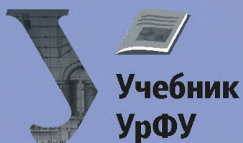




Е. Э. Страшинин, А. Д. Заколяпин,  
С. П. Трофимов, А. А. Юрлова

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебник



Учебник  
УрФУ

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

**Е. Э. Страшинин, А. Д. Заколяпин,  
С. П. Трофимов, А. А. Юрлова**

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебник

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся по направлению подготовки  
27.03.04 — Управление в технических системах

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2019

УДК 681.5.011(075.8)

ББК 32.965-01я73

Т33

*Серия «Учебник УрФУ» основана в 2017 году*

Редакционная коллегия серии:

доц., канд. техн. наук *Е. В. Вострецова*; доц., канд. техн. наук *В. Г. Коберниченко*; *И. Ю. Плотникова* (ответственный редактор серии)

Авторы: *Е. Э. Страшинин*, *А. Д. Заколяпин*, *С. П. Трофимов*, *А. А. Юрлова*

Рецензенты:

кафедра информатики Уральского государственного горного университета (завкафедрой канд. техн. наук, доц. *А. В. Дружинин*);

проф., д-р техн. наук *В. В. Побединский* (кафедра сервиса и технической эксплуатации транспортных технологических машин Уральского государственного лесотехнического университета)

Научный редактор — канд. техн. наук *А. В. Цветков*

*На обложке используется изображение с сайта <https://www.insys-icom.com/>*

**Теория автоматического управления** : учебник / *Е. Э. Страшинин*, Т33 *А. Д. Заколяпин*, *С. П. Трофимов*, *А. А. Юрлова* ; Мин-во науки и высш. образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 456 с. — (Учебник УрФУ).  
ISBN 978-5-7996-2788-1

Предлагаемый учебник основан на лекциях двухсеместрового курса «Теория автоматического управления», читаемого в Департаменте автоматизации и информационных технологий Уральского федерального университета. Первая часть посвящена линейным непрерывным системам управления, вторая — нелинейным системам управления, третья — цифровым системам управления.

Для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению подготовки 27.03.04 — Управление в технических системах.

УДК 681.5.011(075.8)

ББК 32.965-01я73

ISBN 978-5-7996-2788-1

© Уральский федеральный университет, 2019

## Оглавление

Предисловие . . . . .	9
Введение в теорию автоматического управления . . . . .	14
<b>І Линейные непрерывные системы управления</b>	<b>33</b>
Глава 1. Методы анализа непрерывных систем . . . . .	35
§ 1.1. Понятие пространства состояний. . . . .	35
§ 1.2. Линеаризация исходных уравнений . . . . .	37
§ 1.3. Линейные системы, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши . . . . .	47
1.3.1 Однородные дифференциальные уравнения . . .	47
1.3.2 Решение неоднородных векторно-матричных дифференциальных уравнений . . . . .	52
§ 1.4. Некоторые сведения из теории матриц . . . . .	53
1.4.1 Собственные числа, характеристический полином, присоединенная матрица . . . . .	53
1.4.2 Собственные значения и собственные векторы транспонированной матрицы . . . . .	58
1.4.3 Определение функции от матрицы через ее левые и правые собственные векторы . . . . .	62
§ 1.5. Свойства движений линейных систем . . . . .	67
1.5.1 Матричная весовая и переходная функции . . .	67
1.5.2 Модальная (спектральная) интерпретация решения векторно-матричных дифференциаль- ных линейных стационарных уравнений . . . . .	73

§ 1.6. Модели стационарных линейных систем в комплексной плоскости на основе преобразования Лапласа 75	
1.6.1 Матрица передаточных функций . . . . .	75
1.6.2 Основные свойства передаточных функций . . .	81
§ 1.7. Комплексный передаточный коэффициент . . . . .	85
1.7.1 Способы определения понятия «комплексный передаточный коэффициент» . .	85
1.7.2 Реакция динамических звеньев на гармонические воздействия . . . . .	87
1.7.3 Частотные характеристики . . . . .	89
§ 1.8. Графическое представление объектов и систем управления. . . . .	91
1.8.1 Соглашение об обозначениях . . . . .	91
1.8.2 Структурные схемы и графы стационарных си- стем . . . . .	93
§ 1.9. Устойчивость систем . . . . .	107
1.9.1 Асимптотические свойства собственного движе- ния и весовой матрицы линейной системы . . . . .	107
1.9.2 Необходимое условие устойчивости . . . . .	111
1.9.3 Критерий устойчивости Гурвица . . . . .	112
1.9.4 Частотный критерий устойчивости (критерий Найквиста) . . . . .	116
§ 1.10. Качество процессов управления . . . . .	129
1.10.1 Основные показатели качества . . . . .	129
1.10.2 Ошибки системы регулирования в установив- шихся режимах. Статические и астатические си- стемы . . . . .	132
1.10.3 Точность систем при обработке гармонических сигналов . . . . .	138
1.10.4 Связь между логарифмическими амплитудно- частотными характеристиками и качеством переходных процессов в САУ . . . . .	140
1.10.5 Соотношение масштабов во временной и частотной областях . . . . .	142

§ 1.11. Интегральные критерии качества с позиций общности задач оптимального и модального синтеза . . . . .	145
<b>Глава 2. Методы синтеза непрерывных систем . . . . .</b>	<b>151</b>
§ 2.1. Выбор корректирующих звеньев. Метод желаемых ЛЧХ . . . . .	151
§ 2.2. Управляемость линейных стационарных систем . . . . .	155
§ 2.3. Наблюдаемость линейных стационарных систем . . . . .	159
§ 2.4. Замена базиса в линейном конечномерном пространстве . . . . .	164
§ 2.5. Линейные операторы и матрицы линейных операторов . . . . .	168
§ 2.6. Замена базиса в пространстве состояний динамической системы . . . . .	173
§ 2.7. Вычисление матрицы преобразования базиса в пространстве состояний динамической системы с помощью матриц управляемости и наблюдаемости . . . . .	176
§ 2.8. Канонические представления систем . . . . .	179
2.8.1 Управляемое каноническое представление системы со скалярным входом . . . . .	179
2.8.2 Передаточная функция и структурная схема для системы в УКП . . . . .	185
2.8.3 Идентификационное каноническое представление системы с одним (скалярным) выходом . . . . .	187
2.8.4 Передаточная функция и структура для системы в ИКП . . . . .	188
§ 2.9. Обратная связь по состоянию, обеспечивающая заданное (желаемое) расположение собственных чисел в замкнутой системе с одним (скалярным) входом . . . . .	189
§ 2.10. Синтез управления в многомерной системе. Задача разделения каналов . . . . .	193
2.10.1 Разделение исходного объекта на подсистемы интеграторов . . . . .	194
2.10.2 Преобразование базиса в пространстве $R^n$ . . . . .	198
2.10.3 Формирование управления . . . . .	204
2.10.4 Итоговый алгоритм . . . . .	207

§ 2.11. Основы построения идентификаторов состояния (наблюдателей) . . . . .	210
2.11.1 Наблюдатель Люенбергера полного порядка . . . . .	210
2.11.2 Наблюдатель пониженного порядка . . . . .	217
2.11.3 Наблюдатель Люенбергера минимального поряд- ка . . . . .	221
§ 2.12. Синтез реализуемого управления, обеспечивающий за- данные динамические и статические свойства системы управления . . . . .	224
2.12.1 Динамические свойства системы с обратной свя- зью и наблюдателем полного порядка . . . . .	224
2.12.2 Динамические свойства системы с обратной связью и наблюдателем минимального порядка . . . . .	226
2.12.3 Результирующий алгоритм синтеза для систе- мы с одним входом и одним выходом . . . . .	227
2.12.4 Итоговые примеры полного синтеза систем управления . . . . .	229
2.12.5 Система со скалярными входом и выходом и наблюдателем минимального порядка . . . . .	233
2.12.6 Многомерная система с разделением каналов и наблюдателем минимального порядка . . . . .	238
<b>II Нелинейные системы управления</b>	<b>249</b>
Глава 3. Элементы теории нелинейных систем . . . . .	251
§ 3.1. Метод фазовой плоскости . . . . .	252
3.1.1 Фазовая плоскость. Основные понятия . . . . .	253
3.1.2 Фазовые портреты линейного звена второго по- рядка . . . . .	256
3.1.3 Особые траектории на фазовой плоскости . . . . .	267
3.1.4 Методы построения фазовых траекторий . . . . .	275
3.1.5 Методы определения основных показателей переходного процесса по фазовым траекториям системы . . . . .	281

3.1.6	Фазовые портреты релейных схем. Многолистная фазовая плоскость . . . . .	284
3.1.7	Понятие о системах с переменной структурой . . . . .	289
§ 3.2.	Анализ нелинейных систем методом гармонического баланса . . . . .	295
3.2.1	Гармоническая линеаризация нелинейных звеньев. Эквивалентный комплексный передаточный коэффициент . . . . .	296
3.2.2	Математические модели нелинейных звеньев . . . . .	305
3.2.3	Построение областей устойчивости методом Д-разбиений . . . . .	307
3.2.4	Построение области устойчивости в плоскости одного комплексного параметра методом Д-разбиений	308
3.2.5	Определение устойчивости и параметров периодических режимов . . . . .	313
3.2.6	Режим вынужденных колебаний . . . . .	323

### **III Цифровые (импульсные) системы управления 327**

Глава 4. Основы теории импульсных систем автоматического управления . . . . .	329
§ 4.1. Исходные понятия . . . . .	329
§ 4.2. Идеальный импульсный элемент и формирующее звено	330
§ 4.3. Уравнения движения ИСАУ . . . . .	338
4.3.1 Аналитическое решение разностных уравнений . . . . .	343
4.3.2 Прямой метод решения разностных уравнений в реальном времени . . . . .	347
4.3.3 Алгоритмические схемы. Векторно-матричные разностные уравнения . . . . .	348
§ 4.4. Дискретное преобразование Лапласа . . . . .	350
4.4.1 Основные определения . . . . .	350
4.4.2 Модифицированное z-преобразование . . . . .	355
4.4.3 Основные свойства дискретного преобразования Лапласа и z-преобразования . . . . .	355

4.4.4	Передаточная функция импульсной системы (Дискретная передаточная функция) . . . . .	357
§ 4.5.	Особенности структурных преобразований в импульсных системах. . . . .	361
4.5.1	Основные определения . . . . .	361
4.5.2	Система с единичной отрицательной обратной связью . . . . .	362
4.5.3	Наличие последовательно соединенных непрерывных звеньев . . . . .	363
4.5.4	Последовательно соединенные дискретные звенья . . . . .	364
4.5.5	Встречно-параллельное соединение динамических звеньев . . . . .	365
§ 4.6.	Частотные характеристики импульсных систем. . . . .	367
4.6.1	Понятие об амплитудно-фазовых характери- стиках импульсных систем (годографы z-преобразований) 367	367
4.6.2	Основные особенности частотных функций импульсных систем . . . . .	372
4.6.3	Расчет частотных характеристик импульсной системы на основании частотных характеристик приведенной непрерывной части . . . . .	374
4.6.4	Особенности спектров сигналов в ИСАУ . . . . .	376
§ 4.7.	Анализ устойчивости импульсных систем . . . . .	381
4.7.1	Характеристический полином дискретной замкну- той системы . . . . .	381
4.7.2	Исследование устойчивости импульсных систем по корням характеристического уравнения . . . . .	383
4.7.3	Частотный критерий устойчивости . . . . .	393
§ 4.8.	Билинейное преобразование . . . . .	397
4.8.1	Сопоставление плоскостей комплексных переменных $p, z, \bar{p}$ . . . . .	397
4.8.2	Псевдочастотные характеристики. Псевдочастот- ный синтез ИСАУ . . . . .	401

§ 4.9. Синтез линейной ИСАУ с максимальным быстродействием . . . . .	407
4.9.1 Система со всеми нулевыми полюсами как фильтр с конечной памятью . . . . .	408
4.9.2 Синтез системы с максимальным быстродействием . . . . .	410
§ 4.10. Векторно-матричное описание непрерывных объектов с дискретным управлением . . . . .	416
4.10.1 Системы с цифроаналоговым преобразователем нулевого порядка . . . . .	416
4.10.2 Импульсный элемент с укороченным импульсом	418
4.10.3 Система с цифроаналоговым преобразователем нулевого порядка с задержкой в выдаче управ- ления (относительно момента измерения) . . . . .	420
4.10.4 Импульсные системы с кратными частотами квантования . . . . .	423
§ 4.11. Дополнительная информация . . . . .	433
4.11.1 Дискретный аналог формулы Коши . . . . .	433
4.11.2 Обеспечение единичной статики при синтезе дискретной системы без введения дополнитель- ного интегратора . . . . .	435
§ 4.12. Применение теории импульсных систем к построению алгоритма ДПФ . . . . .	437
4.12.1 Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) . . . . .	437
4.12.2 Понятие о ДПФ на скользящем интервале вре- мени . . . . .	441
4.12.3 Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов ДПФ в реальном масштабе вре- мени . . . . .	443
4.12.4 Реализация рекуррентного алгоритма . . . . .	445
§ 4.13. Основные соотношения между спектральными характеристиками непрерывных и дискретных сигналов . . . . .	448
4.13.1 Исходные выражения . . . . .	448
4.13.2 Связи (соотношения) . . . . .	449
Библиографический список . . . . .	453

## *ОГЛАВЛЕНИЕ*

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В издании излагаются основы теории управления техническими объектами различной природы и назначения. Книга содержит три части: непрерывное управление линейными, или линеаризованными, объектами, нелинейные системы автоматического управления и цифровые системы управления линейными динамическими объектами.

В первой части в основном рассматривается теория в рамках методов пространства состояния. Почти все изложение ведется с использованием векторно-матричного аппарата. Частотным методам здесь уделяется лишь малое внимание, так как им посвящено большое число учебников и учебных пособий. В основу положены модальные методы анализа и синтеза систем управления. Показана связь между оптимальным линейно-квадратичным синтезом и модальным синтезом, позволяющим осмысленно сформировать матрицу штрафов оптимальной системы и существенно упростить алгоритмы синтеза. Авторы книги на лекционных, практических и лабораторных занятиях апробируют универсальность и эффективность методов модального синтеза применительно к объектам различной физической природы с математическим описанием, использующим методы механики, гидравлики, аэродинамики, электродинамики. Для реализации модального управления требуются алгоритмы оценки координат вектора состояния объекта. В связи с этим в книге излагается теория наблюдателей Люенбергера полного, пониженного и минимального порядков. Для простоты изложения рассматриваются системы со скалярными входом и выходом и многомерные системы с полной или частичной развязкой каналов.

Вторая часть посвящена простейшим методам расчета нелинейных систем. Методы фазовой плоскости излагаются, чтобы позна-

комить читателя со специфическими особенностями нелинейных систем – зависимостью качества процессов от начальных условий, с автоколебательными процессами, со скользящими режимами. Излагаются также методы гармонической линеаризации и гармонического баланса. Доказывается, что метод гармонического баланса применим и для неустойчивых объектов. Вводится понятие вынужденного режима. Приводятся показательные примеры.

Третья часть этой книги на данный момент наиболее актуальна. Она полностью базируется на математической основе первой части книги. Третья часть посвящена цифровым системам автоматического управления (САУ). Показывается место цифровых САУ в теории и практике современных систем управления. На протяжении всего изложения здесь параллельно обсуждается как специфика цифровых систем, так и общность используемого математического инструмента с методологией систем непрерывных. Теория цифровых САУ начинается с обсуждения импульсного элемента, нарушающего непрерывность передачи информации в цепи системы управления. Возможно существование многих вариантов импульсных элементов различной аппаратной реализации. В основе построения общей теории импульсных, цифровых систем лежит подход, при котором импульсный элемент представляется в виде последовательно соединенных идеального импульсного элемента (ИИЭ) и линейного динамического формирующего звена.

В третьей части книги вводятся понятия конечных разностей и разностных уравнений (РУ), излагаются аналитические методы их решения. Определяются дискретное преобразование Лапласа (ДПФ), Z-преобразование, передаточная функция и комплексный передаточный коэффициент цифровой (импульсной) системы, а также доказываются их свойства. Обсуждаются методы эквивалентного преобразования структурных схем, отмечаются аналогии с соответствующими преобразованиями в непрерывных системах и указывается принципиальное отличие непрерывных и импульсных систем. Показывается, как с помощью алгоритмических схем в реальном времени можно решить РУ. С позиций базиса объясняется многовариантность алгоритмических схем в задаче решения РУ.

Как теоретически, так и на конкретных простых примерах читатель знакомится с совершенно неожиданными с позиций непрерывных систем и чрезвычайно интересными специфическими осо-

бенностями частотных характеристик цифровых динамических систем. Попутно с изложением теории импульсных систем в книге выводятся результаты теоремы Котельникова о соотношении между верхней существенной частотой входного сигнала и частотой квантования сигналов по времени. Формулируется частотный критерий устойчивости, аналогичный критерию Найквиста, и приводится лаконичное доказательство.

Дальнейшему развитию методологии работы с цифровыми системами в направлении преемственности методов непрерывных систем способствовало билинейное преобразование. Это позволило перейти от комплексной переменной  $z$  к новой комплексной переменной. Исчезла периодичность дискретных дробно-рациональных передаточных функций, восстановивших все наработанные в теории непрерывных систем методы построения и использования псевдочастотных логарифмических характеристик. Еще одна особенность «цифры» – это возможность синтеза систем с конечной памятью, то есть линейных цифровых систем с максимальным быстродействием. На этом заканчивается излагаемая в книге классическая часть теории цифровых систем автоматического управления.

Использование векторно-матричного аппарата, методов пространства состояний открывает новые горизонты в синтезе совершенных цифровых САУ. В практических задачах (летательные аппараты, системы подчиненного регулирования в электроприводе) часто встречаются системы с несколькими различными частотами квантования сигналов по времени. Этим вопросам и посвящена заключительная часть настоящей книги.

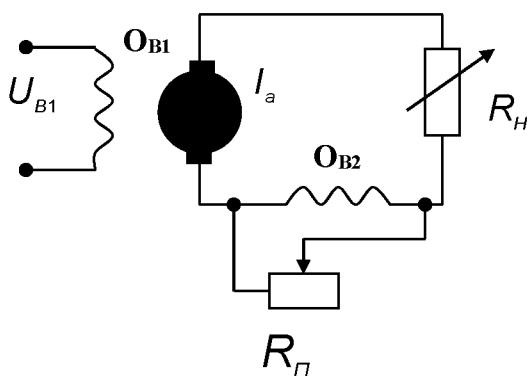
Учебник предназначен для студентов технических вузов и инженерно-технических специалистов в области управления технологическими процессами. Такого рода книга немыслима без изложения необходимого математического инструмента. Естественно, авторы понимают необходимость такого подхода. Особенно это важно в задачах обучения. Нужно не изложение перечня алгоритмов в области анализа и синтеза систем, а воспитание в будущих разработчиках научного мышления, совершенно необходимого в связи с ускоряющимися процессами развития научно-технических решений все новых и новых задач, которые ставит перед нами жизнь. Авторы выстроили повествование в книге таким образом, чтобы по мере изложения материала в полную силу начинали работать изученные с

помощью математического инструмента, вполне конкретные, практические методы синтеза реализуемых алгоритмов управления. И все это подтверждается примерами.

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

На рубеже XVIII–XIX вв., в эпоху промышленного переворота, в Европе начинается новый этап развития автоматики, связанный с внедрением ее в промышленность. 1765 г. знаменуется постройкой регулятора уровня котла паровой машины И. И. Ползунова. В 1784 г. появляется центробежный регулятор скорости паровой машины Дж. Уатта.

В это время формируется ряд важных принципов автоматики: принцип регулирования по отклонению Ползунова – Уатта и принцип регулирования по нагрузке Понселе. Первый из них развился в концепцию обратной связи, второй – в теорию инвариантности (Г. В. Щипанов, Н. Н. Лузин, Б. Н. Петров). Идея регулирования по нагрузке может быть проиллюстрирована на примере генератора с последовательным (серийным) возбуждением (рис. 1).



При изменении нагрузки меняется ток возбуждения в обмотке возбуждения, который соответствующим изменением магнитного потока компенсирует дополнительное падение напряжения на внутреннем сопротивлении якоря генератора. Однако если при этом по каким-либо причинам изменяется скорость вращения якоря генератора, то стабилизировать напряжение на нагрузке в этой схеме уже не удастся.

От этого недостатка свободна схема, приведенная на рис. 2, именно вследствие использования принципа обратной связи. В данной схеме входной потенциометр служит для задания (коэффициент  $\alpha_1$ ) величины стабилизируемого напряжения; потенциометр, подключенный к якору генератора, позволяет регулировать коэффициент обратной связи  $\alpha_2$ . В этом случае, в отличие от систем регулирования по возмущению, неважно, какая именно причина вызвала изменение регулируемой величины.

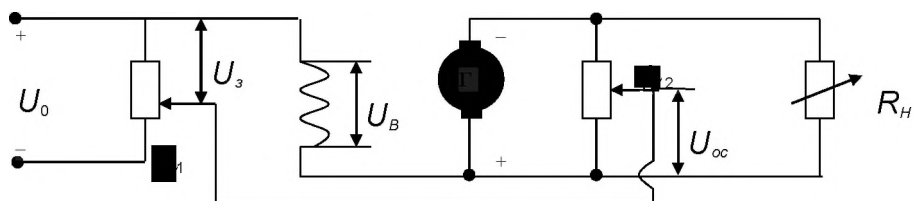


Рис. 2. Стабилизация напряжения генератора с использованием обратной связи

При изменении напряжения на щетках генератора в соответствии с электрической схемой изменяется напряжение на обмотке возбуждения. При отрицательном знаке обратной связи знак приращения напряжения возбуждения противоположен знаку изменения напряжения якоря генератора. В итоге результирующая величина отклонения напряжения генератора уменьшается по сравнению с соответствующим уходом напряжения в системе без обратной связи.

На этом же принципе построена приведенная на рис. 3 система стабилизации скорости паровой машины Уатта. На рис. 4 представлена ее функциональная схема. В данной системе с увеличением нагрузочного момента  $M_H$  падают обороты турбины  $\omega$ , что приводит к уменьшению расстояния  $2r$  между грузиками центробежного

регулятора. Вследствие этого заслонка поднимается (увеличивается расстояние  $S$ ) и растет расход пара  $Q$ , подаваемого в турбину. Это приводит к росту числа оборотов турбины  $\omega$ , а следовательно, к компенсации нагрузочного момента  $M_H$ .

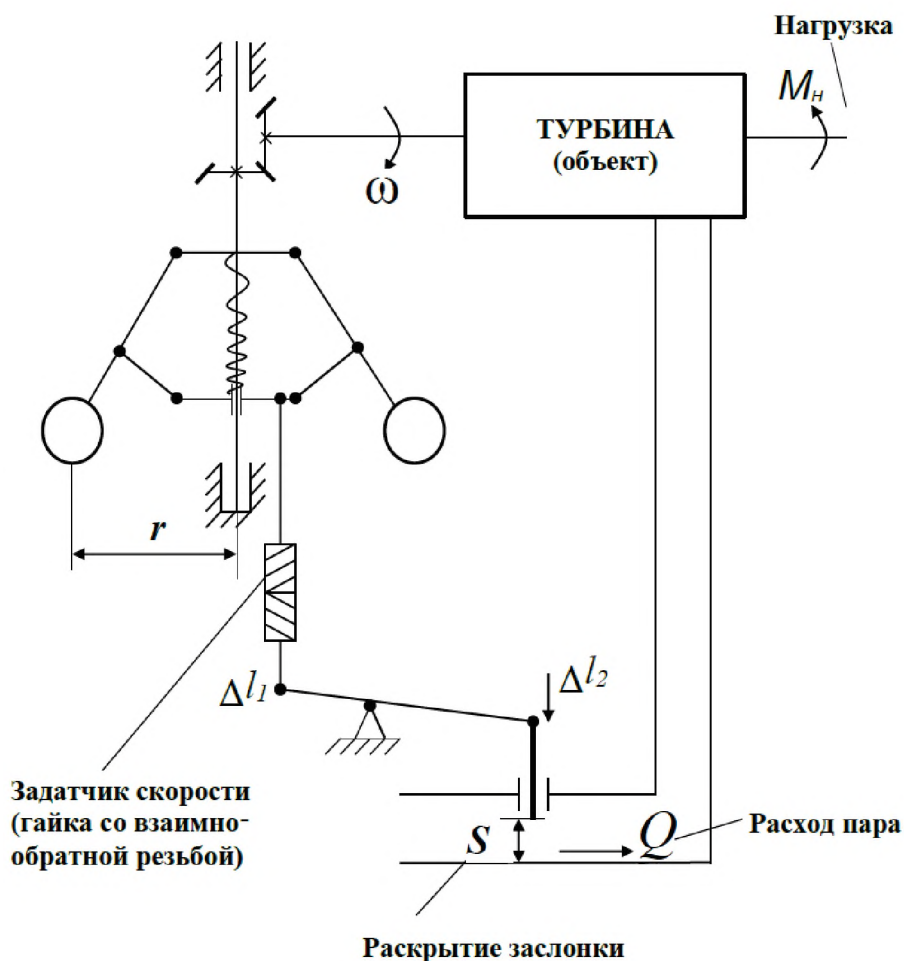


Рис. 3. Система стабилизации скорости паровой машины

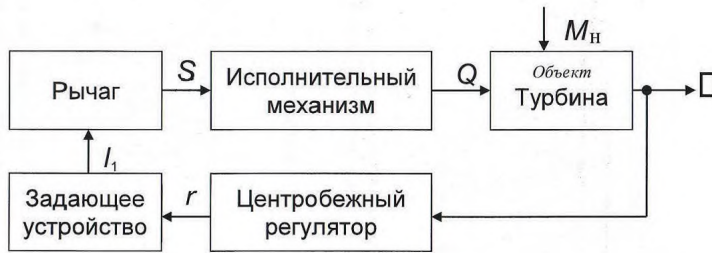


Рис. 4. Функциональная схема системы стабилизации скорости турбины

При изменении нагрузки на валу паровой машины после окончания переходных процессов сохраняется так называемая **статическая ошибка**. Если бы это было не так, то грузики центробежного регулятора, а вместе с ними и заслонка заняли бы свое первоначальное положение и не изменившееся в результате количество подаваемого в турбину пара не смогло бы уравновесить изменившийся момент нагрузки. Такая система называется статической.

**Статической системой** называют систему, работающую за счет статической ошибки.

Рассматриваемая система относится к классу систем **прямого действия**, то есть таких, в которых для реализации регулятора не используются дополнительные источники энергии.

**Системой прямого действия** называют систему, регулятор которой не имеет собственных источников энергии.

В данном случае это плохо, потому что для мощных установок перемещение тяжелой заслонки потребует неразумно громоздкого и тяжелого центробежного регулятора.

Таким образом, система является статической системой прямого действия.

**Структурной схемой** называется блок-схема, каждый элемент которой отображает некоторый математический оператор (группу операторов), описывающий рассматриваемую систему.

**Функциональной схемой** называется схема, каждый элемент которой отображает некоторую реализуемую им функцию.

Использование функциональных и структурных схем позволяет более наглядно представить взаимосвязь между отдельными основ-

---

ными и промежуточными переменными объектов и систем управления.

Типовая функциональная схема САУ представлена на рис. 5. На данном рисунке:

$u$  — управляющий сигнал;

$y$  — управляемый сигнал;

$f$  — возмущающее воздействие.

Кружок с четырьмя секторами является сумматором, причем сигнал, поступающий на зачерненный сектор, изменяет свой знак (вычитается).

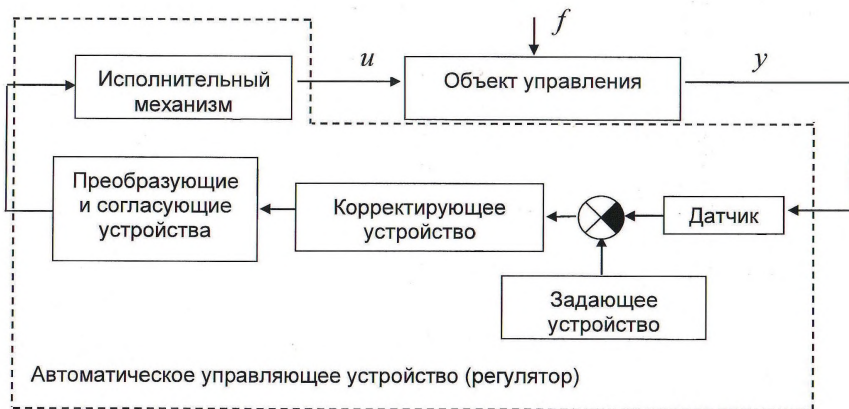


Рис. 5. Типовая функциональная САУ

Рассмотрим вариант системы стабилизации скорости турбины, в котором сделана попытка устранить недостатки, присущие рассмотренной выше статической системе прямого действия. На рис. 6 показан регулятор для этой системы.

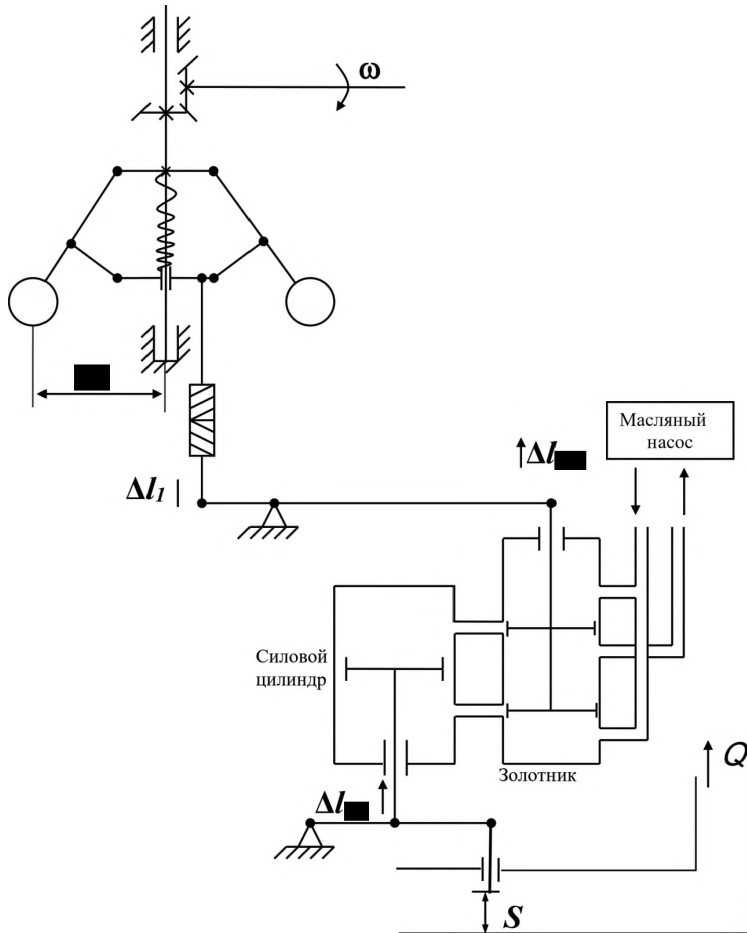


Рис. 6. Регулятор системы стабилизации скорости турбины с использованием гидравлического усилителя

Для этого в систему введен гидравлический усилитель, включающий в себя золотник, силовой цилиндр и масляный насос. Такая система, в которой энергия регулятора потребляется от отдельного источника, называется **системой непрямого действия**.

При заданной скорости расстояние между грузиками центробежного регулятора равно номинальному значению ( $r = r_0$ ), положение плеча золотника  $l_{\text{зол}}$  также равно номинальному значению ( $l_{\text{зол}} = l_{\text{зол}0}$ ), при этом поршень золотника полностью перекрывает выход-

---

ные отверстия, следовательно, положение поршня силового цилиндра неизменно.

С увеличением нагрузочного момента  $M_H$  падают обороты турбины  $\omega$ , что приводит к уменьшению расстояния  $r$  между грузиками центробежного регулятора. В результате изменяется положение поршенька золотника. Это, в свою очередь, приводит к перемещению поршня силового цилиндра, а следовательно, и к дополнительному приоткрытию заслонки  $S$ . Соответственно, увеличивается расход пара, возрастает скорость оборотов турбины  $\omega$  и увеличивается расстояние  $r$ . Статика (установившееся состояние) в системе возможна только тогда, когда  $l_{зол} = l_{зол0}$ , то есть когда полностью перекрыты перепускные отверстия золотникового устройства.

Теоретически в этой системе статическая ошибка равна нулю, то есть данная система является **астатической**. В ней отсутствует статическая связь между скоростью и положением заслонки.

Рассмотрим упрощенные уравнения системы. Начнем с уравнения объекта. Очевидно, что изменение скорости турбины может происходить лишь в тех случаях, когда нарушается равновесие между движущим моментом турбины  $M_T$  и моментом нагрузки  $M_H$ :

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = \Delta M_T - \Delta M_H, \quad (0.0.1)$$

где  $J$  — суммарный момент инерции, приведенный к валу турбины.

С целью упрощения в уравнении (0.0.1) использованы приращенные скорости и моментов. Более подробно такой подход будет рассмотрен в части, посвященной линеаризации систем.

Будем полагать, что приращение момента турбины пропорционально приращению количества подаваемого пара:

$$\Delta M_T = K_T \Delta Q.$$

Запишем уравнение центробежного регулятора. Полагая, что сами отклонения скорости и вызванные ими приращения внутренних переменных регулятора малы, мы можем выразить все зависимости в линейном виде. Тогда приращения скорости раскрытия грузиков и изменение положения поршенька золотника будут связаны линейными зависимостями:

$$\Delta r = K_{\omega} \cdot \Delta \omega ; \quad (0.0.2)$$

$$\Delta l_{\text{зол}} = -K_r \cdot \Delta r.$$

Составляя уравнение гидравлического усилителя, учтем, что скорость перемещения поршня силового цилиндра пропорциональна величине открытия перепускных отверстий золотника, то есть приращению  $l_{\text{зол}}$ :

$$\frac{d\Delta l_{\text{сц}}}{dt} = K_{\text{зол}} \cdot \Delta l_{\text{зол}}. \quad (0.0.3)$$

Приращение координаты штока силового цилиндра повлечет за собой изменение положения заслонки и, следовательно, изменение количества подаваемого в турбину пара:

$$\Delta Q = K_{\text{сц}} \cdot \Delta l_{\text{сц}}. \quad (0.0.4)$$

Продифференцировав уравнение (0.0.4) и учитывая уравнения для центробежного регулятора (0.0.2) и гидравлического усилителя (0.0.3), получим уравнение для регулятора:

$$\frac{d\Delta Q}{dt} = -K_p \cdot \Delta \omega, \quad (0.0.5)$$

где  $K_p = K_{\text{сц}} \cdot K_{\text{зол}} \cdot K_r \cdot K_{\omega}$  — коэффициент регулятора.

Запишем совместно уравнения объекта и регулятора:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta \omega}{dt} = K_q \cdot \Delta Q - K_H \cdot \Delta M_H; \\ \frac{d\Delta Q}{dt} = -K_p \cdot \Delta \omega. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение и подставим в него второе:

$$\frac{d^2 \Delta \omega}{dt^2} = K_q (-K_p \cdot \Delta \omega) - K_H \frac{d\Delta M_H}{dt}.$$

При условии постоянства нагрузки получаем уравнение свободного движения всей системы:

---

$$\frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} + K \cdot \Delta\omega = 0, \quad (0.0.6)$$

где

$$K = K_p \cdot K_q.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + K = 0,$$

его корни  $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{K}$ .

Таким образом, решение уравнения (0.0.6) имеет вид:

$$\Delta\omega(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = A \sin(\sqrt{K} \cdot t + \varphi), \quad (0.0.7)$$

где  $A$  и  $\varphi$  определяются начальными условиями.

В результате решения получили, что в данной системе в принципе не существует установившегося (статического) состояния. Следовательно, система неработоспособна.

С целью успокоения незатухающих колебаний (0.0.7) введем в систему демпфер (рис. 7) и рассмотрим, что в ней происходит при изменении нагрузки. С увеличением нагрузочного момента  $M_H$  уменьшается скорость вращения турбины  $\omega$ , что приводит к уменьшению расстояния  $2r$  между грузиками центробежного регулятора. Это влечет за собой изменение положения поршенька золотника  $\Delta l_{\text{зол}}$ , а следовательно, и изменение положения поршня силового цилиндра. При этом одновременно происходит два процесса.

Во-первых, вместе со штоком силового цилиндра опускаются поршень и цилиндр демпфера, уменьшая первоначальное изменение положения золотника  $\Delta l_{\text{зол}}$ . Скорость перемещения поршня демпфера относительно его цилиндра невелика и регулируется с помощью специального дросселя (Др).

Во-вторых, приоткрывается заслонка, увеличивая количество подаваемого в турбину пара, и начинает расти скорость  $\omega$ .

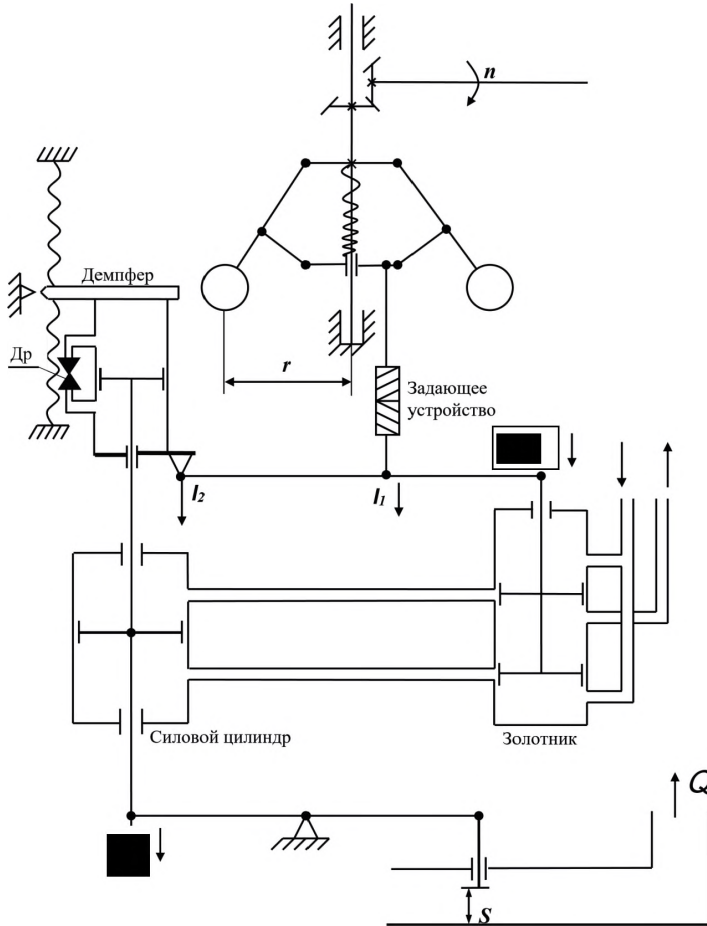


Рис. 7. Регулятор системы стабилизации скорости турбины с использованием успокоительного демпфера

За счет первого движения поршни золотника могут перекрыть перепускные отверстия еще до восстановления номинального значения  $\omega$ . В то же время пружины стремятся вернуть демпфер в исходное положение, и в конечном итоге  $\Delta l_2$  стремится к нулю. Теперь уже перепускные отверстия золотника будут перекрыты только при номинальной скорости. Следовательно, система с демпфером, как и предыдущая, является астатической. Рассмотрим, как повлияло введение демпфера на незатухающие колебания, выявленные в

предыдущем варианте системы. Считая отклонения от номинального режима малыми, запишем уравнения элементов регулятора. Как и раньше,

$$\Delta r = K_{\omega} \Delta \omega, \quad (0.0.8)$$

$$\Delta l_1 = -K_{12} \cdot \Delta r;$$

$$\frac{d}{dt} l_{\text{цп}} = K_{\text{зол}} \Delta l_{\text{зол}}. \quad (0.0.9)$$

В отличие от предыдущей системы, в данном случае положение штока золотника зависит не только от центробежного регулятора, но и от демпфера:

$$\Delta l_{\text{зол}} = K_1 \cdot \Delta l_1 - K_2 \cdot \Delta l_2. \quad (0.0.10)$$

Упрощенные уравнения демпфера основываются на равенстве сил пружин:

$$\Delta F_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \cdot \Delta l_2,$$

и сил, связанных с перемещением поршня демпфера относительно корпуса:

$$F_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{d(l_{\text{цп}} - l_2)}{dt}$$

или

$$\frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{пр}}} \cdot p \Delta l_2 + \Delta l_2 = \frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{пр}}} \cdot p \Delta l_{\text{цп}}.$$

Таким образом, изображения перемещений штока силового цилиндра и корпуса демпфера связаны соотношением

$$\Delta l_2 = \frac{T_{\text{д}} p}{T_{\text{д}} p + 1} \cdot \Delta l_{\text{цп}}, \quad (0.0.11)$$

где постоянная времени демпфера

$$T_{\text{д}} = K_{\text{д}} / K_{\text{пр}}.$$

Из (0.0.9) и (0.0.10) следует:

$$p \cdot \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} \cdot \left( K_1 \Delta l_1 - K_2 \frac{T_d p}{T_d p + 1} \Delta l_{\text{сц}} \right),$$

откуда

$$\left( 1 + K_{\text{зол}} K_2 \frac{T_d}{T_d p + 1} \right) \cdot p \cdot \Delta l_{\text{сц}} = K_{\text{зол}} K_1 \Delta l_1. \quad (0.0.12)$$

Используя равенства (0.0.8), (0.0.12) и (0.0.4), получим связь между входом регулятора  $\Delta\omega$  и его выходом  $\Delta Q$ :

$$\frac{T_1 p + 1}{T_d p + 1} K_{q \text{рег}} \cdot p \Delta Q = K_{\text{зол}} K_1 (-K_{1r} K_{\omega}) \Delta\omega, \quad (0.0.13)$$

где

$$K_{q \text{рег}} = \frac{1 + K_{\text{зол}} K_2 T_d}{K_{\text{сц}}}; \quad T_1 = \frac{T_d}{1 + K_{\text{зол}} K_2 T_d}.$$

Если  $T_1 \ll T_d$ , то (0.0.13) упрощается:

$$\frac{K_{q \text{рег}} \cdot p}{T_d p + 1} \Delta Q = -K_{\omega \text{рег}} \Delta\omega.$$

Это равенство можно решить относительно  $\Delta Q$ :

$$\Delta Q = -\frac{K_{\omega \text{рег}} (T_d p + 1)}{K_{q \text{рег}} \cdot p} \Delta\omega,$$

и окончательно получим уравнение регулятора, в котором выходная величина  $\Delta Q$  формируется как сумма пропорциональной и интегральной составляющих ошибки стабилизации  $\Delta\omega$ :

$$\Delta Q = -K_{\text{рег.пропорц}} \cdot \Delta\omega - K_{\text{рег.интегр}} \frac{\Delta\omega}{p}. \quad (0.0.14)$$

Запишем уравнение объекта (турбины) относительно изображений по Лапласу его входной и выходной переменных:

$$p \cdot \Delta\omega = K_q \Delta Q - K_H \Delta M_H. \quad (0.0.15)$$

Продифференцируем последнее равенство и подставим в него уравнение регулятора (0.0.14). В результате получим уравнение системы в целом:

$$p^2 \Delta \omega + K_q K_{\text{рег.пропорц}} p \cdot \Delta \omega + K_q K_{\text{рег.интегр}} \Delta \omega = -K_H \cdot p \cdot \Delta M. \quad (0.0.16)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -0,5 K_q K_{\text{рег.пропорц}} \pm \sqrt{(0,5 K_q K_{\text{рег.пропорц}})^2 - K_q K_{\text{рег.интегр}}}$$

всегда имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что в отличие от предыдущего случая свободная составляющая решения уравнения (0.0.16) с течением времени стремится к нулю. Таким образом, введение демпфера позволило получить устойчивую, работоспособную систему.

