{\vartheta_c} \quad (10.2)$$

Shunday qilib, tezliklarni qo'shish haqidagi quyidagi teoremani isbotladik: murakkab harakatda nuqtaning absolyut tezligi nisbiy va ko'chirma tezliklarning geometrik yig'indisiga teng.

10.2-(b) rasmda hosil bo'lgan figuraga tezliklar parallelogrammi deyiladi. Absolyut tezlikning moduli kosinuslar teoremasiga asosan topiladi.

$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_r^2 + \vartheta_e^2 + 2\vartheta_r\vartheta_e \cos\alpha} \quad (10.3)$$

burchak $\alpha - \overline{\vartheta_r}$ va $\overline{\vartheta_e}$ tezlik vektorlari orasidagi burchak.

Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut tezlanishlari orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Buning uchun (10.2) tenglikning har ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\overline{\vartheta_a}}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta_r}}{dt} + \frac{d\overline{\vartheta_e}}{dt}$$

tenglikning chap tomoni absolyut tezlanishni beradi:

$$\overline{a_a} = \frac{d\overline{\vartheta_a}}{dt}$$

$$\overline{a_a} = \frac{d\overline{\vartheta_a}}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta_r}}{dt} + \frac{d\overline{\vartheta_e}}{dt} \quad (10.4)$$

(10.4) tenglikning o'ng tomonidagi hadlar tegishli nisbiy tezlanish $\overline{a_r}$ va ko'chirma tezlanish $\overline{a_e}$ larni bermaydi. Chunki bu kattaliklar nuqtaning murakkab harakatida qo'zg'aluvchan sanoq sistemasi harakatining xarakteriga bog'liq.

Nisbiy tezlik $\overline{\vartheta_r}$ va ko'chirma tezlik $\overline{\vartheta_e}$ vektorlarining nisbiy harakat paytida vaqtga bog'liq o'zgarishlarini «1» indeks bilan ko'chirma harakat paytidagisini esa «2» indeks bilan belgilasak (10.4) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overline{a_a} = \frac{(d\overline{\vartheta_r})_1}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta_r})_2}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta_e})_1}{dt} + \frac{(d\overline{\vartheta_e})_2}{dt} \quad (10.5)$$

Nisbiy tezlanishiga berilgan ta'rifga ko'ra nisbiy tezlanishning vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishi nisbiy tezlanishni xarakterlaydi. Bunda ko'chirma harakat e'tiborga olinmaydi. Shunga ko'ra

$$\overline{a_r} = \frac{(d\overline{\vartheta_r})_1}{dt} \quad (10.6)$$

Shuningdek ko'chirma tezlanish faqatgina ko'chirma harakatda ko'chirma tezlikning vaqtga bog'liq o'zgarishini xarakterlaydi, ya'ni $\overline{a_x} = \overline{a_m}$

Shunga ko'ra

$$\overline{a_e} = \frac{(d\overline{g_e})_2}{dt} \quad (10.7)$$

U holda (10.5) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

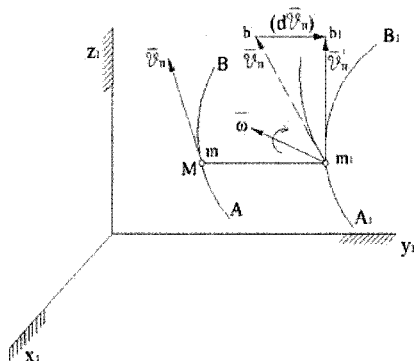
$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \frac{(d\overline{g_r})_2}{dt} + \frac{(d\overline{g_e})_h}{dt} \quad (10.8)$$

quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\overline{a_{KOP}} = \frac{(d\overline{g_r})_2}{dt} + \frac{(d\overline{g_e})_h}{dt} \quad (10.9)$$

$\overline{a_{KOP}}$ - Koriolis tezlanishi.

Nuqtaning nisbiy tezligini ko'chirma harakatda, ko'chirma tezligining nisbiy harakatda vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishini xarakterlovchi kattalikka aylanma yoki bo'lmasa Koriolis tezlanishi deyiladi. Natijada (10.8) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:



10.3-rasm

$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \overline{a_{KOP}} \quad (10.10)$$

Murakkab harakatda nuqtaning absolyut tezlanishi, nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

Bu Koriolis teoremasini ifodalaydi. Endi Koriolis tezlanishini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Hisoblashni $\frac{(d\overline{g_r})_2}{dt}$ ni aniqlashdan boshlaymiz. Qarab chiqilayotgan ko'chirma harakatda AB egri chiziqqa urinma bo'ylab yo'nalgan $\overline{g_r}$ tezlik vektori egri chiziq bilan birgalikda

ilgarilanma harakatlanib $\overline{m_1 b}$ holatini oladi (10.3-rasm) va bir vaqtning o'zida $\overline{m_1 b_1}$ holatni olguncha ω burchak tezlik bilan m_1 nuqta atrofida buriladi. Natijada $\overline{\mathcal{G}_r}$ tezlik vektori ko'chirma harakatda $(d\overline{\mathcal{G}_r})_2 = \overline{b b_1} = \overline{\mathcal{G}_b} \cdot dt$ orttirma oladi. Bu yerda $\overline{\mathcal{G}_b} - b$ nuqta $(\overline{m_1 b}) = \overline{\mathcal{G}_r}$ vektorining m_2 nuqta atrofida aylanish tezligi $\overline{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanish sodir bo'lgani uchun b nuqtaning tezlik vektori

$$\overline{\mathcal{G}_b} = \overline{\omega \times m_1 b} = \overline{\omega \times \mathcal{G}_r} \cdot dt$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} (d\overline{\mathcal{G}_r})_2 &= \overline{\mathcal{G}_b} \cdot dt = \overline{\omega \times \mathcal{G}_r} \cdot dt \\ \frac{(d\overline{\mathcal{G}_r})_2}{dt} &= \frac{(\overline{\omega \times \mathcal{G}_r}) \cdot dt}{dt} = \overline{\omega \times \mathcal{G}_r} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Endi $\frac{(d\overline{\mathcal{G}_e})_1}{dt}$ ni aniqlaymiz:

$$\overline{\mathcal{G}_e} = \overline{\mathcal{G}_0} + \overline{\omega \times r}$$

dt vaqt oralig'ida nuqta nisbiy harakatlanib $\overline{MM^1} = \overline{\mathcal{G}_r} \cdot dt \cdot M^1$ holatni oladi. Bu nuqtaning radius-vektori $\overline{r^1} = \overline{r} + \overline{MM^1}$ ko'rinishda bo'ladi va

$$\overline{\mathcal{G}_e^1} = \overline{\mathcal{G}_0} + \overline{\omega \times r^1} = \overline{\mathcal{G}_0} + \overline{\omega \times (\overline{r} + \overline{MM^1})}$$

Demak, nuqta M nuqtadan M^1 nuqtaga kelguncha nisbiy harakatlanadi. $\overline{MM^1} = \overline{\mathcal{G}_r} \cdot dt$, $\overline{\mathcal{G}_e}$ ko'chirma tezlik vektori shu vaqt ichida orttirma oladi.