Разработчики первых систем автоматического регулирования наткнулись на случаи катастрофической неустойчивости на первый взгляд безукоризненных систем. В 1845 г. братья Вильям и Вернер Сименсы предложили метод регулирования по производной. Существование их предложения можно пояснить на примере следящей системы, функциональная схема которой приведена на рис. 8. На рис. 9 представлен фрагмент переходных процессов по выходной координате  $\varphi_{\text{вых}}$ , рассогласованию (ошибке)  $\varepsilon$  и производной рассогласования  $\dot{\varepsilon}$ . Хотя в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  отклонения выходной координаты от входной соответственно равны, управляющие воздействия на объект должны быть различными, так как в точках  $A_1$  и  $B_2$  выходная координата движется к требуемому значению, а в точках  $B_1$  и  $A_2$  — удаляется от него. Учитывая инерционные свойства объекта, целесообразно в формирователе закона управления реализовать управлявшее воздействие  $U$ , пропорциональное сумме  $\alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \dot{\varepsilon}$ . Добавление сигнала производной уменьшит абсолютную величину управления в точках  $A_1$  и  $B_2$  и увеличит ее в точках  $B_1$  и  $A_2$ .

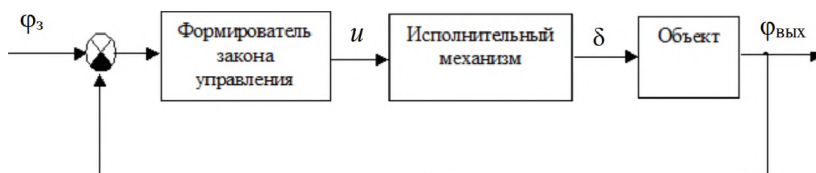


Рис. 8. Функциональная схема следящей системы

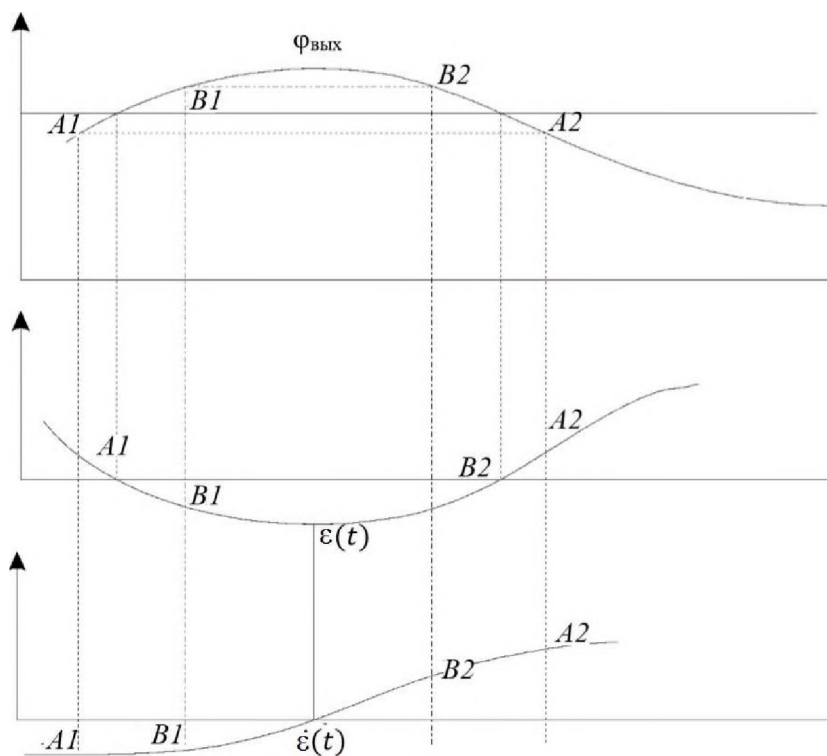


Рис. 9. К введению производной ошибки в закон регулирования

---

Распространение автоматических регуляторов вызвало потребность в разработке теоретически обоснованных методов их расчета. В 1866 г. вышла в свет статья Д. К. Максвелла «О регуляторах». В 1876 г. появилась работа, оказавшая большое влияние на науку о регулировании, – труд профессора И. А. Вышнеградского «Об общей теории регуляторов».

В этой работе было выведено условие устойчивости для линейных систем третьего порядка и даны конкретные указания о том, как влияют конструктивные параметры на устойчивость. И. А. Вышнеградский стал основоположником классической теории регулирования. Работы Вышнеградского были продолжены словацким ученым А. Стодолой. По его просьбе швейцарский математик А. Гурвиц в 1895 г. ввел алгебраические условия устойчивости для линейных систем любого порядка. Долгое время оставалась неизвестной инженерам аналогичная работа Е. Д. Рауса, выполненная им еще в 1877 г. по просьбе Д. К. Максвелла.

Лишь впоследствии, с развитием вычислительной техники, стало ясно, что критерий Рауса обладает гораздо большей алгоритмической и вычислительной мощностью и весьма удобен для использования на ЭВМ.

Большой вклад в теорию автоматического регулирования внес известный русский ученый Н. Е. Жуковский. В 1880 г. вышла его работа «О прочности движения». Он читал лекции по теории регуляторов в Московском университете, Математическом обществе и Московском техническом училище. В 1909 г. вышел его учебник по классической теории регулирования «Теория регулирования хода машин».

Основы общей теории устойчивости динамических систем были заложены выдающимся русским ученым А. М. Ляпуновым. В своей докторской диссертации в 1892 г. он впервые сформулировал условия устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, дал строгое определение понятия устойчивости, разработал два основных метода исследования устойчивости: первый – метод Ляпунова исследования устойчивости «в малом» и второй – прямой метод исследования устойчивости «в большом».

В те годы, по-видимому, еще никто не подозревал о будущей роли теории А. М. Ляпунова в общей теории управления. Лишь в 40–50-х гг. его теоремы заработали в полную силу.

В 1932 г. американский ученый Х. Найквист разработал теорию устойчивости усилителей с обратной связью. В 1936 г. молодой советский ученый А. В. Михайлов распространил критерии Найквиста на системы автоматического регулирования и предложил свой собственный критерий устойчивости, который с тех пор называется его именем.

В 1937 г. вышла большая работа советских ученых А. А. Андропова, С. Э. Хайкина и других по теории нелинейных колебаний, где впервые были введены понятия периодических режимов, автоколебаний, фазового пространства.

40-е гг. нашего столетия отмечены бурным развитием частотных методов, и большую роль в их пропаганде и внедрении в практику проектирования в нашей стране сыграли профессор В. В. Солодовников и его ученики, в это же время Н. Винер и А. Н. Колмогоров создали теорию синтеза статистически оптимальных систем. В 1948 г. К. Ф. Теодорчиком в СССР и в 1950 г. В. Р. Ивенсом в США были заложены основы теории корневых годографов.

В 50–60-е гг. развивается новое перспективное направление – теория оптимального управления. У истоков этой теории стояли советские ученые А. А. Фельдбаум, Л. С. Понтрягин, Е. А. Барбашин, А. М. Летов, А. А. Красовский, Н. Н. Красовский, американские ученые Р. Беллман, Р. Калман и другие.

В 60-е гг. М. А. Айзерманом и В. М. Поповым была разработана теория абсолютной устойчивости нелинейных систем. Большой вклад в теорию импульсных и цифровых систем автоматического управления внесли Ю. Ту, Я. З. Цыпкин, Л. Т. Кузин, Э. Джури.

В. С. Пугачев обогатил теорию управления разработкой вопросов статистической динамики. Родоначальником теории дифференциальных игр является академик Н. Н. Красовский. Продуктивную работу в области распознавания образов и управления в условиях неопределенности ведут математики Екатеринбурга. Всемирно известны работы российских ученых Б. Н. Петрова и С. В. Емельянова в области теории и практики адаптивных систем.

**Теория автоматического управления (ТАУ)** – это наука, которая, абстрагируясь от конкретного исполнения различных объектов и систем АУ, изучает особенности установившихся и динамических режимов этих систем и предлагает методы проектирования управления, обеспечивающего выполнение требований, предъявляе-

---

мых к ходу управляемого технологического процесса.

По принципу формирования управления САУ подразделяются на:

- разомкнутые;
- замкнутые;
- комбинированные.

По цели управления САУ подразделяют на системы:

- стабилизации;
- программного управления;
- следящие.

ТАУ работает с математическими моделями объектов системы управления, сочетает анализ и синтез.

По математическому описанию и по свойствам САУ подразделяются на следующие типы:

- **Обыкновенные системы** – системы, которые описываются дифференциальными или разностными уравнениями с сосредоточенными параметрами.
- Системы с распределенными параметрами.
- **Непрерывные системы** – системы, все координаты (переменные) которых являются непрерывными функциями времени.
- **Дискретные системы** – системы, в которых хотя бы одна из координат (переменных) является импульсной (дискретной или решетчатой) функцией времени.
- **Детерминированные системы** – системы с постоянными или изменяющимися известным (детерминированным) образом параметрами.
- **Стохастические системы** – системы, параметры которых изменяются во времени случайным образом.

- **Линейные системы** – системы, которые описываются линейными дифференциальными или разностными уравнениями.
- **Нелинейные системы** – системы, которые описываются нелинейными дифференциальными или разностными уравнениями.
- **Традиционные одноуровневые системы** – системы с регулированием только основных переменных.
- **Системы с адаптивным управлением**, в которых, кроме основного контура с отрицательной обратной связью, имеется контур, оценивающий текущие параметры управляемого объекта и соответствующим образом изменяющий управляющее воздействие или перестраиваемые параметры регулятора.
- **Оптимальные системы.**

Более подробная и обстоятельная классификация систем автоматического управления приведена в обширной литературе по теории управления. В частности, можно порекомендовать учебник А. А. Красовского и Г. С. Поспелова [8].

## Часть I

# Линейные непрерывные системы управления



---

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ****§ 1.1. Понятие пространства состояний**

С точки зрения анализа и синтеза систем все переменные, характеризующие объект управления (рис. 1.1) или имеющие к нему отношение, делятся на три группы.

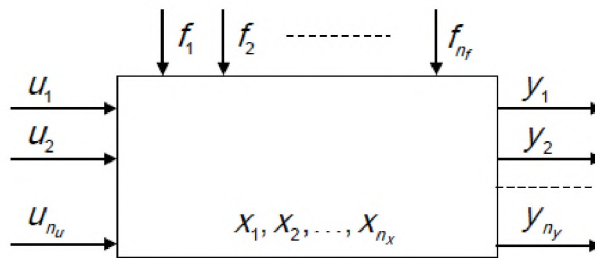


Рис. 1.1. Объект управления

1. Входные воздействия, представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемому объекту, и влияющие на его поведение. Внешние сигналы разделяют на сигналы управляющие –  $u_1, u_2, \dots, u_{n_u}$  и возмущающие –  $f_1, f_2, \dots, f_{n_f}$ .

2. Выходные переменные, или переменные, позволяющие описать некоторые аспекты поведения объекта, представляющие интерес для исследователя или потребителя результатов функционирования объекта, –  $y_1, y_2, \dots, y_{n_y}$ .

3. Переменные состояния, или промежуточные переменные  $x_1, x_2, \dots, x_{n_x}$ , характеризующие динамическое поведение исследуемого объекта или системы.

Для удобства оперирования многомерными величинами совокупность управляющих переменных представляют в виде вектора управления  $\vec{u}$ . Аналогичным образом вводятся понятия вектора возмущения  $\vec{f}$ , вектора выхода  $\vec{y}$  и вектора состояния  $\vec{x}$ :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n_u} \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n_f} \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n_y} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n_x} \end{pmatrix}.$$

Множество всех значений, которые может принять вектор  $\vec{u}$  в момент времени  $t$ , образует пространство управления. Аналогично вводятся понятия пространства возмущений, пространства выходов и пространства состояний.

В любой момент времени  $t$  состояние системы является функцией начального состояния  $\vec{x}(t_0)$  и векторов  $\vec{u}(t_0, t)$  и  $\vec{f}(t_0, t)$ . Если известно, как изменялись эти векторы на интервале  $[t_0, t]$ , то однозначно может быть определено состояние системы  $\vec{x}(t)$ :

$$\vec{x}(t) = F\{\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0, t), \vec{f}(t_0, t)\}. \quad (1.1.1)$$

Вектор выхода в момент времени  $t$  является функцией тех же переменных:

$$\vec{y}(t) = \Psi\{\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0, t), \vec{f}(t_0, t)\}. \quad (1.1.2)$$

Состояние системы отделяет будущее от прошлого, так что состояние содержит всю информацию, необходимую для определения реакции объекта на произвольный входной сигнал. Понятие состояния является основным исходным понятием и, следовательно, не может быть определено более полно, чем, например, слово «множество» в математике. Наибольшее, что можно сделать, это сформулировать свойства, какими должна обладать система, поведение которой отвечает понятию состояния.

Основным свойством состояния является то, что будущие значения его не зависят от характера достижения системой ее текущего состояния. Состояние системы в данный момент времени, а также текущее и будущие значения ее входов единственным образом определяют настоящее и будущие значения ее состояния и выходов.

Уравнение (1.1.1) называют уравнением состояния системы, а уравнение (1.1.2) – уравнением выхода. Если объект описывается дифференциальным уравнением, то уравнения (1.1.1) и (1.1.2) преобразуются в

$$\dot{\vec{x}}(t) = F\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{f}(t), t\}, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0; \quad (1.1.3)$$

$$y(t) = \Psi\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), t, \vec{v}(t)\}, \quad (1.1.4)$$

где дополнительно введен вектор ошибок измерений  $\vec{v}(t)$ .

Как правило, выбор состояния естественным образом следует из физического устройства системы, а уравнение (1.1.3), называемое дифференциальным уравнением состояния, обычно следует из элементарных физических законов, которыми определяется ее поведение.

## § 1.2. Линеаризация исходных уравнений

Почти все реальные объекты и системы автоматического управления являются нелинейными. Однако среди нелинейных функций  $F$  и  $\Psi$  часто встречаются такие, которые при определенных допущениях в рабочей области функционирования системы могут быть заменены линейными. В качестве примера такой ситуации на рис. 1.2 представлена элементарная функция. В данном случае возможна линеаризация, так как если точка  $A$  перемещается на небольшие расстояния по кривой  $V_2 = f(V_1)$ , то этот участок кривой можно заменить отрезком прямой. В то же время нелинейная функция на рис. 1.3 не допускает подобной замены, так как в процессе работы системы происходит изменение уровня выходного сигнала  $V_2$ . Системы с функциями такого типа называют **существенно нелинейными**. Их исследованию будет посвящен специальный раздел учебника. Ниже будет рассмотрен класс систем, допускающих линеаризацию.

Пусть режим функционирования объекта определяется некоторой траекторией по вектору управления  $\vec{u}_0(t)$ , а действительная реализация  $\vec{u}(t)$  близка к ней:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0(t) + \Delta\vec{u}(t). \quad (1.2.1)$$

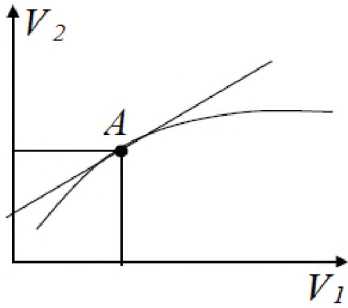


Рис. 1.2. Линеаризуемая нелинейность

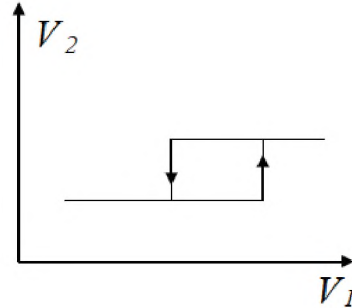


Рис. 1.3. Существенная нелинейность

При этом решение уравнения (1.1.3) можно записать в виде:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \Delta\vec{x}(t), \quad (1.2.2)$$

где  $\vec{x}_0(t)$  – решение уравнения (1.1.3) при  $\vec{u} = \vec{u}_0(t)$ .

Назовем функционирование объекта (системы) при  $\vec{u} = \vec{u}_0(t)$  **базовым режимом**. Переменные  $\Delta\vec{x}(t)$ ,  $\Delta\vec{u}(t)$ ,  $\Delta\vec{f}(t)$  – это отклонения от соответствующих переменных в базовом режиме.

Подставим теперь выражения для  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{u}(t)$  в исходное дифференциальное уравнение состояний:

$$\vec{\dot{x}}_0(t) + \Delta\vec{\dot{x}}(t) = F\{\vec{x}_0(t) + \Delta\vec{x}(t), \vec{u}_0(t) + \Delta\vec{u}(t), \vec{f}_0(t) + \Delta\vec{f}(t), t\},$$

и разложим функцию  $F$  в ряд Тейлора:

$$\vec{\dot{x}}_0(t) + \Delta\vec{\dot{x}}(t) = F\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\} + J_x\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{x} + \quad (1.2.3)$$

$$+ J_U\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{u} + J_f\{\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t\}\Delta\vec{f} + R. \quad (1.2.4)$$

Здесь  $R$  – остаточный член, содержащий высшие степени приращений, и им можно пренебречь;  $J_x, J_u, J_f$  – матрицы Якоби функции  $F$  для  $\vec{x}, \vec{u}$  и  $\vec{f}$ .

Элемент матрицы Якоби определяется как соответствующая частная производная  $(J_x)_{ik} = \frac{dF_i}{dx_k}$ . Например, для системы второго порядка соответствующее слагаемое в правой части (1.2.3) имеет вид:

$$J_x \cdot \Delta \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{bmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Пренебрегая в (1.2.3) остаточным членом  $R$  и учитывая уравнение для базового режима, получим:

$$\Delta \vec{x}(t) = J_x \{ \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t \} \Delta \vec{x} + J_U \{ \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t \} \Delta \vec{u} + J_f \{ \vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{f}_0, t \} \Delta \vec{f}. \quad (1.2.6)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A(t) &= J_x \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\}; \\ B(t) &= J_u \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\}; \\ G(t) &= J_f \left\{ \vec{x}_0(t), \vec{u}_0(t), \vec{f}_0(t), t \right\}. \end{aligned}$$

В результате получим **линейное дифференциальное векторно-матричное уравнение с переменными параметрами** (коэффициентами):

$$\Delta \vec{x}(t) = A(t) \cdot \Delta \vec{x}(t) + B(t) \cdot \Delta \vec{u}(t) + G(t) \cdot \Delta \vec{f}(t). \quad (1.2.7)$$

Аналогичным образом проведем линеаризацию уравнения выхода:

$$\Delta \vec{y}(t) = C(t) \cdot \Delta \vec{x}(t) + D(t) \cdot \Delta \vec{u}(t) + \Delta \vec{v}(t). \quad (1.2.8)$$

Впредь, рассматривая линейные модели системы, будем опускать символ  $\Delta$  при записи приращений соответствующих векторов. Таким образом, линеаризованные уравнения объекта (системы) примут вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{u}(t) + G(t)\vec{f}(t); \quad (1.2.9)$$

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t) + D(t)\vec{u}(t) + \vec{v}(t). \quad (1.2.10)$$

На рис. 1.4 приведена структурная схема, являющаяся графическим изображением уравнений (1.2.9) и (1.2.10).

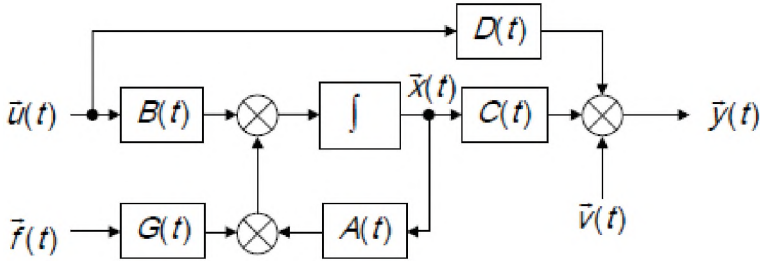


Рис. 1.4. Обобщенная структурная схема объекта управления

В качестве примера рассмотрим смесительный бак [7], который наполняется с помощью двух потоков, имеющих переменные мгновенные расходы  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  (рис. 1.5). Оба входных потока содержат растворимое вещество с неизменными концентрациями  $C_1$  и  $C_2$ . Выходной поток имеет массовую скорость истечения (мгновенный расход)  $F(t)$ . Предполагается, что содержимое бака перемешивается так, что концентрация выходного потока равна концентрации  $C_{\text{out}}(t)$  в баке.

Запишем уравнения баланса расходов в баке.

Для полной массы:

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F(t). \quad (1.2.11)$$

Для массы растворенного вещества:

$$\frac{d}{dt}\{C_{\text{out}}(t)V(t)\} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C_{\text{out}}(t)F(t). \quad (1.2.12)$$

Сосредоточим внимание на величине расхода выходного потока  $F(t)$ .

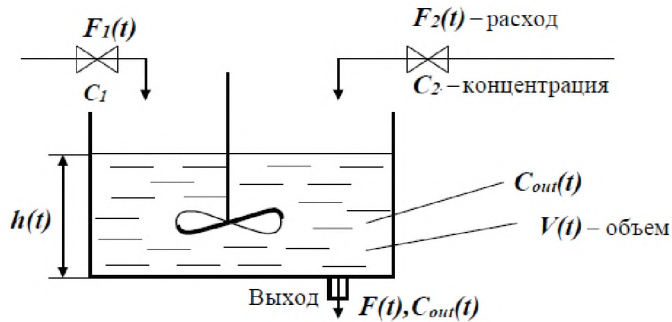


Рис. 1.5. Смесительный бак

Исходя из того, что при расчете расхода жидкости, свободно истекающей из бака через сравнительно небольшое отверстие, потенциальная энергия жидкости, определяемая ее уровнем в баке, переходит в кинетическую энергию вытекающей струи:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Откуда определяется скорость вытекания жидкости:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1.2.13)$$

Эта формула называется формулой Торричелли. В действительности скорость зависит от формы и размера отверстия, от вязкости жидкости и величины расхода, и формула приобретает вид:

$$v = \varphi\sqrt{2gh}.$$

Коэффициент  $\varphi$  меньше единицы и определяется с помощью гидравлики. Таким образом, мгновенный расход выходного потока при естественном истечении:

$$F(t) = s\varphi\sqrt{2gh},$$

где  $s$  – сечение выходного отверстия.

Если бак имеет постоянную по высоте площадь, то

$$F(t) = s\varphi\sqrt{2g}\sqrt{\frac{V(t)}{S}} = \kappa\sqrt{V(t)}. \quad (1.2.14)$$

Из (1.2.12) и (1.2.13) получаем:

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - \kappa\sqrt{V(t)},$$

$$\frac{d(C_{\text{out}}(t)V(t))}{dt} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C_{\text{out}}(t)\kappa\sqrt{V(t)}. \quad (1.2.15)$$

Выберем в качестве базового режима установившееся состояние (статика), когда все величины являются постоянными –  $F_{10}$ ,  $F_{20}$ ,  $F_0$ ,  $C_0$ ,  $V_0$ . При этом из предыдущих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{10} + F_{20} - F_0, \\ 0 &= C_1F_{10} + C_2F_{20} - C_0F_0, \\ F_0 &= \kappa\sqrt{V_0}. \end{aligned}$$

При известных  $F_{10}$  и  $F_{20}$  эти уравнения могут быть разрешены относительно  $F_0$ ,  $C_0$ ,  $V_0$ :

$$F_0 = F_{10} + F_{20}, \quad V_0 = \frac{F_0^2}{\kappa^2}, \quad C_0 = \frac{C_1F_{10} + C_2F_{20}}{F_0}.$$

Предположим теперь, что возникли отклонения от установившегося состояния:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= F_{10} + \Delta F_1(t), \\ F_2(t) &= F_{20} + \Delta F_2(t), \end{aligned}$$

и, как следствие,

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0 + \Delta F(t), \\ V(t) &= V_0 + \Delta V(t), \\ C_{\text{out}}(t) &= C_0 + \Delta C(t). \end{aligned}$$

Если эти отклонения невелики, то можно провести линеаризацию нелинейных дифференциальных уравнений объекта.

Сначала линеаризуем уравнение для полной массы:

$$\frac{d}{dt}\{V_0 + \Delta V(t)\} = F_{10} + \Delta F_1(t) + F_{20} + \Delta F_2(t) - k\sqrt{V_0\Delta V(t)}.$$

Используем разложение нелинейной функции в ряд Тейлора и учтем, что

$$\left. \frac{d(k\sqrt{V})}{dV} \right|_{V=V_0} \cdot \Delta V = \frac{k}{2\sqrt{V_0}} \Delta V(t) = \frac{k}{2V_0} \Delta V(t) = \frac{F_0}{2V_0} \Delta V(t). \quad (1.2.16)$$

Введем параметр  $\Theta = \frac{V_0}{F_0}$ , называемый временем заполнения бака.

Тогда уравнение для полной массы примет вид:

$$\frac{d\Delta V(t)}{dV} = F_{10} + \Delta F_1 + F_{20} + \Delta F_2 - k\sqrt{V_0} - \frac{1}{2\Theta} \Delta V(t) + R(t). \quad (1.2.17)$$

Учитывая уравнение статики и пренебрегая остаточным членом  $R(t)$ , получим линейное дифференциальное уравнение для полной массы в отклонениях:

$$\frac{d\Delta V(t)}{dV} = \Delta F_1 + \Delta F_2 - \frac{1}{2\Theta} \Delta V(t). \quad (1.2.18)$$

Проведем аналогичные преобразования для уравнения растворенного вещества и в результате получим систему следующих линеаризованных дифференциальных уравнений в отклонениях, которые описывают процессы в смесительном баке:

$$\begin{cases} \Delta \dot{V}(t) = \Delta F_1(t) + \Delta F_2(t) - \frac{1}{2\Theta} \Delta V(t), \\ \Delta \dot{C}(t) = -\frac{1}{\Theta} \Delta C(t) + \frac{C_1 - C_0}{V_0} \Delta F_1(t) + \frac{C_2 - C_0}{V_0} \Delta F_2(t). \end{cases} \quad (1.2.19)$$

На этом для примера завершен первый этап разработки – составлено математическое описание объекта и в результате линеаризации

получена его линейная модель. Далее это описание нужно представить в удобной форме – в виде векторно-матричных дифференциальных уравнений и в виде структурной схемы.

Представим математическое описание объекта в виде векторно-матричных дифференциальных уравнений. Введем обозначения:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta V(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix}, \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta F_1(t) \\ \Delta F_2(t) \end{bmatrix}, \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta C \\ \Delta V \end{bmatrix}.$$

Теперь систему уравнений (1.2.19) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t), \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\Theta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Theta} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{C_1 - C_0}{V_0} & \frac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Theta} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структурная схема объекта представлена на рис. 1.6.

На основании полученных дифференциальных уравнений и структурной схемы можно провести предварительный анализ свойств объекта и сделать следующие выводы:

1. Изменение любой из входных переменных  $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$  приводит к одновременному изменению всех выходных переменных  $\Delta V$ ,  $\Delta F$  и  $\Delta C$ . Это особенно наглядно следует из наличия перекрестных связей на структурной схеме объекта.

2. При ступенчатом изменении любой из входных переменных каждая из выходных переменных изменяется по экспоненциальному закону, причем темп изменения концентрации  $\Delta C$  вдвое медленнее темпа изменения объема  $\Delta V$ .

Предметом отдельного рассмотрения при проектировании системы управления (СУ) должен стать анализ диапазонов изменения переменных объекта, в которых сохраняется адекватность линейной модели.

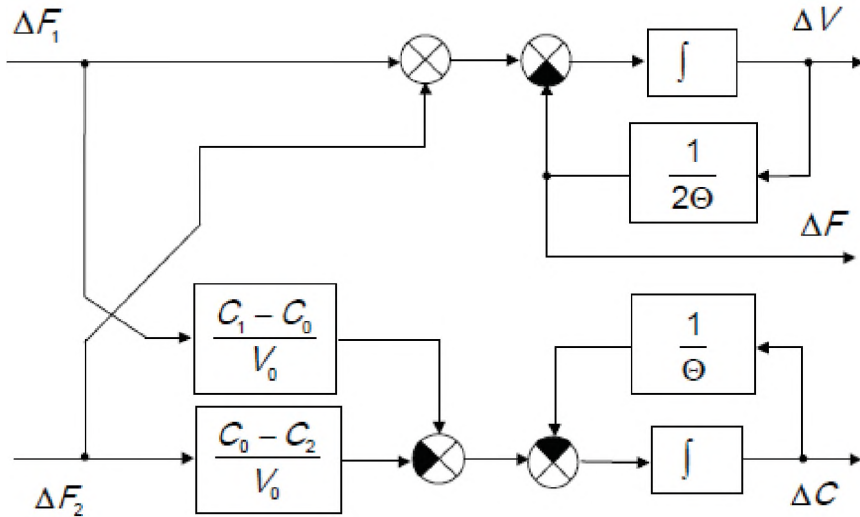


Рис. 1.6. Структурная схема смесительного бака как объекта управления

Прежде чем закончить рассмотрение данного примера, имеет смысл продемонстрировать некоторые последующие действия разработчика в части синтеза алгоритмов управления. Перед разработчиком среди прочих встанут следующие задачи. Одна из них – обеспечение заданных требований по длительности и качеству процессов в системе, то есть ее динамических свойств. Рассмотрению соответствующих вопросов посвящен третий раздел настоящего учебника.

Вторая задача – обеспечение возможности независимого управления объемом (расходом) и концентрацией. Введем понятие командных сигналов по требуемым концентрации  $\Delta r_c$  и объему  $\Delta r_v$ . В статике производные всех переменных должны быть равны нулю и, как следует из структурной схемы и дифференциальных уравнений объекта, должны выполняться равенства:

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 - \frac{1}{2\Theta} \cdot \Delta V_{уст} = 0;$$

$$-\frac{1}{\Theta} \Delta C_{уст} + \frac{C_1 - C_0}{V_0} \Delta F_1 - \frac{C_0 - C_2}{V_0} \Delta F_2 = 0.$$

Отсюда, с учетом равенства  $\Theta = \frac{V_0}{F_0}$ , получаем:

$$\Delta V_{\text{уст}} = 2\Theta(\Delta F_1 + \Delta F_2); \quad (1.2.20)$$

$$\Delta C_{\text{уст}} = \frac{C_1 - C_0}{F_0} \Delta F_1 - \frac{C_0 - C_2}{F_0} \Delta F_2. \quad (1.2.21)$$

Для компенсации перекрестных связей в объекте введем перекрестные связи в регуляторе:

$$\Delta F_1 = a_{VF_1} \Delta r_V + a_{CF_1} \Delta r_C;$$

$$\Delta F_2 = a_{VF_2} \Delta r_V + a_{CF_2} \Delta r_C.$$

Подставим эти выражения в (1.2.20) и (1.2.21):

$$\Delta V_{\text{уст}} = 2\Theta((a_{VF_1} + a_{VF_2})\Delta r_V + (a_{CF_1} + a_{CF_2})\Delta r_C); \quad (1.2.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta C_{\text{уст}} = & \left( \frac{C_1 - C_0}{F_0} a_{VF_1} - \frac{C_0 - C_2}{F_0} a_{VF_2} \right) \Delta r_V + \\ & + \left( \frac{C_1 - C_0}{F_0} a_{CF_1} - \frac{C_0 - C_2}{F_0} a_{CF_2} \right) \Delta r_C. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Для того чтобы установившееся значение объема жидкости в баке  $\Delta V_{\text{уст}}$  определялось только командным сигналом  $\Delta r_V$  и не зависело от  $\Delta r_C$ , а выходная концентрация  $\Delta C_{\text{уст}}$  определялась только командным сигналом  $\Delta r_C$  и не зависела от  $\Delta r_V$ , в равенстве (1.2.22) приравняем к единице коэффициент при  $\Delta r_C$ , а коэффициент при  $\Delta r_V$  – к единице. В равенстве (1.2.23) приравняем к нулю коэффициент при  $\Delta r_V$ , а коэффициент при  $\Delta r_C$  – к единице. В результате решения получившейся системы уравнений получим:

$$\begin{aligned} a_{VF_1} &= \frac{1}{2\Theta} \frac{C_0 - C_2}{C_1 - C_2}; & a_{VF_2} &= \frac{1}{2\Theta} \frac{C_1 - C_0}{C_1 - C_2}; \\ a_{CF_1} &= \frac{F_0}{C_1 - C_2}; & a_{CF_2} &= -\frac{F_0}{C_1 - C_2}. \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

В итоге получаем представленную на рис. 1.7 структурную схему системы управления смесительным баком, в которой обеспечена развязка каналов. Последнее означает, что командный сигнал  $\Delta r_V$  влияет только на изменение объема жидкости в баке, а командный сигнал  $\Delta r_C$  – только на изменение концентрации. Объем жидкости в баке связан с расходом выходного потока  $\Delta F$  коэффициентом пропорциональности  $2\Theta$ , поэтому регулирование первого можно рассматривать как регулирование второго.

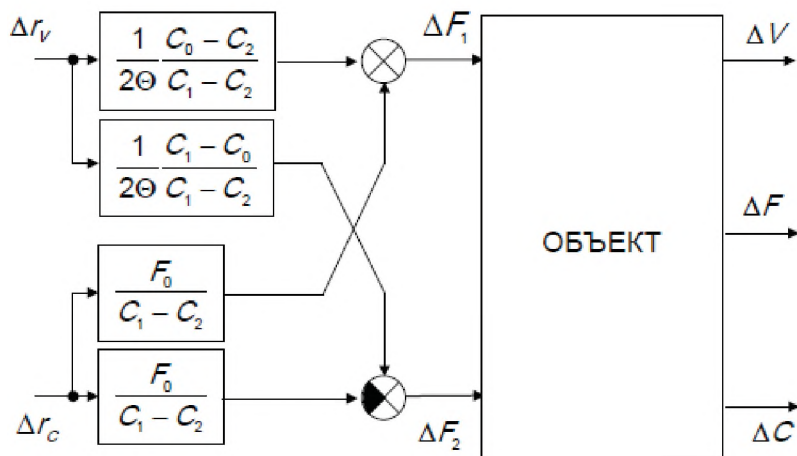


Рис. 1.7. Система управления смесительным баком с развязанными каналами

### § 1.3. Линейные системы, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши

#### 1.3.1. Однородные дифференциальные уравнения

Линейные системы и объекты могут быть описаны однородными и неоднородными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим решение однородного векторно-матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t), \quad (1.3.1)$$

где каждому начальному условию  $\vec{x}(t_0)$  соответствует одно и только одно решение дифференциального уравнения. Будем полагать, что матрица  $A(t)$  непрерывна на промежутке  $t \in [0, \infty]$ . Множество всех решений образует  $n$ -мерное векторное пространство. Среди множества решений выберем  $n$  линейно независимых.

Это может быть сделано следующим образом. Зададим начальные условия  $\vec{x}_i(t_0)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , совпадающие с базисными векторами  $\vec{e}_i$  пространства  $R^n$ , то есть  $\vec{x}_i(t_0) = \vec{e}_i$ . Из свойства единственности решений дифференциальных уравнений (через любую точку пространства состояний проходит одна и только одна траектория) следует линейная независимость решений с указанными начальными условиями. Матрица  $X(t)_{[n \times n]}$ , столбцами которой являются  $n$  линейно независимых решений системы (1.3.1), называется **фундаментальной матрицей** этой системы дифференциальных уравнений.

Поскольку каждый столбец фундаментальной матрицы является решением системы (1.3.1), то фундаментальная матрица при нулевых начальных условиях  $X_0 = X(t_0)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t). \quad (1.3.2)$$

По определению в любой момент времени столбцы этой матрицы линейно независимы, значит, ее определитель (определитель Вронского) не равен нулю на промежутке  $t \in [0, \infty]$ . Так как определитель матрицы  $X$  не равен нулю, то существует обратная матрица  $X^{-1}(t)$ .

Матрица

$$\Phi(t, t_0) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \quad (1.3.3)$$

называется **переходной матрицей** уравнения (1.3.1), или переходной матрицей, соответствующей матрице  $A(t)$ . Переходная матрица является определяющей при анализе и решении дифференциальных уравнений и собственно в теории управления. Поэтому ниже приводятся ее основные свойства, в основном вытекающие из определения этой матрицы.

1. Переходная матрица при совпадающих значениях первого и второго аргумента становится единичной матрицей:

$$\Phi(t, t_0)|_{t=t_0} = \Phi(t_0, t_0) = X(t_0) \cdot X^{-1}(t_0) = E.$$

2. При любых значениях аргументов  $t_1, t_2$  переходная матрица  $\Phi(t_1, t_2)$  не вырождена и ее определитель не равен нулю:  $|\Phi(t_1, t_2)| \neq 0$ .
3. Обращение матрицы  $\Phi(t, t_0)$  эквивалентно изменению порядка аргументов исходной матрицы:  $\Phi^{-1}(t, t_0) = [X(t) \cdot X^{-1}(t_0)]^{-1} = X(t_0) \cdot X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$ .
4. В соответствии с (1.3.3)  $\dot{\Phi}(t, t_0) = \dot{X}(t) \cdot X^{-1}(t_0) = A(t) \cdot X(t) \times X^{-1}(t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0)$ .

Это означает, что переходная матрица может быть определена как решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E. \quad (1.3.4)$$

5. Переходная матрица определяет решение однородного векторно-матричного дифференциального уравнения (1.3.1), удовлетворяющее начальному условию  $\vec{x}(t)|_{t=t_0} = \vec{x}(t_0)$ :

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0). \quad (1.3.5)$$

Это действительно так. Во-первых, при  $t = t_0$   $\Phi(t_0, t_0) \cdot \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_0)$ . Во-вторых, с учетом свойства (4):

$$\frac{d}{dt} \{ \Phi(t, t_0) \vec{x}(t_0) \} = \dot{\Phi}(t, t_0) \vec{x}(t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) \vec{x}(t_0) = A(t) \vec{x}(t).$$

6. Из предыдущего свойства следует один из способов определения переходной матрицы. Обозначим через  $\varphi_{i,j}(t, t_0)$  элемент  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца переходной матрицы и запишем равенство (1.3.5) в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_i(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \dots & \varphi_{1j}(t, t_0) & \dots & \varphi_{1n}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \dots & \varphi_{2j}(t, t_0) & \dots & \varphi_{2n}(t, t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i1}(t, t_0) & \dots & \varphi_{ij}(t, t_0) & \dots & \varphi_{in}(t, t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t, t_0) & \dots & \varphi_{nj}(t, t_0) & \dots & \varphi_{nn}(t, t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_j(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix},$$

откуда следует выражение для  $i$ -й координаты вектора состояния:

$$x_i(t) = \varphi_{i,1}(t, t_0)x_1(t_0) + \dots + \varphi_{i,j}(t, t_0)x_j(t_0) + \dots + \varphi_{i,n}(t, t_0)x_n(t_0).$$

Если положить начальные условия по всем координатам вектора состояния, кроме  $j$ -й, нулевыми, а по  $j$ -й – единичными, то есть

$$x_k(t_0) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots, n; \quad k \neq j \text{ и } x_j(t_0) = 1, \quad (1.3.6)$$

то элемент  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\Phi(t, t_0)$  можно определить как процесс по  $i$ -й координате вектора состояния:

$$\varphi_{i,j}(t, t_0) = x_i(t). \quad (1.3.7)$$

7. К переходной функции применимо правило композиции:

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0). \quad (1.3.8)$$

Действительно, решение уравнения (1.3.1) в момент  $t_1$  при начальных условиях  $\vec{x}(t_0)$  имеет вид:

$$\vec{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\vec{x}(t_0).$$

Если теперь этот результат принять за новые начальные условия, то к моменту времени  $t_2$  будем иметь:

$$\vec{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\vec{x}(t_1) = \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0)\vec{x}(t_0).$$

8. Переходная матрица может быть вычислена с помощью ряда Пеано, или матрицианта матрицы  $A$ :

$$\Phi(t, t_0) = M(A) = E + Q(A) + Q(A \cdot Q(A)) + Q(A \cdot Q(A \cdot Q(A))) + \dots,$$

где

$$Q(A) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau.$$

Для того чтобы получить этот результат, проинтегрируем дифференциальное уравнение (1.3.1):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \vec{x}(\tau_1) d\tau_1.$$

Теперь повторим эту процедуру многократно, учитывая, что

$$\vec{x}(\tau_1) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \vec{x}(\tau_2) d\tau_2.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \vec{x}(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d(\tau_3) d(\tau_2) d(\tau_1) \vec{x}(t_0) + \dots = \\ &= \left\{ E + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \right\} \vec{x}(t_0). \end{aligned}$$

Если объект стационарный и матрица состоит из постоянных и не зависящих от времени элементов, то матрицант матрицы (или ряд Пеано) превращается в выражение для матричной экспоненты:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= E + A(t - t_0) + \frac{A^2(t - t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t - t_0)^3}{3!} + \dots = \quad (1.3.9) \\ &= \exp(A(t - t_0)) = e^{A(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что в стационарном случае переходная матрица является уже функцией только одного аргумента, равного разности начального и текущего (конечного) времени:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A\Delta t}. \quad (1.3.10)$$

Переходная матрица для стационарного объекта обладает рядом дополнительных замечательных свойств, трансформирующихся из соответствующих свойств переходной матрицы для нестационарного объекта (стр. 53–55):

$$\text{из (1) } \Phi(0) = E; \quad (1.3.11)$$

$$\text{из (3) } \Phi^{-1}(\Delta t) = \Phi(-\Delta t) = e^{-A \cdot \Delta t}; \quad (1.3.12)$$

$$\begin{aligned} \text{из (4) } \frac{d\Phi(t - t_0)}{dt} &= 0 + A + \frac{2A^2(t - t_0)}{2!} + \frac{3A^3(t - t_0)^2}{3!} + \dots = \\ &= A \cdot \Phi(t - t_0) = A \cdot e^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)} \cdot A; \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

из (5) решение однородного дифференциального уравнения:

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{x}(t_0); \quad (1.3.14)$$

$$\text{из (7) } \Phi(k \cdot \Delta t) = \Phi^k \cdot (\Delta t). \quad (1.3.15)$$

### 1.3.2. Решение неоднородных векторно-матричных дифференциальных уравнений

Ранее были получены выражения для определения решений однородного дифференциального уравнения нестационарной

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0) \quad (1.3.16)$$

и стационарной

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{x}(t_0) \quad (1.3.17)$$

систем. Используем эти результаты для определения решения неоднородного линейного векторно-матричного уравнения, верно:

$$\dot{\vec{x}} = A(t) \cdot \vec{x}(t) + B(t) \cdot \vec{u}(t). \quad (1.3.18)$$

Произведем замену:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{z}(t), \quad (1.3.19)$$

и продифференцируем это выражение:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot \vec{z}(t) + \Phi(t, t_0) \cdot \dot{\vec{z}}(t) = \\ &= A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot \vec{z}(t) + \Phi(t, t_0) \cdot \dot{\vec{z}}(t).\end{aligned}$$

Сопоставляя это выражение с предыдущим, получим:

$$\Phi(t, t_0) \cdot \dot{\vec{z}}(t) = B(t) \cdot \vec{u}(t),$$

откуда

$$\dot{\vec{z}}(t) = \Phi(t_0, t) \cdot B(t) \cdot \vec{u}(t),$$

или интегрируя,

$$\vec{z}(t) = \vec{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \cdot \vec{u}(\tau) d\tau.$$

Из (1.3.19) видно, что

$$\vec{z}(t_0) = \vec{x}(t_0).$$

В итоге получаем выражение для решения векторно-матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения, известное под названием формула Коши:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \vec{u}(\tau) d\tau. \quad (1.3.20)$$

## § 1.4. Некоторые сведения из теории матриц

### 1.4.1. Собственные числа, характеристический полином, присоединенная матрица

Умножение квадратной матрицы  $A$  на некоторый вектор  $\vec{x}$  дает новый вектор  $\vec{z}$ , который в общем случае иначе ориентирован в пространстве и имеет другую длину по сравнению с исходным вектором.



$$(\lambda E - A)^{-1} = \frac{I(\lambda)}{|\lambda E - A|}, \quad (1.4.4)$$

где  $I(\lambda)$  – присоединенная матрица для матрицы  $A$ . Ее элементы определяются как алгебраические дополнения элементов матрицы  $(\lambda E - A)^T$ . Здесь символ  $^T$  означает транспонирование. **Присоединенная матрица** – это матричный полином степени  $n - 1$ :

$$I(\lambda) = E\lambda^{n-1} + I_1\lambda^{n-2} + \dots + I_{n-2}\lambda + I_{n-1}, \quad (1.4.5)$$

где  $E$  – единичная матрица  $[n \times n]$ .

Если все собственные числа матрицы  $A$  различны, то собственные векторы матрицы  $A$  могут быть выбраны пропорциональными любым ненулевым столбцам матрицы  $I(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ .

**ПРИМЕР 1.4.1**

Пусть объект задан структурной схемой, приведенной на рис. 1.8.

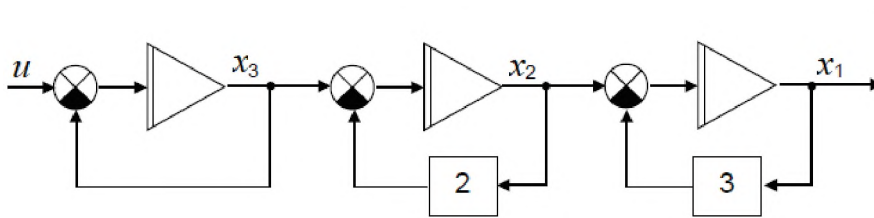


Рис. 1.8. Структурная схема к примеру 1.4.1

Ему соответствует система уравнений:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3;$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + u,$$

или в матричном виде

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для этих исходных данных получаем характеристический полином

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6.$$

Ему соответствуют собственные числа

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3.$$

Найдем присоединенную матрицу

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \begin{bmatrix} (\lambda + 2)(\lambda + 1) & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & (\lambda + 3)(\lambda + 1) & \lambda + 3 \\ 0 & 0 & (\lambda + 3)(\lambda + 2) \end{bmatrix} = \\ &= E_3\lambda^2 + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем собственные векторы матрицы A:

$$I(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad I(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad I(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и можно выбрать

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полученный результат нетрудно проверить прямой подстановкой в (1.4.1).

Имеется ряд алгоритмов для определения коэффициентов характеристического полинома и присоединенной матрицы. Один из наиболее употребимых – это **алгоритм Фаддеева – Леверье**. Он состоит в следующей последовательности вычислений:

$$\begin{aligned} A_1 &= A; & \alpha_1 &= -SpA_1; & I_1 &= A_1 + \alpha_1 E; \\ A_2 &= AI_1; & \alpha_2 &= -\frac{1}{2}SpA_2; & I_2 &= A_2 + \alpha_2 E; \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= AI_{n-2}; & \alpha_{n-1} &= -\frac{1}{n-1}SpA_{n-1}; & I_{n-1} &= A_{n-1} + \alpha_{n-1} E; \\ A_n &= A_{n-1}; & \alpha_n &= -\frac{1}{n}SpA_n; & I_n &= A_n + \alpha_n E = 0. \end{aligned}$$

Здесь через  $SpA$  обозначен след матрицы  $A$ , то есть сумма ее диагональных элементов

$$SpA = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Последнее равенство процедуры используется для контроля точности вычислений. Для объекта, приведенного в примере 1.4.1:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Если матрица  $A$  не вырождена, то из промежуточных результатов алгоритма Фаддеева – Леверье, учитывая, что

$$A_n = -\alpha_n E,$$

получаем:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n} I_{n-1}. \tag{1.4.6}$$

Для рассматриваемого примера

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

В вырожденном случае  $\alpha_n = 0$ . Иллюстрацией этого может служить объект, структурная схема которого приведена на рис. 1.9.

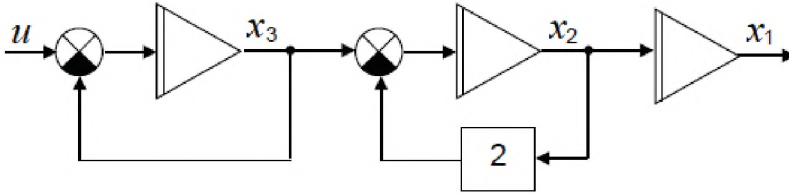


Рис. 1.9. Структурная схема. Вариант с  $\alpha_n = 0$

### 1.4.2. Собственные значения и собственные векторы транспонированной матрицы

Собственные значения транспонированной матрицы – это такие  $\lambda$ , для которых система уравнений

$$A^T \vec{d} = \lambda \vec{d} \quad (1.4.7)$$

имеет нетривиальные решения, т. е. когда

$$|\lambda E - A^T| = 0. \quad (1.4.8)$$

Решение этого алгебраического уравнения дает  $n$  значений собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Так как определители квадратной матрицы и ее транспонированной матрицы равны, то собственные числа матриц  $A$  и  $A^T$  также равны.

Таким образом, собственному числу  $\lambda_i$  соответствует собственный вектор  $\vec{v}_i$  матрицы  $A$  и собственный вектор  $\vec{d}_i$  матрицы  $A^T$ .

Если транспонировать обе части уравнения (1.4.7), то получим:

$$\vec{d}^T A = \lambda \vec{d}^T. \quad (1.4.9)$$

В связи с этим вектор  $\vec{d}$  называют левым собственным вектором матрицы  $A$ , в отличие от  $\vec{v}$ , который в таком случае называют правым собственным вектором. Для  $i$ -го собственного числа и  $i$ -го левого собственного вектора соответственно

$$\vec{d}_i^T A = \lambda_i \vec{d}_i^T.$$

Умножим обе части этого равенства справа на вектор  $\vec{v}_j$ :

$$\vec{d}_i^T A \vec{v}_j = \lambda_i \vec{d}_i^T \vec{v}_j. \quad (1.4.10)$$

Учитывая свойства собственных векторов, в результате получаем уравнение

$$\vec{d}_i^T \lambda_j \vec{v}_j = \lambda_i \vec{d}_i^T \vec{v}_j,$$

которое преобразуется к виду

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_j (\lambda_j - \lambda_i) = 0. \quad (1.4.11)$$

Полагаем, что все собственные числа матрицы  $A$  различны. Тогда для  $i \neq j$  имеем  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , и из равенства (1.4.11) следует, что векторы  $\vec{d}_i^T$  и  $\vec{v}_j$  взаимно ортогональны:

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_j = 0, i \neq j. \quad (1.4.12)$$

Это означает то, что  $\vec{d}_i^T$  ортогонален  $(n-1)$ -мерной гиперплоскости с базисом, образованным векторами  $\vec{v}_j$  для всех  $j \neq i$ .

В качестве примера на рис. 1.10 показан один из вариантов взаимного расположения правых и левых собственных векторов некоторой матрицы  $A$  для случая  $n = 3$ . Здесь хорошо видно, что каждый из векторов  $\vec{d}_i^T$  ортогонален всем векторам  $\vec{v}_j$  при  $j \neq i$ .

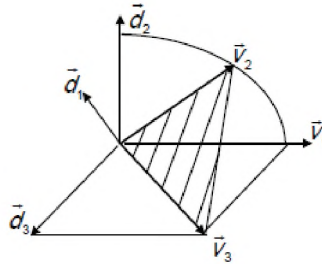


Рис. 1.10. Пример взаимного расположения правых и левых собственных векторов

Теперь рассмотрим случай, когда  $i = j$ . При этом скалярные произведения векторов  $\vec{d}_i^T$  и  $\vec{v}_i$  не должны быть равны нулю. Если предположить, что  $\vec{d}_i^T \vec{v}_i = 0$ , то придется утверждать, что вектор  $\vec{d}_i^T$  ортогонален всему  $n$ -мерному пространству с базисом  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ . Но

этого не может быть, так как вектор  $\vec{d}_i$  сам принадлежит этому пространству. Таким образом,

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_i \neq 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4.13)$$

В связи с тем что собственные векторы можно выбирать с точностью до постоянного (в том числе комплексного) множителя, то наборы, иначе говоря базисы  $\{\vec{v}\}$  и  $\{\vec{d}\}$ , формируют так, чтобы для  $i = 1, 2, \dots, n$  выполнялось условие:

$$\vec{d}_i^T \vec{v}_i = 1 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4.14)$$

Отметим еще одно важное свойство собственных векторов.

*Если матрица  $A$  не имеет кратных собственных чисел, то все ее собственные векторы линейно независимы, то есть образуют базис в пространстве  $R^n$ .*

Это нетрудно доказать. Действительно, предположим сначала, что среди собственных векторов матрицы  $A$  первые два являются линейно зависимыми, то есть

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_i \vec{v}_i = 0, \quad (1.4.15)$$

где ни один из коэффициентов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не равен нулю. Умножив это уравнение слева на  $A$ , получим:

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_i \lambda_i \vec{v}_i = 0. \quad (1.4.16)$$

Теперь умножим (1.4.15) на  $\lambda_2$ :

$$\sum_{i=1}^2 \gamma_i \lambda_2 \vec{v}_i = 0. \quad (1.4.17)$$

Вычтем (1.4.17) из (1.4.16) и в результате получим:

$$\gamma_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_1 = 0.$$

Из того, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $\gamma_1 \neq 0$ , следует  $\vec{v}_1 = 0$ , что невозможно, следовательно, первые два собственных вектора не могут быть линейно зависимыми.

Теперь предположим, что число линейно зависимых векторов равно  $r > 2$ , то есть

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \vec{v}_i = 0, \quad \gamma_i \neq 0; \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1.4.18)$$

Умножив уравнение (1.4.18) слева на  $A$ , получим:

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \lambda_i \vec{v}_i = 0. \quad (1.4.19)$$

Умножим то же самое уравнение (1.4.18) на  $\lambda_r$ :

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \lambda_r \vec{v}_i = 0. \quad (1.4.20)$$

Вычтем (1.4.20) из (1.4.19) и в результате будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i (\lambda_i - \lambda_r) \vec{v}_i = 0.$$

Получается, что число линейно зависимых векторов  $r - 1 < r$ . Получили противоречие.

Таким образом, действительно, все собственные векторы матрицы  $A$  являются линейно независимыми, поэтому матрица  $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ , построенная из векторов базиса  $\{\vec{v}\}$ , т. е. из правых собственных векторов матрицы  $A$ , является невырожденной. Эта матрица называется модальной матрицей. Из перечисленных выше свойств для правых и левых собственных векторов следует равенство:

$$D^T V = E \quad \text{или} \quad D^T = V^{-1}, \quad (1.4.21)$$

где  $D^T$  – матрица, строки которой являются транспонированными векторами двойственного базиса  $\{\vec{d}\}$ , т. е. левыми собственными векторами матрицы  $A$ :

$$D^T = \begin{bmatrix} \vec{d}_1^T \\ \vec{d}_2^T \\ \dots \\ \vec{d}_n^T \end{bmatrix}. \quad (1.4.22)$$

### 1.4.3. Определение функции от матрицы через ее левые и правые собственные векторы

Все  $n$  систем уравнений

$$A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$$

могут быть записаны с использованием блочных матриц:

$$[A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n] = [\lambda_1\vec{v}_1 \ \lambda_2\vec{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\vec{v}_n].$$

Учтем, что

$$[A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n] = AV$$

и

$$\begin{aligned} & [\lambda_1\vec{v}_1 \ \lambda_2\vec{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\vec{v}_n] = \\ & = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = V\Lambda, \end{aligned}$$

где  $\Lambda$ — диагональная матрица собственных чисел.

Таким образом, получено равенство

$$AV = V\Lambda,$$

или

$$A = V\Lambda D^T. \quad (1.4.23)$$

Преобразование  $A = TCT^{-1}$ , где  $T$  – произвольная невырожденная матрица, называется **преобразованием подобия**. Одно из основных свойств этого преобразования заключается в том, что собственные числа подобных матриц (здесь –  $A$  и  $C$ ) совпадают. Действительно,

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda TT^{-1} - TCT^{-1}| = |T||\lambda E - C||T^{-1}| = \varphi_C(\lambda).$$

Таким образом, матрица  $A$  приводится к диагональному виду преобразованием

$$\Lambda = V^{-1}AV = D^T AV. \tag{1.4.24}$$

Более высокие степени  $A$  приводятся к диагональному виду таким же способом:

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= V^{-1}AVV^{-1}AV = V^{-1}A^2V \\ &\dots\dots\dots \\ \Lambda^l &= V^{-1}A^lV \text{ или } A^l = V\Lambda^lV^{-1}. \end{aligned}$$

Если рассмотреть матричный многочлен

$$N(A) = A^l + C_1A^{l-1} + \dots + C_{l-1}A + C_lE,$$

то

$$N(A) = V \{ \Lambda^l + C_1\Lambda^{l-1} + \dots + C_{l-1}\Lambda + C_lE \} V^{-1},$$

или

$$N(A) = V \begin{bmatrix} N(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N(\lambda_l) \end{bmatrix} V^{-1}. \tag{1.4.25}$$

Если применить этот результат к характеристическому полиному, то получим:

$$\varphi(A) = 0, \tag{1.4.26}$$

то есть каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому полиному. Это утверждение известно в теории матриц как **теорема Кэли – Гамильтона**.

Для любой функции от матрицы  $f(A)$ , которую можно представить в виде конечного или бесконечного степенного полинома, справедливо аналогичное выражение

$$f(A) = V \cdot \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot D^T \quad (1.4.27)$$

или эквивалентное ему

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \vec{v}_i \vec{d}_i^T. \quad (1.4.28)$$

Отсюда вытекает, например, один из способов определения матричной экспоненты или соответствующей переходной матрицы:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \vec{v}_i \vec{d}_i^T. \quad (1.4.29)$$

#### ПРИМЕР 1.4.2

Для объекта, представленного на рис. 1.8 в примере 1.4.1, найдем левые собственные векторы. Если обозначить присоединенную матрицу к матрице  $A$  как  $I\{A\}$ , то очевидно равенство

$$I\{A^T\} = I^T\{A\}.$$

Поэтому

$$I^d(\lambda) = I\{A^T\} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda + 2 & 0 & 0 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 4\lambda + 3 & 0 \\ 1 & \lambda + 3 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3,$$

имеем

$$I^d(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad I^d(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$I^d(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассчитаем левые собственные векторы. Учтем при этом (1.4.14). Таким образом, для первого собственного вектора  $\vec{d}_1$  должны выполняться условия:

$$\vec{d}_1^T = v_1 [0 \ 0 \ 1], \quad \vec{d}_1^T v_1 [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v_1,$$

откуда

$$v_1 = 0,5 \text{ и } \vec{d}_1^T = [0 \ 0 \ 0,5].$$

Аналогично получим:

$$\vec{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \vec{d}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно записать выражение для переходной матрицы. Из (1.4.29) имеем:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

и окончательно

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} & 0,5e^{-t} - e^{-2t} + 0,5e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим еще несколько примеров. Для

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3;$$

имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + j\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= j \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} & 0,5 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Проведем проверку:

$$\begin{aligned} j^2 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} & 0,5 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{3} & 0,5 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для той же матрицы найдем  $A^5$ :

$$\lambda_1^5 = -1, \quad \lambda_2^5 = -32, \quad \lambda_3^5 = -243$$

и

$$\begin{aligned} A^5 &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 32 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 243 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -243 & 211 & -90 \\ 0 & -32 & 31 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## § 1.5. Свойства движений линейных систем

Движение линейной системы описывают матричная весовая и переходная функции.

### 1.5.1. Матричная весовая и переходная функции

Пусть заданы уравнения некоторого динамического объекта:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x} + B(t)\vec{u}(t); \quad (1.5.1)$$

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t). \quad (1.5.2)$$

В соответствии с формулой Коши выражение для вектора выхода

$$\vec{y}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \xi)B(\xi)\vec{u}(\xi)d\xi. \quad (1.5.3)$$

Анализируя качество работы объекта, удобно рассматривать движение  $\vec{y}(t)$  как сумму свободной составляющей, обусловленной в основном свойствами самого объекта, и вынужденной составляющей, несущей отпечаток входного сигнала – вектора управления. Строго говоря, это разделение условно, но очевидно, что свободную составляющую целесообразно отождествить с первым слагаемым правой части равенства (1.5.3). Отсюда следует, что основные свойства объекта определяются его переходной матрицей  $\Phi(t, t_0)$ , в то время как степень их проявления зависит от вектора начальных условий.

Отметим, однако, что первопричиной всякого движения объекта является вектор управления. Это означает, что даже при анализе собственных движений объекта следует учитывать и матрицу управления  $B(t)$ .

Обозначим

$$w_y(t, \tau) = C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau). \quad (1.5.4)$$

Очевидно, что для  $i$ -й координаты вектора выхода при нулевых начальных условиях справедливо выражение

$$y_i(t) = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^{n_u} w_{ij}(t, \xi) u_j(\xi) d\xi.$$

Если положить

$$u_k(\xi) = \delta(\xi - \tau)$$

и  $u_j(\xi) = 0$  при  $j \neq k$ , то в соответствии со свойствами  $\delta$ -функции получим:

$$y_i(t) = w_{ik}(t, \tau).$$

Таким образом, элемент, стоящий в  $i$ -й строке и в  $k$ -м столбце матрицы  $w_y(t, \tau)$ , можно интерпретировать как реакцию  $i$ -й координаты вектора  $\vec{y}(t)$  на дельта-функцию  $\delta(t - \tau)$  в  $k$ -й координате вектора управления  $\vec{u}(t)$ .

Матрица  $w_y(t, \tau)$  называется **матричной весовой, или матричной импульсной, функцией** объекта по вектору выхода. Аналогичным образом определяется матричная весовая функция объекта по вектору состояния:

$$w_x(t, \tau) = \Phi(t, \tau) B(\tau). \quad (1.5.5)$$

Интеграл от матричной весовой функции

$$H(t, t_0) = \int_{t_0}^t w(t, \tau) d\tau \quad (1.5.6)$$

называют матричной переходной функцией объекта. Элементы этой матрицы могут рассматриваться как реакции координат вектора выхода (вектора состояния) на единичные функции по соответствующим координатам вектора управления. Если на вход объекта поступает постоянный во времени вектор управления  $\vec{u}_0 \cdot 1(t - t_0)$ , то при нулевых начальных условиях

$$\vec{y}(t) = H(t, t_0) \vec{u}_0. \quad (1.5.7)$$

В качестве примера на рис. 1.12 изображены элементы матричной переходной функции по вектору состояния для системы, представленной на рис. 1.11.

В стационарном случае рассмотренные матрицы являются функцией одного аргумента:

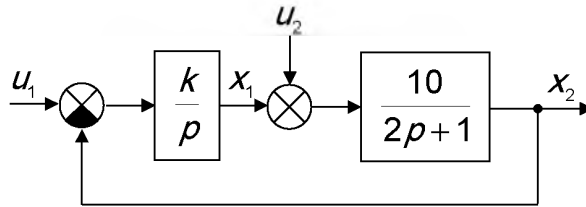


Рис. 2.11. К примеру на определение матричной весовой функции  
 Рис. 1.11. К примеру на определение матричной весовой функции

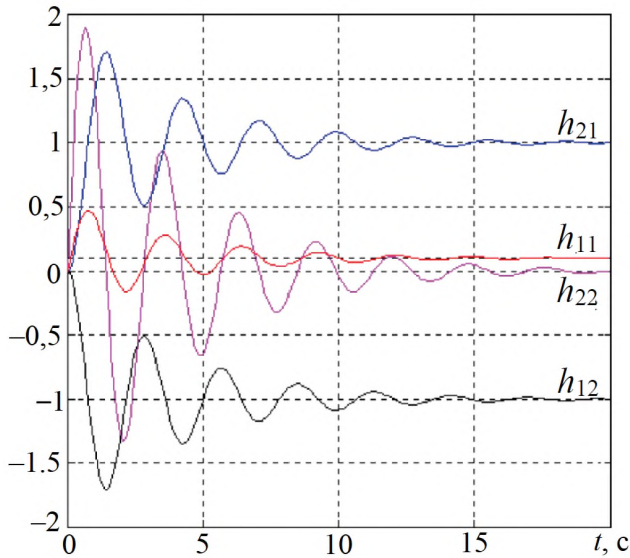


Рис. 1.12. Элементы матричной переходной функции для системы, представленной на рис. 1.11

$$w_y(t, t_0) = w_y(t - t_0) = w_y(\tau) = Ce^{A\tau} B = C\Phi(\tau) B \quad (1.5.8)$$

и

$$H_y(t) = \int_0^t CF(t-t) B dt. \quad (1.5.9)$$

Это выражение для переходной функции можно упростить. Производя замену аргумента

$$\sigma = t - t\tau,$$

получим:

$$H_y(t) = - \int_{\sigma=t}^0 C\Phi(\sigma) B d\sigma,$$

и окончательно

$$H_y(t) = \int_0^t C\Phi(\tau) B d\tau. \quad (1.5.10)$$

Используя представление переходной матрицы через матричную экспоненту, можно получить:

$$H_y(t) = C \left\{ Et + A \frac{t^2}{2} + A^2 \frac{t^3}{3!} + A^3 \frac{t^4}{4!} + \dots \right\} B. \quad (1.5.11)$$

Один из наиболее употребимых способов вычисления  $\Phi(t)$  и  $H(t)$  состоит в определении (расчете) соответствующих окаймленных матричных рядов.

### ПРИМЕР 1.5.1

Объект управления соответствует схеме в переменных состояния, приведенной на рис. 1.13.

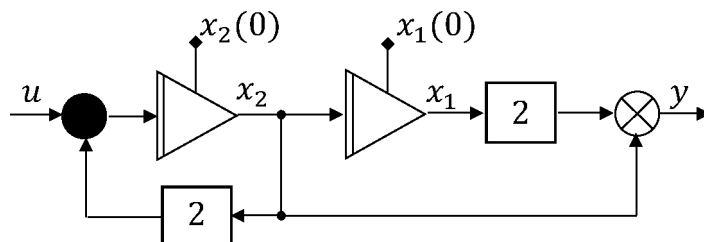


Рис. 1.13. Структурная схема к примеру 2.5.1

Этой схеме соответствуют уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u, \\ y = 2x_1 + x_2 t. \end{cases}$$

Требуется найти переходную матрицу, матричные весовую и переходную функции, реакцию объекта на постоянный входной сигнал.

Прежде всего найдем переходную матрицу. Элемент первой строки и первого столбца этой матрицы можно определить как реакцию координаты  $x_1$  на начальные условия  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$  при  $u = 0$ . Решение первого дифференциального уравнения дает

$$\varphi_{11}(t) = x_1(t) = 1.$$

Аналогично  $\varphi_{22}(t) = x_2(t)$  при  $x_2(0) = 1$ ,  $x_1(0) = u = 0$ . Решая при этих условиях второе дифференциальное уравнение, получим:

$$\varphi_{22}(t) = e^{-2t}.$$

Очевидно,  $\varphi_{21}(t) = 0$ , так как координата  $x_2$  не зависит от  $x_1$ . Для того чтобы определить  $\varphi_{12}(t)$ , следует взять интеграл

$$\varphi_{12}(t) = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = 0,5(1 - e^{-2t}).$$

Таким образом,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0,5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с уравнениями объекта

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [2 \quad 1],$$

поэтому

$$w_y(t) = C\Phi(t)B = 1$$

и

$$H_y(t) = \int_0^t C\Phi(\tau)Bd\tau = t.$$

При нулевых начальных условиях и  $u = u_0 = \text{const}$

$$y(t) = u_0 \cdot t.$$

Если начальные условия ненулевые, то

$$y(t) = C\Phi(t)\vec{x}(0) + u_0(t) = 2x_1(0) + x_2(0) + u_0 \cdot t.$$

При этом

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \Phi(t)\vec{x}(0) + H_x(t)u_0 = \Phi(t)\vec{x}(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bd\tau \cdot u_0 = \\ &= \begin{bmatrix} x_1(0) + 0,5(1 - e^{-2t})x_2(0) \\ e^{-2t}x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5t + 0,25(e^{-2t} - 1) \\ 0,5(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix} u_0. \end{aligned}$$

Видно, что в выходной координате участвуют не все составляющие движения, присутствующие в векторе состояния. Еще более характерная ситуация возникнет, если изменить исходные данные. Если положить

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + u, \\ y = -2x_1 + x_2, \end{cases}$$

то поведение выходной координаты принципиально не изменится:

$$y(t) = -2x_1(0) + x_2(0) + u_0 \cdot t,$$

но процесс по координатам состояния будет неограниченно расти:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(0) - 0,5(1 - e^{2t})x_2(0) + 0,25(e^{2t} - 1) - 0,5tu_0 \\ e^{2t}x_2(0) + 0,5(e^{2t} - 1)u_0 \end{bmatrix}.$$

Такие случаи, когда вектор выхода не отражает характерные свойства объекта, способны привести к катастрофическим результатам и будут подробно обсуждаться в последующих разделах.

### 1.5.2. Модальная (спектральная) интерпретация решения векторно-матричных дифференциальных линейных стационарных уравнений

Рассмотрим сначала движение автономной системы

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (1.5.12)$$

Пусть все собственные числа матрицы  $A$  различны. Тогда ее собственные векторы  $\vec{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$  образуют базис в пространстве  $R^n$ , то есть являются линейно независимыми. В соответствии с (1.3.5) и (1.4.29) решение уравнения (1.5.12) можно записать в виде:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \vec{v}_i \vec{d}_i^T \vec{x}(0).$$

Обозначим скаляр

$$\mu_i = \vec{d}_i^T \vec{x}(0), \quad (1.5.13)$$

тогда

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i t} \vec{v}_i. \quad (1.5.14)$$

Очевидно, что свободное движение вектора состояния объекта является линейной комбинацией движений по собственным векторам матрицы  $A$ . Такие движения называют модами системы, а матрицу собственных векторов  $V$  – модальной матрицей. Коэффициент  $\mu_i$  соответствует величине возбуждения  $i$ -й моды системы, обусловленной начальными условиями. Иначе говоря, каждая мода возбуждается соответствующим выбором начального состояния. Согласно (1.5.13),

$$\mu_i = \begin{bmatrix} d_{i1} & d_{i2} & \dots & d_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = d_{i1}x_1(0) + d_{i2}x_2(0) + \dots + d_{in}x_n(0).$$

Если вектор начальных условий  $\vec{x}(0)$  совпадает по направлению с  $i$ -м собственным вектором, то есть

$$\vec{x}(0) = \alpha \cdot \vec{v}_i,$$

то, учитывая, что согласно (1.4.13) и (1.4.14)  $\vec{d}_i^T \vec{v}_j = 0$  при  $i \neq j$  и  $\vec{d}_i^T \vec{v}_i = 1$ , получаем:

$$\mu_i = \vec{d}_i^T \vec{x}(0) = \alpha_i \text{ и } \mu_j = \vec{d}_j^T \vec{x}(0) = 0 \text{ при } j \neq i.$$

Таким образом, при указанном выборе начальных условий возбуждается только  $i$ -я мода, или «частота».

Рассмотрим с этих же позиций движение неавтономного объекта

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t).$$

Изложенный подход можно использовать и в этом случае, если вектор  $B\vec{u}(t)$  разложить по собственным векторам матрицы  $A$ :

$$B\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \cdot \vec{v}_i. \quad (1.5.15)$$

Для того чтобы определить скалярные функции  $\beta_i(t)$ , умножим обе части этого равенства слева на  $\vec{d}_j^T$ :

$$\vec{d}_j^T B\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \vec{d}_j^T \vec{v}_i,$$

откуда, учитывая (1.4.13) и (1.4.14), получаем:

$$\beta_i(t) = \vec{d}_i^T B\vec{u}(t). \quad (1.5.16)$$

Таким образом, в соответствии с формулой Коши (1.3.20) и выражением для переходной матрицы (1.4.29) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= e^{At} \vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i(\tau) \vec{v}_i d\tau = \\ &= e^{At} \vec{x}(0) + \int_0^t \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j(t-\tau)} \sum_{i=1}^n \beta_i(\tau) \vec{v}_j \vec{d}_j^T \vec{v}_i d\tau = \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \mu_j e^{\lambda_j t} + \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} \vec{d}_j^T B\vec{u}(\tau) d\tau \right\} \cdot \vec{v}_j. \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Если вынуждающая функция  $\vec{y}(t)$  выбирается таким образом, чтобы вектор  $B\vec{y}(t)$  совпадал с направлением одного из собственных векторов матрицы  $A$ , то она будет возбуждать только одну соответствующую моду – «частоту».

## § 1.6. Модели стационарных линейных систем в комплексной плоскости на основе преобразования Лапласа

Линейную систему можно описать с помощью передаточной функции или матрицы передаточных функций.

### 1.6.1. Матрица передаточных функций

Известно, что преобразование Лапласа определяется парой преобразований:

$$\begin{aligned}\vec{X}(p) &= L\{\vec{x}(t)\} = \int_0^{\infty} \vec{x}(t) e^{-pt} dt, \\ \vec{x}(t) &= L^{-1}\{\vec{X}(p)\} = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \vec{X}(p) e^{pt} dp.\end{aligned}\tag{1.6.1}$$

Первое из них называется **прямым преобразованием Лапласа**, а второе – обратным. Векторная функция  $\vec{x}(t)$  называется оригиналом, а  $\vec{X}(p)$  – изображением этого оригинала по Лапласу;  $p$  – комплексная переменная преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа можно осуществить, если  $p = \sigma + j\omega$  и  $\sigma > \sigma_C$ , где  $\sigma_C$  – абсцисса абсолютной сходимости. Величина  $\sigma_C$  выбирается исходя из требования, чтобы функция  $\vec{x}(t)e^{-\sigma t}$  при  $\sigma > \sigma_C$  была абсолютно интегрируемой.

При вычислении обратного преобразования Лапласа интегрирование ведется на плоскости комплексной переменной  $p$  по прямой, параллельной мнимой оси, лежащей на прямой  $C$ , причем  $C$  выбирается так, чтобы все полюсы  $\vec{X}(p)$  оказались слева от прямой интегрирования (рис. 1.14). На этом рисунке показано расположение полюсов некоторой функции  $\vec{X}(p)$ .

Пусть, как обычно, уравнения объекта имеют вид:

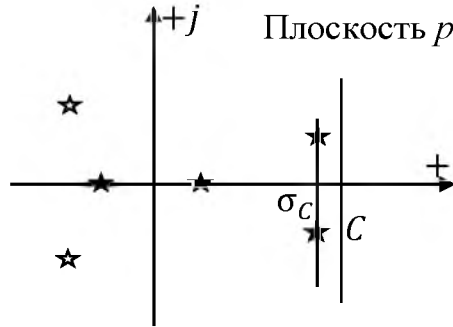


Рис. 1.14. К вычислению обратного преобразования Лапласа

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B(t)\vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t).\end{aligned}$$

Перейдем к изображениям по Лапласу:

$$\begin{aligned}p\vec{X}(p) - \vec{x}(0) &= A\vec{X}(p) + B\vec{U}(p); \\ Y(p) &= C\vec{X}(p).\end{aligned}$$

Перенесем  $A\vec{X}(p)$  в левую часть равенства, а  $\vec{x}(0)$  – в правую:

$$(pE - A)\vec{X}(p) = \vec{x}(0) + B\vec{U}(p).$$

Отсюда получаем выражение для изображения вектора состояния:

$$\vec{X}(p) = (pE - A)^{-1} \vec{x}(0) + (pE - A)^{-1} B\vec{U}(p).$$

Сравнивая это равенство с формулой Коши

$$\vec{x}(t) = e^{At} \cdot \vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B\vec{u}(\tau) d\tau,$$

отмечаем, что резольвента матрицы  $A$  равна  $(pE - A)^{-1}$  и может рассматриваться как изображение по Лапласу от переходной матрицы (матричной экспоненты):

$$(pE - A)^{-1} = L \{e^{At}\}.$$

Справедливо равенство

$$(pE - A)^{-1} = \frac{I(p)}{\Phi_A(p)}, \quad (1.6.2)$$

где  $I(p)$  – присоединенная матрица для матрицы  $A$ ;  $\Phi_A(p)$  – характеристический полином матрицы  $A$ .  $I(p)$  и  $\Phi_A(p)$  могут быть определены по методу Фаддеева – Леверье. При нулевых начальных условиях

$$\vec{X}(p) = (pE - A)^{-1} B \vec{U}(p), \quad (1.6.3)$$

где функция

$$W_{ux}(p) = (pE - A)^{-1} \cdot B \quad (1.6.4)$$

называется **матричной передаточной функцией от вектора управления до вектора состояния**, или передаточной функцией по каналу  $u-x$ .

Аналогично при нулевых начальных условиях

$$\vec{Y}(p) = C(pE - A)^{-1} B \vec{U}(p), \quad (1.6.5)$$

где функция

$$W_{uy}(p) = C(pE - A)^{-1} \cdot B \quad (1.6.6)$$

называется **матричной передаточной функцией от вектора управления до вектора выхода**, или передаточной функцией по каналу  $u-y$ . Функцию  $(pE - A)^{-1}$  называют **резольвентой матрицы  $A$** . С использованием передаточной функции можно записать:

$$\begin{aligned} \vec{X}(p) &= W_{ux}(p) \cdot \vec{U}(p); \\ \vec{Y}(p) &= W_{uy}(p) \cdot \vec{U}(p). \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Принимая во внимание, что изображение по Лапласу  $\delta$ -функции равно единице, можно представить передаточную функцию как изображение от весовой функции

$$w_y(t) = Ce^{At}B; L\{w_y(t)\} = CL\{e^{At}\}B = C(pE - A)^{-1}B = W_{uy}(p). \quad (1.6.8)$$

Передаточная функция является функцией от матрицы  $A$ , поэтому в соответствии с (1.4.28) можно записать:

$$W_{uy}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{C \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{d}_i^T B}{(p - \lambda_i)} \quad (1.6.9)$$

и

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{C \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{d}_i^T B}{(p - \lambda_i)} \cdot \vec{U}(p). \quad (1.6.10)$$

Графическое изображение последней формулы представлено в виде структурной схемы (рис. 1.15).

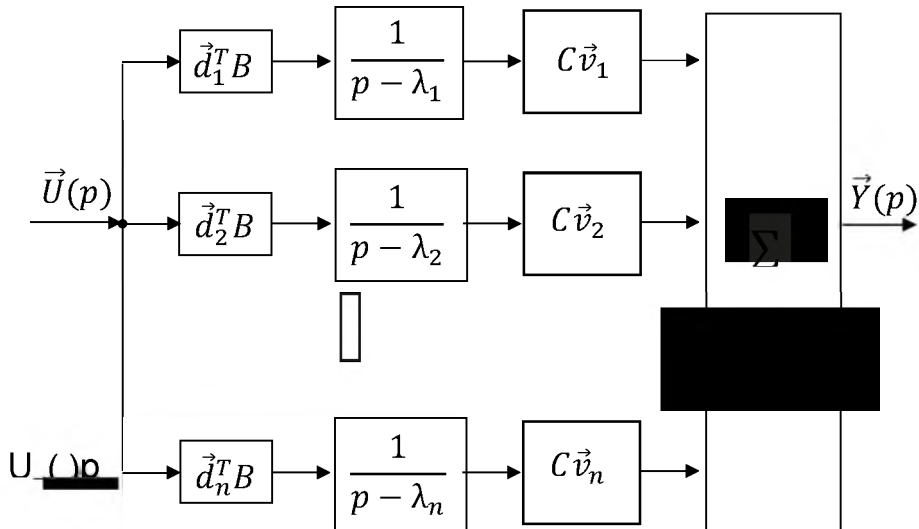


Рис. 1.15. Структурная схема системы на базе представления передаточной функции через собственные числа и собственные векторы матрицы динамики

**ПРИМЕР 1.6.1**

Для объекта, схема в переменных состояния которого приведена на рис. 1.16, уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - u_1; & y_1 &= x_1; \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_1; & y_2 &= x_3. \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u_2; \end{aligned}$$

Им соответствуют матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином имеет вид:

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda.$$

Собственные числа:

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1.$$

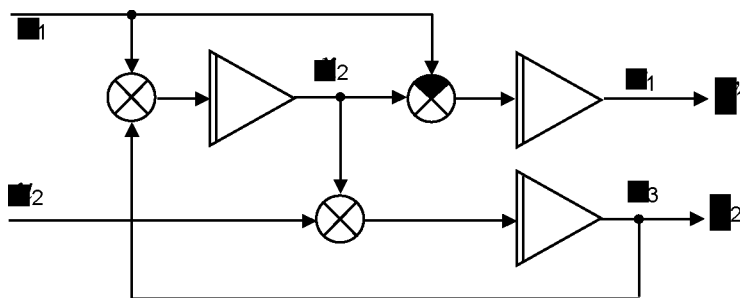


Рис. 1.16. Структурная схема к примеру 1.6.1

Присоединенная матрица:

$$I(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Резольвента:

$$(\lambda E - A)^{-1} = \frac{I(\lambda)}{\varphi_A(\lambda)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2 - 1} & \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} & \frac{1}{\lambda^2 - 1} \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2 - 1} & \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (1.6.4) передаточная функция по вектору состояния:

$$W_{ux}(p) = (pE - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{-p^2 + p + 1}{p(p^2 - 1)} & \frac{1}{p(p^2 - 1)} \\ \frac{p}{p^2 - 1} & \frac{1}{p^2 - 1} \\ \frac{1}{p^2 - 1} & \frac{p}{p^2 - 1} \end{bmatrix}$$

и по вектору выхода:

$$W_{uy}(p) = C(pE - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{-p^2 + p + 1}{p(p^2 - 1)} & \frac{1}{p(p^2 - 1)} \\ \frac{1}{p^2 - 1} & \frac{p}{p^2 - 1} \end{bmatrix}.$$

Используя присоединенную матрицу, можно найти матрицу правых собственных векторов:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Присоединенная матрица для  $A^T$ :

$$I^d(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Левые собственные векторы:

$$\vec{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \vec{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad \vec{d}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Базовые матрицы:

$$\vec{v}_1 \vec{d}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \vec{v}_2 \vec{d}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix};$$

$$\vec{v}_3 \vec{d}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты суммы (1.6.9):

$$C \vec{v}_1 \vec{d}_1^T B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C \vec{v}_2 \vec{d}_2^T B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix};$$

$$C \vec{v}_3 \vec{d}_3^T B = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

и получим результат, совпадающий, естественно, с уже имеющимся:

$$W_{uy}(p) = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Практически без дополнительных выкладок получаем:

$$w_y(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^t + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}.$$

Интегрируя весовую функцию, получаем матричную переходную функцию

$$H_y(t) = \begin{bmatrix} -t + \frac{1}{2} (e^t - 2 + e^{-t}) & -t + \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \\ \frac{1}{2} (e^t - 2 + e^{-t}) & \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \end{bmatrix}.$$

### 1.6.2. Основные свойства передаточных функций

Понятие передаточной функции лежит в основе классической теории автоматического регулирования. В связи с этим ниже перечисляются основные ее свойства, используемые при анализе систем автоматического управления.

1. Элемент  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матричной передаточной функции равен отношению изображения  $i$ -й координаты вектора выхода к  $j$ -й координате вектора управления при нулевых начальных условиях:

$$W_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{U_j(p)}. \quad (1.6.11)$$

Таким образом, при  $U_k(p) = 0$ ,  $k \neq j$ :

$$Y_i(p) = \sum_{j=1}^{nu} W_{ij}(p)U_j(p). \quad (1.6.12)$$

2. Для стационарных объектов с сосредоточенными параметрами элементы матричной передаточной функции – это дробно-рациональные функции комплексной переменной  $p$ :

$$W_{ij}(p) = \frac{R_{ij}(p)}{Q_{ij}(p)} = \frac{b_0^{ij}p^m + b_1^{ij}p^{m-1} + \dots + b_m^{ij}}{a_0^{ij}p^n + a_1^{ij}p^{n-1} + \dots + a_n^{ij}}. \quad (1.6.13)$$

3. По известной передаточной функции легко восстанавливаются соответствующие дифференциальные уравнения. По данным предыдущего примера,

$$Y_1(p) = \frac{-p^2 + p + 1}{p(p^2 - 1)}U_1(p) + \frac{1}{p(p^2 - 1)}U_2(p).$$

После приведения к общему знаменателю получаем:

$$p^3Y_1(p) - pY_1(p) = -p^2U_1(p) + pU_1(p) + U_1(p) + U_2(p),$$

и в результате имеем:

$$\ddot{y}_1(t) - \dot{y}_1(t) = -\ddot{u}_1(t) + \dot{u}_1(t) + u_1(t) + u_2(t).$$

4. Знаменатель передаточной функции – это соответствующий характеристический полином. Полосы передаточной функции – это нули соответствующего характеристического полинома.

5. Поскольку весовая функция является оригиналом для передаточной, то при всех различных полюсах

$$w_{ij}(t) = \sum_{l=1}^n C_l e^{p_l t}, \quad (1.6.14)$$

где  $p_l$  – полюсы функции:

$$C_l = \frac{R_{ij}(p_l)}{Q_{ij}(p_l)} = \frac{b_0^{ij}}{a_0^{ij}} \cdot \frac{\prod_{v=1}^m (p_l - r_v)}{\prod_{v=1, v \neq l}^m (p_l - p_v)}, \quad (1.6.15)$$

где  $b_0^{ij}, a_0^{ij}$  – коэффициенты при старших степенях  $p$  числителя и знаменателя передаточной функции  $W_{ij}(p)$ ;  $r_v$  – нули  $W_{ij}(p)$ .