$(d\overline{\mathcal{G}_e})_1 = \overline{\mathcal{G}_e^1} - \overline{\mathcal{G}_e} = \overline{\omega \times \overline{MM^1}} = \overline{\omega \times \mathcal{G}_r} \cdot dt$ o'rniga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{(d\overline{\mathcal{G}_e})_1}{dt} = \overline{\omega \times \mathcal{G}_r} \quad (10.12)$$

Hosil bo'lgan tenglamalarni (10.9) ga qo'yamiz:

$$\overline{a_{KOR}} = 2 (\overline{\omega \times \mathcal{G}_r}) \quad (10.13)$$

Shunday qilib, Koriolis tezlanishi, ko'chirma harakat burchak tezligini nuqtaning nisbiy tezligiga bo'lgan vektorial ko'paytmasining ikkilanganiga teng

10.3 Ko'chirma harakat ilgari lanma harakatdan iborat bo'lganda tezlanishlarni qo'shish

Agar qo'zg'aluvchan sanoq sistemasi ilgari lanma harakat qilayotgan bo'lsa $\omega = 0$ bo'ladi, shunga ko'ra koriolis tezlanishi $\overline{a_{kor}} = 0$ bo'ladi. U holda (10.10) formula quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overline{a_o} = \overline{a_r} + \overline{a_c} \quad (10.14)$$

Ko'chirma harakat ilgari lanma harakat bo'lganda nuqtaning absolyut tezlanishi nisbiy va ko'chirma tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng.

10.4 Koriolis tezlanishning moduli va yo'nalishini aniqlash

Nuqtaning nisbiy tezlanishini hisoblash paytida qo'zg'aluvchan sanoq sistemasining harakati e'tiborga olinmaydi. Nisbiy tezlanish nuqtaning tezlanishi kabi topiladi. Ko'chirma tezlanish qo'zg'aluvchan sanoq sistemasi bilan chambarchas bog'liq bo'lgan nuqtaning tezlanishi kabi topiladi.

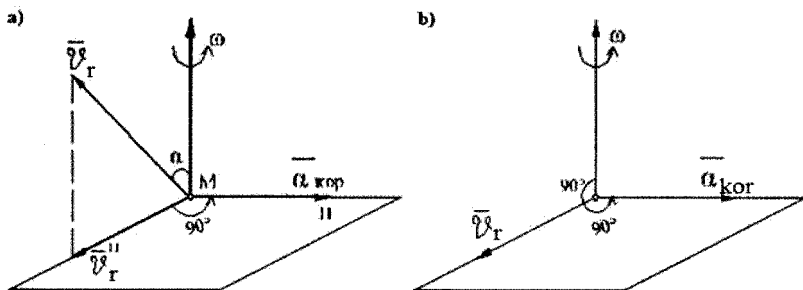
Koriolis tezlanishi (10.13) formula yordamida aniqlanadi. Agar $\overline{\omega}$ va $\overline{\vartheta_r}$ vektorlar orasida burchak α ga teng bo'lsa, Koriolis tezlanishining moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$a_{kor} = 2|\omega| \cdot |\vartheta_r| \sin \alpha \quad (10.15)$$

$\overline{\omega}$ vektorni o'ziga parallel tarzda fikran M nuqtaga ko'chirilganda $\overline{a_{kor}}$ - Koriolis tezlanish vektori $\overline{\omega}$ va $\overline{\vartheta_r}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda shunday yo'naladiki, uning musbat uchidan qaraganda $\overline{\omega}$ ni kichik burchakka burib $\overline{\vartheta_r}$ ustiga tushirish uchun soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda burishi kerak.

10.4 (a) -rasm, dan ko'rinadiki, Koriolis tezlanishining yo'nalishini aniqlash uchun, nisbiy tezlik $\overline{\vartheta_r}$ vektorini $\overline{\omega}$ vektorga perpendikulyar

bo'lgan Π tekislikka proyeksiyalab va \vec{g}_r^Π ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat yo'nalishida 90° burchakka burish kerak.



10.4-rasm

Agar $\vec{\omega}$ vektori \vec{g}_r tezlik vektoriga perpendikulyar bo'lsa, Koriolis tezlanishiing yo'nalishini aniqlash uchun \vec{g}_r ni $\vec{\omega}$ atrofida ko'chirma harakat aylanishi yo'nalishida 90° burchakka burish kerak (10.4-rasm,b).

Quyidagi xususiy hollarni ko'rib chiqamiz:

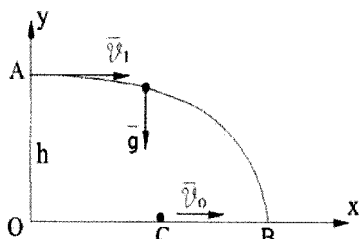
- 1) Qo'zg'aluvchan sanoq sistemasi ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa $\omega = 0$ bo'ladi, u holda (10.13) formuladan Koriolis tezlanishi $a_{kor} = 0$ kelib chiqadi;
- 2) Berilgan onda nuqtaning nisbiy tezligi $g_r = 0$ bo'lsa (10.13) formulaga ko'ra Koriolis tezlanishi $a_{kor} = 0$ bo'ladi;
- 3) Agar $\alpha = 0^\circ$ yoki $\alpha = 180^\circ$ bo'lsa, berilgan onda nisbiy harakat tezlik vektori ko'chirma harakat burchak tezligi vektoriga parallel bo'lsa $\sin 0^\circ = 0$ ekanligidan (10.13) formulaga ko'ra Koriolis tezlanishi $a_{kor} = 0$ bo'ladi.

NAZORAT SAVOLLARI:

1. Nuqtaning qanday harakatiga nisbiy harakat deyiladi?
2. Nuqtaning qanday harakatiga ko'chirma harakat deyiladi?
3. Nuqtaning qanday harakatiga absolyut harakat deyiladi?
4. Nuqtaning nisbiy tezligi qanday topiladi?
5. Nuqtaning ko'chirma tezligi qanday topiladi?
6. Nuqtaning absolyut tezligi qanday topiladi?
7. Tezliklarni qo'shish haqidagi teoremani aytib bering. Absolyut tezlik modulini topish formulasini yozib bering.
8. Nuqtaning nisbiy ko'chirma va absolyut tezlanishlari orasida qanday bog'lanish bor?
9. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakat bo'lmagan harakatdan iborat bo'lganda nuqtaning absolyut tezlanishi qanday formula yordamida aniqlanadi?
10. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakat bo'lganda nuqtaning absolyut tezlanishi nimaga teng?
11. Koriolis tezlanishi deb qanday tezlanishga aytiladi?
12. Koriolis tezlanishi qanday formula yordamida aniqlanadi?
13. Koriolis tezlanishning modulini aniqlash formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
14. Koriolis tezlanishining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
15. Koriolis tezlanishi nuqtaning qanday harakatida paydo bo'ladi?
16. Koriolis tezlanishi qanday hollarda nolga teng bo'ladi?