6. В физически реализуемых системах порядок числителя  $m$  элементарной передаточной функции не может превышать порядка ее знаменателя  $n$ .
7. В простейших случаях элементарная передаточная функция может быть непосредственно получена из соответствующего дифференциального уравнения. Например, для динамического звена с уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T \frac{du(t)}{dt}$$

путем перехода к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях получаем:

$$T p Y(p) + Y(p) = T p U(p),$$

откуда

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{T p}{T p + 1}.$$

При описании пассивных электрических цепей передаточные функции могут вычисляться в соответствии с правилами электротехники с использованием полных символических сопротивлений. Так, например, для схемы, приведенной на рис. 1.17,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 Cp + 1}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 Cp + 1}.$$

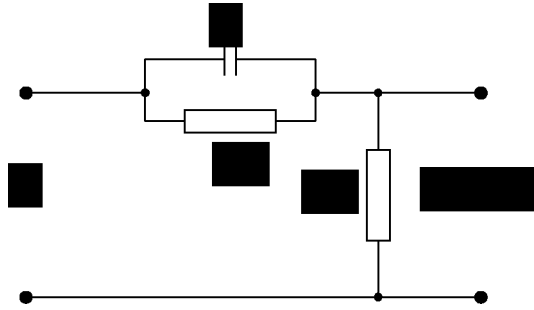


Рис. 1.17. Пассивное дифференцирующее звено

8. Если существует предел переходной функции при стремлении времени к бесконечности, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} W(p).$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p).$$

Эти формулы следуют из предельных теорем преобразования Лапласа:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \text{ и } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p).$$

## § 1.7. Комплексный передаточный коэффициент

Известно несколько подходов к введению понятия «комплексный передаточный коэффициент».

### 1.7.1. Способы определения понятия «комплексный передаточный коэффициент»

- Формальная замена комплексной переменной в передаточной функции.

Изображения по Лапласу вектора выхода и вектора управления связаны между собой с помощью передаточной функции

$$\vec{Y}(p) = W(p)\vec{U}(p). \quad (1.7.1)$$

Если в этом равенстве комплексную переменную  $p$  принять чисто мнимой величиной  $p = j\omega$ , то формально получаем следующее равенство:

$$\vec{Y}(j\omega) = W(j\omega)\vec{U}(j\omega). \quad (1.7.2)$$

Здесь комплексный передаточный коэффициент  $W(j\omega)$  определяется формально:

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega}.$$

Строго говоря, эта замена не всегда правомерна.

- Использование преобразования Фурье.

Прямое и обратное преобразования Лапласа выглядят следующим образом:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt; \quad y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\omega}^{C+j\omega} Y(p)e^{pt} dp. \quad (1.7.3)$$

Преобразование Лапласа существует тогда, когда вещественная часть комплексной переменной  $p$  удовлетворяет неравенству  $\sigma > \sigma_c$ .

Если функция  $y(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , является односторонней и абсолютно интегрируемой, т. е.  $|\int_0^{\infty} y(t)dt| < \infty$ , то ее абсцисса абсолютной

сходимости  $\sigma_C < 0$  и можно принять  $p = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ). В этом случае прямое преобразование Лапласа совпадает с прямым преобразованием Фурье:

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1.7.4)$$

Практически столь же просто обратное преобразование Лапласа превращается в обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d(j\omega) \Rightarrow \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Таким образом, если  $\vec{\dot{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ ,  $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$  и если функции  $\vec{x}(t)$ ,  $\vec{y}(t)$  и  $\vec{u}(t)$  абсолютно интегрируемы, то можно к указанным уравнениям применить не только преобразование Лапласа, но и преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} j\omega\vec{X}(j\omega) &= A\vec{X}(j\omega) + B\vec{U}(j\omega); \\ \vec{X}(j\omega) &= (j\omega E - A)^{-1} \cdot B \cdot \vec{U}(j\omega); \\ \vec{Y}(j\omega) &= W_x(j\omega) \cdot \vec{U}(j\omega); \\ W_y(j\omega) &= C \cdot (j\omega E - A)^{-1} B. \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Функция  $W_y(j\omega) = C(j\omega E - A)^{-1}B$  называется **комплексным передаточным коэффициентом**, или частотной функцией соответствующего динамического звена или системы. Аналогично передаточной функции она может быть выражена через левые и правые собственные векторы матрицы векторно-матричного дифференциального уравнения этого звена или системы:

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{C\vec{v}_i d_i^T B}{j\omega - \lambda_i}. \quad (1.7.7)$$

### 1.7.2. Реакция динамических звеньев на гармонические воздействия

Рассмотрим реакцию системы

$$\vec{x}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} \cdot u(t)$$

со скалярным управлением на гармоническое воздействие

$$u(t) = U_m \cdot \cos \omega t = \frac{U_m}{2} \cdot e^{j\omega t} + \frac{U_m}{2} e^{-j\omega t}. \quad (1.7.8)$$

Каждое из слагаемых последнего выражения вызывает свою реакцию, то есть

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t). \quad (1.7.9)$$

В силу линейности рассматриваемых систем достаточно определить реакцию на первое слагаемое

$$u_1(t) = \frac{U_m}{2} \cdot e^{j\omega t}. \quad (1.7.10)$$

Ищем  $\vec{x}_1(t)$  в виде

$$\vec{x}_1(t) = \frac{\overset{\circ}{\vec{X}}_1}{2} \cdot e^{j\omega t}, \quad (1.7.11)$$

где

$$\overset{\circ}{\vec{X}}_1 = [\overset{\circ}{X}_{11} \overset{\circ}{X}_{12} \dots \overset{\circ}{X}_{1n}]^T,$$

а  $\overset{\circ}{X}_{1i}$  – комплексные амплитуды по координатам вектора состояния:

$$\overset{\circ}{X}_{1i} = X_{1i\max} e^{j\varphi_{1i}}. \quad (1.7.12)$$

Подставим  $\vec{x}_1(t)$  и  $\vec{u}_1(t)$  в исходное дифференциальное уравнение и проведем элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\overset{\circ}{\vec{X}}_1}{2} \cdot e^{j\omega t} \right) &= A \cdot \frac{\overset{\circ}{\vec{X}}_1}{2} \cdot e^{j\omega t} + \vec{b} \cdot \frac{U_m}{2} \cdot e^{j\omega t}; \\ \overset{\circ}{\vec{X}}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} &= A \cdot \overset{\circ}{\vec{X}}_1 \cdot e^{j\omega t} + \vec{b} \cdot U_m \cdot e^{j\omega t}; \\ \overset{\circ}{\vec{X}}_1 \cdot j\omega - A \cdot \overset{\circ}{\vec{X}}_1 &= \vec{b} \cdot U_m; \\ \overset{\circ}{\vec{X}}_1 &= (j\omega E - A)^{-1} \cdot \vec{b} \cdot U_m, \end{aligned}$$

то есть

$$\overset{\circ}{\vec{X}}_1 = W(j\omega) \cdot U_m, \quad (1.7.13)$$

где матричный комплексный передаточный коэффициент

$$W(j\omega) = (j\omega E - A)^{-1} \vec{b},$$

что совпадает с (1.7.6). Аналогичным образом можно получить реакцию на вторую составляющую входного сигнала  $u_2(t) = \frac{U_m}{2} \cdot e^{-j\omega t}$ :

$$\overset{\circ}{\vec{X}}_2 = W(-j\omega) \cdot U_m. \quad (1.7.14)$$

Полная реакция системы на гармоническое воздействие (1.7.8) в соответствии с (1.7.13), (1.7.14) и (1.7.9):

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \frac{W(j\omega)U_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{W(-j\omega)U_m}{2} e^{-j\omega t} = \\ &= \begin{bmatrix} |W_1(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi_1) \\ |W_2(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \dots\dots\dots \\ |W_n(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi_n) \end{bmatrix} U_m. \end{aligned}$$

Таким образом, элемент матричной функции  $W(j\omega)$ , которая, по понятным теперь причинам, называется частотной функцией, определяется как отношение вынужденной гармонической составляющей (частное решение неоднородного дифференциального уравнения)

к гармоническому входному воздействию при условии записи их в символической форме. Комплексный передаточный коэффициент определяет изменение в зависимости от частоты амплитуды и фазы гармонического сигнала при прохождении его от вектора управления до каждой из координат вектора состояния или вектора выхода:

$$W_i(j\omega) = \frac{X_{i\max}}{U_m} \cdot e^{j\varphi_i}. \quad (1.7.15)$$

Модуль  $W(j\omega)$  определяет отношение амплитуд:

$$|W_i(j\omega)| = \frac{X_{i\max}}{U_m}, \quad (1.7.16)$$

а фаза – сдвиг по фазе между входным и выходным гармоническими сигналами:

$$\arg(W_i(j\omega)) = \varphi_i. \quad (1.7.17)$$

### 1.7.3. Частотные характеристики

Элементы матричной функции связывают между собой соответствующие координаты векторов выхода и управления:

$$W_{ik}(j\omega) = \frac{Y_i(j\omega)}{U_k(j\omega)}. \quad (1.7.18)$$

Такие скалярные функции принято иллюстрировать следующими графическими частотными характеристиками:

- амплитудно-фазовая характеристика (АФХ). Строится в полярной системе координат «модуль – фаза». Можно также рассматривать соответствующую декартовую систему координат, по осям которой откладываются вещественная и мнимая части годографа вектора  $W_{ik}(j\omega)$ ;
- логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ): амплитудно-частотная (ЛАЧХ), построенная в осях  $|W_{ik}(j\omega)|$  (в децибелах) –  $\omega$  (в логарифмическом масштабе), и фазочастотная (ЛФЧХ), построенная в осях фаза  $|W_{ik}(j\omega)|$  (в градусах или радианах) –  $\omega$  (в логарифмическом масштабе). Как правило, графики этих характеристик располагаются друг под другом.

Модуль частотной функции в децибелах определяется в соответствии с выражением:

$$|W_{ik}(j\omega)|_{\text{дб}} = 20\lg|W_{ik}(j\omega)|. \quad (1.7.19)$$

В качестве примера для звена  $W(p) = \left(\frac{4p+1}{0,08p+1}\right)^2 \cdot \frac{k}{p^3}$  приведены АФХ (рис. 1.18) и ЛЧХ (рис. 1.19).

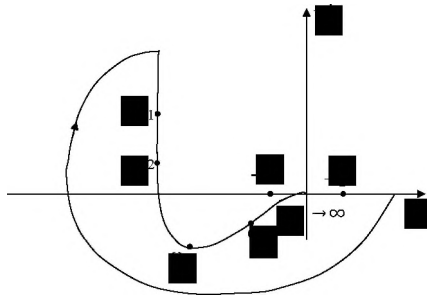


Рис. 1.18. Амплитудно-фазовая характеристика

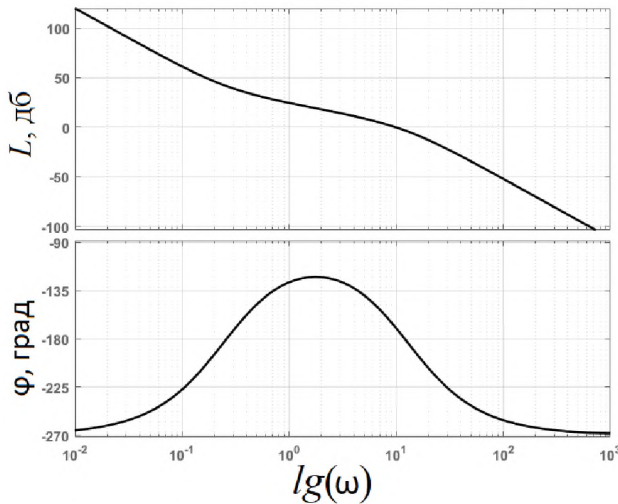


Рис. 1.19. Логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

## § 1.8. Графическое представление объектов и систем управления

Графическое изображение объектов и систем управления с использованием функциональных блоков, передаточных функций, сигналов и их изображений называют структурными схемами. Для представления систем в виде совокупности отдельных функционально определенных блоков (подсистем) используются функциональные схемы.

### 1.8.1. Соглашение об обозначениях

Элементарное динамическое звено (система) с передаточной функцией  $W(p)$  представлено на рис. 1.20, где

- $Y_{\text{вх}}(p)$  – изображение по Лапласу входного сигнала;
- $Y_{\text{вых}}(p)$  – изображение по Лапласу выходного сигнала;
- $W(p)$  – передаточная функция звена.

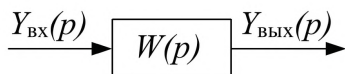


Рис. 1.20. Динамическое звено

Связь между входным и выходным сигналами выражается уравнением

$$Y_{\text{вых}}(p) = W(p)Y_{\text{вх}}(p).$$

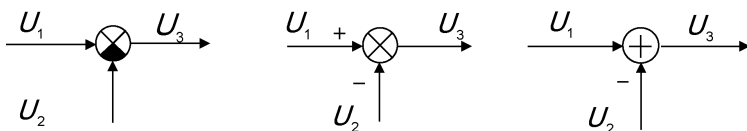


Рис. 2.21. Элементы сравнения, сумматоры

Рис. 1.21. Элементы сравнения, сумматоры

Варианты изображения элементов сравнения, или сумматоров, на структурных схемах представлены на рис. 1.21.

Все три варианта равносильны и описываются уравнением:

$$U_3 = U_1 - U_2.$$

Если на вход сумматора подается несколько входных сигналов, то он изображается в виде, представленном на рис. 1.22.

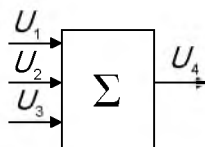


Рис. 2.22. Сумматор с тремя входными сигналами  
Рис. 1.22. Сумматор с несколькими входными и одним выходными сигналами

Варианты элементов умножения на структурных схемах представлены на рис. 1.23. Оба вида равносильны в применении и описываются уравнением  $U_2 = K \times U_1$ .

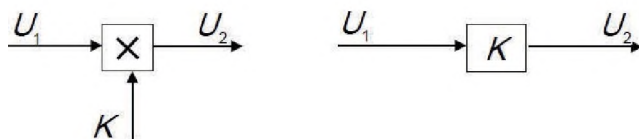


Рис. 1.23. Элементы умножения

В качестве примера функциональной схемы на рис. 1.24 представлена функциональная схема системы стабилизации крена ракеты.

На рисунке использованы обозначения:

БЦВМ – бортовая цифровая вычислительная машина;

УМ – усилитель мощности;

РМ – рулевая машина;

ЦАП – цифроаналоговый преобразователь;

АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

$\delta$  – положение управляющего органа (сопло, руль);

$\varphi$  – угол крена;  
 $\dot{\varphi}$  – угловая скорость крена.

Возмущающие факторы:

$W$  – ветер;  
 $T$  – окружающая температура;  
 $P_{\text{АТ}}$  – атмосферное давление;  
 $\vec{r}$  – вектор командных сигналов.

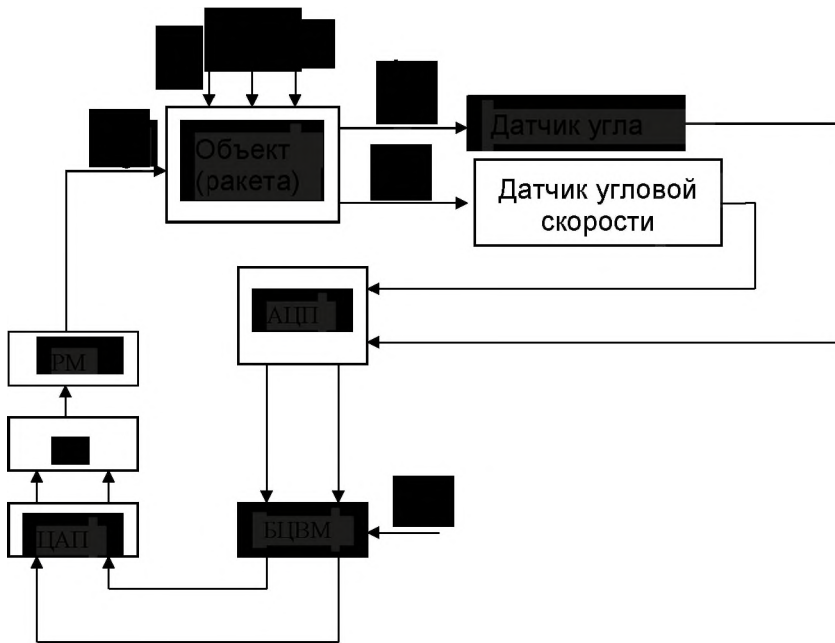


Рис. 1.24. Функциональная схема угловой стабилизации ракеты

### 1.8.2. Структурные схемы и графы стационарных систем

#### Типовые соединения многомерных линейных систем

Одной из характерных задач анализа САУ является задача преобразования и упрощения исходных структурных схем. При этом используются правила преобразования простейших, типовых соединений, к которым относят параллельное (согласно-параллельное)

(рис. 1.25), последовательное (рис 1.26) и встречно-параллельное, когда одно динамическое звено включено в обратную связь с другим (рис. 1.27). Для каждой из этих ситуаций нетрудно найти передаточную функцию эквивалентного звена.

Пусть исходные динамические звенья имеют следующее описание:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1(t) &= A_1 \vec{x}_1(t) + B_1 \vec{u}_1(t); & \vec{y}_1(t) &= C_1 \vec{x}_1(t); \\ \dot{\vec{x}}_2(t) &= A_2 \vec{x}_2(t) + B_2 \vec{u}_2(t); & \vec{y}_2(t) &= C_2 \vec{x}_2(t). \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

Рассмотрим параллельное соединение (рис. 1.25).

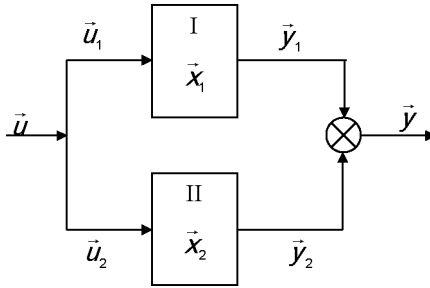


Рис. 1.25. Параллельное соединение

В случае параллельного соединения звеньев введем в рассмотрение следующие очевидные равенства из блочных векторов и матриц:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{x}}_1 \\ \dot{\vec{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot \vec{u}; \quad \vec{y} = [C_1 \quad C_2] \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.8.2)$$

В соответствии с этим можно записать выражение для эквивалентной передаточной функции соединения

$$W_{\exists}(p) = C(pE - A)^{-1}B, \quad (1.8.3)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad C = [C_1 \quad C_2]. \quad (1.8.4)$$

Учитывая, что

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \text{ и } \vec{Y}_1(p) = W_1(p)\vec{U}(p); \quad \vec{Y}_2(p) = W_2(p)\vec{U}(p),$$

получаем

$$W_{\Xi}(p) = W_1(p) + W_2(p). \quad (1.8.5)$$

С другой стороны, передаточную функцию эквивалентного звена можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{\Xi}(p) &= C \cdot (pE - A)^{-1} \cdot B = [C_1 \quad C_2] \left( pE - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \\ &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} pE_{n_1} - A_1 & 0 \\ 0 & pE_{n_2} - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $n_1, n_2$  – размерности соответствующих единичных матриц. Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} W_{\Xi}(p) &= C \begin{bmatrix} (pE_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (pE_{n_2} - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \\ &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} (pE_{n_1} - A_1)^{-1} & B_1 \\ (pE_{n_2} - A_2)^{-1} & B_2 \end{bmatrix} = \\ &= C_1(pE_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 + C_2(pE_{n_2} - A_2)^{-1}B_2. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате получаем:

$$W_{\Xi}(p) = W_1(p) + W_2(p) = \frac{C_1 I_1(p) B_1}{Q_1(p)} + \frac{C_2 I_2(p) B_2}{Q_2(p)}, \quad (1.8.6)$$

где  $I_1, I_2$  – соответствующие присоединенные матрицы для матриц  $A_1$  и  $A_2$ ;  $Q_1(p), Q_2(p)$  – характеристические полиномы первого и второго звеньев, то есть

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= \varphi_{A_1}(p) = \det(pE_{n_1} - A_1); \\ Q_2(p) &= \varphi_{A_2}(p) = \det(pE_{n_2} - A_2). \end{aligned}$$

Характеристический полином эквивалентной системы (матрицы  $A$ ) имеет вид:

$$Q(p) = Q_1(p) \cdot Q_2(p). \quad (1.8.7)$$

Отсюда следует, что нули характеристического полинома (полюсы) эквивалентной передаточной функции соединения состоят из нулей характеристических полиномов (полюсов передаточных функций) первого и второго звеньев.

Таким образом, **если каждое из параллельных звеньев устойчиво, то и все соединение в целом устойчиво**; если в соединении присутствует хотя бы одно неустойчивое звено, то соединение в целом неустойчиво (связь между характером полюсов передаточной функции и устойчивостью соответствующей системы будет обсуждаться в §1.9).

Рассмотрим последовательное соединение (рис. 1.26).

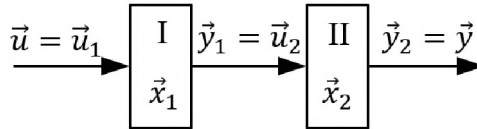


Рис. 1.26. Последовательное соединение

При последовательном соединении блочные уравнения имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.8.8)$$

и в выражении (1.8.3) для эквивалентной функции

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (1.8.9)$$

Кроме того, нетрудно получить связь между передаточными функциями отдельных звеньев, входящих в соединение, и эквивалентной передаточной функцией

$$W_{\exists}(p) = W_1(p)W_2(p). \quad (1.8.10)$$

Вывод о связи между устойчивостью отдельных звеньев и устойчивостью их последовательного соединения аналогичен выводу для случая параллельного включения.

Рассмотрим встречно-параллельное включение звеньев (рис. 1.27).

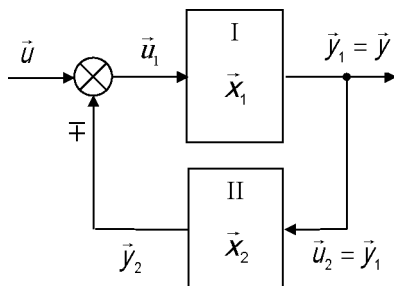


Рис. 2.27. Встречно-параллельное соединение  
Рис. 1.27. Встречно-параллельное соединение

Для встречно-параллельного соединения, учитывая, что  $\vec{u}_1 = \vec{u} \mp \vec{y}_2$ , получаем:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mp B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [C_1 \quad 0] \quad (1.8.11)$$

и

$$W_{\exists}(p) = [E \pm W_1(p)W_2(p)]^{-1} W_1(p). \quad (1.8.12)$$

Поскольку полюсы передаточной функции эквивалентного соединения в данном случае не удастся выразить непосредственно через полюсы передаточных функций отдельных звеньев, то однозначного ответа об устойчивости соединения без дополнительного анализа получить не удастся.

### Графы динамических систем

Графом называется множество вершин и ребер, в котором каждому ребру соответствуют две вершины – начало и конец ребра. Основные характеристики графов:

1. Каждой вершине на графе, изображаемой кружком или точкой, ставится в соответствие величина одной из переменных (координат системы).

2. Каждое ребро, изображаемое на графе линией со стрелкой, имеет вершину-«начало» и вершину-«конец». Стрелка обозначает направление передачи сигнала от начала к концу, таким образом, граф прохождения сигналов является направленным (антисимметричным) графом.
3. Величина, соответствующая началу (вершине) ребра, называется входной величиной ребра. Если из вершины выходит несколько ребер, то входные величины этих ребер одинаковы и равны величине соответствующей вершины.
4. Ребро изображает одно из звеньев в системе, и ему ставится в соответствие передаточная функция.
5. Если к вершине подходит несколько ребер, то сопоставляемая ей величина равна сумме выходных величин ребер.

Между графом прохождения сигналов и структурной схемой имеется взаимно однозначное соответствие. Стрелка структурной схемы соответствует вершине графа, а прямоугольник (звено) – ребру. При необходимости в граф системы могут вводиться дополнительные единичные ребра для выявления промежуточных координат, являющихся, как правило, выходами отдельных ребер.

Для примера приведены графические представления некоторой системы в виде структурной схемы (рис. 1.28) и графа (рис. 1.29).

Простейшие правила преобразования структурных схем и графов линейных систем представлены в табл. 1.1.

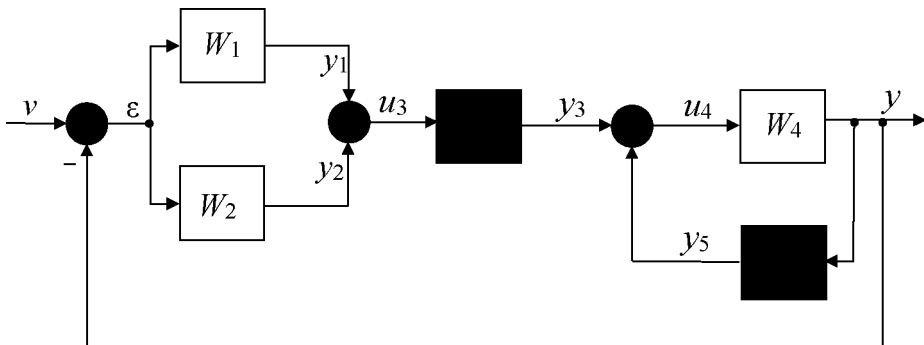


Рис. 1.28. Структурная схема системы

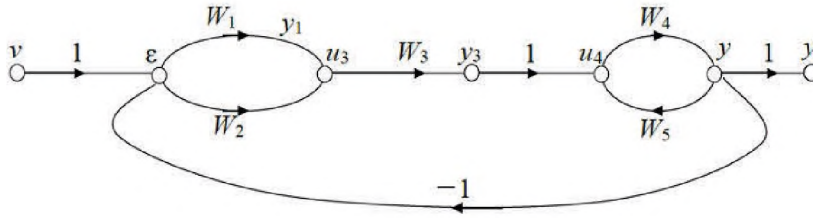


Рис. 1.29. Граф системы

Таблица 1.1

Структурные схемы соединений

Структурная схема	Граф	Эквивалентная ПФ
Параллельное соединение звеньев		
		$W_{\Theta} = W_1(p) + W_2(p)$
Последовательное соединение звеньев		
		$W_{\Theta} = W_1(p) \cdot W_2(p)$
Встречно-параллельное соединение звеньев		
		$W_{\Theta}(p) =$ $= \frac{W_1(p)}{(1 \pm W_1(p)W_2(p))}$

Встречаются и более сложные случаи соединения звеньев, например, соединения с перекрестными связями (рис. 1.30).

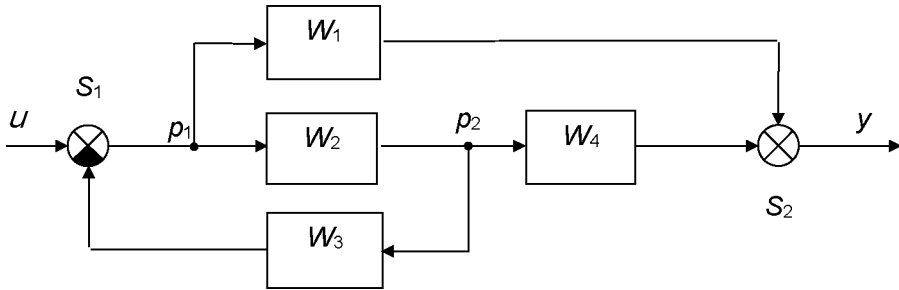


Рис. 2.30. Соединение с перекрестными связями  
Рис. 1.30. Соединение с перекрестными связями

В этих случаях можно пользоваться **правилом переноса динамического звена через сумматор или точку разветвления**.

Любое динамическое звено можно перенести через сумматор или точку разветвления; при этом звено должно войти во все входящие и ответвляющиеся ветви. В те ветви, в которые звено входит без изменения направления распространения сигнала, звено проходит со своей передаточной функцией. В тех ветвях, при продвижении в которые меняется направление распространения сигнала, передаточная функция звена изменяется на обратную.

Это правило действует только для скалярных передаточных функций и иллюстрируется элементарными примерами, изображенными на рис. 1.31–1.33.

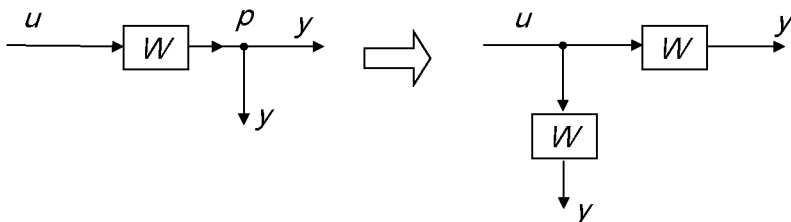


Рис. 1.31. Перенос звена  $W$  через точку разветвления  $p$   
Рис. 2.31. Перенос звена  $W$  через точку разветвления  $p$

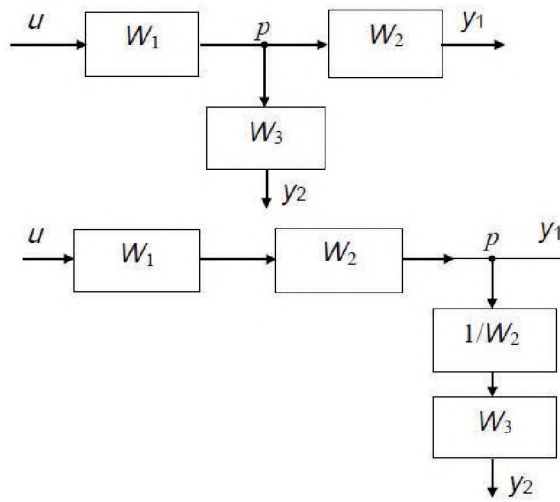


Рис. 1.32. Перенос звена  $W_2$  через точку разветвления  $p$

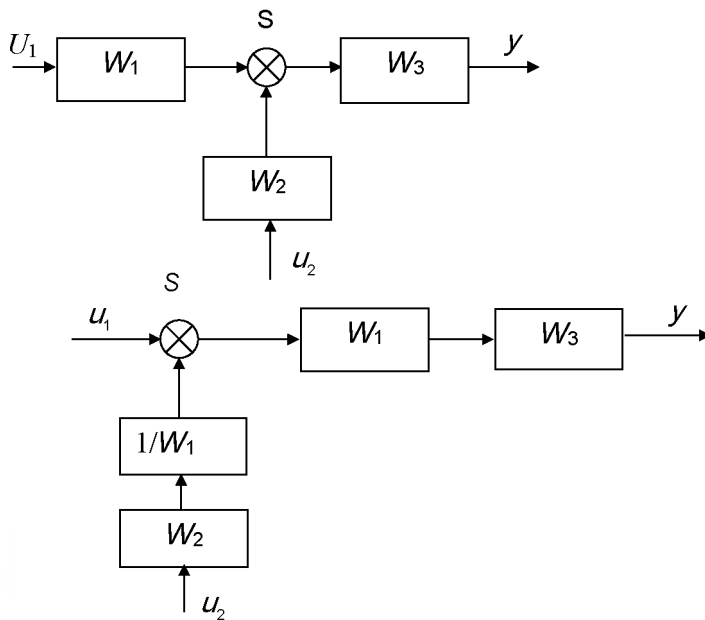


Рис. 2.34. Перенос звена  $W_1$  через сумматор  $S$   
 Рис. 1.33. Перенос звена  $W_1$  через сумматор  $S$

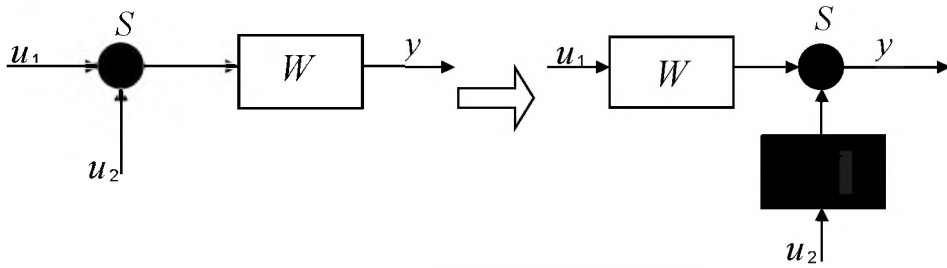


Рис. 1.34. Перенос звена  $W$  через сумматор  $S$

В качестве примера проведем упрощение структурной схемы, приведенной на рис. 1.30. Перенесем динамическое звено с передаточной функцией  $W_2$  через точку разветвления  $p_1$  (рис. 1.35).

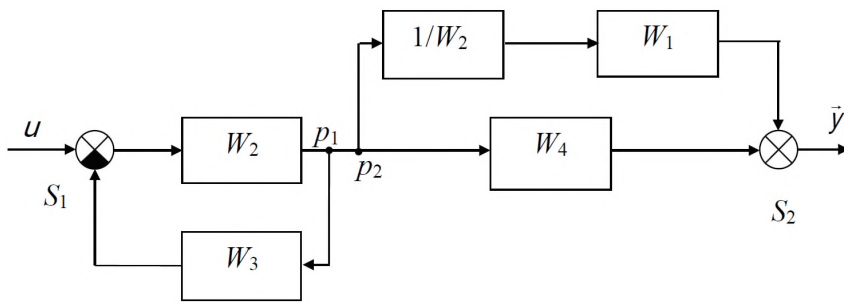


Рис. 1.35. Схема соединения после переноса

Теперь исходная система может быть представлена в упрощенном виде (рис. 1.36).

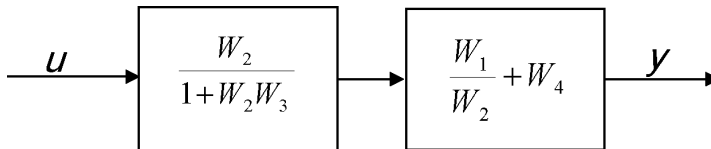


Рис. 2.36. Исходная схема в упрощенном виде  
Рис. 1.36. Исходная схема в упрощенном виде

### Формула Мейсона

В случае громоздких систем с большим числом звеньев и перекрестных связей наиболее эффективным является использование для получения эквивалентных передаточных функций правила Мейсона. В связи с этим введем необходимые дополнительные определения.

**Прямой путь** между двумя заданными вершинами графа – это непрерывная последовательность ветвей одного направления, в которой каждая из вершин встречается не более одного раза.

**Контур** – замкнутая цепь, при однократном обходе которой в направлении, указанном стрелками, каждая из вершин встречается не более одного раза.

Согласно правилу Мейсона передаточная функция  $W$  между входом в точке  $A$  и выходом в точке  $B$  равна

$$W_{AB}(p) = \sum_{k=1}^{\chi} \frac{W_k(p) \cdot \Delta_k(p)}{\Delta(p)}, \quad (1.8.13)$$

где

- $\chi$  – число прямых путей между вершинами  $A$  и  $B$ ;
- $W_k(p)$  – передаточная функция  $k$ -го прямого пути от вершины  $A$  к вершине  $B$  (она равна произведению передаточных функций всех ребер, входящих в последовательность прямого пути);
- $\Delta(p)$  – определитель графа;
- $\Delta_k(p)$  –  $k$ -й минор определителя графа, равный определителю более простого графа, который получается из данного графа путем удаления из него всех ребер и вершин, лежащих на  $k$ -м прямом пути, а также всех ребер, входящих в эти вершины и исходящих из этих вершин.

Определитель графа определяется из соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta(p) = 1 - \sum_i W_{0i}(p) + \sum_{i,j} W_{0i}(p)W_{0j}(p) - \\ - \sum_{i,j,k} W_{0i}(p)W_{0j}(p)W_{0k}(p) + \dots, \end{aligned} \quad (1.8.14)$$

где

- $W_{0i}(p)$  – передаточные функции различных контуров графа;
- $W_{0i}(p)W_{0j}(p)$  – произведения передаточных функций непересекающихся пар контуров;
- $W_{0i}(p)W_{0j}(p)W_{0k}(p)$  – произведения передаточных функций непересекающихся троек контуров.

**ПРИМЕР 1.8.1**

Найти передаточную функцию  $W_{uy}$  для системы, структурная схема которой приведена на рис. 1.37.

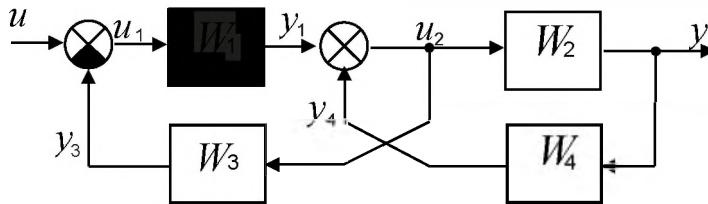


Рис. 1.37. Структурная схема системы с перекрестными связями

Этой схеме соответствует граф, представленный на рис. 1.38.

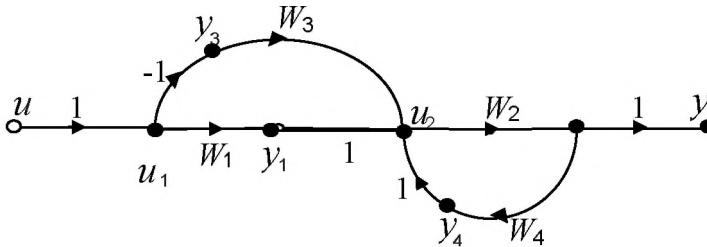


Рис. 1.38. Граф системы с перекрестными связями

Для этого графа:

- Передаточная функция единственного прямого пути:

$$W_{\text{пр}} = W_1 \cdot W_2.$$

- Передаточные функции контуров:

$$W_{01} = -W_1 \cdot W_3; \quad W_{02} = W_2 \cdot W_4.$$

- Главный определитель:

$$\Delta = 1 + W_1 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_4.$$

- Определитель прямого пути:

$$\Delta_1 = 1.$$

- Искомая передаточная функция:

$$W_{uy} = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W_3 - W_2 \cdot W_4}.$$

**ПРИМЕР 1.8.2**

Найти передаточную функцию между точками *A* и *B* для графа, приведенного на рис. 1.39.

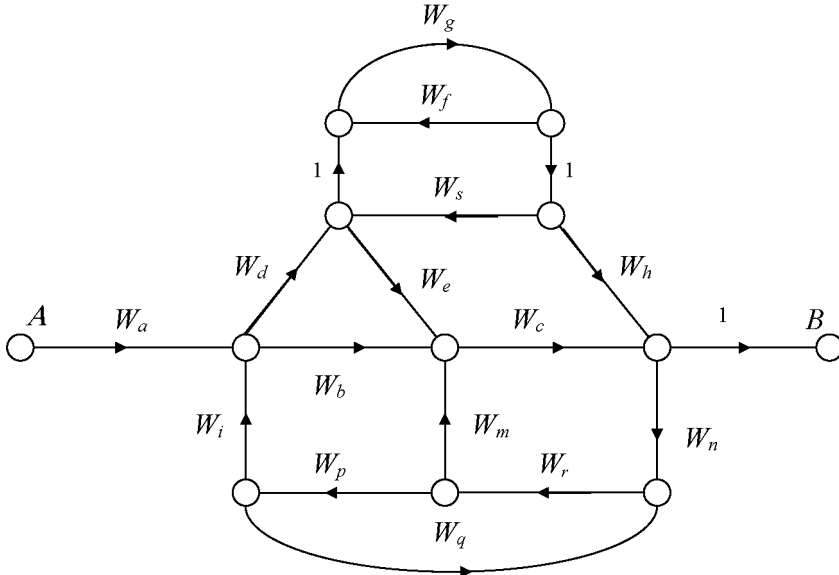


Рис. 1.39. Граф системы

- Передаточные функции прямых путей:

$$W_1 = W_a \cdot W_b \cdot W_c;$$

$$W_2 = W_a \cdot W_d \cdot W_e \cdot W_c;$$

$$W_3 = W_a \cdot W_d \cdot W_g \cdot W_h.$$

- Передаточные функции контуров:

$$W_{01} = W_d \cdot W_g \cdot W_h \cdot W_n \cdot W_r \cdot W_p \cdot W_l;$$

$$W_{02} = W_d \cdot W_e \cdot W_c \cdot W_n \cdot W_r \cdot W_p \cdot W_l;$$

$$W_{03} = W_d \cdot W_c \cdot W_n \cdot W_r \cdot W_p \cdot W_l;$$

$$W_{04} = W_c \cdot W_n \cdot W_r \cdot W_m;$$

$$W_{05} = W_r \cdot W_p \cdot W_q;$$

$$W_{06} = W_g \cdot W_s;$$

$$W_{07} = W_g \cdot W_f.$$

- Произведения передаточных функций непересекающихся пар контуров:

$$W_{02} \cdot W_{07}; W_{03} \cdot W_{06}; W_{03} \cdot W_{07}; W_{04} \cdot W_{06}; W_{04} \cdot W_{07};$$

$$W_{05} \cdot W_{06}; W_{05} \cdot W_{07}.$$

- Непересекающихся троек контуров нет.

- Определитель графа:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - W_{01} - W_{02} - W_{03} - W_{04} - W_{05} - W_{06} - W_{07} + W_{02} \cdot W_{07} + \\ & + W_{06} + W_{03} \cdot W_{07} + W_{04} \cdot W_{06} + W_{04} \cdot W_{04} + W_{07} + W_{05} \cdot W_{06} + \\ & + W_{05} \cdot W_{07}. \end{aligned}$$

- Миноры определителя графа:

$$\Delta_1 = 1 - W_{05} - W_{07} + W_{05} \cdot W_{06} + W_{05} \cdot W_{07};$$

$$\Delta_2 = 1 - W_{05} - W_{07} + W_{05} \cdot W_{07};$$

$$\Delta_3 = 1 - W_{05}.$$

- Результирующая передаточная функция:

$$W_{AB} = \frac{W_1 \Delta_1 + W_2 \Delta_2 + W_3 \Delta_3}{\Delta}.$$

## § 1.9. Устойчивость систем

## 1.9.1. Асимптотические свойства собственного движения и весовой матрицы линейной системы

Рассмотрим понятие устойчивой системы управления и определим критерии устойчивости систем. Пусть нелинейное дифференциальное уравнение состояния имеет вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = F\{\vec{x}(t), \vec{u}(t), t\}. \quad (1.9.1)$$

Пусть также  $\vec{u}_0(t)$  – некоторая заданная (номинальная) функция времени и  $\vec{x}_0(t_0)$  – некоторый номинальный вектор начальных условий.

Решение  $\vec{x}_0(t)$  является устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого  $t_0$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что при

$$\|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_0(t_0)\| \leq \delta \quad (1.9.2)$$

удовлетворяется неравенство

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)\| \leq \varepsilon. \quad (1.9.3)$$

Норма вектора  $\vec{x}$  в простейшем случае совпадает с его евклидовой длиной

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.9.4)$$

Возможно также использование и других форм нормы, например:

$$\|\vec{x}\| = \max_i |x_i|; \quad \|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (1.9.5)$$

Введение нормы в пространстве состояний дает возможность определить понятие близости точек пространства. Устойчивость в смысле Ляпунова гарантирует, что состояние  $\vec{x}(t)$  не отклоняется далеко от «номинального» режима  $\vec{x}_0(t)$  при начальном состоянии  $\vec{x}(t_0)$ , достаточно близком к номинальному начальному состоянию  $\vec{x}_0(t_0)$ .