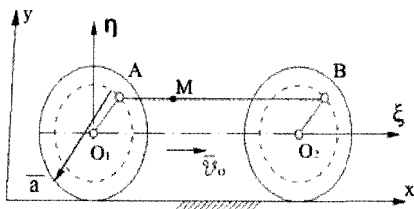
10.5 Mavzu yuzasidan masalalar yechish uchun namunalar:

1-masala Kema v_0 tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Dengiz sathidan h balandlik va o'sha kurs bilan v_1 tezlikda samolyot uchib boradi. Samolyotdan tashlangan vimpel kemaga tushishi uchun vimpelni gorizontal bo'yicha hisoblanuvchi qanday masofada tashlash kerak?



10.5-rasm

2-masala Agar ekipaj to'g'ri chiziqli yo'lda $v_0 = 10 \text{ m/s}$ tezlik bilan tekis harakat qilsa, O va O_1 o'qlaridagi krivoshiplarni birlashtiruvchi AB sparnikning biror M nuqtasining absolyut tezlanishi aniqlansin. G'ildiraklar radiusi $R = 1 \text{ m}$, krivoshiplar radiuslari $r = 0,75 \text{ m}$ (10.6-rasm).



10.6-rasm

Yechilishi: Krivoship A nuqtasining tezlanishi sparnikning biror M nuqtasining absolyut tezlanishi bilan bir xil qiymatda bo'ladi. Bunda sparnik va krivoship bir xil doiraviy chastotada harakatlanadi. Shunga ko'ra

$a_M = a_A = \omega^2 r$ Krivoshipning doiraviy chastotasi $\omega = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2$ ga tengligini

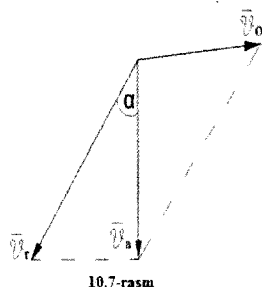
hisobga olsak M nuqtaning absolyut tezlanishi $a_M = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 \cdot r = 100 \cdot 0,75 = 75 \text{ m/s}^2$

bo'ladi.

3-masala Gorizontal yo'lda 72 km/soat tezlik bilan borayotgan avtomobildagi passajir kabinaning yon oynasiga tushgan yomg'ir tomchisi-ning vertikalga nisbatan 40° ga teng burchakka og'gan trayektoriyasini kuzatadi. Vertikal tushayotgan yomg'ir tomchisining absolyut tezligi aniqlansin. Tomchi bilan oyna orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin (10.7-rasm).

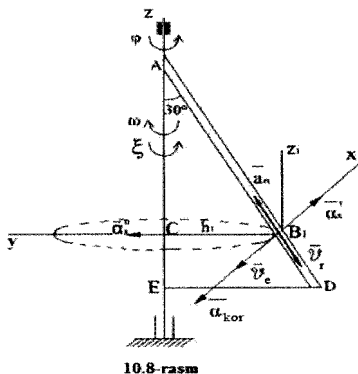
Yechilishi: Chizmadan ma'lumki yomg'ir tomchisining avtomobil oynasi bilan tashkil qilgan burchagi absolyut va nisbiy tezliklar orasidagi burchak bo'lib, bu burchakning tangensi avtomobil tezligining absolyut tezlikka nisbatiga tengdir. Shunga ko'ra

$$\vartheta_A = \frac{v_e}{\operatorname{tg}40^\circ} = \frac{20}{0,839} = 23,8 \text{ m/s}$$



4 – masala. *ADE* uchburchak plastinka z o'qi atrofida $\varphi = 0,1t^3 - 2,2t$ qonuniyat bo'yicha aylanmoqda. B nuqta AD gipotenuza bo'ylab $S=AB=2+15t-3t^2$ qonuniyat bo'yicha nisbiy harakatlanadi. Vaqtning $t_1=2c$ paytida B nuqtaning absolyut tezligi \bar{v}_a va absolyut tezlanishi \bar{a}_a ni aniqlang (10.8-rasm).

Yechilishi: B nuqtaning harakati murakkab harakatdan iborat. B nuqtaning AD gipotenuza bo'ylab harakati nisbiy harakat, plastinkaning z o'q atrofidagi aylanishi ko'chirma harakatdir.



U holda absolyut tezlik va absolyut

tezlanish quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \quad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{kor}$$

Nisbiy harakat. B nuqta AD gipotenuza bo'ylab $s=AB=2+15t-3t^2$ qonuniyat bo'yicha nisbiy harakat qiladi. B nuqtaning nisbiy tezligi va nisbiy tezlanishi

$$\bar{v}_r = \frac{ds}{dt} = \frac{d(2+15t-3t^2)}{dt} = 15-6t \quad \bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d(15-6t)}{dt} = -6$$

$t_1 = 2s$ bo'lganda B nuqtaning o'rnini, nisbiy tezligi va nisbiy tezlanishini aniqlaymiz:

$$s = AB_1 = 2 + 15 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 20 \text{ sm}$$

$$\overline{v}_r = 15 - 6 \cdot 2 = 3 \frac{\text{sm}}{s}$$

$$\overline{a}_r = -6 \frac{\text{sm}}{s^2}$$

Kattaliklarning ishoralaridan shuni aniqlash mumkinki, B nuqtaning nisbiy tezlik vektori A dan D nuqta tomon yo'nalgan, nisbiy tezlanish vektori esa unga teskari yo'nalgan ekan. Ko'chirma harakat. ADE plastinka z o'q atrofida $\varphi = 0,1t^3 - 2,2t$ qonuniyat bo'yicha ko'chirma (aylanma) harakat qiladi. Ko'chirma harakatning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε larni aniqlaymiz

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(0,1t^3 - 2,2t)}{dt} = 0,3t^2 - 2,2$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(0,3t^2 - 2,2)}{dt} = 0,6t$$

$$t_1 = 2s \text{ bo'lganda } \omega = 0,3 \cdot 4 - 2,2 = 1,2 - 2,2 = -1s^{-1} \quad \varepsilon = 1,2 s^{-2}$$

Burchak tezlik ω burilish burchagi φ ga teskari burchak tezlanish ε esa soat mili aylanishiga teskari tomonga yo'nalgan ekan. B_1 nuqtadan z o'qigacha bo'lgan h masofani aniqlaymiz.

$$h = AB_1 \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ sm}$$

U holda B nuqtaning ko'chirma tezligi:

$$\overline{v}_e = |\omega| \cdot h = |-1| \cdot 10 = 10 \text{ sm} / s$$

$$\overline{a}_e^t = |\varepsilon| h = |1,2| \cdot 10 = 12 \text{ sm} / s^2$$

$$\overline{a}_e^n = |\omega^2| h = |-1^2| \cdot 10 = 10 \text{ sm} / s^2$$

\overline{v}_e vector B_1 nuqtaga urinma bo'ylab ω burchak tezlik bilan bir tomonga yo'nalgan bo'ladi. \overline{a}_e^t vektor esa \overline{v}_e vektor yo'nalgan to'g'ri chiziq bo'ylab

unga teskari (ε burchak tezlanish bilan bir tomonga) yoʻnalgan boʻladi. $\overline{a_e^n}$ vektor esa B_1 nuqtadan aylana markazi tomon, yaʼni aylanish oʻqi tomon yoʻnalgan boʻladi.

Koriolis tezlanishi. Nisbiy tezlik $\overline{g_r}$ vektori bilan aylanish oʻqi orasidagi burchak 30° boʻlgani uchun, Koriolis tezlanishining moduli

$$a_{KOP} = 2|\overline{g_r}| \cdot |\omega| \sin 30^\circ = 2 \cdot 3 \cdot |-1| \cdot 0,5 = 3 \frac{sm}{s^2}$$

Koriolis tezlanishining yoʻnalishni topish uchun nisbiy tezlik $\overline{g_r}$ vektorini aylanish oʻqiga perpendikulyar tekislikka proyeksiyalab, keyin proyeksiyani 90° burchakka, burchak tezligi yoʻnalgan tomonga buramiz. Koriolis tezlanishi $\overline{a_{KOP}}$ vektori $\overline{g_e}$ vektori bilan bir toʻgʻri chiziq boʻylab yoʻnalgan

B nuqtaning absolyut tezligi. $\overline{g_a}$ ni aniqlaymiz. $\overline{g_r}$ va $\overline{g_e}$ vektorlar oʻzaro perpendikulyar boʻlgani uchun

$$g_a = \sqrt{g_r^2 + g_e^2} = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} = 10,44 \frac{sm}{s}$$

5. B nuqtaning absolyut tezlanishini aniqlaymiz:

$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e^r} + \overline{a_e^n} + \overline{a_{KOP}}$$

Absolyut tezlanish $\overline{a_a}$ ni aniqlash uchun B_{1xyz} koordinata sistemasini oʻtkazib koordinata oʻqlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_{ax} = |a_e^r| - a_{KOP} = 12 - 3 = 9 \frac{sm}{s^2}$$

$$a_{ay} = a_e^n + |a_n| \sin 30^\circ = 10 + |-6| \cdot 0,5 = 13 \frac{sm}{s^2}$$

$$a_{az} = |a_r| \cos 30^\circ = |-6| \cdot 0,866 = 5,196 \approx 5,2 \frac{sm}{s^2}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{9^2 + 13^2 + 5,2^2} = 16,64m/s^2$$

10.6 Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Harakati $x_1 = 2\cos(\pi t + \pi/2)$, $x_2 = 3\cos(\pi t + \pi)$ tenglamalar bilan ifodalanuvchi ikkita garmonik tebranishlarning qo‘shilishidan hosil bo‘lgan nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakati tenglamasi aniqlansin.

(javob: $x = \sqrt{13}\cos(\pi t + \alpha)$, bunda $\alpha = \arctg 2/3 = 33^\circ 40'$).

2-masala. O‘tloq tepasida muallaq turgan vertolyot yuk tashlaydi va shu zahoti gorizontol sirtga nisbatan α burchak ostidagi yo‘nalishda v_0 tezlik bilan harakatlana boshlaydi. Yukning vertolyotga nisbatan harakat tenglamalari va trayektoriyasi topilsin. (nisbiy koordinatalar sistemasi o‘qlari vertolyotning og‘irlik markazidan uning gorizontol kursi bo‘ylab va vertikal pastga yo‘naltirilgan).

(javob: $x_r = -g_0 t \cos \alpha$, $y_r = gt^2/2 + g_0 t \sin \alpha$ trayektoriya parabola.

$$y_r = -x_r \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx_r^2}{2g_0^2 \cos^2 \alpha}).$$

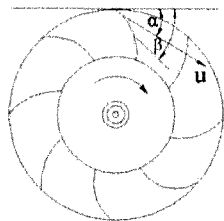
3-masala. A nuqtadan o‘tayotgan kema yo‘nalishi va miqdori o‘zgarmas bo‘lgan v_0 tezlik bilan harakatlanadi. Kater B nuqtadan yo‘nalishi va miqdori o‘zgarmas bo‘lgan v_1 tezlik bilan harakatlanib, kema bilan uchrashishi uchun, kater AB to‘g‘ri chiziqqa nisbatan qanday β burchak ostida harakatlanishi kerak? AB chiziq kema kursiga tik yo‘nalish bilan burchak ψ_0 tashkil qiladi.

(javob: $\sin \beta = \frac{g_0}{g_1} \cos \psi_0$)

4-masala. Kema $36\sqrt{2}$ km/soat tezlik bilan janubga qarab suzmoqda. Ikkinchi kema janubiy-sharqqa qarab kurs olib, 36 km/soat tezlik bilan bormoqda. Birinchi kema palubasida turgan kuzatuvchi aniqlanadigan ikkinchi kema tezligining yo‘nalishi va miqdori topilsin.

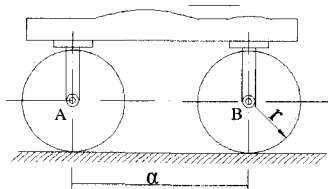
(javob: $g_r = 36$ km/soat bo‘lib shimoliy-sharqqa yo‘nalgan).

5-masala. Suv zarralari trubinaga u tezlik bilan kiradi. u tezlik va zarralar kiradigan nuqtada rotorga o'tkazilgan urinma orasidagi burchak α ga teng. Rotorning tashqi diametri D , minutdagi aylanishlar soni n . Suv trubinaga zarbasiz kirishi uchun, (zarralarning nisbiy tezligi bunda kuraklar bo'ylab yo'nalishi kerak) rotor kuragi bilan suvning kirish nuqtasidagi urinma orasidagi burchak β qancha bo'lishi aniqlansin.



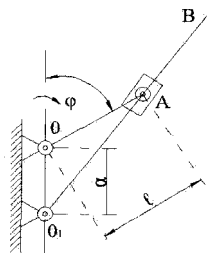
(javob: $\operatorname{tg}\beta = \frac{60u \sin\alpha}{60u \cos\alpha - \pi Dn}$)

6-masala. To'g'ri chiziqli relsda v tezlik bilan harakatlanuvchi vagonning A va B g'ildiraklari rels bo'ylab sirg'anmay dumalaydi. G'ildiraklarning radiuslari r ga, o'qlar orasidagi masofa d ga teng. B g'ildirak bilan o'zgarmaydigan qilib bog'langan koordinatalar sistemasiga nisbatan A g'ildirak markazining tezligi aniqlansin.