Решение  $\vec{x}_0(t)$  называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и для любого  $t_0$  существует такое  $\rho(t_0)$ , что при

$$\|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_0(t_0)\| \leq \rho \quad (1.9.6)$$

выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)\| = 0. \quad (1.9.7)$$

Решение  $\vec{x}_0(t)$  является асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво по Ляпунову и для любых  $t_0$  и  $\vec{x}(t_0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)\| = 0. \quad (1.9.8)$$

Применительно к нелинейным системам, вследствие сложности характерных для них явлений, обсуждается обычно устойчивость решений. В линейных системах ситуация проще, и в этом случае целесообразнее говорить об устойчивости уже не решения, а самой системы. Пусть дано уравнение системы

$$\dot{\vec{x}}_C(t) = A(t)\vec{x}_C(t) + B(t)\vec{u}(t), \quad (1.9.9)$$

и для  $t_0$ ,  $\vec{x}_{C0}(t_0)$  и  $\vec{u}_0(t)$  при  $t \geq t_0$  известно  $\vec{x}_{C0}(t)$ , то есть справедливо уравнение

$$\dot{\vec{x}}_{C0}(t) = A(t)\vec{x}_{C0}(t) + B(t)\vec{u}_0(t). \quad (1.9.10)$$

Естественно, что при других начальных условиях  $\vec{x}_{C1}(t_0)$  решение  $\vec{x}_{C1}(t)$  будет другим:

$$\dot{\vec{x}}_{C1}(t) = A(t)\vec{x}_{C1}(t) + B(t)\vec{u}_0(t). \quad (1.9.11)$$

Вычтем из (1.9.11) уравнение (1.9.10):

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{x}_{C1}(t) - \vec{x}_{C0}(t) \right) = A(t) \left( \vec{x}_{C1}(t) - \vec{x}_{C0}(t) \right). \quad (1.9.12)$$

Обозначив

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{C1}(t) - \vec{x}_{C0}(t),$$

при начальных условиях

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_{C1}(t_0) - \vec{x}_{C0}(t_0)$$

получим уравнение

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t), \text{ при } t = t_0, \quad \vec{x} = \vec{x}(t_0). \quad (1.9.13)$$

Таким образом, понятие устойчивости решения можно свести к понятию устойчивости линейной системы.

**Линейная система устойчива** в определенном смысле (по Ляпунову, асимптотически или асимптотически в целом), если тривиальное решение  $\vec{x}_0(t) \equiv 0$  устойчиво в этом смысле.

**Линейная система асимптотически устойчива** тогда и только тогда, когда она асимптотически устойчива в целом.

Таким образом, исследование вопроса устойчивости решений линейной неавтономной системы сводится к исследованию решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, которое определяется матрицей  $A(t)$  и имеет вид:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0); \quad (1.9.14)$$

$$\vec{y} = C(t)\Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0). \quad (1.9.15)$$

Рассмотрим три возможных случая.

1.  $\Phi(t, t_0)$  – ограниченная матрица в интервале  $[t_0, \infty)$ , то есть существует такое положительное число  $M$ , что

$$|\Phi_{ij}(t, t_0)| \leq M, \quad t \geq t_0; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда получаем, что

$$\|\vec{x}(t)\| \leq n^2 M \max_i |x_i(t_0)|,$$

и условие устойчивости выполняется, если взять, например,

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{n^2 M}.$$

2. Переходная матрица удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0) = 0.$$

При этом движение, а значит, и сама система являются асимптотически устойчивыми.

3.  $\Phi(t, t_0)$  – неограниченная матрица в интервале  $[t_0, \infty)$ . При этом движение неустойчиво, так как для любого  $\vec{x}(t_0) \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \infty.$$

Это означает и неустойчивость самой системы.

Если система является наблюдаемой и управляемой (эти понятия будут рассмотрены в пп. 3.2, 3.3), то устойчивость системы можно исследовать с помощью весовой функции. Система асимптотически устойчива, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_y(t, \tau) = 0.$$

Итак, линейная система является асимптотически устойчивой, если ее переходная матрица с течением времени стремится к нулевой матрице. Для стационарных систем, то есть для систем с постоянными параметрами, это условие эквивалентно требованию, чтобы все собственные числа матрицы имели отрицательные действительные части, то есть лежали в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной  $\lambda$ . Это следует из формы представления переходной матрицы через собственные числа и правые и левые собственные векторы матрицы в соответствии с (1.4.29). Таким образом, анализ устойчивости системы может быть сведен к анализу расположения собственных чисел матрицы  $A$ , или, что то же самое, расположения полюсов передаточной функции полностью управляемой и наблюдаемой системы.

В теории автоматического управления разработан ряд методов, называемых критериями устойчивости, позволяющих проанализировать расположение собственных чисел относительно мнимой оси плоскости  $\lambda$  и не требующих при этом точного решения соответствующего характеристического уравнения. К первой группе этих методов относятся так называемые алгебраические критерии, которые путем элементарных вычислений по коэффициентам характеристического полинома позволяют проанализировать устойчивость исследуемой системы с известными значениями ее параметров.

### 1.9.2. Необходимое условие устойчивости

**Для устойчивости системы с характеристическим полиномом**

$$\varphi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (1.9.16)$$

**необходимо**, чтобы при  $a_0 > 0$  все коэффициенты характеристического полинома были положительны, то есть  $a_i > 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Докажем это утверждение.

Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – нули характеристического полинома (корни характеристического уравнения  $\varphi(\lambda) = 0$ ), то (1.9.16) может быть записано в виде:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (1.9.17)$$

Если  $\lambda_i$  – вещественный корень в левой полуплоскости, то есть  $\lambda_i = -\alpha_i$  ( $\alpha_i > 0$  – положительное вещественное число), то

$$(\lambda - \lambda_i) = (\lambda + \alpha_i)$$

и произведение таких сомножителей даст полином только с положительными коэффициентами.

Пусть  $\lambda_i$  – комплексный корень в левой полуплоскости, то есть  $\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$  ( $\alpha_i > 0$ ). Тогда при всех вещественных коэффициентах характеристического полинома среди его нулей должен быть комплексно-сопряженный:  $\lambda_{i+1} = -\alpha_i - j\omega_i$ . Произведение двух соответствующих сомножителей даст полином второй степени с положительными коэффициентами:

$$(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_{i+1}) = \lambda^2 + 2\alpha_i\lambda + \alpha_i^2 + \omega_i^2.$$

Следует обратить внимание на то, что рассмотренное условие устойчивости не является достаточным. Если среди коэффициентов характеристического полинома имеются отрицательные, то это означает, что соответствующая система неустойчива. Если все коэффициенты положительны, то система может быть как устойчивой, так и неустойчивой. В этом случае необходим дополнительный анализ.

### 1.9.3. Критерий устойчивости Гурвица

Пусть характеристический полином некоторой системы имеет вид (1.9.16). Сопоставим этому полиному матрицу Гурвица:

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}. \quad (1.9.18)$$

По главной диагонали стоят коэффициенты полинома, остальные элементы строятся по следующему принципу: вверх от диагонального элемента ставятся коэффициенты полинома в порядке возрастания индексов, вниз – коэффициенты полинома в порядке убывания индексов. Элементы, требующие индексов больших степени полинома или отрицательных, устанавливаются нулевыми.

#### Критерий Гурвица

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  были положительны все  $n$ -главные миноры матрицы Гурвица.

Рассмотрим примеры конкретизации критерия Гурвица для простейших случаев.

- $n = 1$ .

Запишем дифференциальное уравнение

$$a_0 \cdot \frac{dy}{dt} + a_1 y = 0$$

и характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda + a_1 = 0.$$

В данном случае применение критерия Гурвица дает тривиальный результат:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0.$$

- $n = 2$ .

Запишем дифференциальное уравнение

$$a_0 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0,$$

характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

и матрицу Гурвица

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае, при  $a_0 > 0$  применение критерия Гурвица дает тривиальный результат:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

Отметим, что для систем первого и второго порядка необходимое условие устойчивости является и достаточным.

- $n = 3$ .

Запишем характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

и матрицу Гурвица

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Для устойчивости системы по критерию Гурвица необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  были положительны первый

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

второй

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

и третий

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0$$

главные миноры матрицы Гурвица. С учетом необходимого условия устойчивости (требования положительности всех коэффициентов характеристического уравнения) критерий Гурвица для устойчивости системы третьего порядка требует выполнения неравенства

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (1.9.19)$$

- $n = 4$ .

Запишем характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

и матрицу Гурвица

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Для устойчивости системы по критерию Гурвица необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  были положительны первый

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

второй

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

третий

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0$$

и четвертый

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0$$

главные миноры матрицы Гурвица. С учетом необходимого условия устойчивости (требования положительности всех коэффициентов характеристического уравнения) критерий Гурвица для устойчивости системы четвертого порядка требует выполнения неравенства

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0. \quad (1.9.20)$$

Для системы пятого порядка критерий Гурвица выливается в требование выполнения уже двух неравенств:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 a_3 &> 0, \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 &> 0. \end{aligned} \quad (1.9.21)$$

С дальнейшим увеличением порядка систем использование критерия Гурвица становится все более громоздким и теряет смысл. Если возникает необходимость привлечения вычислительной техники, то в наше время проще непосредственно вычислить корни характеристического уравнения. Тем не менее для систем третьего – четвертого порядков привлекает простота использования критерия Гурвица.

#### ПРИМЕР 1.9.1

Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.40, с входным сигналом  $v$ , сигналом ошибки  $\varepsilon$  и выходным сигналом  $y$ .

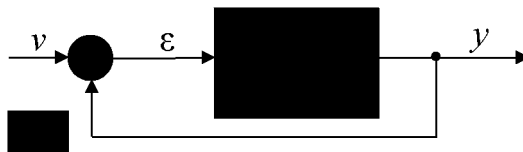


Рис. 1.40. Структурная схема системы

Этой системе соответствует передаточная функция

$$W_{vy}(p) = \frac{\frac{k}{(Tp+1)^3}}{1 + \frac{k}{(Tp+1)^3}} = \frac{k}{T^3 p^3 + 3T^2 p^2 + 3Tp + 1 + k}.$$

В соответствии со свойствами передаточных функций характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$\varphi(p) = T^3 p^3 + 3T^2 p^2 + 3Tp + 1 + k.$$

По критерию Гурвица система устойчива, если выполняется неравенство

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 9T^3 - T^3(1+k) > 0.$$

Отсюда, с учетом требования положительности всех коэффициентов характеристического полинома, следует, что система устойчива, если при  $T > 0$  выполняются неравенства

$$-1 < k < 8.$$

Значения параметров, при которых система находится на границе устойчивости, принято называть критическими.

В данном примере у коэффициента  $k$  имеется два критических значения – нижнее  $k_{кр}^H = -1$  и верхнее  $k_{кр}^B = 8$ .

#### 1.9.4. Частотный критерий устойчивости (критерий Найквиста)

Часто рассмотрению подлежат замкнутые системы, структурные схемы которых могут быть приведены к типовому виду, представленному на рис. 1.41. Как правило, передаточная функция разомкнутой системы  $W(p)$  имеет относительно простой вид, и несложно определить расположение ее полюсов относительно мнимой оси. Таким образом, предполагается, что анализ устойчивости разомкнутой системы проведен. В то же время анализ устойчивости замкнутой системы представляет собой нетривиальную задачу. Критерий устойчивости Найквиста оперирует частотными характеристиками, достаточно нагляден и позволяет использовать физические представления о свойствах исследуемой системы. Критерий Найквиста позволяет судить

об устойчивости системы в замкнутом состоянии по частотным характеристикам разомкнутой системы.

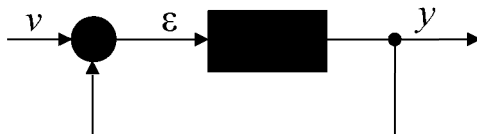


Рис. 1.41. Замкнутая система с единичной обратной связью

### Понятие логарифмического вычета

Пусть задана некоторая функция  $\Psi(p)$ , аналитичная всюду в области  $G$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек. Будем полагать, что все особые точки являются полюсами. Будем полагать также, что граница  $C$  области  $G$  не содержит ни нулей, ни полюсов функции  $\Psi(p)$ .

Рассмотрим логарифмическую производную функции  $\Psi(p)$

$$\mathcal{L}(p) = \frac{d}{dp} [\ln \Psi(p)] = \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)} \quad (1.9.22)$$

и назовем логарифмическим вычетом функции  $\Psi(p)$  в точке  $p = a$  вычет в этой точке ее логарифмической производной

$$\text{LnRes} \{ \Psi(p), a \} = \text{Res} \{ \mathcal{L}(p), a \}. \quad (1.9.23)$$

Пусть функция  $\Psi(p)$  имеет в точке  $p = a$  ноль порядка  $k$ , то есть

$$\Psi(p) = (p - a)^k F(p),$$

где

$$F(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\Psi'(p) = k(p - a)^{k-1} F(p) + (p - a)^k F'(p)$$

и

$$\mathcal{L}(p) = \frac{k}{p - a} + \frac{F'(p)}{F(p)}. \quad (1.9.24)$$

Отметим, что полюсы функций  $F(p)$  и  $F'(p)$  совпадают. Так как нули аналитической функции изолированы, то в достаточно малом круге  $|p-a| < \rho$  функция  $F'(p)/F(p)$  является аналитической и может быть разложена в окрестности точки  $p = a$  в ряд Тейлора:

$$\frac{F'(p)}{F(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (p-a)^n.$$

С учетом этого (1.9.24) превращается в

$$\mathcal{L}(p) = \frac{k}{p-a} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (p-a)^n.$$

Эта формула представляет собой разложение в ряд Лорана функции  $\mathcal{L}(p)$  в окрестности точки  $p = a$ . Из нее следует, что точка  $p = a$  является полюсом первого порядка функции  $\mathcal{L}(p)$  и

$$\operatorname{Res}\{\mathcal{L}(p), a\} = k. \quad (1.9.25)$$

Пусть теперь функция  $\Psi(p)$  имеет в точке  $p = b$  полюс кратности  $s$ , то есть

$$\Psi(p) = (p-b)^{-s} J(p),$$

где  $b$  не является ни нулем, ни полюсом функции  $J(p)$ . Тогда

$$\Psi'(p) = -s(p-b)^{-(s+1)} J(p) + (p-b)^{-s} J'(p)$$

и

$$\mathcal{L}(p) = \frac{-s}{p-b} + \frac{J'(p)}{J(p)}.$$

По аналогии с предыдущим случаем получим, что в окрестности точки  $p = b$

$$\mathcal{L}(p) = \frac{-s}{p-b} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (p-b)^n,$$

следовательно,

$$\operatorname{Res}\{\mathcal{L}(p), b\} = -s. \quad (1.9.26)$$

Таким образом, в нулях и полюсах функции  $\Psi(p)$  ее логарифмическая производная (1.9.22)

$$\mathcal{L}(p) = \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)}$$

имеет полюсы первого порядка, причем в нуле функции  $\Psi(p)$  логарифмический вычет равен порядку нуля, а в полюсе, взятом со знаком минус, порядку полюса.

По теореме вычетов имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)} dp = \sum_v \text{Res} \left\{ \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)}, p_v \right\} = \sum_v k_v - \sum_v s_v$$

или окончательно

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)} dp = N - \Pi, \quad (1.9.27)$$

где  $N$  – число нулей,  $\Pi$  – число полюсов функции  $\Psi(p)$  в области  $G$ .

### Принцип приращения аргумента

Обозначим

$$\Psi(p) = |\Psi(p)| e^{j\varphi\Psi(p)},$$

тогда

$$\ln \Psi(p) = \ln |\Psi(p)| + j\varphi\Psi(p).$$

С учетом (1.9.27)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)} dp &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C d(\ln \Psi(p)) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C d \ln |\Psi(p)| + \frac{1}{2\pi j} \oint_C dj\varphi\Psi(p) = N - \Pi. \end{aligned}$$

Поскольку в правой части равенства (1.9.4) стоит вещественное число, то мнимая компонента его левой части также равна нулю.

Таким образом, если функция  $\Psi(p)$  аналитична в замкнутой области  $G$ , ограниченной контуром  $C$ , за исключением конечного числа

полюсов в области  $G$ , и если функция  $\Psi(p)$  не имеет ни полюсов, ни нулей на контуре  $C$ , то приращение аргумента функции  $\Psi(p)$  при движении вектора  $p$  по замкнутому контуру  $C$  определяется выражением

$$\Delta\varphi_{\Psi}^C = 2\pi(N - \Pi). \quad (1.9.28)$$

### Анализ устойчивости замкнутой системы

Рассмотрим замкнутую систему с единичной обратной связью (рис. 1.42). Пусть известно, что среди  $n$  полюсов  $p_1, p_2, \dots, p_n$  передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \quad (1.9.29)$$

имеется  $v_1$  нулевых и  $v_2$  чисто мнимых полюсов на верхней полуплоскости плоскости комплексной переменной  $p$  (рис. 1.42), то есть

$$Q(p) = p^{v_1}(p - j\omega_q)^{v_2} Q_1(p). \quad (1.9.30)$$

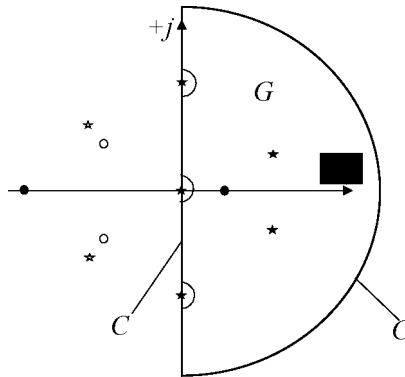


Рис. 1.42. Расположение нулей ( $\circ$ ) и полюсов ( $\star$ ) передаточной функции разомкнутой системы

Построим функцию

$$\Psi(p) = 1 + W(p) = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{L(p)}{Q(p)}, \quad (1.9.31)$$

знаменатель которой является характеристическим полиномом разомкнутой системы, а числитель – характеристическим полиномом замкнутой.

Выберем в качестве области  $G$  всю правую полуплоскость плоскости комплексной переменной  $p$ . Контур  $C$  сформируем из мнимой оси, за исключением точек, совпадающих с полюсами передаточной функции разомкнутой системы, дуг окружностей бесконечно малого радиуса, охватывающих эти полюсы, как показано на рис. 1.42, и окружности бесконечно большого радиуса, охватывающей всю правую полуплоскость.

Допустим в общем случае, что разомкнутая система неустойчива и ее передаточная функция имеет  $m$  «неустойчивых» полюсов, то есть  $m$  полюсов в правой полуплоскости плоскости комплексной переменной  $p$ .

Предположим, что замкнутая система также неустойчива и  $z$  – число неустойчивых полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Тогда, в соответствии с принципом приращения аргумента,

$$\Delta\varphi_C^+ = 2\pi(z - m). \quad (1.9.32)$$

Если обходить контур  $C$  в отрицательном направлении, совпадающем с положительным направлением мнимой оси, то

$$\Delta\varphi_C^- = 2\pi(m - z). \quad (1.9.33)$$

Будем сопоставлять изменение комплексной переменной при перемещении ее вдоль контура  $C$  на плоскости  $p$  и соответствующее ему изменение функции  $\Psi(p)$  на комплексной плоскости  $\Psi$ . Для этого разобьем контур  $C$  на несколько характерных участков.

На участке I годограф комплексной переменной  $p$  изменяется по окружности бесконечно большого радиуса, охватывая всю правую полуплоскость, то есть

$$p_I = \rho e^{j\Theta}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (1.9.34)$$

Ранее отмечалось, что в физически реализуемых системах порядок числителя передаточной функции не может превышать порядок ее знаменателя. Отсюда следует, что степени полиномов  $L(p)$  и  $Q(p)$  равны, а значит,

$$\Psi_I(p) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{L(\rho e^{j\Theta})}{Q(\rho e^{j\Theta})} = \text{const.} \quad (1.9.35)$$

Таким образом, приращение фазы функции  $\Psi(p)$  при изменении  $p$  вдоль первого участка равно нулю:

$$\Delta\varphi_{\Psi}^I = 0. \quad (1.9.36)$$

В качестве участка II выберем мнимую ось плоскости  $p$ , то есть

$$p_{II} = j\omega, \quad (1.9.37)$$

за исключением тех ее точек, в которых располагаются полюсы разомкнутой системы. Соответствующая этому изменению  $p$  функция

$$\Psi_{II}(p) = \Psi(j\omega), \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (1.9.38)$$

легко может быть вычислена.

Участок III – это участок движения комплексной переменной  $p$  вдоль окружности бесконечно малого радиуса с центром в начале координат, где по условию находится  $v_1$  полюсов передаточной функции разомкнутой системы. При этом, в соответствии с (1.9.30), функция  $\Psi(p)$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{III}(p) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L(\rho e^{j\Theta})}{\rho^{v_1} e^{jv_1\Theta} (\rho e_q^{j\Theta - j\omega})^{v_2} Q_1(\rho e^{j\Theta})} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L(0)}{(-j\omega_q)^{v_2} Q_1(0)} \cdot \frac{e^{-jv_1\Theta}}{\rho^{v_1}}, \end{aligned} \quad (1.9.39)$$

то есть на комплексной плоскости функция  $\Psi(p)$  будет совершать перемещение («доворот») по окружности бесконечно большого радиуса. Направление этого перемещения противоположно по знаку направлению перемещения на плоскости  $p$ , а абсолютная величина приращения угла – в  $v_1$  раз больше. Таким образом, третьему участку соответствует изменение фазы функции  $\Psi(p)$  на величину

$$\Delta\varphi_{\Psi}^{III} = -v_1\pi. \quad (1.9.40)$$

Наконец, рассмотрим движение комплексной переменной  $p$  вдоль окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке  $p = j\omega_q$ , где расположено  $v_2$  полюсов передаточной функции разомкнутой системы.

На этом четвертом участке контура

$$p_{\text{III}} = j\omega_q + \rho e^{j\Theta}, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (1.9.41)$$

В соответствии с (1.9.30) функция

$$\Psi_{\text{IV}}(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L(j\omega_q)}{(j\omega_q)^{v_1} Q_1(j\omega_q)} \cdot \frac{e^{-jv_2\Theta}}{\rho^{v_2}} \quad (1.9.42)$$

будет образовывать годограф, перемещающийся на плоскости  $\Psi$  по окружности бесконечно большого радиуса, и соответствующее приращение фазы будет равно

$$\Delta\varphi_{\Psi}^{\text{IV}} = -2v_2 \frac{\pi}{2}. \quad (1.9.43)$$

Пользуясь тем, что  $\Psi(p)$  является дробно-рациональной функцией от  $p$  и

$$\Psi(p^*) = \Psi^*(p), \quad (1.9.44)$$

можно произвести обход лишь верхней половины контура  $S$ . При этом сменим направление обхода контура  $S$  так, чтобы передвигаться в направлении увеличения  $\omega$ . Тогда суммарное приращение фазы

$$\Delta\varphi_{\Psi\text{Sum}} = \Delta\varphi_{\Psi\text{I}} + \Delta\varphi_{\Psi\text{II}} + \Delta\varphi_{\Psi\text{III}} + \Delta\varphi_{\Psi\text{IV}} = \pi(m - z). \quad (1.9.45)$$

Удобнее строить не функцию  $\Psi(p)$ , а функцию  $W(p)$ . Как видно из равенства (1.9.31), годограф функции  $\Psi(p)$  поворачивается вокруг начала координат на тот же угол, что и годограф функции  $W(p)$  – относительно точки  $(-1, j0)$ .

Вышеприведенные рассуждения позволяют сформулировать критерий устойчивости замкнутой системы, который называют частотным критерием, или критерием Найквиста.

### Критерий Найквиста

Если передаточная функция разомкнутой системы имеет  $m$  полюсов с положительной вещественной частью, то для устойчивости

системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  расширенная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы повернулась вокруг точки  $(-1, j0)$  на угол  $+m\pi$ .

Расширение частотной характеристики  $W(j\omega)$  необходимо при наличии у передаточной функции разомкнутой системы полюсов на мнимой оси. Каждому нулевому полюсу соответствует на амплитудно-фазовой характеристике доворот по окружности бесконечно большого радиуса на угол  $-\pi/2$ . Каждому чисто мнимому положительному полюсу соответствует на амплитудно-фазовой характеристике доворот по окружности бесконечно большого радиуса на угол  $-\pi$ .

Естественно, что, давая формулировку критерия устойчивости, исходят из условия  $z = 0$ . Можно получить и более общий результат. Основываясь на формуле (1.9.45), в каждом конкретном случае можно вычислить количество «неустойчивых» полюсов замкнутой системы:

$$z = m - \frac{\Delta\varphi_{\text{SUM}}}{\pi}. \quad (1.9.46)$$

Здесь  $\Delta\varphi_{\text{SUM}}$  – результирующий угол поворота расширенной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы вокруг точки  $(-1, j0)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ .

На практике удобнее пользоваться другой формулировкой критерия, предложенной Я. З. Цыпкиным, которая использует понятие переходов расширенной амплитудно-фазовой характеристикой участка вещественной оси  $(-1, -\infty)$ .

**Переходом** называется пересечение амплитудно-фазовой характеристикой вещественной оси на интервале  $(-\infty, -1]$ . Переход считается **положительным**, если при увеличении частоты в точке перехода фаза растет, и **отрицательным** – если уменьшается. Если амплитудно-фазовая характеристика начинается или заканчивается на указанном участке вещественной оси, то имеет место половина перехода с соответствующим знаком.

На рис. 1.43 приведены примеры, иллюстрирующие понятие переходов и критерий Найквиста. Все три примера соответствуют системам, устойчивым в замкнутом состоянии.

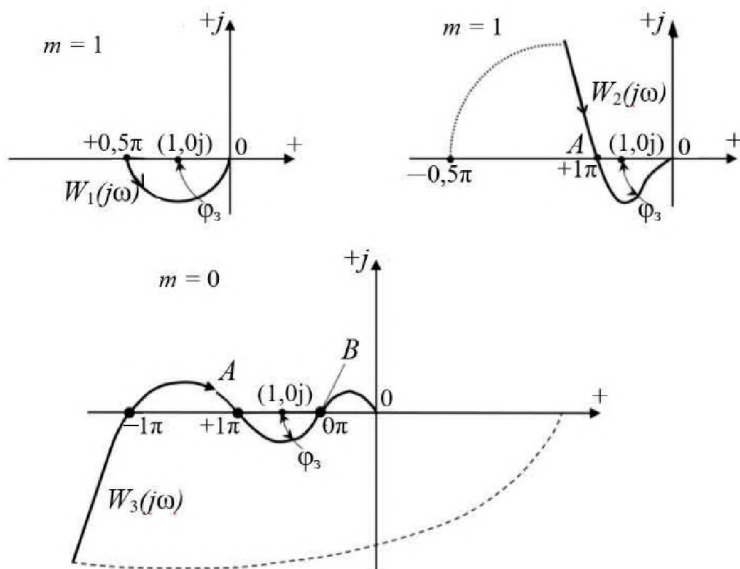


Рис. 1.43. Иллюстрации к анализу устойчивости

В системе координат логарифмических частотных характеристик переход имеет место, если фазочастотная характеристика пересекает линию  $-\pi \pm k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и при этом логарифмическая амплитудно-частотная характеристика идет выше оси абсцисс (модуль комплексного передаточного коэффициента больше единицы).

Приведем теперь формулировку **критерия Найквиста, использующую понятие переходов**.

Если передаточная функция разомкнутой системы имеет  $m$  полюсов с положительной вещественной частью, то для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы суммарное число переходов расширенной логарифмической частотной характеристики было равно  $+m/2$ . Если замкнутая система неустойчива, то число ее «неустойчивых» полюсов

$$z = m - 2 \sum \Pi, \quad (1.9.47)$$

где  $\sum \Pi$  – суммарное число переходов расширенной частотной характеристики разомкнутой системы.

### Понятие запасов устойчивости

Естественно, что каждая система автоматического управления должна быть устойчивой. В инженерной практике часто используется понятие запасов. Например, в строительстве и машиностроении общепринятым является термин «запас прочности». Аналогично этому при проектировании систем управления пользуются понятиями запасов устойчивости.

Запасом устойчивости по модулю будем называть число больше единицы, которое показывает, во сколько раз (на сколько децибел) нужно изменить исходный передаточный коэффициент разомкнутой системы, чтобы вывести замкнутую систему на границу устойчивости. Соответственно, различают запасы по модулю на увеличение и уменьшение коэффициента. На рис. 1.43 для каждого из вариантов длина отрезка  $OA$  численно равна запасу устойчивости по модулю на уменьшение; величина, обратная длине отрезка  $OB$  для третьего варианта, – запасу устойчивости по модулю на увеличение.

Запасом устойчивости по фазе  $\varphi_3$  называют минимальный по модулю угол, на который следует повернуть вектор  $W(j\omega)$  с модулем, равным единице, чтобы его конец оказался в точке  $(-1, j0)$ . На рис. 1.43 для каждого из вариантов АФХ указан запас устойчивости по фазе.

### Устойчивость систем с запаздыванием

Звено транспортного запаздывания смещает по времени выходной сигнал относительно входного на величину запаздывания  $\tau$ :

$$y(t) = u(t - \tau). \quad (1.9.48)$$

Передаточная функция и комплексный передаточный коэффициент соответственно представлены выражениями (1.9.49) и (1.9.50):

$$W_3(p) = e^{-p\tau}; \quad (1.9.49)$$

$$W_3(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \quad (1.9.50)$$

При исследовании устойчивости системы, в которую входит звено запаздывания, приводят ее структурную схему к виду (рис. 1.44), в котором это звено оказывается включенным последовательно с остальной частью системы.

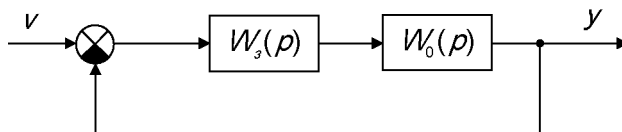


Рис. 1.44. Типовая структура системы с запаздыванием

Рис. 2.44. Типовая структура системы с запаздыванием

При этом, если обозначить

$$W_0(p) = \frac{R_0(p)}{Q_0(p)},$$

то характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид:

$$Q_0(p) + R_0(p)e^{-p\tau} = 0. \quad (1.9.51)$$

В связи с тем, что разложение в ряд Тейлора экспоненциальной функции имеет вид:

$$e^{-p\tau} = 1 - p\tau + \frac{1}{2!}(p\tau)^2 - \frac{1}{3!}(p\tau)^3 + \dots,$$

характеристическое уравнение (1.9.51) имеет бесконечно большое число корней. При этом, естественно, алгебраические критерии устойчивости неприменимы. В то же время для данной системы может быть использован критерий Найквиста.

#### ПРИМЕР 1.9.2

Пусть структурная схема системы с запаздыванием приведена к виду, представленному на рис. 1.44, и

$$W_0(p) = \frac{2}{(Tp + 1)^2}.$$

На рис. 1.45 изображены амплитудно-фазовые характеристики звена запаздывания и последовательно с ним включенного звена  $W_0(j\omega)$ .

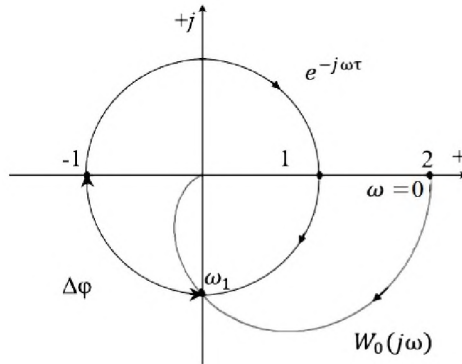


Рис. 1.45. Исследование устойчивости системы с запаздыванием

Так как модуль комплексного передаточного коэффициента звена запаздывания на всех частотах равен единице, то АФХ разомкнутой системы

$$W(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau} \quad (1.9.52)$$

отличается от  $W_0(j\omega)$  только фазой:

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - \omega\tau. \quad (1.9.53)$$

Если провести дугу окружности единичного радиуса с центром в начале координат от отрицательной вещественной полуоси до пересечения с АФХ  $W_0(j\omega)$  в точке  $\omega = \omega_1$ , то полученное значение  $\Delta\varphi$  из соотношения

$$\Delta\varphi = \omega_1 \cdot \tau_{кр} \quad (1.9.54)$$

позволит найти так называемое **критическое время запаздывания**  $\tau_{кр}$ , то есть время запаздывания, при котором система выводится на границу устойчивости. Здесь  $\omega_1$  – значение частоты, при которой

$$|W_0(j\omega_1)| = 1. \quad (1.9.55)$$

В рассматриваемом примере

$$|W_0(j\omega)| = \frac{2}{1 + (\omega T)^2}, \quad (1.9.56)$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{1}{T}, \quad \varphi_0(\omega_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (1.9.57)$$

и

$$\tau_{кр} = \frac{\pi T}{2}. \quad (1.9.58)$$

## § 1.10. Качество процессов управления

Устойчивость – это необходимое, но недостаточное условие для эффективной работы системы.

Комплекс требований, определяющих поведение системы в установившихся и переходных процессах отработки заданного воздействия, определяется понятием «качество процесса управления», или «качество системы».

### 1.10.1. Основные показатели качества

На этапе разработки системы управления рассматривают процессы управления в устойчивых системах при воздействии особо «тяжелых» для них сигналов, заданных в виде определенных или случайных функций времени.

Качество работы системы проверяется по ее реакции на характерные входные воздействия:

- 1) дельта-функцию  $\delta(t)$ ;
- 2) единичную функцию  $1(t)$ ;
- 3) гармонический сигнал  $A \cdot \sin\omega_H t$ ;
- 4) случайные воздействия с заданными вероятностными характеристиками.

Качество отработки типовых сигналов оценивают либо непосредственно по выходному сигналу  $y(t)$ , либо путем сравнения сигнала  $y(t)$  с реакцией некоторой эталонной системы (рассогласование  $\epsilon_e(t)$  на рис. 1.46), либо по ошибке воспроизведения командного сигнала

$$\epsilon_v(t) = v(t) - y(t).$$



Рис. 1.46. Сравнение управляемой системы с эталонной

На рис. 1.47 представлена реакция некоторой следящей системы на линейно возрастающий командный сигнал

$$v(t) = (0,5 + 0,025t)1(t),$$

на рис. 1.48 – реакция на единичную функцию.

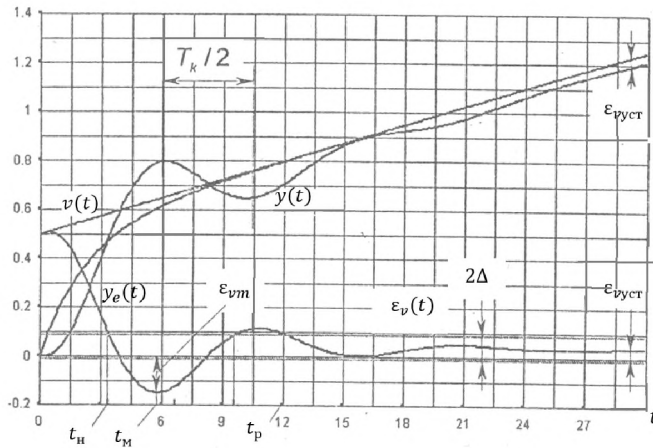


Рис. 1.47. Иллюстрация к характеристикам качества системы (реакция на линейно изменяющийся сигнал)

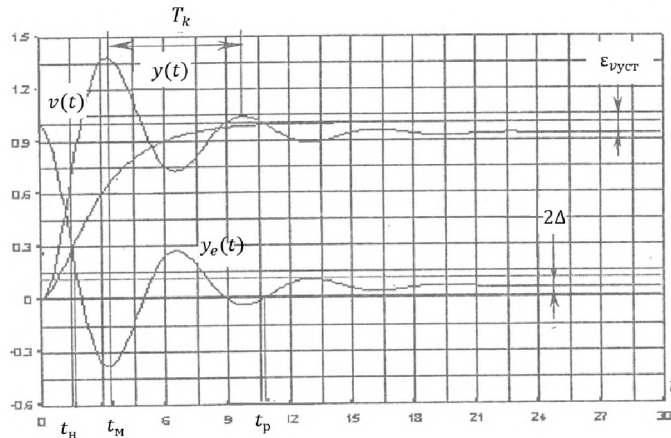


Рис. 1.48. Иллюстрация к определению показателей качества (реакция на единичную функцию)

С помощью этих рисунков удобно проиллюстрировать **основные показатели качества**, используемые при анализе систем управления.

1. Установившаяся ошибка:

$$\epsilon_{уст} = \epsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (v(t) - y(t)). \quad (1.10.1)$$

2. Время регулирования  $t_p$  — минимальное время, в течение которого переходный процесс перестает выходить за пределы заданной «трубки». Определяется из условия

$$|\epsilon(t) - \epsilon_{уст}| \leq \Delta \text{ при } t \geq t_p, \quad (1.10.2)$$

где  $\Delta$  — заранее заданное значение, определяемое требованиями к точности системы (обычно 2–5 % от значения командного или выходного сигнала в установившемся режиме).

3. Максимальное перерегулирование  $\sigma$  — наибольший выброс управляемого процесса относительно установившегося значения по отношению к разности  $\epsilon_{уст}$  и  $\epsilon(0)$ :

$$\sigma = \frac{|\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\text{уст}}|}{|\varepsilon_{\text{уст}} - \varepsilon(0)|} \cdot 100. \quad (1.10.3)$$

Обычно требуют  $\sigma \leq 30\text{--}40\%$ .

4. Время нарастания  $t_n$  – время первого входа процесса в трубку.
5. Время максимального перерегулирования  $t_m$ .
6. Число перерегулирований  $N$  в интервале  $0 \leq t \leq t_p$  – число выбросов, для которых

$$||\varepsilon_{\text{уст}}| - \varepsilon_m| > \Delta.$$

7. Частота или период  $T_k$  колебательной составляющей переходного процесса.

### 1.10.2. Ошибки системы регулирования в установившихся режимах. Статические и астатические системы

Рассмотрим одну из распространенных структурных схем – схему типа следящей системы (рис. 1.49), назначение которой – с минимальной ошибкой воспроизвести на выходе  $y(t)$  командный сигнал  $v(t)$ .

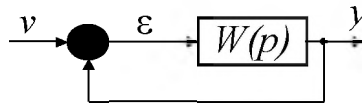


Рис. 1.49. Простейшая типовая структура следящей системы

В общем случае разомкнутая система может быть представлена последовательным соединением объекта (неизменяемой части системы) с передаточной функцией  $W_{\text{об}}(p)$  и регулятора (корректирующего звена) с передаточной функцией  $W_{\text{рег}}(p)$ . Учтем дополнительно возмущающее воздействие  $f(t)$ . В результате передаточная функция разомкнутой системы  $W(p) = W_{\text{рег}}(p) W_{\text{об}}(p)$ , а исходная структурная схема примет вид, представленный на рис. 1.50.

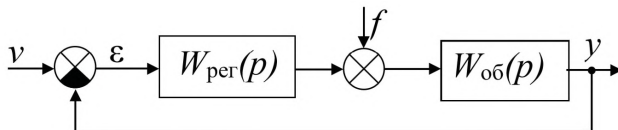


Рис. 1.50. Структурная схема для анализа точности в установившихся режимах

В соответствии с этой структурной схемой изображение по Лапласу от ошибки  $E(p)$  зависит как от командного сигнала, так и от возмущения:

$$E(p) = W_{v\varepsilon}(p) \cdot V(p) + W_{f\varepsilon}(p) \cdot F(p) = E_v(p) + E_f(p), \quad (1.10.4)$$

где

$$W_{v\varepsilon}(p) = \frac{1}{1 + W(p)}, \quad (1.10.5)$$

$$W_{f\varepsilon}(p) = \frac{-W_{об}(p)}{1 + W(p)}. \quad (1.10.6)$$

Широкий класс командных сигналов и возмущающих воздействий может быть представлен степенными функциями времени

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots) \cdot 1(t). \quad (1.10.7)$$

Сначала рассмотрим реакцию системы на возмущающее воздействие вида

$$f(t) = \frac{f_v}{v!} \cdot t^v \cdot 1(t), \quad (1.10.8)$$

где  $f_v = \text{const}$  и имеет размерность возмущения  $f$ , деленную на  $\text{сек}^v$ . Такая функция имеет ненулевые производные от нулевого до  $v$  порядка и нулевые производные порядка выше чем  $v$ . Причем

$$f^{(v)}(t) = f_v. \quad (1.10.9)$$

Изображение по Лапласу возмущения (1.10.8) имеет вид:

$$F_v(p) = \frac{f_v}{p^{v+1}}. \quad (1.10.10)$$

Пусть

$$W_{об}(p) = \frac{K_{об} R_{об}(p)}{Q_{об}(p)}, \quad (1.10.11)$$

$$W_{пер}(p) = \frac{K_{пер} R_{пер}(p)}{p^l Q_{1пер}(p)} \quad (1.10.12)$$

и

$$R_{об}(0) = R_{пер}(0) = Q_{об}(0) = Q_{1пер}(0) = 1. \quad (1.10.13)$$

Тогда изображение ошибки можно представить в виде:

$$E_f(p) = \frac{-K_{об} \cdot R_{об}(p) \cdot p^l \cdot Q_{1пер}(p)}{Q_{об}(p) \cdot p^l \cdot Q_{1пер}(p) + K_{об} \cdot K_{пер} \cdot R_{об}(p) \cdot R_{пер}(p)} \times \\ \times \frac{f_v}{p^{v+1}}. \quad (1.10.14)$$

В соответствии с предельной теоремой преобразования Лапласа, если существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E_f(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_{об}}{K_{об} \cdot K_{пер}} \cdot f_v \cdot p^{l-v}. \quad (1.10.15)$$

Если  $v = l$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f(t) = \frac{-f_v}{K_{пер}}. \quad (1.10.16)$$

Очевидно, в этом случае размерность коэффициента  $K_{пер}$  равна отношению размерностей возмущения и ошибки, умноженному на  $\text{сек}^{-l}$ . Такая система называется **астатической по возмущающему воздействию с порядком астатизма  $l$** . Если на вход такой системы подать возмущающий сигнал типа степенной функции времени с  $v < l$ , то установившаяся ошибка будет равна нулю.

Если  $l = 0$ , то нетрудно убедиться в том, что если возмущение является единичной функцией

$$f(t) = f_0 \cdot 1(t), \quad (1.10.17)$$

то

$$\varepsilon_f(\infty) = \frac{-K_{об}}{1 + K_{об} \cdot K_{рег}} \cdot f_0. \quad (1.10.18)$$

Такая система называется **статической**, поскольку при постоянном возмущении ошибка в статике не равна нулю, пропорциональна величине возмущения  $f_0$  и тем меньше, чем больше коэффициент усиления разомкнутого контура  $K = K_{об}K_{рег}$ .

Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда  $f = 0$ , а командный сигнал является степенной функцией времени:

$$v(t) = \frac{v_v}{v!} \cdot t^v \cdot 1(t). \quad (1.10.19)$$

В этом случае положим:

$$Q(p) = Q_{об}(p) \cdot Q_{рег}(p) = p^l \cdot Q_1(p) \text{ и } Q_1(0) = 1. \quad (1.10.20)$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_v(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^l \cdot Q_1(p)}{p^l \cdot Q_1(p) + K \cdot R(p)} \cdot \frac{v_v}{p^{v+1}}. \quad (1.10.21)$$

Такая система при  $l \neq 0$  называется **астатической по командному сигналу с порядком астатизма, равным  $l$** . В этом случае коэффициент  $K$  называется **добротностью** системы. Его размерность  $\text{сек}^{-l}$ .