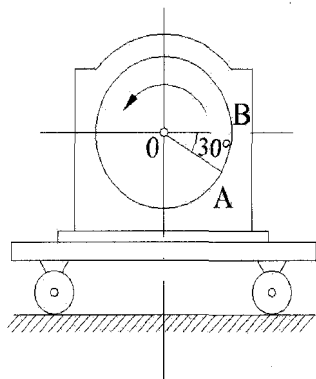
(javob: Tezlik $\frac{\partial d}{r}$ ga teng, AB ga perpendikulyar va pastga yo'nalgan).

7-masala. Krivoship kulisa mexanizmi aylanuvchi kulisasining burchak tezligi krivoshipning to'rtta: ikkita vertikal va ikkita gorizontal holatlari uchun aniqlansin. $a=60\text{sm}$, $l=80\text{sm}$ va krivoshipning burchak tezligi $\pi\text{ rad/s}$ ga teng.



(javob: $\omega_1 = \frac{4}{7}\pi\text{ rad/s}$, $\omega_{II} = \omega_V = 0,64\pi\text{ rad/s}$, $\omega_{III} = 4\pi\text{ rad/s}$)

8-masala. O'ng tomonga gorizontaal bo'ylab $a = 0,492 \text{ m/s}^2$ tezlanish bilan harakat qiluvchi aravachaga elektr motori o'rnatilgan. Uning rotori harakatga keltirish vaqtida $\varphi = t^2$ tenglamaga muvofiq aylanadi. Bunda φ burchak radianlar bilan o'lchanadi. Rotorning radiusi $0,2 \text{ m}$ ga teng. Rotor to'g'ini-dagi A nuqtaning $t=1 \text{ s}$ bo'lgandagi absolyut tezlanishi aniqlansin. Shu paytda A nuqta rasmda ko'rsatilgan holda turadi.

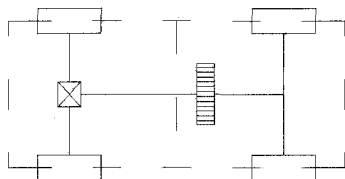


(javob: $a_a = 0,746 \text{ m/s}^2$ - tik yuqoriga yo'nalgan).

9-masala. Oldingi masalada A nuqta B holatni egallaganda uning absolyut tezlanishi nolga teng bo'lsa, rotorning tekis aylanishidagi burchak tezligi aniqlansin.

(javob: $\omega = 1,57 \text{ rad/s}$).

10-masala. Avtomobil yo'lining to'g'ri chiziqli uchastkasida $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$ tezlanish bilan harakat qiladi. Uzunasiga yo'nalgan valga radiusi $R = 0,25 \text{ m}$ bo'lgan aylanuvchi maxovik o'rnatilgan. Uning shu paytdagi

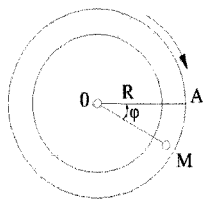


burchak tezligi $\omega = 4 \text{ rad/s}$ va burchak tezlanishi $\varepsilon = 4 \text{ rad/s}^2$. Maxovik to'g'ini-dagi nuqtalarning shu paytdagi absolyut tezlanishi topilsin.

(javob: $a = 4,58 \text{ m/s}^2$).

11-masala. Radiusi $R=1 \text{ m}$ bo'lgan yumaloq truba gorizontaal O o'q atrofida soat strelkasi bo'ylab $\omega = 1 \text{ rad/s}$ o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanadi. M sharcha trubadagi biror A nuqta atrofida shunday tebranadiki, burchak $\varphi = \sin \pi$ qonun bilan o'zgaradi.

$t = 2 \frac{1}{6} \text{ s}$ bo'lgan paytda sharcha absolyut tezlanishining urinma va normal tashkil etuvchilari (tezlanishlari) topilsin.



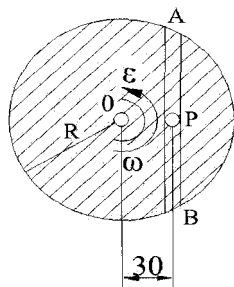
(javob: $a_t = -4,93m/s^2$, $a_n = 13,84m/s^2$).

12-masala. Markazidan o'zining tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi o'q atrofida aylanayotgan diskning AB vatari bo'ylab A dan B ga tomon P sharcha $1,2 m/s$ tezlik bilan harakatlanadi. Sharcha disk markazidan $30sm$ ga teng eng qisqa masofada bo'lganida uning absolyut tezlanishi topilsin. Shu paytda diskning burchak tezligi $3 rad/s$, burchak sekinlanishi $8 rad/s^2$ ga teng.

(javob: $a_a = 10,18m/s^2$).

13-masala. Oldingi masala disk AB vatarga parallel bo'lgan diametri atrofida aylanadi, deb yechilsin.

(javob: $a_a = 3,612m/s^2$)



FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. HIBBELER R.C. ENGINEERING MECHANICS STATICS & DYNAMICS. TWELFTH EDITION. PRENTICE HALL Upper Saddle River, NJ 07458, 2016. 655 p.
2. Meriam J.L., Kraige L.G. Engineering Mechanics. Statics. Virginia Polytechnic Institute and State University, John Wiley & Sons, Inc. Printed in the United States of America, 2012. 522 p.
3. Alan Darbyshire. Mechanical Engineering. BTEC National Engineering Specialist Units/ Butterworth-Heinemann An imprint of Elsevier Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 200 Wheeler Road, Burlington MA 01803, 2010. 407 p.
4. Prof. Dr.ING.Vasile SZolga. Theoretical Mechanics. 2010.
5. Mirsaidov M.M., Boymurodova L.I., G'iyasova N.T. "Nazariy mexanika". O'quv qo'llanma. T.: "ILM ZIYO", 2009. – 224 b.
6. Karimov K.A., Axmedov A.X., Karimova A.R. Nazariy mexanika\ O'quv qo'llanma: -T.: "MALIK PRINT CO" nashhriyoti, 2021. -360 b.
7. Mirsaidov M.M., Mavlanov T.M., Xudaynazarov Sh.O., Donayev B.D. «Nazariy mexanika. Statika». O'quv qo'llanma : -T. :«Zamin nashr», 2021. 270 b.
8. H.To'rayev "Nazariy mexanika", darslik, "Noshir", Toshkent-2012.
9. Rashidov T.R., SHoziyotov SH., Mo'minov K.V. «Nazariy mexanika asoslari», Darslik. T.: «O'qituvchi», 1990. – 412 b.
10. Targ S.M. «Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki», Uchebnik. M.: «Nauka», 1986.- 220 s.
11. Mesherskiy I.V., Butenin N.V., Lure A.I., Merkin D.R. «Nazariy mexanikadan masalalar to'plami», O'quv qullanma. T.: «O'qituvchi», 1989. – 324 b.
12. Yablonskiy A.A., Noreyko S.S., Volfson S.A. «Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to'plami», O'quv qullanma. T.: «O'qituvchi», 2002. – 416 b.
13. O'rozboev M.T."Nazariy mexanika", Darslik. T.: «O'qituvchi», 1979. – 510b.
14. Aziz-Qoriev K.S., Yangurazov SH.X. «Nazariy mexanikadan masalalar yechish». O'quv qullanma. T.: «O'qituvchi», 1975. – 247 b.
15. Krasnyuk A., Рыков А. Сборник заданий для расчётно-графических работ по теоретической механике. Учебное пособие. Издательство NGTU, Novosibirsk, 2013. 164 s.
16. H.T. To'rayev, A.Tilavov Nazariy mexanika. Statika va kinematika. — Toshkent: Noshir, 2012. 304 bet.