Если  $v = l$ , то

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{v_v}{k} = \text{const.} \quad (1.10.22)$$

Если  $v < l$ , то  $\varepsilon_v(\infty) = 0$ .

При  $l = 0$  система называется **статической**. Для нее при

$$v(t) = v_0 \cdot 1(t) \quad (1.10.23)$$

имеем

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{v_0}{1 + K}. \quad (1.10.24)$$

В рассмотренном случае регулятор содержал  $l$  интеграторов, то есть был астатическим, а объект интеграторов не содержал – был статическим. Если рассмотреть другой вариант, где, в отличие от (1.10.11), (1.10.12),

$$W_{об}(p) = \frac{K_{об}R_{об}(p)}{p^l Q_{1об}(p)}; \quad W_{пер}(p) = \frac{K_{пер}R_{пер}(p)}{Q_{пер}(p)}$$

и

$$R_{об}(0) = R_{пер}(0) = Q_{1об}(0) = Q_{пер}(0) = 1,$$

то выводы по отработке командного сигнала не изменятся, а при возмущении (1.10.8)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-f_v}{K_{пер}} \cdot \frac{1}{p^v}.$$

При  $v = 0$  получаем

$$\varepsilon_f(\infty) = \frac{-K_{об}}{1 + K_{об} \cdot K_{пер}} \cdot f_0,$$

а при  $v > 0$  ошибка с течением времени неограниченно растет.

Таким образом, порядок астатизма системы по отношению к какому-либо внешнему воздействию равен числу интегрирующих звеньев, включенных в обратную связь между координатой ошибки и этим воздействием.

**Системой с астатизмом  $l$ -го порядка по отношению к командному сигналу**  $v$  называется система автоматического управления, вынужденная ошибка которой при отработке сигнала, выражаемого в виде полинома степени  $l$  по  $t$

$$A_0 + A_1 t + \dots + \frac{A_l}{l!} t^l,$$

постоянна и пропорциональна величине  $A_l$ , то есть старшей производной воздействия. При отработке сигнала, выражаемого полиномом меньшей степени, установившаяся ошибка в такой системе равна нулю.

Изложенные выше рассуждения приводят к выводу, что с точки зрения стремления к уменьшению ошибки желательно иметь более высокий порядок астатизма и более высокое значение  $K_{\text{рег}}$ . И то и другое, как правило, вступает в противоречие с требованиями устойчивости. Уже синтез устойчивой системы с астатизмом выше третьего порядка ставит перед разработчиком серьезные проблемы.

**ПРИМЕР 1.10.1**

Пусть дана система со структурной схемой, представленной на рис. 1.51. Система обладает астатизмом 1-го порядка как по командному, так и по возмущающему воздействиям, так как система содержит один интегратор с передаточной функцией  $p^{-1}$  в регуляторе (корректирующем звене). Для данной системы:

1. Если  $f = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ , то  $\varepsilon_{\text{уст}} = 0$ .

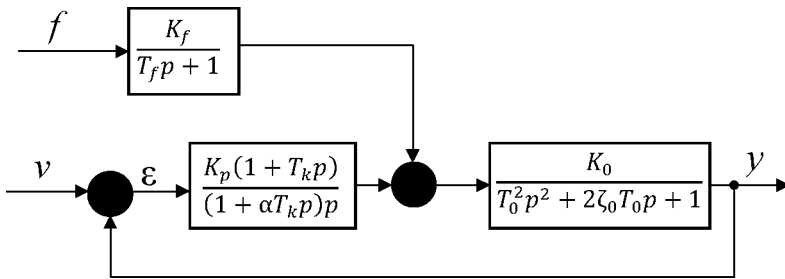


Рис. 1.51. Иллюстрация к примеру 1.10.1

2. Если  $v = v_1 \cdot t$ ,  $v_1 = \text{const}$ , а  $f$  – константа или нулевая величина, то кинетическая ошибка

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \varepsilon(\infty) = \frac{v_1}{K},$$

где добротность

$$K = K_p \cdot K_{\text{об}}.$$

3. Если  $f = f_1 \cdot t$ ,  $f_1 = \text{const}$ , а  $v$  – константа или нулевая величина, то

$$\varepsilon_{уст} = -\frac{f_1 \cdot K_f}{K_p}.$$

4. Если  $v = v_2 \cdot t^2$ ,  $v_2 = \text{const}$  или  $f = f_2 \cdot t^2$ ,  $f_2 = \text{const}$ , то ошибка будет непрерывно нарастать.

### 1.10.3. Точность систем при обработке гармонических сигналов

Каждый командный сигнал может быть разложен либо в дискретный (ряд Фурье для периодической функции времени), либо в непрерывный спектр гармоник (интегральное преобразование Фурье).

Для того чтобы воспроизвести командный сигнал с малыми искажениями, необходимо точно воспроизвести хотя бы существенные гармоники этого спектра. В интервале этих существенных частот АЧХ замкнутой системы должна быть близка к единице, а ФЧХ – к нулю (рис. 1.52). При этом, естественно, полоса пропускания системы должна быть заведомо шире спектра командного сигнала.

Для оценки величины  $\omega_B$  рассмотрим спектральную плотность сигнала (спектр мощности):

$$S_V(\omega) = V(j\omega) \cdot V(-j\omega) = |V(j\omega)|^2. \quad (1.10.25)$$

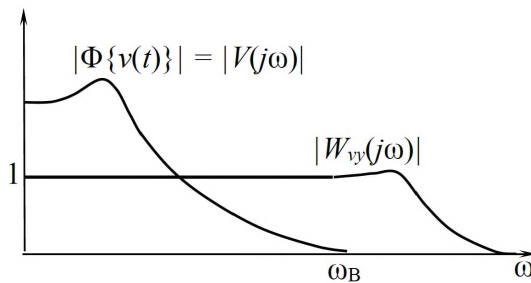


Рис. 1.52. Спектральная характеристика командного сигнала  $\Phi\{V(t)\}$  и АЧХ системы  $W_{yy}(\omega)$

Полная энергия сигнала определяется выражением

$$E_V = \int_0^{\infty} S_V(\omega) d\omega. \quad (1.10.26)$$

Величину  $\omega_B$  целесообразно выбрать так, чтобы площадь под кривой  $S(\omega)$  на интервале частот  $[0, \omega_B]$  составляла не менее 90% от площади под этой кривой, во всем диапазоне частот от нуля до бесконечности (рис. 1.53).

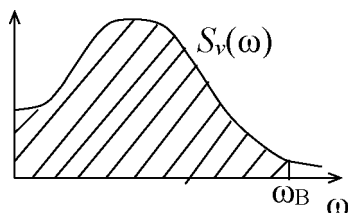


Рис. 1.53. К обоснованию выбора величины  $\omega_B$

Применительно к структурной схеме, приведенной на рис. 1.41, для которой частотная функция от командного сигнала к ошибке имеет вид:

$$W_{ve}(j\omega) = \frac{1}{1 + W(j\omega)}, \quad (1.10.27)$$

этим требованиям соответствует неравенство

$$\left| \frac{1}{1 + W(j\omega)} \right| < \Delta, \quad 0 \leq \omega < \omega_B, \quad (1.10.28)$$

где  $\Delta$  – некоторая заданная величина. В рассматриваемом диапазоне частот обычно  $|W(j\omega)| \gg 1$ . Поэтому неравенство (1.10.28) будет всегда выполняться, если

$$\frac{1}{-1 + |W(j\omega)|} < \Delta. \quad (1.10.29)$$

Отсюда следует:

$$|W| > \frac{1 + \Delta}{\Delta} \approx \frac{1}{\Delta}. \quad (1.10.30)$$

Таким образом, для точного воспроизведения командного сигнала требуется, чтобы в спектре частот от 0 до  $\omega_B$  выполнялось условие

$$|W| > \frac{1}{\Delta}. \quad (1.10.31)$$

Обычно принимают:  $\Delta = 0,05 - 0,1$ . Применительно к ЛАЧХ неравенство (1.10.31) превращается в требование того, чтобы в диапазоне  $0 \leq \omega < \omega_B$  выполнялось условие:

$$|W(j\omega)| \text{ дБ} > (20 - 26) \text{ дБ}. \quad (1.10.32)$$

#### 1.10.4. Связь между логарифмическими амплитудно-частотными характеристиками и качеством переходных процессов в САУ

Между частотными и временными характеристиками систем существует однозначная взаимозависимость. Особенно много внимания уделялось этому вопросу в те времена, когда вычислительная техника была недоступна рядовому инженеру и он должен был судить о свойствах разрабатываемых систем, пользуясь только косвенными оценками. Часть таких методик косвенных оценок качества по частотным характеристикам представляет интерес и в настоящее время. На эту тему имеется обширная учебная литература. В настоящем издании затрагивается один фрагмент из этих методик, который позволяет достаточно просто связать качество временных процессов в замкнутых системах с видом амплитудно-частотных логарифмических характеристик соответствующих разомкнутых систем. Здесь следует отметить, что дальнейшее содержание параграфа относится лишь к так называемым минимально-фазовым системам, то есть к таким, передаточные функции которых не содержат ни нулей, ни полюсов с положительной вещественной частью.

Весь диапазон частот при рассмотрении ЛАЧХ (рис. 1.54) разбивают на три поддиапазона.

*Область низких частот*  $[0 \leq \omega < \omega_n]$ . Этот диапазон определяет в значительной мере точность воспроизведения «медленно» меняющихся воздействий. В этом диапазоне в соответствии с результатами, полученными в предыдущем разделе, должно быть выполнено условие:

$$L(\omega) \geq 20 \lg \left( \frac{1}{\Delta} \right) = \begin{cases} 26 \text{ дБ, если } \Delta = 0,05; \\ 34 \text{ дБ, если } \Delta = 0,02. \end{cases} \quad (1.10.33)$$

Кроме того, вид ЛАЧХ в этой области указывает на порядок астатизма и статическую или кинетическую точность системы. Наклон низкочастотной асимптоты равен  $-20 \cdot \nu$  дБ/декаду, где  $\nu$  – порядок астатизма.

Ширина интервала  $[0, \omega_n]$  позволяет найти ширину спектра частот управляющих воздействий, воспроизводимых системой без значительных искажений, и позволяет судить о том, какие воздействия для рассматриваемой системы можно считать медленно изменяющимися.

Диапазон средних частот  $[\omega_n, \omega_k]$  определяет запасы устойчивости и качество системы при воздействии типа ступенчатой функции. В этом интервале находится частота среза  $\omega_c$ , позволяющая оценить время регулирования

$$t_p \approx (3 - 4) \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (1.10.34)$$

Частота среза  $\omega_c$  примерно равна собственной частоте замкнутой системы (частоте, где у замкнутой системы может быть некоторый резонанс).

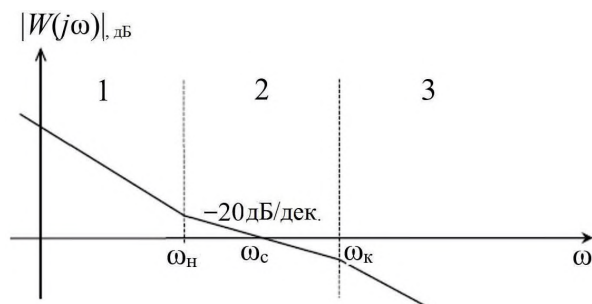


Рис. 1.54. Типовая ЛАЧХ

Для удовлетворительного качества переходных процессов необходимо, чтобы ЛАЧХ на этом интервале имела наклон  $-20$  дБ/дек., а длина этого интервала примерно равнялась одной декаде. На этом

интервале определяются запасы устойчивости системы. Рекомендуемые значения этих запасов составляют примерно 10 дБ по модулю и 35–40° по фазе.

Интервал высоких частот [ $\omega > \omega_k$ ] примерно соответствует  $|W(j\omega)|_{\text{дБ}} \leq -16$  дБ. На этот интервал приходится сопрягающие частоты, пренебрежение которыми не оказывает существенного влияния на качество переходных процессов.

**ПРИМЕР 1.10.2**

Дана система с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p^3} \left( \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} \right)^2.$$

Это система с астатизмом третьего порядка. На рис. 1.55 представлена ее логарифмическая амплитудно-частотная характеристика. Цифрами 1, 2, 3 обозначены области низких, средних и высоких частот.

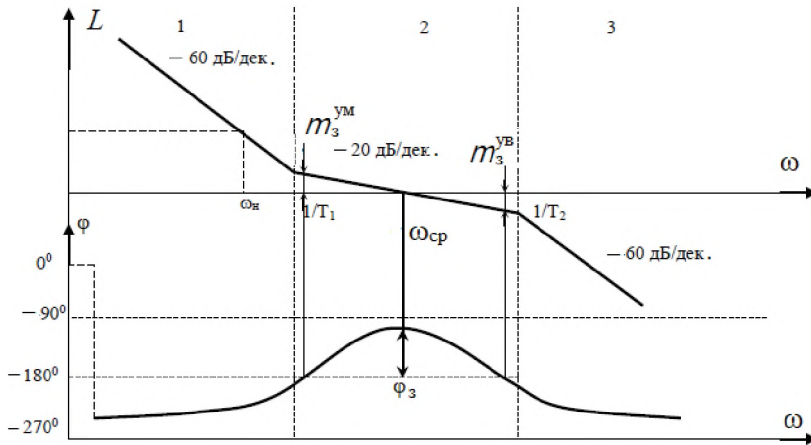


Рис. 1.55. Иллюстрация к примеру 1.10.2

**1.10.5. Соотношение масштабов во временной и частотной областях**

Если функция  $f(t)$  преобразуема по Фурье,  $F(j\omega) = \Phi \{f(t)\}$  – ее преобразование по Фурье и  $a$  – положительное вещественное число, то справедливо равенство

$$\Phi \left\{ f \left( \frac{t}{a} \right) \right\} = aF(ja\omega). \quad (1.10.35)$$

Докажем это. Прямое преобразование Фурье выражается формулой

$$F(j\bar{\omega}) = \int_0^{\infty} f(\bar{t}) \cdot e^{-j\bar{\omega}\bar{t}} d\bar{t}. \quad (1.10.36)$$

Введем новые переменные:  $t = \bar{t} \cdot a$ ,  $\omega = \frac{\bar{\omega}}{a}$ . Тогда

$$F(j\omega a) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f \left( \frac{t}{a} \right) e^{-ja\omega \left( \frac{t}{a} \right)} dt,$$

откуда

$$aF(j\omega a) = \int_0^{\infty} f \left( \frac{t}{a} \right) e^{-ja\omega \left( \frac{t}{a} \right)} dt,$$

и равенство (1.10.35) доказано.

Таким образом, при растяжении (сжатии) в  $a$  раз графика функции  $f(t)$  вдоль оси времени график модуля спектральной характеристики  $|F(j\omega)|$ , во-первых, сжимается (растягивается) вдоль оси частот в  $a$  раз и, во-вторых, увеличиваются (уменьшаются) в  $a$  раз его значения. Известно, что *чем короче импульс, тем шире его спектр*.

Изображение по Фурье от переходной функции  $h(t)$  системы с передаточной функцией  $W(p)$  имеет вид:

$$H(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{j\omega}, \quad (1.10.37)$$

поэтому сама функция  $h(t)$  может быть определена с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(\bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(j\bar{\omega})}{j\bar{\omega}} e^{j\bar{\omega}\bar{t}} d\bar{\omega}. \quad (1.10.38)$$

По аналогии с пунктом 1 введем новые переменные:

$$t = \bar{t} \cdot a, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}}{a},$$

и, подставив их в (1.10.38), получим:

$$h\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(ja\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.10.39)$$

Таким образом, если частотная характеристика системы получается путем сжатия (или растяжения) вдоль оси частот частотной характеристики некоторой исходной системы (рис. 1.56), то ее переходная функция, соответственно, растягивается (или сжимается) вдоль оси времени.

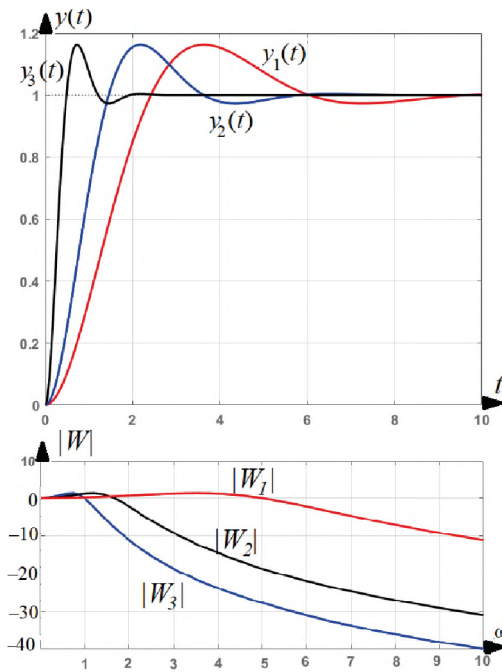


Рис. 1.56. Связь между изменением полосы пропускания системы и длительностью ее переходной функции

**§ 1.11. Интегральные критерии качества с позиций общности задач оптимального и модального синтеза**

При рассмотрении качества систем управления большое место занимает группа интегральных критериев качества. Они достаточно полно изложены в обширной литературе по теории автоматического регулирования и управления. Это интегралы от координат вектора состояния, вектора управления, ошибки регулирования. Интегральные показатели, или критерии качества, непосредственно выходят на синтез оптимального управления. При этом под оптимальностью понимается минимум какого-либо интегрального критерия. Наиболее простой из них – это интеграл от квадрата ошибки отработки командного сигнала на бесконечном интервале времени

$$J_0 = \int_{t=0}^{\infty} \varepsilon^2(t) dt. \quad (1.11.1)$$

Однако, как показала практика, стремление к минимизации такого критерия приводит к чрезмерной колебательности переходных процессов. В связи с этим стали усложнять функционал. Так, например, кроме квадрата ошибки с целью уменьшения выбросов в переходных процессах в функционал стали вводить квадрат от ее производной:

$$J_1 = \int_{t=0}^{\infty} (c_0 \varepsilon^2(t) + c_1 \dot{\varepsilon}^2(t)) dt. \quad (1.11.2)$$

Кроме этого, оказалось полезным учитывать величину управляющего воздействия:

$$J_2 = \int_{t=0}^{\infty} (c_0 \varepsilon^2(t) + c_1 \dot{\varepsilon}^2(t) + c_U u^2(t)) dt. \quad (1.11.3)$$

Различные исполнения системы в некоторых случаях стало удобным сравнивать по величине соответствующих интегральных показателей. Такой анализ неизбежно стал перерастать в синтез оптимального управления с различными интегральными критериями.

В одной из наиболее общих форм интегральные критерии, используемые в оптимальном синтезе, записывают в виде

$$J = \int_0^{\infty} (\vec{x}^T(t)Q_X\vec{x}(t) + 2\vec{x}^T(t)Q_{XU}\vec{u}(t) + \vec{u}^T(t)Q_U\vec{u}(t))dt. \quad (1.11.4)$$

Возникло направление в теории оптимальных систем – аналитическое конструирование регуляторов (АКР). Был разработан специальный математический аппарат, обеспечивающий расчет управления, которое минимизирует функционал вида (1.11.4).

Однако появилась очередная проблема – проблема выбора значений элементов матриц  $Q_X$ ,  $Q_{XU}$ ,  $Q_U$  в соответствующих квадратичных формах. Эту задачу в общем виде формализовать не удалось до сих пор. В то же время при проектировании систем выявилась важная закономерность: эталонные процессы, к которым притягивается движение в системе, должны соответствовать структуре управляемого объекта. Это означает, что уравнения эталонной системы, отображенной на рис. 1.46, должны иметь такой же вид, как и уравнения объекта. Поэтому в качестве эталонной системы можно выбрать систему того же порядка, что и объект, но с собственными числами, а значит, и с характеристическим полиномом, отвечающими требованиям, предъявляемым к замкнутой системе.

Рассмотрим способ формирования ошибки  $\varepsilon_E$ , характеризующей отклонение некоторой конкретной системы от эталонной. Пусть эталонная система  $n$  однородных дифференциальных уравнений первого порядка приведена к одному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка:

$$x_{\mathcal{E}}^{(n)} + \gamma_1 x_{\mathcal{E}}^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1} x_{\mathcal{E}}^{(1)} + \gamma_n x_{\mathcal{E}} = 0. \quad (1.11.5)$$

В левую часть равенства (1.11.5) вместо координаты  $x_{\mathcal{E}}$  подставим одну из координат вектора состояния объекта. Скорее всего, при этом равенство нулю нарушится. Получаем уравнение невязки:

$$x_{O6}^{(n)} + \gamma_1 x_{O6}^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1} x_{O6}^{(1)} + \gamma_n x_{O6} = \varepsilon_E. \quad (1.11.6)$$

Переменная  $\varepsilon_E$  характеризует отклонение процессов объекта от эталонных. Она равна нулю на интервале времени  $t = [0, \infty)$  только

лишь в том случае, когда процессы в объекте или в проектируемой системе полностью тождественны процессам в эталонной системе.

Учтем уравнение объекта

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (1.11.7)$$

и приведем уравнение (1.11.6) к такому виду, чтобы в него входили только координаты векторов состояния  $\vec{x}$  и управления  $\vec{u}$ :

$$q_{x1}x_1(t) + q_{x2}x_2(t) + \dots + q_{xn}x_n(t) + q_{u1}u_1(t) + q_{u2}u_2(t) + \dots + q_{un_u}u_{n_u}(t) = \varepsilon_E(t). \quad (1.11.8)$$

Это уравнение, используя очевидные обозначения, можно записать иначе:

$$\vec{q}_x^T \vec{x}(t) + \vec{q}_u^T \vec{u}(t) = \varepsilon(t). \quad (1.11.9)$$

В соответствии с введенной текущей ошибкой  $\varepsilon_E(t)$  может быть использован интегральный критерий качества (функционал)

$$J = \int_0^{\infty} \varepsilon_E^2(t) dt. \quad (1.11.10)$$

Квадрат ошибки можно записать с помощью квадратичных форм:

$$\varepsilon_E^2 = \begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{q}_x \\ \vec{q}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_x \\ \vec{q}_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{q}_x \vec{q}_x^T & \vec{q}_x \vec{q}_u^T \\ \vec{q}_u \vec{q}_x^T & \vec{q}_u \vec{q}_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.11.11)$$

где

$$\vec{q}_x = \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ \dots \\ q_{xn} \end{bmatrix}; \quad \vec{q}_u = \begin{bmatrix} q_{u1} \\ q_{u2} \\ \dots \\ q_{un_u} \end{bmatrix}. \quad (1.11.12)$$

Обозначив

$$Q_X = \vec{q}_x^T \vec{q}_x^T; \quad Q_U = \vec{q}_u \vec{q}_u^T; \quad Q_{XU} = \vec{q}_u \vec{q}_u^T, \quad (1.11.13)$$

в итоге получаем критерий (1.11.4).

В связи с тем что порядки уравнений объекта и эталонной системы совпадают, в результате оптимального синтеза удастся найти оптимальное управление, при котором минимум функционала окажется равным нулю. Так как при этом для процессов в системе с оптимальным управлением выполняется равенство (1.11.6) при  $\varepsilon_E = 0$ , то полученная система будет иметь характеристический полином:

$$\varphi_C(\lambda) = \varphi_{\Xi}(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \lambda + \gamma_n, \quad (1.11.14)$$

и следовательно, собственные числа синтезированной системы совпадут с собственными числами эталона.

Таким образом, результаты АКР при таком подходе не только обеспечивают минимум критерия (1.11.4), равный нулю, но и позволяют получить систему с желаемыми собственными числами. Поскольку связь переходных процессов с собственными числами (модами) системы более очевидна и непосредственна, модальный синтез часто оказывается предпочтительнее метода АКР, тем более что алгоритм модального синтеза существенно проще алгоритмов АКР.

#### ПРИМЕР 1.11.1

Для иллюстрации изложенного рассмотрим объект, представленный на рис. 1.9. Уравнения объекта имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + u(t). \end{aligned} \quad (1.11.15)$$

Пусть эталонная система (эталонный процесс) определяется уравнением

$$x_{\Xi}^{(3)}(t) + \gamma_1 x_{\Xi}^{(2)}(t) + \gamma_2 x_{\Xi}^{(1)}(t) + \gamma_3 x_{\Xi}(t) = \gamma_3 v(t), \quad (1.11.16)$$

соответствующим желаемым собственным числам. Из этого уравнения видно, что при постоянном командном сигнале  $v = v_0 = \text{const}$  в статике

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\Xi}(t)) = x_{\Xi \text{ уст}} = v_0. \quad (1.11.17)$$

Подставив в левую часть равенства (1.11.16) координату объекта  $x_1(t)$ , получим уравнение невязки:

$$\varepsilon_E(t) = x_1^{(3)}(t) + \gamma_1 x_1^{(2)}(t) + \gamma_2 x_1^{(1)}(t) + \gamma_3 x_1(t). \quad (1.11.18)$$

Заменяем производные от координаты  $x_1$  на координаты вектора состояния объекта с учетом уравнений (1.11.15):

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_2; \\ x_1^{(2)} &= x_2^{(1)} = -2x_1 + x_3; \\ x_1^{(3)} &= -2x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 4x_2 - 3x_3 + u. \end{aligned} \quad (1.11.19)$$

В результате уравнение невязки принимает вид:

$$\varepsilon_E(t) = \gamma_3 x_1(t) + (4 - 2\gamma_1 + \gamma_2)x_2(t) + (\gamma_1 - 3)x_3(t) + u(t), \quad (1.11.20)$$

откуда получаем:

$$\vec{q}_x = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ 4 - 2\gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 - 3 \end{bmatrix}; \quad q_u = 1. \quad (1.11.21)$$

Теперь в соответствии с (1.11.13) могут быть вычислены матрицы  $Q_X$ ,  $Q_U$ ,  $Q_{XU}$  и получен функционал (1.11.4) для использования при решении задачи АКР.

В то же время, приравняв к нулю  $\varepsilon_E(t)$  в (1.11.20), можно непосредственно получить выражение для формирования управления  $u(t)$  через координаты вектора состояния объекта. Более того, если потребовать выполнения равенства

$$x_1^{(3)}(t) + \gamma_1 x_1^{(2)}(t) + \gamma_2 x_1^{(1)}(t) + \gamma_3 x_1(t) = \gamma_3 v(t), \quad (1.11.22)$$

то с учетом (1.11.20) получим систему с обратной связью по вектору состояния и управлением

$$u(t) = L\vec{x}(t) + k^v v(t), \quad (1.11.23)$$

где фигурируют матрица обратной связи

$$L = \begin{bmatrix} -\gamma_3 & -4 + 2\gamma_1 - \gamma_2 & 3 - \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.24)$$

и передаточный коэффициент по командному сигналу

$$k^v = \gamma_3. \quad (1.11.25)$$

Таким образом, без решения задачи АКР получено оптимальное управление, обеспечивающее процессы в замкнутой системе, имеющих собственные числа, соответствующие характеристическому полиному эталонной системы (1.11.14). В полученной системе обеспечена единичная статика по командному сигналу  $v$  (1.11.17).

В этом примере проиллюстрирована идентичность задачи АКР с надлежащим образом выбранным критерием оптимальности задаче модального синтеза. В следующей части данного учебника будет подробно изложена методика модального синтеза.

---

**МЕТОДЫ СИНТЕЗА НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ****§ 2.1. Выбор корректирующих звеньев. Метод желаемых ЛЧХ**

Как уже отмечалось, существует связь между частотными характеристиками системы, как в замкнутом, так и в разомкнутом состоянии, и протекающими в ней переходными процессами. На протяжении многих лет инженерами накоплен большой опыт по синтезу систем автоматического управления на базе формирования эталонных, желаемых частотных характеристик соответствующих разомкнутых систем. В литературе имеются обширные таблицы таких эталонных логарифмических АЧХ для большого числа типовых передаточных функций объектов управления. В настоящем издании излагается лишь основная идея такого подхода.

Рассматривается одноконтурная система (рис. 2.1). Разомкнутый контур состоит из последовательно включенных неизменяемой части системы (в нее входят объект, привод, датчики, преобразующие и согласующие устройства) с передаточной функцией  $W_0(p)$  и корректирующего звена с передаточной функцией  $W_k(p)$ .

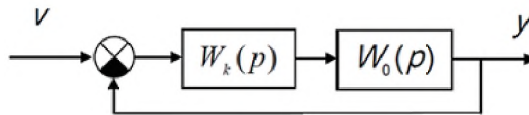


Рис. 2.1. Исходная структурная схема

Предполагается, что заданы требования к основным показателям

качества, обсуждавшимся в §1.10.1. В соответствии с этим по упомянутым таблицам или на основе подхода, изложенного в §1.10.4, строится асимптотическая ЛАЧХ  $L_{\text{жел}}(\omega)$  разомкнутой системы, удовлетворяющая указанным требованиям. На этом же рисунке строится асимптотическая ЛАЧХ неизменяемой части системы

$$L_0(\omega) = |W_0(j\omega)|_{\text{дБ}}. \quad (2.1.1)$$

Потребуем, чтобы комплексный передаточный коэффициент разомкнутой системы был равен функции, определяемой желаемой ЛАЧХ, то есть

$$W_{\text{жел}}(j\omega) = W_k(j\omega) \cdot W_0(j\omega) \quad (2.1.2)$$

или

$$L_{\text{жел}}(\omega) = L_k(\omega) + L_0(\omega). \quad (2.1.3)$$

В соответствии с этим простой операцией графического вычитания легко получить асимптотическую ЛАЧХ корректирующего звена

$$L_k(\omega) = L_{\text{жел}}(\omega) - L_0(\omega). \quad (2.1.4)$$

По ней уже нетрудно восстановить передаточную функцию  $W_k(p)$ .

### ПРИМЕР 2.1.1

Передаточная функция неизменяемой части системы

$$W_0(p) = \frac{1}{p(p+1)(0,1p+1)}.$$

Требования к системе:

1. При обработке командных сигналов, меняющихся со скоростью до 10 ед/с, ошибка не должна превосходить 0,1 ед.
2. Время регулирования  $t_p \approx 1$  с.
3. Ошибка воспроизведения гармонических сигналов с амплитудой  $A_y$  на частотах до 1 рад/с должна быть не более 0,05  $A_y$ .

Последовательность расчета:

1. Построить асимптотическую ЛАЧХ неизменяемой части системы  $L_0(\omega)$  (рис. 2.2).
2. Построить желаемую ЛАЧХ  $L_{жел}(\omega)$ .
  - (а) В связи с тем, что согласно п. 1 требований к системе при линейно изменяющемся во времени командном сигнале допустима постоянная ошибка, системе нужно иметь астатизм первого порядка. Поэтому низкочастотная асимптота должна идти с наклоном  $-20$  дБ/дек. В соответствии с (1.10.22) добротность системы

$$K = \frac{v_1}{\varepsilon(\infty)} = \frac{10[\text{ед./с}]}{0,1[\text{ед}]} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, низкочастотная асимптота должна пересекать ось частот при  $\omega = 100$  рад/с.

- (b) Частота среза определяется с учетом требуемого времени регулирования из (1.10.34):

$$\omega_c = \frac{(3-4)\pi}{t_p} \approx 10 \text{ рад/с}.$$

Таким образом, среднечастотный участок желаемой ЛАЧХ на этой частоте пересекает ось абсцисс, имеет наклон  $-20$  дБ/дек. и протяженность, равную одной декаде, то есть занимает интервал

$$3,16 \leq \omega \leq 31,6.$$

- (c) Диапазон частот  $\omega > 31,6$  считаем высокочастотным. Наклон высокочастотной асимптоты выбираем равным  $-60$  дБ/дек., таким же как наклон высокочастотной асимптоты неизменяемой части системы.
- (d) Для того чтобы упростить реализацию корректирующего звена, низкочастотную и среднечастотные асимптоты соединяем отрезком прямой с наклоном  $-40$  дБ/дек. При этом следует учесть требование по точности воспроизведения гармонического сигнала: в соответствии с (1.10.33)

на частоте 1 рад/с желаемая ЛАЧХ должна пройти выше уровня 26 дБ.

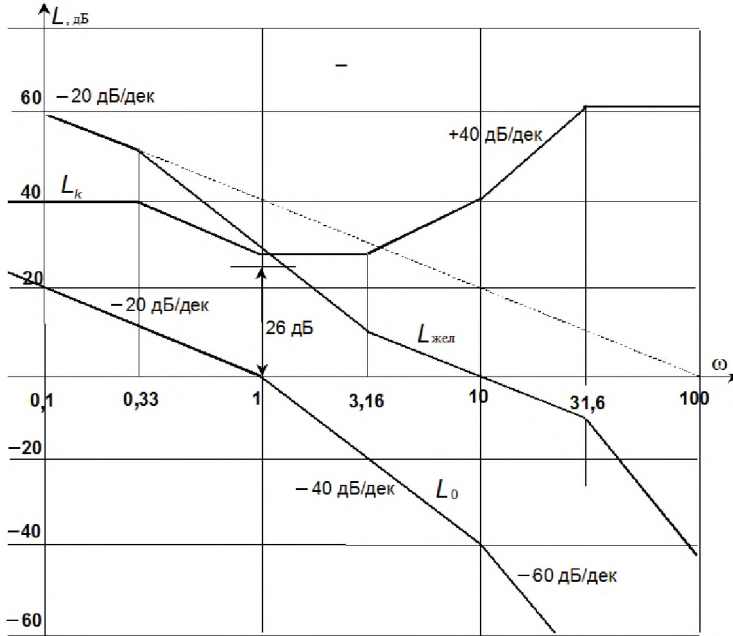


Рис. 2.2. Иллюстрация к методу желаемых ЛЧХ

3. Построить ЛАЧХ корректирующего звена, производя графическое вычитание отрезков прямых в соответствии с (2.1.4).
4. Замерить значения сопрягающих частот асимптотической ЛАЧХ корректирующего звена и записать соответствующее выражение для передаточной функции:

$$W_k(p) = \frac{100(p+1)\left(\frac{1}{3.16}p+1\right)\left(\frac{1}{10}p+1\right)}{\left(\frac{1}{0.33}p+1\right)\left(\frac{1}{31.6}p+1\right)^2}$$

§ 2.2. Управляемость линейных стационарных систем

Непрерывная линейная система

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (2.2.1)$$

является полностью управляемой тогда и только тогда, когда она может быть переведена из любого начального состояния  $\vec{x}(t_0)$  в произвольный момент времени  $t_0$  в любое конечное состояние  $\vec{x}(t_1)$  за конечное время  $t_1 - t_0$ .

Примем начальные условия нулевыми:  $\vec{x}(t_0) = 0$ . Тогда, в соответствии с формулой Коши,

$$\vec{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\vec{u}(\tau) d\tau. \quad (2.2.2)$$

Принимая во внимание выражение для матричной экспоненты в виде бесконечного ряда

$$e^{A(t_1-\tau)} = E + \frac{A(t_1-\tau)}{1!} + \frac{A^2(t_1-\tau)^2}{2!} + \dots, \quad (2.2.3)$$

равенство (2.2.3) можно записать в виде

$$\vec{x}(t_1) = B \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}(\tau) d\tau + AB \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - \tau) \vec{u}(\tau) d\tau + A^2 B \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^2}{2!} \vec{u}(\tau) d\tau + \dots$$

Обозначим:

$$\vec{\alpha}_i = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^i}{i!} \vec{u}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \dots \\ \alpha_{i,nu} \end{bmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Представим произведения  $A^i B$  в виде блочных матриц-векторов  $\vec{\beta}$ :

$$A^i B = \left[ \vec{\beta}_{i1} \vec{\beta}_{i2} \dots \vec{\beta}_{i,nu} \right]. \quad (2.2.5)$$

Тогда

$$A^i B \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^i}{i!} \vec{u}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_{i_1} & \vec{\beta}_{i_2} & \dots & \vec{\beta}_{i_{n_u}} \end{bmatrix} \cdot \vec{\alpha}_i = \sum_{v=1}^{n_u} \alpha_{iv} \vec{\beta}_{iv} \quad (2.2.6)$$

и

$$\vec{x}(t_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{n_u} \alpha_{iv} \cdot \vec{\beta}_{iv}. \quad (2.2.7)$$

В результате вектор  $\vec{x}(t_1)$  может рассматриваться как линейная комбинация векторов  $\vec{\beta}_{iv}$ , являющихся вектор-столбцами матриц  $B, AB, A^2B, A^3B, \dots$ . Иначе говоря, конечное состояние  $\vec{x}(t_1)$  принадлежит линейному подпространству, порождаемому вектор-столбцами бесконечной последовательности матриц  $B, AB, A^2B, A^3B, \dots$ .

В этой последовательности должна появиться матрица  $A^l B$ , все вектор-столбцы которой линейно зависят от вектор-столбцов предыдущих матриц  $B, AB, A^2B, \dots, A^{l-1}B$ . Такая матрица обязательно должна иметь место, так как в линейном  $n$ -мерном пространстве не может быть более чем  $n$  линейно независимых векторов. Отсюда же следует, что  $l \leq n$ .

Таким образом, можно записать:

$$A^l B = B\Lambda_0 + AB\Lambda_1 + \dots + A^{l-1}B\Lambda_{l-1}, \quad (2.2.8)$$

где  $\Lambda_i$  – соответствующие диагональные матричные коэффициенты

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{in_u} \end{bmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Очевидно, тем же свойством обладает и матрица  $A^{l+1}B$ , так как

$$A^{l+1}B = AA^l = AB\Lambda_0 + A^2B\Lambda_1 + \dots + A^{l-1}B\Lambda_{l-2} + A^lB\Lambda_{l-1}. \quad (2.2.10)$$

По индукции можно утверждать то же самое и для всех  $A^k B$  при  $k \geq l$ . Итак, конечное состояние  $\vec{x}(t_1)$  принадлежит линейному подпространству, порождаемому вектор-столбцами матриц

$$B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$$

(здесь учтено, что  $l \leq n$ ). Если эти вектор-столбцы не порождают  $n$ -мерное пространство, то в такой системе можно достичь лишь тех состояний, которые принадлежат подпространству меньшей размерности.

Таким образом, критерий управляемости формулируется следующим образом.

**Система  $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$  полностью управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости**

$$U = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.2.11)$$

**равен  $n$ , то есть полной размерности линейного пространства.** При этом говорят, что пара матриц  $\{A, B\}$  полностью управляема.

#### ПРИМЕР 2.2.1

Определить управляемость системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1 + 5x_2 - 5u; \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 2x_2 + 3u; \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Для этой системы

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

и матрица управляемости

$$U = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -5 & 35 \\ 3 & -21 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю, она имеет ранг меньше двух, то есть меньше порядка системы, и система является неуправляемой.

Отметим, что собственные числа матрицы динамики системы

$$\lambda_1 = +1; \quad \lambda_2 = -7, \quad (2.2.12)$$

то есть система неустойчива. В то же время передаточная функция по выходной координате

$$W_{uy}(p) = -\frac{5}{p+7},$$

у нее только один – устойчивый – полюс, и по ней не видно, что в действительности система неустойчива.

Матричная передаточная функция по вектору состояния

$$W_{ux}(p) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{p+7} \\ 3 \\ \frac{1}{p+7} \end{bmatrix}.$$

Ей соответствует решение дифференциального уравнения системы

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}(0) + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \int_0^t e^{-7(t-\tau)} \vec{u}(\tau) d\tau.$$

Как видно, в вынужденной составляющей решения отсутствует одна – неустойчивая – мода. Кроме того, независимо от управляющего сигнала для координат вынужденной составляющей вектора состояния существует линейная связь

$$x_2(t) = -0,6x_1(t).$$

### ПРИМЕР 2.2.2.

Определить управляемость системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1 + 5x_2 - 10u; \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 2x_2 + 3u; \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Для этой системы

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix}$$



в качестве неизвестных в которой выступают координаты вектора состояния. В связи с тем, что, как правило,  $n_y < n$ , число уравнений оказывается меньше числа неизвестных, и решение невозможно.

В соответствии с теоремой Кэли – Гамильтона каждая квадратная матрица удовлетворяет собственному характеристическому уравнению:

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E = 0. \quad (2.3.4)$$

Поэтому матричная экспонента, являющаяся степенным рядом относительно матрицы  $A$ , может быть представлена в виде полинома степени  $n-1$ . С учетом этого равенство (2.3.2) можно записать в виде

$$\vec{y}(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t) \cdot C \cdot A^l \vec{x}(0), \quad (2.3.5)$$

где  $\gamma_l(t)$  – соответствующие коэффициенты этого полинома. Для  $i$ -й составляющей вектора выхода соответственно будем иметь:

$$y_i(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t) (CA^l)_i \vec{x}(0). \quad (2.3.6)$$

Здесь  $(CA^l)_i$  –  $i$ -я строка матрицы  $(CA^l)$ .

Если набор  $(CA^l)_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n_y$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  не содержит полного базиса, то есть  $n$  линейно независимых строк, иначе говоря, если матрица

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

имеет ранг меньший, чем  $n$ , то в качестве ненулевого вектора начальных условий  $\vec{x}(0) \neq 0$  может быть выбран вектор, ортогональный всем строкам матрицы  $N$ . Тогда в соответствии с (2.3.5) получим, что  $\vec{y}(t) = 0$  для всех  $t$ , то есть система не наблюдаема.

Теперь докажем, что если ранг матрицы  $N$  равен  $n$ , то  $\vec{x}(t_0)$  может быть определен с помощью конечного числа измерений вектора выхода  $y(t)$ . Обозначим

$$\Gamma(t_k) = [\gamma_0(t_k)E \ \gamma_1(t_k)E \ \dots \ \gamma_{n-1}(t_k)E], \quad (2.3.8)$$

где  $E$  – квадратная единичная матрица размером  $[n_y \times n_y]$ . Моменты измерения  $t_k$  выберем таким образом, чтобы для различных значений  $k$  элементы  $\gamma_i(t_k)$  отличались друг от друга. С учетом введенного обозначения равенство (2.3.5) примет вид:

$$\vec{y}(t_k) = \Gamma(t_k)N\vec{x}(0). \quad (2.3.9)$$

Известно, что ранг произведения любых двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Ранг матрицы  $\Gamma(t_k)$  не превосходит числа ее строк  $n_y < n$ . Проводя многократные измерения на интервале времени переходного процесса системы, построим расширенный вектор выхода

$$\vec{Y}_R = \begin{bmatrix} \vec{y}(t_1) \\ \vec{y}(t_2) \\ \dots \\ \vec{y}(t_n) \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

и обозначим

$$\Gamma_R = \begin{bmatrix} \Gamma(t_1) \\ \dots \\ \Gamma(t_n) \end{bmatrix}. \quad (2.3.11)$$

Матрица  $\Gamma_R$  имеет  $n_y \times n$  строк. Моменты измерений должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие  $\text{rank} \Gamma_R = n$ . Как было обусловлено, ранг матрицы  $N$  также равен  $n$ . Поэтому уравнение

$$\Gamma_R \cdot N \cdot \vec{x}(0) = \vec{Y}_R \quad (2.3.12)$$

содержит  $n$  линейно независимых скалярных уравнений, то есть оно может быть разрешено относительно вектора  $\vec{x}(0)$ .

Таким образом, доказан следующий **критерий полной наблюдаемости стационарных линейных систем**.

Линейная стационарная система вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости  $N$  равен  $n$ .