17. Bondar V.S., Ryabov V.G., Petrov V.K., Noritsina G.I. Teoreticheskaya mexanika. Rukovodstvo po resheniyu zadach povyshennoy slojnosti. Uchebnoe posobie. Sankt – Peterburg : Lan, 2020 g, 368 s.
18. YAKovenko G.V. Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki. 6-izd. –M.:BINOM. Laboratoriya znaniy, 2020. 119 s.
19. Doronin F.A. Teoreticheskaya mexanika. Uchebnoe posobie. Sankt – Peterburg : Lan, 2018 g, 480 s.
20. Lyukshin B.A. Teoreticheskaya mexanika: uchebnik / Tomsk, TUSUR, 2017 g.,142 str.
21. Doev V.S., Doronin F.A Sbornik zadaniy po teoreticheskoy mexanike na baze MATHCAD. Uchebnoe posobie , Izdatelstvo «Lan», 2010 g. 592 s.
22. Jukovskiy N.E. Teoreticheskaya mexanika. Uchebnik dlya vuzov. –M.: Izdatelstvo YUrayt, 2016. 404 s.

MUNDARIJA

	KIRISH	3
I.	I BOB. STATIKA. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHLARI.	5
1.1	Statikaning asosiy tushuncha va qoidalari	5
1.2	Statika aksiomalari	9
1.3	Bog‘lanish va bog‘lanish reaksiyalari	13
II.	II BOB. KESISHUVCHI KUHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI	20
2.1	Kuchlar sistemasi va ularning turlari	20
2.2	Kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik usulda qo‘shish	22
2.3	Kuchning o‘qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi	25
2.4	Kuchni analitik usulda aniqlash	26
2.5	Uch kuchning muvozanati haqida teorema	28
2.6	Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	29
2.7	Statika masalalarini yechish tartibi	31
2.8	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	32
2.9	Mustaqil yechish uchun masalalar	45
III.	III BOB. TEKISLIKDAGI KUHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI	51
3.1	Kuchning markaz (nuqta) ga nisbatan momenti	51
3.2	Teng ta’sir etuvchining momenti haqida Varin’on teoremasi	53
3.3	Juft kuch. Juft kuch momenti	54
3.4	Ekvivalent juftlar haqida teorema	55
3.5	Tekislikdagi juftlarni qo‘shish. Tekislikdagi juft kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	58
3.6	Kuchni o‘ziga parallel ko‘chirishga oid lemma	59
3.7	Tekislikdagi kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish	60
3.8	Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	61
3.9	Tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari	64
3.10	Statik aniq va statik aniqmas masalalar	64
3.11	Taqsimlangan kuchlar	65
3.12	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	68
3.13	Mustaqil yechish uchun masalalar:	79
IV.	IV BOB. FERMA. FERMA STERJENLARIDAGI ZO‘RIQISH KUHLARINI ANIQLASH. ISHQALANISH.	88
4.1	Ferma haqida tushuncha. Fermalarni hisoblash.	88
4.2	Tugunlarni kesish usuli	93
4.3	Ritter usuli	98
4.4	Maksvell-Kremon diagrammasi	99
4.5	Matritsalar usuli	101

4.6	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	107
4.7	Mustaqil yechish uchun masalalar:	124
V.	V BOB. FAZOVIIY KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI.	129
5.1	Kuchning markazga nisbatan moment-vektori	129
5.2	Kuchning o'qqa nisbatan momenti	131
5.3	Kuchning o'qlarga nisbatan momentlari uchun Varin'on teoremasi	132
5.4	Kuchning koordinatalar o'qlariga nisbatan momentlarining analitik usulda berilishi	133
5.5	Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish	134
5.6	Juft kuch moment – vektori	135
5.7	Fazodagi juftlarni qo'shish	136
5.8	Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlarni berilgan markazga keltirish	138
5.9	Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	139
5.10	Fazoviy kuchlar sistemasining invariantlari	141
5.11	Kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish	143
5.12	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	147
5.13	Mustaqil yechish uchun masalalar	153
VI.	VI BOB. QATTIQ JISMNING OG'IRLIK MARKAZI.	156
6.1	Parallel kuchlar markazi	156
6.2	Bir jinsli jismlar uchun og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash	161
6.3	Ayrim bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari	167
6.4	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	171
6.5	Mustaqil yechish uchun masalalar:	177
VII.	VII BOB. KINEMATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI. NUQTA KINEMATIKASI.	180
7.1	Kinematikaning asosiy tushuncha va qoidalari	180
7.2	Nuqta harakatining berilish usullari	181
7.3	Harakati vektor, koordinata hamda tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi va tezlanishi	184
7.4	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	193
7.5	Mustaqil yechish uchun masalalar	202
VIII.	VIII BOB. QATTIQ JISM KINEMATIKASI.	210
8.1	Qattiq jismning ilgarilanma harakati	210
8.2	Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati	212
8.3	Tekis va tekis o'zgaruvchan aylanma harakat	215

8.4	Aylanma harakat qilayotgan jism nuqtasining tezlik va tezlanishi	216
8.5	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	219
8.6	Mustaqil yechish uchun masalalar	230
IX.	IX BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI.	236
9.1	Qattiq jismning tekis parallel harakati	236
9.2	Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb yordamida aniqlash	238
9.3	Jism ikki nuqtasi tezliklarining proektsiyalari haqida teorema	239
9.4	Tekis shakl nuqtasining tezligini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash	240
9.5	Sentroidalar haqida tushuncha	243
9.6	Tekis shakl nuqtasining tezlanishini qutb yordamida aniqlash	244
9.7	Tekis shakl nuqtasining tezlanishini tezlanishlar oniy markazi yordamida aniqlash	246
9.8	Mavzu doirasida masalalar yechish uchun namunalar	250
9.9	Mustaqil yechish uchun masalalar	263
X.	X BOB. NUQTANING MURAKKAB HARAKATI.	267
10.1	Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakati	267
10.2	Tezliklarni qo'shish haqida teorema	269
10.3	Ko'chirma harakat ilgari lanma harakatdan iborat bo'lganda tezlanishlarni qo'shish	273
10.4	Koriolis tezlanishining moduli va yo'nalishini aniqlash	273
10.5	Mavzu yuzasidan masalalar yechish uchun namunalar:	276
10.6	Mustaqil yechish uchun masalalar	280
	FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR	284