**ПРИМЕР 2.3.1.**

Объект управления задан уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -8x_1 + 3x_2 + 3u; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 4x_2 + 2u; \\ y &= x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Этим уравнениям соответствуют матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}; C = [1 \quad -2].$$

Определитель матрицы управляемости

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$$

неравен нулю, поэтому система управляема. Матрица наблюдаемости

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель также отличен от нуля, следовательно, система полностью наблюдаема.

Для данного объекта нетрудно рассчитать собственные числа

$$\lambda_1 = -5; \quad \lambda_2 = -7,$$

правые

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и левые

$$\vec{d}_1^T = [-0,5 \quad 1,5]; \quad \vec{d}_2^T = [0,5 \quad -0,5]$$

собственные векторы.

В соответствии с (1.4.28), (1.6.4) и (1.6.6) нетрудно получить передаточные функции по векторам состояния и выхода:

$$W_x(p) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{p+5} + \frac{1,5}{p+7} \\ \frac{1,5}{p+5} + \frac{0,5}{p+7} \end{bmatrix};$$

$$W_y(p) = -\frac{1,5}{p+5} + \frac{0,5}{p+7}.$$

В данном случае полюсы передаточной функции по выходу полностью отображают собственные числа матрицы динамики.

**ПРИМЕР 2.3.2.**

Объект управления задан уравнениями

$$\dot{x}_1 = -8x_1 + 3x_2 + 3u;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + 2u;$$

$$y = x_1 - 3x_2.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  здесь такие же, как и в предыдущем примере, следовательно, объект управляем. Матрица выхода

$$C = [1 \quad -3].$$

Ранг матрицы наблюдаемости

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

в данном случае меньше порядка объекта и равен единице, так как второй столбец пропорционален первому. Следовательно, данный объект не наблюдаем.

Правые и левые собственные векторы матрицы динамики и передаточная функция по вектору состояния такие же, как и в предыдущем примере. Передаточная функция по выходу

$$W_y(p) = -\frac{3}{p+5}.$$

У нее отсутствует полюс, равный второму собственному числу матрицы  $A$ .

Определим свободное движение объекта по вектору состояния и по выходу:

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}(0) = \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} \vec{v}_i \vec{d}_i^T \vec{x}(0);$$

$$y(t) = C \vec{x}(t).$$

Получаем:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} -0,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \vec{x}(0)e^{-5t} + \begin{bmatrix} 1,5 & -1,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \vec{x}(0)e^{-7t};$$

$$y(t) = [1 \quad -3] \vec{x}(0)e^{-5t}.$$

Если выбрать

$$\vec{x}(0) = \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

то, так как векторы  $\vec{v}_2$  и  $\vec{d}_1$  взаимно ортогональны и их скалярное произведение равно нулю, получим

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-7t},$$

в то время как

$$\vec{y}(t) = 0.$$

## § 2.4. Замена базиса в линейном конечномерном пространстве

Линейное пространство  $X$  называется конечномерным, а число  $n$  – числом измерений этого пространства, или его размерностью  $\dim X = n$ , если в  $X$  существуют  $n$  линейно независимых векторов, в то время как любые  $n + 1$  векторов в  $X$  линейно зависимы. Тогда  $X = R^n$ .

Система из  $n$  линейно независимых, заданных в определенном порядке векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  в  $n$ -мерном пространстве называется базисом этого пространства, а векторы базиса называются ортами.

Если каждый из векторов базиса ортогонален любому другому вектору этого базиса, то есть их скалярные произведения равны нулю, то такой базис называется **ортогональным**. Если, кроме того, модуль каждого вектора базиса равен единице, то базис называется **ортонормированным**.

Векторы  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , где  $\vec{x}$  – любой ненулевой вектор из  $R^n$ , линейно зависимы, так как их количество равно  $n + 1$ . Отсюда, при некоторых  $\alpha_i, \alpha_0 \neq 0$ , справедливо равенство





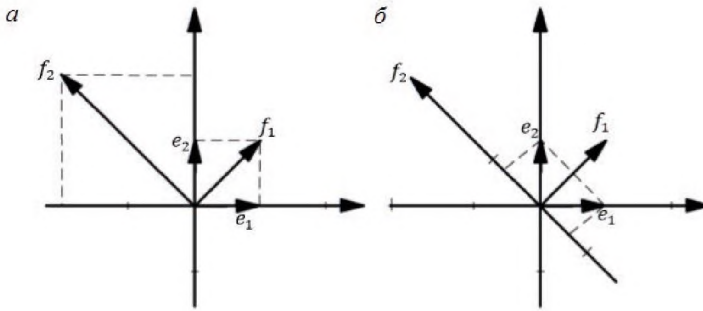


Рис. 2.3. Переход от одного базиса к другому: *a* – от  $[e]$  к  $[f]$ , *б* – от  $[f]$  к  $[e]$

Введем базис  $[f]$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2; \\ \vec{f}_2 &= -2 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Запишем матрицу перехода от базиса  $[e]$  к базису  $[f]$  (рис. 2.3, *a*):

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу перехода от базиса  $[f]$  к базису  $[e]$  (рис. 2.3, *б*):

$$FE = EF^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

и, в соответствии с (2.4.10), получаем

$$[\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2] = [\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2] \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = [1/2\vec{f}_1 + 1/2\vec{f}_2 \quad -1/4\vec{f}_1 + 1/4\vec{f}_2].$$

Этот результат подтверждается анализом базисных векторов на рис. 2.3.

Рассмотрим, как связаны между собой компоненты (координатные столбцы) одного и того же вектора  $\vec{x}$  в разных базисах. В соответствии с (2.4.2),

$$\vec{x} = x_{e_1} \vec{e}_1 + x_{e_2} \vec{e}_2 + \dots + x_{e_n} \vec{e}_n \quad (2.4.12)$$

и

$$\vec{x} = x_{f_1} \vec{f}_1 + x_{f_2} \vec{f}_2 + \dots + x_{f_n} \vec{f}_n. \quad (2.4.13)$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим:

$$[e] \cdot \vec{x}_e = [f] \cdot \vec{x}_f, \quad (2.4.14)$$

а с учетом (2.4.9)

$$[e] \cdot \vec{x}_e = [e] \cdot EF \cdot \vec{x}_f. \quad (2.4.15)$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x}_e = EF \cdot \vec{x}_f; \vec{x}_f = FE \cdot \vec{x}_e. \quad (2.4.16)$$

### § 2.5. Линейные операторы и матрицы линейных операторов

Отображение  $\mathcal{A}$  линейного пространства  $X$  в линейное пространство  $Y$

$$\mathcal{A}: X \rightarrow Y$$

называют линейным преобразованием или линейным оператором, если оно удовлетворяет двум условиям:

а)

$$\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{v}) \text{ для всех } \vec{x}, \vec{v} \in X; \quad (2.5.1)$$

б)

$$\mathcal{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha \mathcal{A}(\vec{x}) \text{ для всех } \vec{x} \in X \text{ и любого } \alpha. \quad (2.5.2)$$

Если отображение  $\mathcal{A}$  переводит вектор  $\vec{x}$  в некоторый другой вектор  $\vec{y}$ :

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{y}, \quad (2.5.3)$$

то вектор  $\vec{y}$  называют образом вектора  $\vec{x}$ , а  $\vec{x}$  – прообразом вектора  $\vec{y}$ .

Линейный оператор, отображающий линейное пространство  $R^n$  само в себя, называется **линейным оператором в  $R^n$** .

Пусть  $\vec{x} \in R^n, \vec{y} \in R^n$  и  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ . Рассмотрим, как связаны в этом случае координаты векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ . Будем ориентироваться сначала на базис  $[e] = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \dots \quad \vec{e}_n]$ . Очевидно при этом, что

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_{e_k} \vec{e}_k; \quad (2.5.4)$$



называется матрицей оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[e]$ . Элементы ее столбцов по построению – это координаты векторов  $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2) \dots$  в базисе  $[e]$ . Аналогично вводится понятие матрицы  $A_f$  того же оператора  $\mathcal{A}$  в некотором другом базисе  $[f]$ .

Рассмотрим теперь, как изменяется матрица оператора  $\mathcal{A}$  при замене базиса в пространстве  $R^n$ . Пусть, как и прежде,  $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$  и матрица  $A_e$ , в соответствии с (2.5.10), связывает между собой координатные столбцы векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  в базисе  $[e]$ .

Согласно ранее полученным результатам – соотношениям (2.4.16),

$$\vec{x}_e = EF \cdot \vec{x}_f \quad (2.5.12)$$

и

$$\vec{y}_e = EF \cdot \vec{y}_f. \quad (2.5.13)$$

Из этих двух соотношений и (2.5.10) легко выводится равенство

$$\vec{y}_f = A_f \cdot \vec{x}_f, \quad (2.5.14)$$

где

$$A_f = FE \cdot A_e \cdot EF. \quad (2.5.15)$$

Эта формула позволяет связать между собой матрицы одного и того же оператора в различных базисах. В математике такие матрицы называются **подобными**. Ранее (§1.4.3) уже отмечалось, что подобные матрицы имеют одинаковые собственные числа.

### *ПРИМЕР 2.5.1.*

Пусть имеется базис  $[e]$  (рис. 2.4).

1. Зададим оператор  $\mathcal{A}$  его действием на векторы базиса  $[e]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \\ \mathcal{A}(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_1. \end{aligned}$$

Тем самым мы определили матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[e]$ :

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Зададим вектор  $\vec{x}$  в базисе  $[e]$ :

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

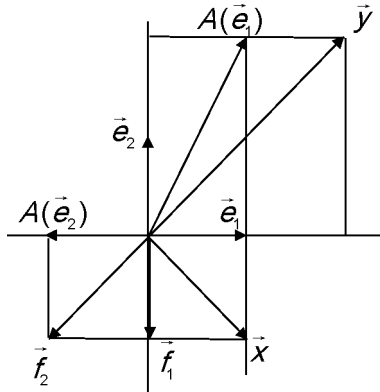


Рис. 3.4. Действие оператора на вектор  
Рис. 2.4. Действие оператора на вектор

Отсюда

$$\vec{x}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Рассчитаем координатный вектор, используя (2.5.10):

$$\vec{y}_e = A_e \vec{x}_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Введем новый базис  $[f]$ :

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= -\vec{e}_2; \\ \vec{f}_2 &= -\vec{e}_1 - \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Тогда матрица перехода от базиса  $[e]$  к базису  $[f]$  будет иметь вид

$$EF = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Определим матрицу  $A_f$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[f]$ :

$$A_f = FE \cdot A_e \cdot EF = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Найдем координатный столбец вектора  $\vec{x}$  в базисе  $[f]$ . В соответствии с рис. 2.4

$$\vec{x}_f = 2\vec{f}_1 - \vec{f}_2.$$

С другой стороны, согласно (2.5.12)

$$\vec{x}_f = FE \cdot \vec{x}_e. \quad (2.5.16)$$

Оба подхода дают один и тот же результат:

$$\vec{x}_f = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

В итоге получим координатный столбец вектора  $\vec{y}$  в базисе  $[f]$ :

$$\vec{y}_f = A_f \vec{x}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

### ПРИМЕР 2.5.2

Дана матрица  $A_e$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[e]$ :

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и два вектора  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$ , координатные столбцы которых в том же базисе имеют вид:

$$\vec{f}_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{f}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \\ \vec{f}_2 &= 3\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Примем эти векторы в качестве нового базиса и вычислим в этом базисе матрицу  $A_f$  оператора  $\mathcal{A}$ . Для этого выполним следующие действия.

1. Составим матрицу перехода от базиса  $[e]$  к базису  $[f]$ :

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Вычислим обратную матрицу:

$$EF^{-1} = FE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

3. Вычислим матрицу  $A_f$ :

$$A_f = FE \cdot A_e \cdot EF = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{bmatrix}.$$

### § 2.6. Замена базиса в пространстве состояний динамической системы

Пусть заданы уравнения системы

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t). \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Для этой системы могут быть найдены матрицы:  
управляемости

$$U = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \tag{2.6.2}$$

наблюдаемости

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2.6.3}$$

передаточной функции

$$W_{uy}(p) = C(pE - A)^{-1}B. \tag{2.6.4}$$

Могут быть также записаны выражения для векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \Phi(t - t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)B\vec{u}(\tau)d\tau; \\ \vec{y}(t) &= \Phi(t - t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t C\Phi(t - \tau)B\vec{u}(\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{2.6.5}$$

Полученные в предыдущих разделах результаты не были ограничены выбором какого-либо конкретного базиса в пространстве состояний. Все они были справедливы для любого базиса, в котором записаны матрицы  $A, B, C, \Phi, W, U, N$ . Для определенности назовем этот базис базисом  $[e]$ . В этом случае можно подразумевать, что символы всех векторов и матриц в выражениях (2.6.1)–(2.6.5) снабжены индексом  $e$ . В дальнейшем нам будет удобно выбирать вполне определенный базис в пространстве состояний  $X$  таким образом, чтобы матрицы имели «хорошую», каноническую форму. Такой выбор базиса может оказаться целесообразным, так как, во-первых, канонические представления матриц системы имеют минимальное число ненулевых элементов и поэтому удобны для моделирования и других вычислений, а во-вторых, канонические представления позволяют получить чрезвычайно простые алгоритмы синтеза управления.

Рассмотрим перевод уравнений (2.6.1) в некоторый новый базис  $[f]$ . Отметим при этом, что, переходя к новому базису в пространстве состояний, преобразовывая базис для пространства вектора состояний, не будем изменять базисы пространств входов и выходов системы. Заменим в (2.6.1)  $\vec{x}_e$  на  $\vec{x}_f$  согласно (2.5.12):

$$\begin{aligned}EF \cdot \dot{\vec{x}}_f &= A_e \cdot EF\vec{x}_f + B_e\vec{u}; \\ \vec{y} &= C_e \cdot EF \cdot \vec{x}_f.\end{aligned}\tag{2.6.6}$$

Умножая слева обе части дифференциального уравнения на  $EF^{-1} = FE$ , получим:

$$\dot{\vec{x}}_f = FE \cdot A_e EF\vec{x}_f + FE \cdot B_e\vec{u}.\tag{2.6.7}$$

Учитывая (2.5.15) и вводя дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}A_f &= FE \cdot A_e \cdot EF; \\ B_f &= FE \cdot B_e; \\ C_f &= C_e \cdot EF,\end{aligned}\tag{2.6.8}$$

окончательно получаем уравнения системы в базисе  $[f]$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_f &= A_f \cdot \vec{x}_f + B_f \cdot \vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) &= C_f \cdot \vec{x}_f(t). \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Здесь  $A_f$  – это матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[f]$ ,  $B_f$  – это набор вектор-столбцов в базисе  $[f]$ , а выражение  $C_f$  никак не связано с базисом  $[f]$ .

**ПРИМЕР 2.6.1**

Пусть система задана схемой моделирования, приведенной на рис. 2.5. Выберем в качестве координат вектора состояний  $\vec{x}$  в исходном базисе  $[e]$  выходы интеграторов 1 и 2. В результате получим уравнения системы в исходном базисе:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_e(t) &= A_e \vec{x}_e(t) + B_e \cdot \vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) &= C_e \cdot \vec{x}_e(t), \end{aligned}$$

где

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_e = [0 \quad 1].$$

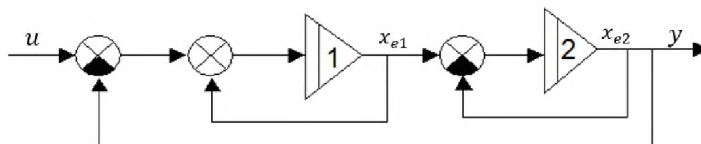


Рис. 2.5. Схема моделирования в исходном базисе  $[e]$

Зададим матрицу перехода к новому базису

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

которой соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2; \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Вычислим обратную матрицу

$$EF^{-1} = FE = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.6.8) находим

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_f = [1 \quad 0].$$

Этим матрицам соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_{f1} &= x_{f2}; \\ \dot{x}_{f2} &= u; \\ y &= x_{f1}, \end{aligned}$$

которым, в свою очередь, отвечает схема, приведенная на рис. 2.6.

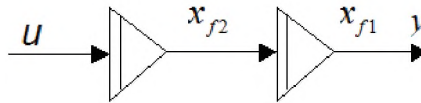


Рис. 2.6. Схема моделирования в базисе  $[e]$

Собственные числа системы, естественно, сохранились, так как матрицы  $A_e$  и  $A_f$  подобны. Связь между входом и выходом осталась неизменной, а схема моделирования стала заметно проще.

### § 2.7. Вычисление матрицы преобразования базиса в пространстве состояний динамической системы с помощью матриц управляемости и наблюдаемости

Пусть матрицы управляемой системы представлены в двух различных базисах  $[e]$  и  $[f]$  в пространстве состояний вектора  $\vec{x}$ :

$$\{A_e, B_e\}, \{A_f, B_f\}.$$

Рассмотрим матрицу управляемости в базисе  $[f]$

$$U_f = \begin{bmatrix} B_f & A_f B_f & A_f^2 B_f & \dots & A_f^{n-1} B_f \end{bmatrix}. \quad (2.7.1)$$

В соответствии с (2.6.8)

$$\begin{aligned}
 A_f B_f &= FE \cdot A_e \cdot B_e; \\
 A_f^2 B_f &= FE \cdot A_e \cdot EF \cdot FE \cdot A_e EF \cdot FE \cdot B_e = FE \cdot A_e^2 B_e; \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_f^k &= FE \cdot A_e^k B_e.
 \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Учитывая эти равенства в (2.7.1), получим выражение для перевода матрицы управляемости из одного базиса в другой:

$$U_f = FE \cdot U_e. \tag{2.7.3}$$

Умножая это равенство справа на  $U_e^T$ , получаем:

$$U_f U_e^T = FE \cdot U_e \cdot U_e^T. \tag{2.7.4}$$

Если система управляема, то  $\text{rank } U_e = \text{rank } U_f = n$ . Это значит, что матрица  $U_e$  имеет  $n$  линейно независимых строк и может быть представлена в виде

$$U_e = \begin{bmatrix} \vec{z}_1^T \\ \vec{z}_2^T \\ \dots \\ \vec{z}_n^T \end{bmatrix}, \tag{2.7.5}$$

где векторы  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n$  – линейно независимы. Следовательно, матрица

$$U_e U_e^T = \begin{bmatrix} \vec{z}_1^T \\ \vec{z}_2^T \\ \dots \\ \vec{z}_n^T \end{bmatrix} \cdot [\vec{z}_1 \vec{z}_2 \dots \vec{z}_n], \tag{2.7.6}$$

которая является матрицей Грама, имеет положительный определитель, а значит, невырождена. Следовательно,

$$FE = U_f U_e^T (U_e U_e^T)^{-1}. \tag{2.7.7}$$

Если система имеет скалярный вход ( $u$ -скаляр), то матрица  $B$  становится вектором ( $B = \vec{b}$ ), а матрица  $U_e$  – квадратной, в управляемой системе – невырожденной. Тогда

$$FE = U_f U_e^{-1}. \tag{2.7.8}$$

Отметим, что в данном рассуждении  $EF$  – матрица перехода от базиса  $[e]$  к базису  $[f]$ , поэтому обратная ей – это матрица перехода от базиса  $[f]$  к базису  $[e]$ :

$$EF^{-1} = FE. \quad (2.7.9)$$

Рассмотрим другой случай, когда переход от базиса  $[e]$  к базису  $[f]$  задан парой матриц

$$\{A_e, C_e\}, \{A_f, C_f\}$$

некоторой наблюдаемой системы. Запишем матрицу наблюдаемости (2.3.7) и с учетом (2.6.8) проведем аналогичные предыдущим преобразования:

$$N_f = \begin{bmatrix} C_f \\ C_f A_f \\ \dots \\ C_f A_f^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e \cdot EF \\ C_e A_e \cdot EF \\ \dots \\ C_e A_e^{n-1} \cdot EF \end{bmatrix} = N_e \cdot EF. \quad (2.7.10)$$

Так как система наблюдаема, то

$$\text{rank}(N_e) = \text{rank}(N_f) = n$$

и матрица наблюдаемости имеет  $n$  линейно независимых столбцов

$$N = [\vec{z}_1 \quad \vec{z}_2 \quad \dots \quad \vec{z}_n],$$

а квадратная матрица

$$N^T N = \begin{bmatrix} \vec{z}_1^T \\ \vec{z}_2^T \\ \dots \\ \vec{z}_n^T \end{bmatrix} [\vec{z}_1 \quad \vec{z}_2 \quad \dots \quad \vec{z}_n]$$

не вырождена. Умножим обе части равенства (2.7.10) слева на  $N_e^T$ :

$$N_e^T N_f = N_e^T N_e \cdot EF, \quad (2.7.11)$$

откуда получим:

$$EF = (N_e^T N_e)^{-1} N_e^T N_f. \quad (2.7.12)$$

Если система имеет скалярный выход, то

$$EF = N_e^{-1} N_f. \quad (2.7.13)$$

## § 2.8. Канонические представления систем

## 2.8.1. Управляемое каноническое представление системы со скалярным входом

Пусть в некотором исходном базисе  $[h]$  пространства состояний  $X$  записаны уравнения движения объекта со скалярным управлением:

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A_h \vec{x}_h(t) + \vec{b}_h u(t); \quad (2.8.1)$$

$$\vec{y}(t) = C_h \vec{x}_h(t). \quad (2.8.2)$$

Более общая запись связывает не координатные столбцы, а сами векторы в  $\vec{x} \in X$  с помощью соответствующего оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathcal{A}(\vec{x}(t)) + \vec{b} \cdot u(t). \quad (2.8.3)$$

Если система  $\{\mathcal{A}, \vec{b}\}$  управляема, то  $n$  векторов  $\vec{b}, \mathcal{A}(\vec{b}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{b})$  образуют базис в пространстве  $X$  в силу того, что  $\text{rank}(U) = n$ . Следовательно, в пространстве  $X$  в качестве базиса  $[e]$  может быть выбрана следующая система векторов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 = \vec{b}; \\ \vec{e}_2 = \mathcal{A}(\vec{b}); \\ \vec{e}_3 = \mathcal{A}^2(\vec{b}); \\ \dots \dots \dots \\ \vec{e}_n = \mathcal{A}^{n-1}(\vec{b}). \end{array} \right. \quad (2.8.4)$$

Пусть характеристический полином оператора  $\mathcal{A}$ , а значит, и его матрицы в любом базисе имеют вид:

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n. \quad (2.8.5)$$

Построим еще один базис – базис  $[u]$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_1 &= \alpha_{n-1} \underbrace{\vec{b}}_{e_1} + \alpha_{n-2} \underbrace{\mathcal{A}(\vec{b})}_{e_2} + \dots + \alpha_1 \underbrace{\mathcal{A}^{n-2}(\vec{b})}_{e_{n-3}} + \underbrace{\mathcal{A}^{n-1}(\vec{b})}_{e_{n-2}}; \\
 \vec{u}_2 &= \alpha_{n-2} \underbrace{\vec{b}}_{e_1} + \alpha_{n-3} \underbrace{\mathcal{A}(\vec{b})}_{e_2} + \dots + \alpha_1 \underbrace{\mathcal{A}^{n-3}(\vec{b})}_{e_{n-3}} + \underbrace{\mathcal{A}^{n-2}(\vec{b})}_{e_{n-2}}; \\
 \vec{u}_3 &= \alpha_{n-3} \underbrace{\vec{b}}_{e_1} + \alpha_{n-4} \underbrace{\mathcal{A}(\vec{b})}_{e_2} + \dots + \alpha_1 \underbrace{\mathcal{A}^{n-4}(\vec{b})}_{e_{n-3}} + \underbrace{\mathcal{A}^{n-3}(\vec{b})}_{e_{n-2}}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \vec{u}_{n-2} &= \alpha_2 \underbrace{\vec{b}}_{e_1} + \alpha_1 \underbrace{\mathcal{A}(\vec{b})}_{e_2} + \underbrace{\mathcal{A}^2(\vec{b})}_{e_3}; \\
 \vec{u}_{n-1} &= \alpha_1 \underbrace{\vec{b}}_{e_1} + \underbrace{\mathcal{A}(\vec{b})}_{e_2}; \\
 \vec{u}_n &= \underbrace{\vec{b}}_{e_1}.
 \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

Проверим, действительно ли это базис. Матрица перехода от базиса  $[e]$  к базису  $[u]$ , в соответствии с (2.4.4) и (2.4.5), имеет вид:

$$EU = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \cdots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-5} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8.7}$$

Эта матрица является треугольной, ее определитель равен произведению диагональных элементов, умноженному на  $(-1)^n$ , то есть не равен нулю. Следовательно,  $EU$  невырождена и система векторов  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  действительно образует базис в пространстве  $X$ .

Вычислим теперь представление  $A_u$  матрицы оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[u]$ . При этом воспользуемся равенством

$$\mathcal{A}(\vec{u}_k) = a_{1k}^u \vec{u}_1 + a_{2k}^u \vec{u}_2 + \dots + a_{nk}^u \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n a_{ik}^u \mathcal{A}(\vec{u}_i). \tag{2.8.8}$$

С учетом (2.8.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{u}_1) &= \mathcal{A}^n(\vec{b}) + \alpha_1 \mathcal{A}^{n-1}(\vec{b}) + \dots + \alpha_{n-1} \mathcal{A}(\vec{b}) + \alpha_n \vec{b} - \alpha_n \vec{b} = \\ &= (\mathcal{A}^n + \alpha_1 \mathcal{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathcal{A} + \alpha_n E)(\vec{b}) - \alpha_n \vec{b} = \\ &= \varphi_A(\mathcal{A}\vec{b}) - \alpha_n \vec{b}. \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

По теореме Кэлли – Гамильтона  $\varphi_A(\mathcal{A}) = 0$ , а значит,  $\mathcal{A}(\vec{u}_1) = -\alpha_n \vec{b}$ , откуда следует, что  $a_{n1}^u = -\alpha_n$  и  $a_{i1}^u = 0$  при  $i < n$ , то есть

$$\vec{a}_{u1}^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -\alpha_n]. \quad (2.8.10)$$

Далее действуем аналогичным образом:

$$\mathcal{A}(\vec{u}_2) = \underbrace{\mathcal{A}^{n-1}(\vec{b}) + \alpha_1 \mathcal{A}^{n-2}(\vec{b}) + \dots + \alpha_{n-2} \mathcal{A}(\vec{b}) + \alpha_{n-1} \vec{b}}_{\vec{u}_1} - \alpha_{n-1} \underbrace{\vec{b}}_{\vec{u}_n}, \quad (2.8.11)$$

откуда следует, что  $a_{12}^u = 1$ ,  $a_{i2}^u = 0$  при  $1 < i < n$ ;  $a_{n2}^u = -\alpha_{n-1}$ , то есть

$$\vec{a}_{u2}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ -\alpha_{n-1}].$$

Далее:

$$A(\vec{u}_3) = \underbrace{A^{n-2}(\vec{b}) + \alpha_1 A^{n-3}(\vec{b}) + \dots + \alpha_{n-3} A(\vec{b}) + \alpha_{n-2} \vec{b}}_{\vec{u}_2} - \alpha_{n-2} \underbrace{\vec{b}}_{\vec{u}_n}, \quad (2.8.12)$$

откуда следует, что

$$a_{13}^u = 0; a_{23}^u = 1; a_{i3}^u = 0 \text{ при } 2 < i < n; a_{n3}^u = -\alpha_{n-2},$$

то есть

$$\vec{a}_{u3}^T = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ -\alpha_{n-2}].$$

Вычислим предпоследний столбец матрицы:

$$\mathcal{A}(\vec{u}_{n-1}) = \underbrace{\mathcal{A}^2(\vec{b}) + \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{b}) + \alpha_2 \vec{b}}_{\vec{u}_{n-2}} - \alpha_2 \underbrace{\vec{b}}_{\vec{u}_n}, \quad (2.8.13)$$

откуда следует, что  $a_{i,n-1}^u = 0$  для  $1 \leq i < n-2$ ,  $a_{n-2,n-1}^u = 1$ ,  $a_{n-1,n-1}^u = 0$  и  $a_{n,n-1}^u = -\alpha_2$ , то есть

$$\vec{a}_{u\ n-1}^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ -\alpha_{n-2}].$$

Наконец,

$$\mathcal{A}(\vec{u}_n) = \mathcal{A}(\vec{b}) + \alpha_1 \vec{b} - \alpha_1 \vec{b} = \vec{u}_{n-1} - \alpha_1 \vec{u}_n, \quad (2.8.14)$$

откуда следует, что  $a_{i,n}^u = 0$  для  $1 \leq i < n-1$  и  $a_{n-1,n}^u = 1$ ,  $a_{n,n}^u = -\alpha_2$ , то есть

$$\vec{a}_{u\ n}^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ -\alpha_1].$$

Таким образом, матрица  $A_U$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $[u]$  имеет вид

$$A_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (2.8.15)$$

Вычисление характеристического многочлена  $\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A|$  путем разложения определителя по первому столбцу приводит к представлению этого полинома в виде схемы Горнера

$$\varphi_A(\lambda) = \alpha_n + \lambda(\alpha_{n-1} + \lambda(\cdots + \lambda(\alpha_1 + \lambda)) \cdots).$$

Матрица  $A_u$  замечательна тем, что ее последняя строка явным образом задает свой характеристический многочлен, а значит и свои собственные числа.

Так как  $\vec{b} = \vec{u}_n$ , то есть является последним вектором базиса  $[u]$ , то координатный столбец вектора  $\vec{b}$  в этом базисе

$$\vec{b}_U^T = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0 \ 1]. \quad (2.8.16)$$

Пара  $\{A_U, \vec{b}_U\}$  называется **управляемым каноническим представлением** (УКП) системы с одним (скалярным) входом. Матрица  $A_U$  называется **сопровождающей** по отношению к полиному  $\varphi_A(\lambda)$ .

Таким образом, мы доказали, что если **исходная система управляема, то в пространстве состояний  $x$  существует базис, в**

котором пара  $\{A, \vec{b}\}$  имеет управляемое каноническое представление.

Если в некотором исходном базисе  $[h]$  заданы матрицы  $A_h, \vec{b}_h$  и если система управляема, то для того чтобы вычислить (матрицу) УКП, достаточно вычислить коэффициенты характеристического полинома  $\varphi_A(\lambda)$ . После этого может быть вычислена матрица  $HU$  преобразования от исходного базиса  $[h]$  к УКП в базисе  $[u]$  в соответствии с (2.7.8):

$$HU^{-1} = UH = U_u U_h^{-1}. \quad (2.8.17)$$

Далее индекс  $h$  для системы в исходном базисе будем опускать.

*ПРИМЕР 2.8.1.*

Для системы, представленной системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= A\vec{x} + \vec{b}u; \\ y &= C\vec{x} \end{aligned}$$

известны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1].$$

Нетрудно вычислить матрицу

$$U \equiv U_H = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель  $|U| = -2 \neq 0$ , откуда следует, что система управляема, и значит, для нее существует УКП. Вычислим характеристический полином:

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{-7}_{\alpha_1} \lambda \underbrace{-2}_{\alpha_2}.$$

Это позволяет сразу же записать матрицы  $A$  и  $B$  в базисе УКП:

$$A_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \vec{b}_U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Векторно-матричные уравнения системы в УКП имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_u &= A_u \vec{x}_u + \vec{b}_u u; \\ y &= C_u \vec{x}_u.\end{aligned}\tag{2.8.18}$$

Для того чтобы найти матрицу  $C_u$ , требуется рассчитать матрицу перехода  $HU$  от исходного базиса  $[h]$  к базису УКП  $[u]$ . Для этого предварительно вычислим

$$U_h^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \text{ и } U_u = [b_u \ A_u \cdot b_u] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Тогда искомая матрица

$$UH = U_u \cdot U_h^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, HU = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

После этого в соответствии с (2.6.8) находим

$$C_u = C_h \cdot HU = [1 \quad 3].$$

### Алгоритм представления системы в УКП

1. Определить матрицы  $A_{n \times n}, B_{n \times 1}, C_{1 \times n}$  в исходном базисе  $[h]$ .
2. Найти характеристический многочлен (2.8.5) матрицы  $A$ . Корни многочлена позволяют определить устойчивость системы.
3. Построить матрицу управляемости  $U_{n \times n}$ . Если  $\text{rank}(U) < n$ , то система не является вполне управляемой и переход к УКП невозможен. Матрицу  $U$  рассматриваем как матрицу перехода от исходного базиса  $[h]$  к новому базису  $[e]$ :  $U = HE$ .
4. Составить матрицу  $EU$  размером  $n \times n$  для перехода от базиса  $[e]$  к базису УКП  $[u]$  в соответствии с (2.8.7).
5. Построить матрицу перехода от начального базиса  $[h]$  к новому базису  $[u]$ .

$$HU = HE \cdot EU.$$

6. Построить матрицу перехода от базиса  $[u]$  к базису  $[h]$ .

$$UH = HU^{-1}.$$

7. Построить матрицу  $A$  в новом базисе  $[u]$

$$A_u = UH \cdot A_h \cdot HU.$$

Матрица  $A_u$  должна иметь вид (2.8.15).

8. Вычислить матрицу  $B$  в базисе  $[u]$

$$B_u = UH \cdot B_h.$$

Матрица  $B_u$  должна иметь вид  $(0, \dots, 0, 1)^T$ .

9. Вычислить матрицу  $C_u$ :

$$C_u = C_h \cdot HU.$$

Здесь проверочного правила нет. Матрица  $C_u$  не является представлением матрицы  $C_h$  в базисе  $[u]$ .

10. Перейти от начального базиса  $[h]$  к базису  $[u]$ . Переход осуществляется по формуле  $\vec{x}_h = HU \cdot \vec{x}_u$ . Построить линейную систему (2.8.18) в базисе УКП  $[u]$ .
11. Построить структурную схему системы в базисе УКП (рис. 2.7)

### 2.8.2. Передаточная функция и структурная схема для системы в УКП

Уравнения системы

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_u(t) &= A_u \vec{x}_u(t) + \vec{b}_u u(t) \\ y(t) &= C_u x_u(t); \end{aligned} \tag{2.8.19}$$

со скалярным входом  $u(t)$  и скалярным выходом  $y(t)$ , где матрицы  $A_u$  и  $\vec{b}_u$  определяются выражениями (2.8.15) и (2.8.16), а матрица  $C_u$  имеет вид:

$$C_u = [c_{u1} \quad c_{u2} \quad \cdots \quad c_{un}], \tag{2.8.20}$$

можно записать в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{u1} &= x_{u2}; \\
 \dot{x}_{u2} &= x_{u3}; \\
 \dot{x}_{u3} &= x_{u4}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{x}_{u\ n-1} &= x_{un}; \\
 \dot{x}_{un} &= -\alpha_n x_{u1} - \alpha_{n-1} x_{u2} - \dots - \alpha_2 x_{u\ n-1} - \alpha_1 x_{un} + u;
 \end{aligned}
 \tag{2.8.21}$$

$$y = c_{u1} x_{u1} + c_{u2} x_{u2} + \dots + c_{un} x_{un}. \tag{2.8.22}$$

Этим уравнениям соответствует схема, представленная на рис. 2.7.

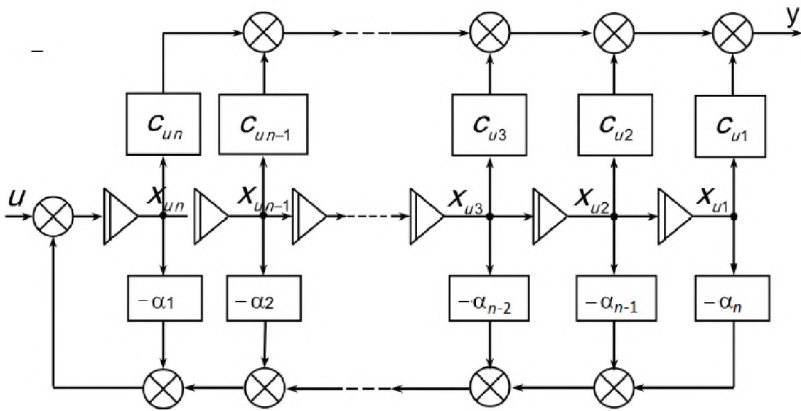


Рис. 2.7. Схема моделирования системы в УКП

В соответствии с этим рисунком передаточная функция системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{c_{u1} p^{-n} + c_{u2} p^{-(n-1)} + \dots + c_{un-1} p^{-2} + c_{un} p^{-1}}{1 + \alpha_1 p^{-1} + \alpha_2 p^{-2} + \dots + \alpha_n p^{-n}} = \\
 &= \frac{c_{u1} + c_{u2} p + \dots + c_{un-1} p^{n-2} + c_{un} p^{n-1}}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \alpha_2 p^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8.23}$$

Отметим, что статический передаточный коэффициент

$$W(0) = \frac{C_{u1}}{\alpha_n}. \quad (2.8.24)$$

### 2.8.3. Идентификационное каноническое представление системы с одним (скалярным) выходом

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в п. 2.8.1, можно получить следующие результаты. Если пара матриц полностью наблюдаема, то в пространстве состояний  $X$  всегда существует базис  $[i]$ , в котором пара  $A, C$  имеет идентификационное каноническое представление (ИКП):

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (2.8.25)$$

$$C_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1]. \quad (2.8.26)$$

Отметим, что

$$A_i^T = A_u; C_i^T = \vec{b}_u. \quad (2.8.27)$$

Если в некотором исходном базисе  $[h]$  заданы матрицы  $A_h, C_h$  и если система полностью наблюдаема, то для того чтобы вычислить их (матрицы) ИКП, достаточно вычислить коэффициенты характеристического полинома  $\varphi_A(\lambda)$ . После этого может быть вычислена матрица преобразования от исходного базиса  $[h]$  к ИКП  $[i]$  в соответствии с (2.7.13):

$$I_h = N_i^{-1} N_h. \quad (2.8.28)$$

Если известна матрица  $B_h$  при векторе управления в исходном базисе, то с учетом (2.6.8) в базисе ИКП она может быть определена с помощью соотношения

$$B_i = I H \cdot B_h. \quad (2.8.29)$$

**2.8.4. Передаточная функция и структура для системы в ИКП**

В соответствии с видом матриц  $A_i$  и  $C_i$  уравнения системы со скалярным входом  $u$  и скалярным выходом  $y$  имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = -\alpha_n x_{in} + b_{i1}u; \\ \dot{x}_{i2} = x_{i1} - \alpha_{n-1} x_{in} + b_{i2}u; \\ \dot{x}_{i3} = x_{i2} - \alpha_{n-2} x_{in} + b_{i3}u; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_{in-1} = x_{in-2} - \alpha_2 x_{in} + b_{in-1}u; \\ \dot{x}_{in} = x_{in-1} - \alpha_1 x_{in} + b_{in}u; \end{cases} \quad (2.8.30)$$

$$y = x_{in}. \quad (2.8.31)$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, представленная на рис. 2.8.

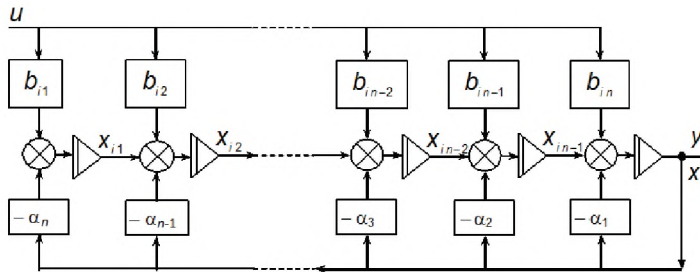


Рис. 2.8. Схема моделирования системы в ИКП

В соответствии с этим рисунком передаточная функция системы имеет вид:

$$W_{u,y}(p) = \frac{b_{i1}p^{-n} + b_{i2}p^{-(n-1)} + \dots + b_{in-1}p^{-2} + b_{in}p^{-1}}{1 + \alpha_1 p^{-1} + \alpha_2 p^{-2} + \dots + \alpha_n p^{-n}} = \frac{b_{i1} + b_{i2}p + \dots + b_{in-1}p^{n-2} + b_{in}p^{n-1}}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \alpha_2 p^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}p + \alpha_n}. \quad (2.8.32)$$

Отметим, что статический передаточный коэффициент

$$W_{u,y}(0) = \frac{b_{i1}}{\alpha_n}. \quad (2.8.33)$$

### § 2.9. Обратная связь по состоянию, обеспечивающая заданное (желаемое) расположение собственных чисел в замкнутой системе с одним (скалярным) входом

Даны уравнения полностью управляемого объекта управления в некотором исходном базисе

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_h(t) &= A_h \vec{x}_h(t) + \vec{b}_h u(t); \\ y(t) &= C_h \vec{x}_h(t), \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

каждая координата вектора состояния которого доступна для измерения. Требуется синтезировать такое управление, которое бы обеспечило требуемое качество отработки внешнего командного сигнала  $v(t)$ .

Динамические свойства системы управления в основном определяются ее собственными числами, то есть нулями характеристического полинома

$$\varphi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n. \quad (2.9.2)$$

Время переходного процесса каждой моды определяется расстоянием до мнимой оси вещественной части; колебательность – соотношением мнимой и вещественной частей соответствующих собственных чисел. Эти зависимости могут быть проанализированы при изучении характеристик типовых звеньев, кроме того, они рассматриваются в обширной учебной литературе по теории автоматического регулирования и управления.

В соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 2.9, сформируем сигнал управления объектом в виде:

$$u(t) = -L_h \vec{x}_h(t) + k^v v(t), \quad (2.9.3)$$

где  $L_h$  – некоторая матрица-строка обратной связи:

$$L_h = [ l_{h1} \quad l_{h2} \quad \dots \quad l_{hn} ], \quad (2.9.4)$$

$k^v$  – коэффициент по командному сигналу. Тогда уравнение системы примет вид:

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A_h \vec{x}_h(t) - \vec{b}_h L_h \vec{x}_h(t) + \vec{b}_h k^v v(t) \quad (2.9.5)$$

или

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A_h^c \vec{x}_h(t) + \vec{b}_h k^v v(t), \quad (2.9.6)$$

где  $A_h^c$  – матрица замкнутой системы в исходном базисе:

$$A_h^c = A_h - \vec{b}_h L_h. \quad (2.9.7)$$

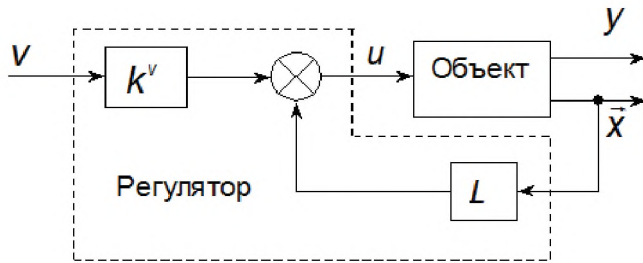


Рис. 2.9. Структурная схема замкнутой системы

Поскольку объект полностью управляем, то существует базис  $[u]$ , в котором пара  $\{A, \vec{b}\}$  имеет управляемое каноническое представление  $\{A_u, \vec{b}_u\}$ . Поэтому перейдем к записи уравнений системы в базисе УКП. В соответствии с (2.4.16) произведем замену

$$\vec{x}_h = HU \vec{x}_u. \quad (2.9.8)$$

Тогда из (2.9.1) получим:

$$HU \dot{\vec{x}}_u(t) = A_h HU \vec{x}_u(t) + \vec{b}_h u(t); \quad (2.9.9)$$

$$y(t) = C_h HU \vec{x}_u. \quad (2.9.10)$$

Умножив уравнение (2.9.9) слева на  $HU^{-1}$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_u(t) &= A_u \vec{x}_u(t) + \vec{b}_u u(t); \\ y(t) &= C_u \vec{x}_u(t),\end{aligned}\tag{2.9.11}$$

где  $A_u$ ,  $\vec{b}_u$  и  $C_u$  – соответствующие матрицы в УКП.