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
I. ГЛАВА I. СТАТИКА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ.	5
1.1 Основные понятия и правила статики	5
1.2 Аксиомы статики	9
1.3 Связи и их реакции	13
II. ГЛАВА II. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ	20
2.1 Система сил. Основные виды систем сил.	20
2.2 Геометрический способ сложения системы сходящихся сил	22
2.3 Проекция силы на ось и на плоскость	25
2.4 Аналитический способ определения сил	26
2.5 Теорема о трех силах	28
2.6 Условия равновесия системы сходящихся сил	29
2.7 Порядок решения задач статики	31
2.8 Примеры решения задач	32
2.9 Задачи для самостоятельного решения	45
III. ГЛАВА III. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ	51
3.1 Момент силы относительно центра (или точки)	51
3.2 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы	53
3.3 Пара сил. Момент пары сил.	54
3.4 Теорема об эквивалентности пар	55
3.5 Сложение пары сил в плоскости. Условия равновесия пары сил, находящейся в плоскости	58
3.6 Теорема о параллельном переносе силы	59
3.7 Приведение плоской системы сил к данному центру	60
3.8 Условия равновесия плоской системы сил	61
3.9 Условия равновесия плоской параллельной системы сил	64
3.10 Статически определимые и неопределимые задачи	64
3.11 Распределенные силы	65
3.12 Примеры решения задач	68
3.13 Задачи для самостоятельного решения	79
IV. ГЛАВА IV. ФЕРМА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ.	88
4.1 Понятие о ферме. Расчет ферм.	88
4.2 Метод вырезания узлов	93
4.3 Метод Риттера	98
4.4 Диаграмма Максвелл-Кремона	99
4.5 Метод матриц	101
4.6 Примеры решения задач	108

4.7	Задачи для самостоятельного решения	124
V.	ГЛАВА V. РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ	
		129
5.1	Момент силы относительно центра как векторное произведение	129
5.2	Момент силы относительно оси	131
5.3	Теорема Вариньона для момента силы относительно оси	132
5.4	Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей	133
5.5	Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку	134
5.6	Момент пары сил как векторное произведение	135
5.7	Сложение пары сил, произвольно расположенных в пространстве	136
5.8	Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру	138
5.9	Условие равновесия произвольной пространственной системы сил	139
5.10	Инварианты произвольной пространственной системы сил	141
5.11	Приведение произвольной пространственной системы сил к динамическому винту	143
5.12	Примеры решения задач	147
5.13	Задачи для самостоятельного решения	153
VI.	ГЛАВА VI. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА	
		156
6.1	Центр параллельных сил	156
6.2	Способы определения координат центров тяжести тел	161
6.3	Определение центра тяжести некоторых однородных тел	167
6.4	Примеры решения задач	171
6.5	Задачи для самостоятельного решения	177
VII.	ГЛАВА VII. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.	
		180
7.1	Основные понятия и правила кинематики	180
7.2	Способы задания движения точки	181
7.3	Скорость и ускорения точки при векторном, координатном и естественном способе задания движения	184
7.4	Примеры решения задач	193
7.5	Задачи для самостоятельного решения	202

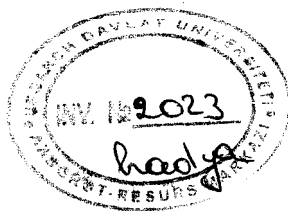
VIII.	ГЛАВА VIII. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.	210
8.1	Поступательное движение твердого тела.	210
8.2	Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.	212
8.3	Равномерное и равнопеременное вращательное движение	215
8.4	Скорости и ускорения точек вращающегося тела	216
8.5	Примеры решения задач	219
8.6	Задачи для самостоятельного решения	230
IX.	ГЛАВА IX. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.	236
9.1	Плоскопараллельное движение твердого тела	236
9.2	Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью полюса	238
9.3	Теорема о проекциях скоростей двух точек тела	239
9.4	Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей	240
9.5	Понятие о центроиде	243
9.6	Определение ускорений точек плоской фигуры с помощью полюса	244
9.7	Определение ускорений точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра ускорений	246
9.8	Примеры решения задач	250
9.9	Задачи для самостоятельного решения	263
X.	ГЛАВА X. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.	267
10.1	Относительное, переносное и абсолютное движение точки	267
10.2	Теорема о сложении скоростей	269
10.3	Сложение ускорений при поступательном переносном движении	273
10.4	Определение модуля и направления ускорения Кориолиса	273
10.5	Примеры решения задач	276
10.6	Задачи для самостоятельного решения	280
	ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА	284

CONTENTS

	INTRODUCTION	3
I.	CHAPTER I. STATICS, BASIC CONCEPTS OF STATICS.	5
1.1	Basic concepts and rules of statics	5
1.2	Axioms of statics	9
1.3	Connections and their responses	13
II.	CHAPTER II. EQUILIBRIUM OF THE SYSTEM OF CONVERGING FORCES.	20
2.1	Force system. The main types of systems of forces.	20
2.2	Geometrical way of adding a system of converging forces	22
2.3	Force projection into axis and plane	25
2.4	Analytical method for determining forces	26
2.5	Three forces theorem	28
2.6	Equilibrium conditions for a system of converging forces	29
2.7	Procedure for solving static problems	31
2.8	Examples of problem solving	32
2.9	Tasks for independent solution	45
III.	CHAPTER III. EQUILIBRIUM OF A PLANE SYSTEM OF FORCES.	51
3.1	Moment of force relative to the center (or a point)	51
3.2	Varignon's theorem on the moment of the resultant force	53
3.3	A pair of forces. A moment of a pair of forces.	54
3.4	Theorem of pairs equivalence	55
3.5	Addition of a pair of forces in a plane and the equilibrium conditions	58
3.6	Parallel force transfer theorem	59
3.7	Reducing a flat system of forces to a given center	60
3.8	Equilibrium conditions for a plane system of forces	61
3.9	Equilibrium conditions for a plane parallel system of forces	64
3.10	Statically definable and indefinable tasks	64
3.11	Distributed forces	65
3.12	Examples of problem solving	68

3.13	Tasks for independent solution	79
IV.	CHAPTER IV. TRUSS. DETERMINATION OF FORCES IN THE TRUSS RODS.	88
4.1	Concept of a truss. Calculation of a truss	88
4.2	Method of units cutting	93
4.3	Ritter method	98
4.4	Maxwell-Cremona diagram	99
4.5	Matrix method	101
4.6	Examples of problem solving	107
4.7	Tasks for independent solution	124
V.	CHAPTER V. EQUILIBRIUM OF THE SPATIAL SYSTEM OF FORCES.	129
5.1	The moment of force about the center as a vector product	129
5.2	Moment of force about the axis	131
5.3	Varignon's theorem for the moment of force about an axis	132
5.4	Analytical expressions of the moments of force about the coordinate axes	133
5.5	The relationship between the moment of force about a point and the moment of force about an axis passing through this point	134
5.6	Moment of a pair of force as a vector product	135
5.7	Addition of a pair of forces arbitrarily located in space	136
5.8	Reduction of an arbitrary spatial system of forces to a given center	138
5.9	Equilibrium condition for an arbitrary spatial system of forces	139
5.10	Invariants of an arbitrary spatial system of forces	141
5.11	Reduction of an arbitrary spatial system of forces to a dynamic screw	143
5.12	Examples of problem solving	147
5.13	Tasks for independent solution	153
VI.	CHAPTER VI. RIGID BODY CENTER OF GRAVITY.	156
6.1	Center of parallel forces	156
6.2	Methods for determining the coordinates of the centers of gravity of bodies	161
6.3	Determination of the center of gravity of some homogeneous bodies	167
6.4	Examples of problem solving	171
6.5	Tasks for independent solution	177
VII.	CHAPTER VII. BASIC CONCEPTS OF KINEMATICS. KINEMATICS OF THE POINT.	180
7.1	Basic concepts and rules of kinematics	180
7.2	Ways to set point motion	181

7.3	Normal and tangential acceleration of the point	184
7.4	Examples of problem solving	193
7.5	Tasks for independent solution	202
VIII.	CHAPTER VIII. KINEMATICS OF RIGID BODY.	210
8.1	The translational motion of a rigid body.	210
8.2	Rotational motion of a rigid body around a fixed axis.	212
8.3	Uniform and uniformly variable rotating motion	215
8.4	Velocities and accelerations of points of a rotating body	216
8.5	Examples of problem solving	219
8.6	Tasks for independent solution	230
IX.	CHAPTER IX. PLANE-PARALLEL MOTION OF RIGID BODY.	236
9.1	Plane-parallel motion of rigid body	236
9.2	Determining the velocities of points in a flat figure using a pole	238
9.3	Theorem on the projections of the velocities of two points of a body	239
9.4	Determination of the velocities of points of a flat figure using the instant center of velocities	240
9.5	Notion of a centroid	243
9.6	Determining the acceleration of points of a flat figure using a pole	244
9.7	Determining the acceleration of points of a flat figure using the instant center of accelerations	246
9.8	Examples of problem solving	250
9.9	Tasks for independent solution	263
X.	CHAPTER X. COMPLEX MOTION OF A POINT.	267
10.1	Relative, transport, and absolute motion of a point	267
10.2	Velocities addition theorem	269
10.3	Addition of accelerations under translational transport motion	273
10.4	Determination of the modulus and direction of Coriolis acceleration	273
10.5	Examples of problem solving	276
10.6	Tasks for independent solution	280
	REFERENCES	284



DONAYEV BURXON
XUDAYNAZAROV SHERZOD
ALMARDONOV OYBEK

NAZARIY MEXANIKA

I QISM

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan o'quv qo'llanma sifatida foydalanishga
tavsiya etilgan*

Muharrir: **B. Musayev**
Musahhih: **I. Tog'ayev**
Texnik muharrir: **M. Tog'ayev**
Kompyuterda sahifalovchi: **A. Abdiraxmonova**

«ADABIYOT NASHRIYOTI»

Nashriyot litsenziyasi: AI № AA 0043. 27.01.2021.

100129, Toshkent shahri, Markaz-15. 1/90.

Tg: (+98) 127-30-04.

Bosishga 20.02.2022-yilda ruxsat etildi:

Ofset qog'oz. Qog'oz bichimi: 60x84 ¹/₁₆.

Ofset Bosma. Hisob-nashriyot t. 0.0. Shartli b.t. 0.0.

Adadi: 500 nusxa.

“MASHHUR PRESS NASHRIYOTI” MCHJ
bosmaxonasida chop etildi.



Mirziyod Mirsaidovich Mirsaidov – texnika fanlari doktori, professor, O‘zR FA akademigi. 1976-yilda nomzodlik (Moskva sh.) va 1985-yilda doktorlik (Novosibirsk sh.) dissertatsiyalarini himoya qilgan. O‘zR FA tavsiyasiga asosan 2017-yilning dekabr oyida Prezidentimiz qarori bilan O‘zR FA akademigi etib tasdiqlandi. 7 ta monografiya, 14 ta darslik va o‘quv-qo‘llanmalar, 30 dan ortiq mualliflik guvohnomalari hamda 300 ga yaqin ilmiy maqolalar yozgan. Uning rahbarligida 14 ta fan nomzodi, 4 ta fan doktori tayyorlanib, hozirgi kunda ular Respublikamizning turli sohalarida faoliyat ko‘rsatib kelmoqdalar.

30 dan ortiq maqolalari chet ellarda ingliz tilida chop qilingan va 6 ta darslik va o‘quv qo‘llanmalari qozoq tiliga tarjima qilinib, Qozog‘iston Respublikasida o‘quv jarayoniga qo‘llanilib kelinmoqda. Hozirgi kunda M.M.Mirsaidov talabalarga bilim berish bilan birgalikda o‘z shogirdlari bilan fanning deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi, qurilish mexanikasi, inshootlar zilzilabardoshligi va gidrotexnika inshootlarining mustahkamligi yo‘nalishlari bo‘yicha faol ilmiy izlanishlar olib bormoqda.



Burxon Donayevich Donayev – fizika matematika fanlari nomzodi, dotsent. 1990-yilda 01.02.04 – deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi ixtisosligi bo‘yicha nomzodlik dissertatsiyasini Ukraina Fanlar Akademiyasi qoshidagi Mexanika institutida himoya qilgan. B.Donayev 1 ta o‘quv qo‘llanma, 100 dan ortiq ilmiy maqola va o‘quv-uslubiy qo‘llanmalar muallifi.



Xudaynazarov Sherzod Ochilovich – texnika fanlari nomzodi, dotsent. 2003-yilda 01.02.04 – deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi ixtisosligi bo‘yicha nomzodlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Sh.O.Xudaynazarov 2 ta o‘quv qo‘llanma, 50 dan ortiq ilmiy maqolalar, 30 dan ortiq uslubiy qo‘llanma va ko‘rsatmalar hamda 4 ta avtorlik guvohnomalarining muallifidir.



Oybek Maxmatqulovich Alimardonov – Qarshi muhandislik-iqtisodiyot instituti katta o‘qituvchisi. Qarshi muhandislik-iqtisodiyot institutida “Nazariy mexanika” va “Nazariy va amaliy mexanika” fanlari bo‘yicha o‘quv mashg‘ulotlari olib boradi. O.Almardonov 20 dan ortiq ilmiy maqolalar, 15 dan ortiq uslubiy qo‘llanma va ko‘rsatmalar muallifi.

ISBN 978-9943-9178-0-4



9 789943 917804