Используя подстановку (2.9.8), из (2.9.3) получим:

$$u(t) = L_u \vec{x}_u + k^v v(t),\tag{2.9.12}$$

где матрица обратной связи в базисе УКП

$$L_u = L_h \cdot HU.\tag{2.9.13}$$

В результате уравнение замкнутой системы в базисе управляемого канонического представления будет иметь вид:

$$\dot{\vec{x}}_u(t) = A_u^c \vec{x}_u(t) + \vec{b}_u \cdot k^v v(t).\tag{2.9.14}$$

Здесь  $A_u^c$  является сопровождающей матрицей по отношению к характеристическому полиному замкнутой системы

$$\varphi_{A^c}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n,\tag{2.9.15}$$

поэтому она имеет стандартный вид:

$$A_u^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\gamma_n & -\gamma_{n-1} & -\gamma_{n-2} & \dots & -\gamma_1 \end{bmatrix}.\tag{2.9.16}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$A_u^c = A_u + \vec{b}_u L_u.\tag{2.9.17}$$

Отсюда сразу же следует связь между коэффициентами характеристического полинома (2.9.2) объекта и коэффициентами характеристического полинома (2.9.14) желаемой системы:

$$-\gamma_i = -\alpha_i + I_{u_{n-i+1}}, i = 1, 2, \dots, n.\tag{2.9.18}$$

Далее обусловлены следующие действия.

1. Задание желаемых собственных чисел замкнутой системы:  
 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ .
2. Вычисление коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  в соответствии с выражением (2.9.15).
3. Вычисление согласно (2.9.17) коэффициентов матрицы обратной связи в базисе УКП:

$$l_{n-i+1} = \alpha_i - \gamma_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9.19)$$

4. Вычисление в соответствии с (2.9.12) и (2.8.17) матрицы обратной связи в исходном базисе:

$$L_h = L_u U_u U_h^{-1}. \quad (2.9.20)$$

5. Определение величины коэффициента  $k^v$  в соответствии с требованиями по статике.

Так, например, если требуется обеспечить единичную статику по командному сигналу  $v$ , то это значит, что установившееся значение переходной функции  $h(t)$  замкнутой системы должно быть равно единице. Одним из свойств передаточной функции устойчивой системы является равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} W_{vy}(p). \quad (2.9.21)$$

Согласно структурной схеме, приведенной на рис. 2.9, передаточная функция между командным  $v$  и выходным  $u$  сигналами имеет вид:

$$W_{vy}(P) = K^v W_{u1,y}(P), \quad (2.9.22)$$

где  $W_{u1,y}(P)$  – передаточная функция координат  $U$  до выхода объекта  $u$ , может быть определена аналогично выражению (2.9.22). Таким образом, получаем:

$$h(\infty) = k^v \frac{c_{u1}}{\gamma_n} = 1, \quad (2.9.23)$$

откуда окончательно

$$k^v = \frac{\gamma_n}{c_{u1}}. \quad (2.9.24)$$

### § 2.10. Синтез управления в многомерной системе. Задача разделения каналов

В предыдущих параграфах, посвященных синтезу, рассматривались объекты со скалярным управлением (входом) и скалярным выходом. На практике встречаются и более сложные объекты. Один из них был упомянут в §2.2. Это смесительный бак, у него две входные величины (два входных потока с различными концентрациями растворенного вещества) и две выходные (концентрация и расход выходного потока). В качестве другого примера может быть взят объект, связанный с перемоткой некоторой полосы с одного рулона на другой. Для этого объекта выходные переменные – это натяжение и линейная скорость перемотки; входные – напряжения или токи приводных двигателей моталки и разматывателя. Наконец, самолет. В качестве выходных переменных могут выступать углы тангажа, курса и крена; в качестве входных, управляющих – угловые положения руля высоты, руля направления и элеронов.

Как правило, в таких объектах каждая выходная величина зависит от всех входных. В то же время при синтезе управления такими объектами часто требуется обеспечить не только заданные динамические и статические свойства системы, но и независимое управление по каждой из выходных переменных.

Пусть уравнения объекта имеют вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \quad (2.10.1)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t), \quad (2.10.2)$$

где размерность вектора состояния  $[n \times 1]$ , вектор управления и вектор выхода имеют одинаковую размерность  $[p \times 1]$ . Такую же размерность имеет вектор командного сигнала  $\vec{v}$ , поступающий на вход системы.

Требуется синтезировать управление  $\vec{u}$  такое, чтобы:

- 1)  $i$ -я составляющая вектора выхода  $y_i$  зависела только от  $i$ -й составляющей командного сигнала  $v_i$ ;
- 2) по каждому из каналов была обеспечена заданная динамика, иными словами, передаточная функция  $W_{v_i, y_i}(p) = \frac{Y_i(p)}{V_i(p)}$ , имеющая заданные полюсы;

- 3) для каждого из каналов был обеспечен заданный статический коэффициент передачи.

**2.10.1. Разделение исходного объекта на подсистемы интеграторов**

Представим (2.10.2) в виде:

$$\vec{y} = C\vec{x} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} \vec{x},$$

где  $C_i$  – строки матрицы  $C$ . Тогда  $i$ -я координата вектора выхода

$$y_i = C_i\vec{x}.$$

Рассмотрим процедуру многократного дифференцирования координат вектора выхода:

$$\begin{aligned} y_i' &= C_i\dot{\vec{x}} = C_iA\vec{x} + C_iB\vec{u}; \\ y_i'' &= C_iA^2\vec{x} + C_iAB\vec{u} + C_iB\vec{u}'; \\ y_i^{(3)} &= C_iA^3\vec{x} + C_iA^2B\vec{u} + C_iAB\vec{u}^{(1)} + C_iB\vec{u}^{(2)}; \\ &\dots\dots\dots \\ y_i^{(m)} &= C_iA^m\vec{x} + C_iA^{m-1}B\vec{u} + C_iA^{m-2}B\vec{u}^{(1)} + \dots + C_iB\vec{u}^{(m-1)}. \end{aligned} \tag{2.10.3}$$

Сократим запись:

$$y_i^{(m)} = C_iA^m\vec{x} + C_iA^{m-1}B\vec{u} + \sum_{v=1}^{m-1} C_iA^{m-1-v}B\vec{u}^{(v)}. \tag{2.10.4}$$

Для каждой координаты найдем максимальное число дифференцирований, при котором еще не появляется производная вектора  $\vec{u}$ , то есть найдем такие числа  $m_i$ , что

$$C_iA^{m_i-1}B \neq 0 \text{ и } C_iA^{m_i-2}B = 0.$$

Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 y_1^{(m_1)} &= C_1 A^{m_1} \vec{x} + C_1 A^{m_1-1} B \vec{u}; \\
 y_2^{(m_2)} &= C_2 A^{m_2} \vec{x} + C_2 A^{m_2-1} B \vec{u}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_p^{(m_p)} &= C_p A^{m_p} \vec{x} + C_p A^{m_p-1} B \vec{u}.
 \end{aligned}
 \tag{2.10.5}$$

Запишем эту систему равенств в векторно-матричном виде:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(m_1)} \\ y_2^{(m_2)} \\ \vdots \\ y_p^{(m_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A^{m_1} \\ C_2 A^{m_2} \\ \vdots \\ C_p A^{m_p} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} C_1 A^{m_1-1} \\ C_2 A^{m_2-1} \\ \vdots \\ C_p A^{m_p-1} \end{bmatrix} B \vec{u} = -F_* \vec{x} + B_* \vec{u}.
 \tag{2.10.6}$$

Обозначим

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} y_1^{(m_1)} \\ y_2^{(m_2)} \\ \vdots \\ y_p^{(m_p)} \end{bmatrix}
 \tag{2.10.7}$$

и

$$F_* = - \begin{bmatrix} C_1 A^{m_1} \\ C_2 A^{m_2} \\ \vdots \\ C_p A^{m_p} \end{bmatrix}; B_* = \begin{bmatrix} C_1 A^{m_1-1} \\ C_2 A^{m_2-1} \\ \vdots \\ C_p A^{m_p-1} \end{bmatrix}.
 \tag{2.10.8}$$

Тогда (2.10.6) можно переписать в виде:

$$\vec{q} = -F_* \vec{x} + B_* \vec{u}.
 \tag{2.10.9}$$

Если задача разделения каналов имеет решение, то матрица  $B_*$  не вырождена и

$$\vec{u} = B_*^{-1} \vec{q} + B_*^{-1} F_* \vec{x}.
 \tag{2.10.10}$$

На рис. 2.10 представлена промежуточная структурная схема, соответствующая уравнениям (2.10.1), (2.10.2) и (2.10.8).

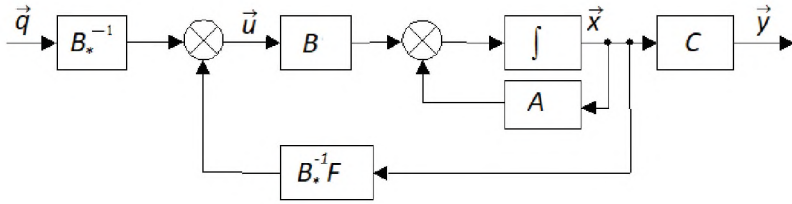


Рис. 2.10. Промежуточная структурная схема

Для этой схемы справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= (A + BB_*^{-1}F_*)\vec{x} + BB_*^{-1}\vec{q}; \\ \vec{y} &= C\vec{x}. \end{aligned} \quad (2.10.11)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_{\checkmark} &= A + BB_*^{-1}F_*; \\ B_{\checkmark} &= BB_*^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10.12)$$

Теперь (2.10.11) превратится в

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A_{\checkmark}\vec{x} + B_{\checkmark}\vec{q}; \\ \vec{y} = C\vec{x}; \end{cases} \quad (2.10.13)$$

а структурная схема промежуточной системы с входным вектором  $\vec{q}$  примет вид, представленный на рис. 2.11.

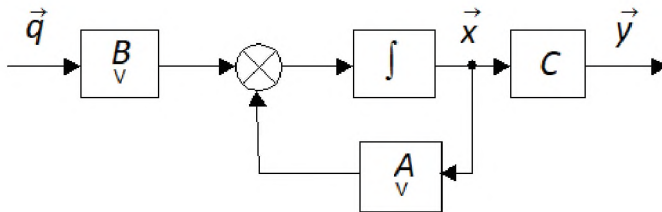


Рис. 2.11. Структурная схема системы относительно входного вектора  $\vec{q}$

С другой стороны, вектор выхода  $\vec{y}$  связан с вектором  $\vec{q}$  равенством (2.10.7), и поэтому схеме, представленной на рис. 2.11, полностью эквивалентна схема, составленная из  $p$  подсистем последовательно включенных интеграторов.

Эта схема представлена на рис. 2.12.

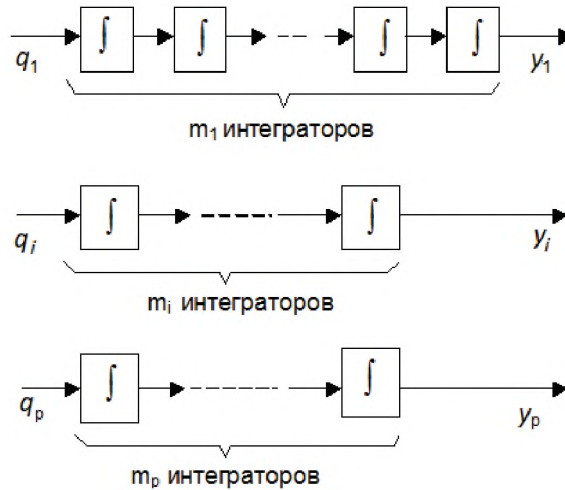


Рис. 2.12. Структурная схема объекта, представленного в виде изолированных подсистем интеграторов

Общее количество интеграторов не может быть больше  $n$ , то есть

$$\sum_{i=1}^p m_i \leq n.$$

Таким образом, система  $\{\underset{\vee}{A}, \underset{\vee}{B}\}$  (2.10.13), у которой в качестве входного вектора выбран вектор  $\vec{q}$ :

а) развязана по каналам, то есть  $y_i$  зависит только от  $q_i$  для всех значений  $i$ ;

б) имеет  $\sum_{i=1}^p m_i$  собственных значений, равных нулю.

Теперь систему  $\{\underset{\vee}{A}, \underset{\vee}{B}\}$  нужно попытаться привести к удобному базису, в котором следует синтезировать обратную связь, реализующую желаемые собственные числа по каждому каналу.

Прежде всего, установим некоторые свойства матриц  $A_{\nabla}$  и  $B_{\nabla}$ . Аналогично (2.10.4) запишем:

$$y_i^{(m_i)} = C_i A_{\nabla}^{m_i} \vec{x} + C_i A_{\nabla}^{m_i-1} B_{\nabla} \vec{q} + \sum_{v=1}^{m_i-1} C_i A_{\nabla}^{m_i-1-v} B_{\nabla} q^{(v)}.$$

С другой стороны,  $y_i^{(m_i)} = q_i$ . Отсюда следует:

1. 
$$C_i A_{\nabla}^{m_i} = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.10.14)$$

2. 
$$C_i A_{\nabla}^{m_i-1} B_{\nabla} \vec{q} = C_i A_{\nabla}^{m_i-1} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{ny} \end{bmatrix} = q_i, \quad (2.10.15)$$

откуда

$$C_i A_{\nabla}^{m_i-1} \vec{b}_i = 1; \quad (2.10.16)$$

$$C_i A_{\nabla}^{m_i-1} \vec{b}_j = 0 \text{ при } j \neq i. \quad (2.10.17)$$

3. 
$$C_i A_{\nabla}^{m_i-v} \vec{b}_j = 0 \text{ для } v > 1 \text{ и для всех } j, i. \quad (2.10.18)$$

### 2.10.2. Преобразование базиса в пространстве $R^n$

Перейдем от исходного базиса  $[e]$  к новому базису  $[f]$  с помощью некоторой матрицы преобразования  $EF$ . При выборе базиса  $[f]$  учтем следующие обстоятельства:

- Объект управляем, поэтому ранг матрицы управляемости

$$U = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_p & A_{\nabla} \vec{b}_1 & \dots & A_{\nabla} \vec{b}_p & \dots & A_{\nabla}^{n-1} \vec{b}_1 & \dots & A_{\nabla}^{n-1} \vec{b}_p \end{bmatrix} \quad (2.10.19)$$

равен порядку системы.

- Так как каждый канал этой системы с размерностью  $m_i$  управляем, то столбцы

$$\vec{b}_1, A_{\checkmark} \vec{b}_1, \dots, A_{\checkmark}^{m_1-1} \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p, A_{\checkmark} \vec{b}_p, \dots, A_{\checkmark}^{m_p-1} \vec{b}_p$$

линейно независимы.

Теперь выберем базис  $[f]$ , соответствующий следующим координатным столбцам:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{e1} &= A_{\checkmark}^{m_1-1} \vec{b}_1; \quad \vec{f}_{e2} = A_{\checkmark}^{m_1-2} \vec{b}_1; \dots; \vec{f}_{em_1} = \vec{b}_1; \\ \vec{f}_{em_1+1} &= A_{\checkmark}^{m_2-1} \vec{b}_2; \quad \vec{f}_{em_1+2} = A_{\checkmark}^{m_2-2} \vec{b}_2; \dots; \vec{f}_{em_1+m_2} = \vec{b}_2; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{2.10.20}$$

$$\vec{f}_{em_1+\dots+m_{p-1}} = A_{\checkmark}^{m_p-1} \vec{b}_p; \quad \vec{f}_{em_1+\dots+m_{p-2}} = A_{\checkmark}^{m_p-2} \vec{b}_p; \quad \vec{f}_{em_1+\dots+m_p} = \vec{b}_p.$$

Если  $\sum_{i=1}^p m_i < n$ , то оставшуюся часть векторов базиса  $[f_{ост}]$  можно выбирать, перебирая оставшиеся столбцы матрицы  $U$ :

$$A_{\checkmark}^{m_1} \vec{b}_1, A_{\checkmark}^{m_1+1} \vec{b}_1, \dots, A_{\checkmark}^{v_1-1} \vec{b}_1$$

до тех пор, пока следующий вектор  $A_{\checkmark}^v \vec{b}_1$  не будет выражаться в виде линейной комбинации всех предыдущих векторов базиса. Далее добавим  $A_{\checkmark}^{m_2} \vec{b}_2, A_{\checkmark}^{m_2+1} \vec{b}_2$  и так далее, пока число векторов базиса не достигнет числа  $n$ . Тогда матрица преобразования базиса  $[e]$  в базис  $[f]$  будет иметь вид:

$$EF = [A_{\checkmark}^{m_1-1} \vec{b}_1 \dots A_{\checkmark}^{m_1-2} \vec{b}_1 \dots \vec{b}_1 \dots A_{\checkmark}^{m_2-1} \vec{b}_2 \dots \vec{b}_2 \dots \vec{b}_p [f_{ост}]]$$

Рассмотрим вид матрицы  $B_{\checkmark}$  в базисе  $[f]$ . Первый столбец этой матрицы, то есть вектор  $\vec{b}_1$ , совпадает с  $m_1$ -м столбцом базиса  $[f]$ ;

второй столбец матрицы  $B$ , то есть вектор  $\vec{b}_2$ , совпадает с  $(m_1 + m_2)$ -м столбцом базиса  $[f]$  и т.д. Следовательно,

$$B_e = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vec{\beta}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \vec{\beta}_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10.21)$$

где

$$\vec{\beta}_i = \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} m_i \text{ строк.} \quad (2.10.22)$$

Теперь обратим внимание на матрицу  $C$ . В соответствии с (2.6.8)

$$C_f = C \cdot EF = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} \cdot [\vec{f}_{e_1} \ \vec{f}_{e_2} \ \dots \ \vec{f}_{e_n}] = \begin{bmatrix} C_1 \vec{f}_{e_1} & \dots & C_1 \vec{f}_{e_n} \\ C_2 \vec{f}_{e_1} & \dots & C_2 \vec{f}_{e_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_p \vec{f}_{e_1} & \dots & C_p \vec{f}_{e_n} \end{bmatrix}. \quad (2.10.23)$$

Из этого равенства с учетом (2.10.14), (2.10.16), (2.10.17) получим:

$$C_f = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_p & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10.24)$$

где

$$s_i = \underbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}_{m_i}. \quad (2.10.25)$$

Наконец, займемся матрицей  $A_f$ . Прежде всего рассмотрим важную интерпретацию элементов матрицы  $A_f$ . В соответствии с (2.6.8)

$$A_f = FE \cdot A_e \cdot EF,$$

поэтому

$$EF \cdot A_f = A_e \cdot EF. \quad (2.10.26)$$

Левую часть этого равенства можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} EF \cdot A_f &= \begin{bmatrix} \vec{f}_{e1} & \vec{f}_{e2} & \dots & \vec{f}_{en} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^f & a_{12}^f & \dots & a_{1n}^f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^f & a_{n2}^f & \dots & a_{nn}^f \end{bmatrix} = \\ &= [a_{11}^f \vec{f}_{e1} + \dots + a_{n1}^f \vec{f}_{en} \quad a_{12}^f \vec{f}_{e1} + \dots + a_{n2}^f \vec{f}_{en} \quad \dots \quad a_{1n}^f \vec{f}_{e1} + \dots + a_{nn}^f \vec{f}_{en}]. \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$A_e \cdot EF = [A_e \vec{f}_{e1} \quad \dots \quad A_e \vec{f}_{en}].$$

Таким образом, получаем:

$$A_e \vec{f}_{ei} = a_{1i}^f \vec{f}_{e1} + a_{2i}^f \vec{f}_{e2} + \dots + a_{ni}^f \vec{f}_{en}. \quad (2.10.27)$$

Это означает, что элементы  $i$ -го столбца матрицы  $A_f$

$$\vec{a}_i^f = \begin{bmatrix} a_{1i}^f \\ a_{2i}^f \\ \dots \\ a_{ni}^f \end{bmatrix}$$

являются коэффициентами разложения произведения  $\underset{\vee}{A} \vec{f}_{ei} \equiv \underset{\vee}{A_e} \vec{f}_{ei}$  по координатным векторам  $\vec{f}_{e1}, \vec{f}_{e2}, \dots, \vec{f}_{en}$ . Используя (2.10.20), сопоставим произведения  $\underset{\vee}{A_e} \vec{f}_{ei}$  с координатными столбцами векторов базиса  $[f]$ :

$$\begin{aligned}
 A_{\check{v}} f_{e1} &= A_{\check{v}}^{m_1} \check{b}_1; \\
 A_{\check{v}} f_{e2} &= A_{\check{v}}^{m_1-1} \check{b}_1 = \check{f}_{e1}; \\
 A_{\check{v}} f_{e3} &= A_{\check{v}}^{m_1-2} \check{b}_1 = \check{f}_{e2}; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.10.28}$$

Так как векторы  $A_{\check{v}} f_{e1}$ ,  $A_{\check{v}} f_{em_1+1}$  и т. д. не совпадают ни с одним из собственных векторов с номерами от 1 до  $n - \sum_{i=1}^p m_i - 1$ , то в соответствующих столбцах матрицы  $A_{\check{v}}$  на позициях строк с номерами, большими  $p$ , могут находиться ненулевые элементы. Такие ячейки матрицы помечены символом  $\times$ . Кроме того, на данном этапе нет смысла рассматривать столбцы этой матрицы с номерами, большими  $p$ .

В результате получаем выражение для матрицы  $A_{\check{v}}$  в базисе  $[f]$ :

$A_{\check{v}f} =$	0 1 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	$m_1$
	0 0 1 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	
	.....	.....	:	.....	
	0 0 0 ... 1	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	
	0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	
	0 0 0 ... 0	0 1 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	$m_2$
	0 0 0 ... 0	0 0 1 ... 0	:	0 0 0 ... 0	
	.....	.....	:	.....	
	0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 1	:	0 0 0 ... 0	
	0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	
	.....	.....	:	.....	$m_p$
	0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 1 0 ... 0	
	0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 1 ... 0	
	.....	.....	:	.....	
	0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 1	
0 0 0 ... 0	0 0 0 ... 0	:	0 0 0 ... 0	$n - \sum m_i$	
* 0 0 ... 0	* 0 0 ... 0	:	* 0 0 ... 0		
.....	.....	:	.....		
* 0 0 ... 0	* 0 0 ... 0	:	* 0 0 ... 0		
$m_1$	$m_2$	$m_p$	$n - \sum m_i$		

Эту же матрицу удобнее записать в блочном виде:

$$A_{\vee f} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & A_{10} \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 & A_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{pp} & A_{p0} \\ A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0p} & A_{00} \end{bmatrix}. \quad (2.10.29)$$

Разобьем вектор состояния  $\vec{x}$  на систему  $(p+1)$  частных векторов и обозначим

$$\vec{x}_f = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_p \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.10.30)$$

где  $\vec{z}_i$  имеет размерность  $[m_i \times 1]$ .

Тогда уравнения (2.10.13) в базисе  $[f]$  примут вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{z}}_1 \\ \dot{\vec{z}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\vec{z}}_p \\ \dot{\vec{z}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & A_{10} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & A_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{pp} & A_{p0} \\ A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0p} & A_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_p \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vec{\beta}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vec{\beta}_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_p \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.10.31)$$

Отсюда следуют уравнения для частных подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{z}}_i &= A_{ii}\vec{z}_i + A_{i0}\vec{z}_0 + \vec{\beta}_i q_i; \\ y_i &= s_i \vec{z}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, p); \end{aligned} \quad (2.10.32)$$

$$\dot{\vec{z}}_0 = \sum_{v=1}^p A_{0v}\vec{z}_v + A_{00}\vec{z}_0. \quad (2.10.33)$$

Раскроем систему дифференциальных уравнений для  $i$ -й подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{z}_{i1} = z_{i2} + a_1^{i0} z_0 = z_{i2} + g_{i1}; \\ \dot{z}_{i2} = z_{i3} + g_{i2}; \\ \dots\dots\dots \\ \dot{z}_{i,m_i-1} = z_{i,m_i} + g_{i,m_i-1}; \\ \dot{z}_{i,m_i} = g_{i,m_i} + q_i; \\ y_i = z_{i1}, \end{cases} \quad (2.10.34)$$

где  $a_1^{i0}$  – первая строка матрицы  $A_{i0}$ . Такой подсистеме соответствует структурная схема, представленная на рис. 2.13.

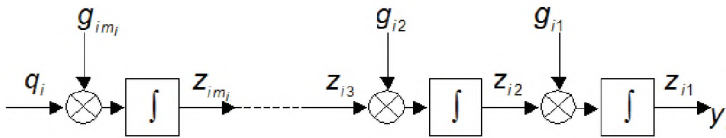


Рис. 2.13. Структурная схема частной подсистемы

Из сопоставления этой схемы со схемой, приведенной на рис. 2.12, следует:

- $z_{i1} = y_i$ ;  $z_{iv} = y_i^{(v)}$  при  $v > 1$ ;
- $q_{iv} = 0$  и  $A_{v0} = 0$  для  $v = 1, 2, \dots, p$ .

Таким образом, выходы интеграторов частных подсистем, показанных на рис. 2.12, совпали с координатами вектора  $\vec{x}$  в базисе  $[f]$ . Кроме того, все блочные матрицы  $A_{00}, A_{10}, \dots, A_{p0}$  в (2.10.29) – нулевые.

### 2.10.3. Формирование управления

Работая в базисе  $[f]$ , мы имеем  $p$  изолированных подсистем, сумма выходов которых подается на вход общей подсистемы с матрицей динамики  $A_{00}$  размерности  $n - \sum_{i=1}^p m_i$ :

$$\begin{cases} \dot{\vec{z}}_1 = A_{11}\vec{z}_1 + \vec{\beta}_1 q_1; y_1 = z_{11}; \\ \dots\dots\dots \\ \dot{\vec{z}}_p = A_{pp}\vec{z}_p + \vec{\beta}_p q_p; y_p = z_{p1}; \\ \dot{\vec{z}}_0 = A_{00}\vec{z}_0 + \sum_{v=1}^p A_{0v}\vec{z}_v. \end{cases} \quad (2.10.35)$$

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 2.14.

Пары матриц  $\{A_{ii}, \vec{\beta}_i\}$  для  $i = 1, 2, \dots, p$  имеют форму УКП, причем каждая из матриц  $A_{ii}$  имеет только нулевые собственные значения. Это вполне согласуется с тем, что в п. 2.10.1 было произведено преобразование объекта на подсистемы последовательно включенных интеграторов. Сформируем управление  $q_i$  для  $i = 1, 2, \dots, p$  в следующем виде:

$$q_i = k_i v_i(t) + I_{fi} \vec{z}_i(t), \quad (2.10.36)$$

где

$$I_{fi} = [I_{i1}^f, I_{i2}^f \dots I_{i,m_i}^f] \quad (2.10.37)$$

матрица обратной связи для  $i$ -й подсистемы в базисе  $[f]$ .

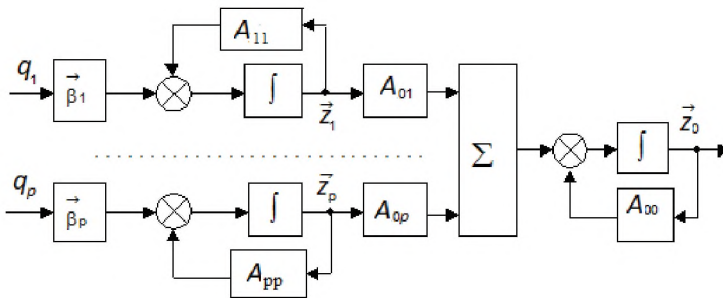


Рис. 2.14. Структурная схема объекта в базисе  $[f]$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение для  $i$ -й подсистемы:

$$\dot{\vec{z}}_i = A_{ii}\vec{z}_i + \vec{\beta}_i I_{fi} \vec{z}_i + \vec{\beta}_i k_i v_i \quad (2.10.38)$$

или

$$\dot{\vec{z}}_i = \chi_{fi} \vec{z}_i + \vec{\beta}_i k_i v_i. \quad (2.10.39)$$

Нетрудно убедиться, что матрица динамики  $i$ -й подсистемы в базисе  $[f]$  имеет вид:

$$\chi_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ I_{i1}^f & I_{i2}^f & I_{i3}^f & \cdots & I_{i,m_i}^f \end{bmatrix}. \quad (2.10.40)$$

Следовательно, определены характеристические полиномы подсистем:

$$\varphi_i(\lambda) = \lambda^{m_i} - I_{i,m_i}^f \lambda^{m_i-1} - I_{i,m_i-1}^f \lambda^{m_i-2} - \cdots - I_{i1}^f. \quad (2.10.41)$$

Согласно (2.8.22), а также с учетом (2.10.13), (2.10.13) и (2.10.37) запишем выражение для передаточной функции замкнутой  $i$ -й подсистемы:

$$W_{v_i y_i}(p) = \frac{k_i}{p^{m_i} - I_{i,m_i}^f p^{m_i-1} - \cdots - I_{i1}^f}. \quad (2.10.42)$$

Очевидно,

$$W_{v_i y_i}(0) = \frac{k_i}{-I_{i1}^f}. \quad (2.10.43)$$

Задавая расположение полюсов и статику для каждой подсистемы, в итоге получим матрицы:

$$L_f = \begin{bmatrix} l_{f1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{f2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{fp} & 0 \end{bmatrix}; k_{\vee} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_p \end{bmatrix}. \quad (2.10.44)$$

Возвращаясь в исходный базис для уравнений (2.10.13), получим:

$$L = L_f \cdot FE. \quad (2.10.45)$$

При этом вектор  $\vec{q}$  формируется в соответствии с выражением

$$\vec{q}(t) = L\vec{x}(t) + k\vec{v}(t). \quad (2.10.46)$$

Учитывая (2.10.10), окончательно получим:

$$\vec{u} = B_*^{-1}F_*\vec{x} + B_*^{-1}L\vec{x} + B_*^{-1}kV(t) = L\vec{x} + k\vec{V}, \quad (2.10.47)$$

где

$$L = B_*^{-1}(F_* + L); \quad k = B_*^{-1}k. \quad (2.10.48)$$

На этом можно закончить синтез, если часть системы, оказавшаяся вне обратной связи, имеет допустимые динамические свойства. Если же нет, например,  $A_{00}$  неустойчива, то приходится идти на то, чтобы ввести обратную связь  $L_0$  по вектору  $\vec{z}_0$  по крайней мере через один из каналов ( $q_r$ ), оставив полностью развязанными остальные ( $p - 1$ ) каналов. В этом случае  $k_{\downarrow r}, I_{fr}, I_{f0}$  нужно рассчитывать совместно. Связь  $L_0$  должна обеспечить «надзор» за бывшими ранее без контроля ( $n - \sum m_i$ ) полюсами (собственными числами) системы. Эта часть расчета может быть произведена по обычной методике синтеза системы с одним входом. Результирующая структура в базисе  $[f]$  приведена на рис. 2.15.

#### 2.10.4. Итоговый алгоритм

1. Расчет чисел  $m_i, i = 1, 2, \dots, p$  :

$$m_i = m_{\max} \begin{cases} C_i A^{m-1} B \neq 0; \\ C_i A^{m-2} B = 0. \end{cases} \quad (2.10.49)$$

Эти числа можно также находить непосредственно из схемы в переменных состояния.

2. Вычисление матриц  $F_*, B_*$ :

$$F_* = - \begin{bmatrix} C_1 A^{m_1} \\ \vdots \\ C_p A^{m_p} \end{bmatrix}; B_* = \begin{bmatrix} C_1 A^{m_1-1} \\ \vdots \\ C_p A^{m_p-1} \end{bmatrix} B. \quad (2.10.50)$$

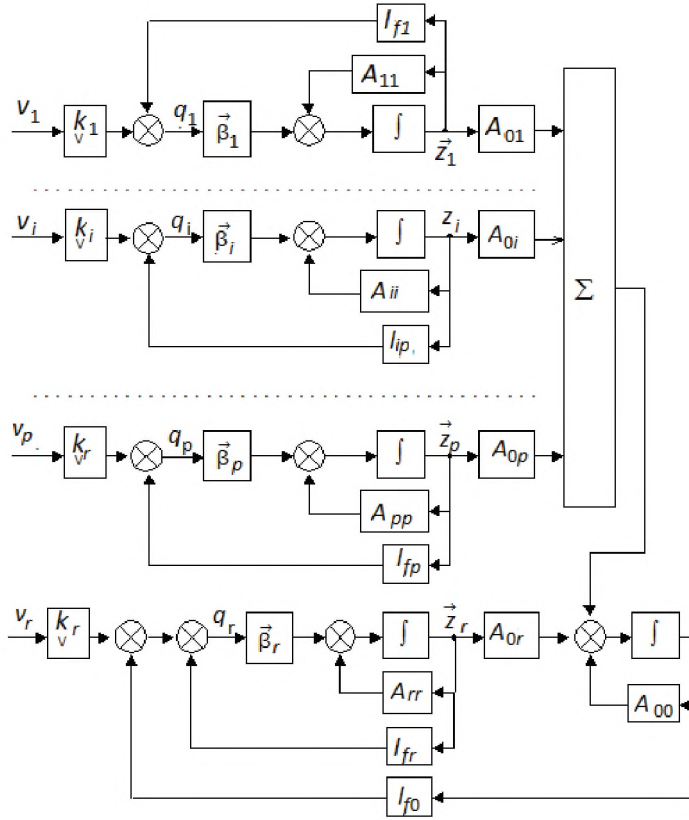


Рис. 2.15. Структурная схема объекта в базисе  $[f]$

3. Вычисление  $B_*^{-1}$ . Если  $B_*$  вырождена, то задача разделения каналов не имеет решения.
4. Вычисление матриц  $\underset{\vee}{A}, \underset{\vee}{B}$ :

$$\underset{\vee}{A} = \underset{\vee}{A} + \underbrace{\underset{\vee}{B} \underset{\vee}{B}^{-1} F_*}_{\underset{\vee}{B}}; \underset{\vee}{B} = \underset{\vee}{B} \underset{\vee}{B}^{-1}. \quad (2.10.51)$$

5. Построение матрицы  $EF$  :

$$EF = \left[ \underset{\vee}{A}^{m_1-1} \underset{\vee}{b}_1 : \dots : \underset{\vee}{b}_1 : \underset{\vee}{A}^{m_2-1} \underset{\vee}{b}_2 : \dots : \underset{\vee}{b}_2 : \dots : \underset{\vee}{b}_p : [f_{\text{ост}}] \right]. \quad (2.10.52)$$

6. Расчет коэффициентов характеристических уравнений каналов, то есть строк  $I_{fi}$ . Для этого предварительно должны быть заданы наборы желаемых собственных чисел  $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im_i})$  по каждому из каналов, после чего в соответствии с равенством

$$\prod_{v=1}^{m_i} (\lambda - \lambda_{iv}) = \lambda^{m_i} - I_{i,m_i}^f \lambda^{m_i-1} - I_{i,m_i-1}^f \lambda^{m_i-2} - \dots - I_{i1}^f \quad (2.10.53)$$

следует рассчитать

$$I_{fi} = \left[ I_{i1}^f \dots I_{i,m_i}^f \right] \quad (2.10.54)$$

и сформировать матрицу

$$L_f = \begin{bmatrix} I_{f1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{f2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{fp} \end{bmatrix}. \quad (2.10.55)$$

7. Расчет (построение в соответствии с выбранным базисом) матрицы  $A_{00}$  и вычисление ее собственных чисел.
8. Принятие решения о необходимости развязки каналов для коррекции собственных чисел полинома  $\varphi_0(\lambda)$ . В случае необходимости выбрать канал для коррекции и далее провести для него расчет по методике синтеза системы с одним входом. В конечном итоге должна быть получена  $L_f$  – полная матрица обратной связи промежуточной системы в базисе  $[f]$ .
9. Расчет матрицы  $k_{\underset{v}{\vee}}$  по заданным коэффициентам  $W_i(0)$ :

$$k_{\underset{v}{\vee}i} = -W_i(0)I_{i1}^f \quad (2.10.56)$$

и

$$k_{\underset{v}{\vee}} = \begin{bmatrix} k_{\underset{v}{\vee}1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{\underset{v}{\vee}2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{\underset{v}{\vee}p} \end{bmatrix}. \quad (2.10.57)$$

10. Расчет матрицы обратной связи промежуточной системы в исходном базисе:

$$L = L_f \cdot FE. \quad (2.10.58)$$

11. Расчет результирующей матрицы обратной связи:

$$L = B_*^{-1}(F_* + L). \quad (2.10.59)$$

12. Расчет матрицы передаточных коэффициентов по вектору командных сигналов:

$$k = B_*^{-1}k. \quad (2.10.60)$$

Вектор управления формируется традиционным образом:

$$\vec{u}(t) = L\vec{x}(t) + k\vec{v}(t). \quad (2.10.61)$$

При необходимости может быть синтезирован идентификатор (наблюдатель) неизмеряемых координат вектора состояния.

## § 2.11. Основы построения идентификаторов состояния (наблюдателей)

### 2.11.1. Наблюдатель Люенбергера полного порядка

#### Синтез архитектуры наблюдателя

Рассмотрим линейную стационарную систему, которая описывается векторно-матричными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t). \end{cases} \quad (2.11.1)$$

Для такой системы существуют алгоритмы модального синтеза, которые позволяют найти управление

$$\vec{u}(t) = L\vec{x}(t) + k\vec{v}(t), \quad (2.11.2)$$

обеспечивающее заданные динамику и статику системы. Проблема заключается в необходимости использования вектора обратной связи для формирования такого управления. Фактически в распоряжении

разработчика системы управления лишь вектор выхода  $\vec{y}(t)$ . Возникает вопрос: как, наблюдая за вектором  $\vec{y}(t)$ , восстановить вектор  $\vec{x}(t)$  или найти его оценку  $\hat{\vec{x}}(t)$ . При этом ошибка оценки вектора  $\vec{x}(t)$

$$\vec{e}(t) = \vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t) \quad (2.11.3)$$

должна быть относительно малой и тем более с течением времени не должна расти.

Будем полагать, что разработчику достаточно хорошо известны параметры объекта, то есть оценки  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  матриц  $A, B, C$ . Более того, положим:

$$\hat{A} = A, \quad \hat{B} = B, \quad \hat{C} = C. \quad (2.11.4)$$

В этом случае, если построить аналоговую или цифровую модель объекта в соответствии с уравнениями

$$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = A\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t); \quad (2.11.5)$$

$$\hat{\vec{y}}(t) = C\hat{\vec{x}}(t),$$

как показано на рис. 2.16, можно было бы ожидать выполнения равенств

$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} \text{ и } \hat{\vec{y}} = \vec{y}. \quad (2.11.6)$$

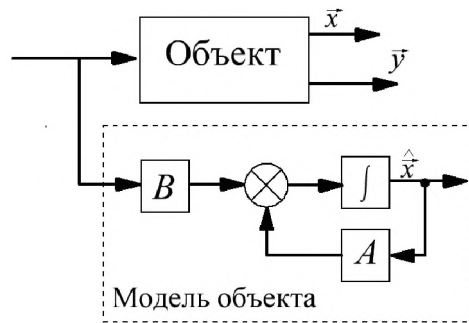


Рис. 2.16. Неудачный вариант построителя оценки вектора состояния

Однако априорное знание объекта (в том числе матриц  $A, B$  и  $C$ ) является приближенным, параметры его могут дрейфовать во времени, начальные условия для вектора состояния, которые следовало

бы подставить в модель, неизвестны. Поэтому в действительности в такой схеме ошибка оценки вектора состояния может иметь склонность к неограниченному росту с течением времени.

Американским ученым Д. Г. Люенбергером впервые были изучены структуры работоспособных асимптотических идентификаторов (наблюдателей, восстановителей) вектора состояния, названных позднее его именем. основополагающая идея состоит в том, чтобы в рассмотренную структурную схему ввести дополнительную обратную связь по ошибке оценки вектора  $\vec{y}$ , заведомо обеспечивающую асимптотическое затухание ошибки оценки вектора состояния. Внешне структурная схема наблюдателя Люенбергера полного порядка, которая приведена на рис. 2.17, совпадает с одной из форм известного фильтра Калмана. Различие в том, что матрица  $K$ , которая в фильтре Калмана называется его именем (матрицей Калмана), в наблюдателе Люенбергера рассчитывается из других соображений.

В соответствии с рис. 2.17 уравнение наблюдателя будет иметь вид:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\bar{u}(t) + K(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)). \quad (2.11.7)$$

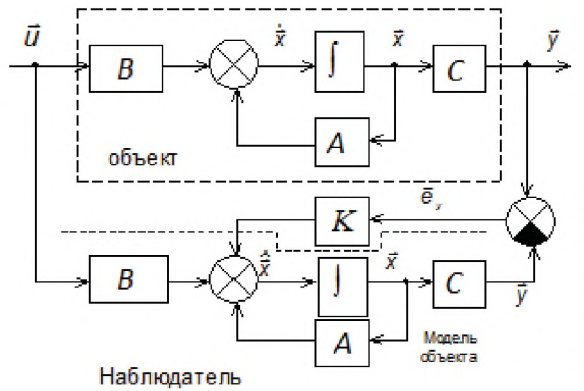


Рис. 2.17. Наблюдатель Люенбергера полного порядка

Получим уравнение для ошибки оценки вектора состояния. Для этого в равенство (2.11.3) подставим выражения для вектора состо-

яния и его оценки из (2.11.1) и (2.11.7):

$$\dot{\vec{e}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) - A\hat{\vec{x}}(t) - B\vec{u}(t) - K \left( C\vec{x}(t) - C\hat{\vec{x}}(t) \right),$$

откуда

$$\dot{\vec{e}}(t) = \mathcal{L} \cdot \vec{e}(t), \quad (2.11.8)$$

где

$$\mathcal{L} = A - KC \quad (2.11.9)$$

называют матрицей динамики наблюдателя. Выражение (2.11.8) является однородным дифференциальным уравнением. Решение его имеет вид:

$$\vec{e}(t) = e^{(\mathcal{L} \cdot t)} \cdot \vec{e}(0). \quad (2.11.10)$$

Поведение ошибки во времени зависит от собственных чисел матрицы наблюдателя  $\mathcal{L}$ . Выбрав их соответствующим образом, можно достаточно быстро свести ошибку к нулю и получать от наблюдателя точную оценку вектора состояния. Далее будет показано, что если пара  $\{A, C\}$  наблюдаема, то соответствующим выбором матрицы  $K$  можно обеспечить любое желаемое расположение собственных чисел наблюдателя, то есть матрицы  $\mathcal{L}$ . Практически собственные значения наблюдателя выбираются так, чтобы состояние наблюдателя  $\hat{\vec{x}}$  сходилось к состоянию наблюдаемой системы несколько быстрее затухания переходных процессов в желаемой замкнутой системе. Чрезмерное ускорение наблюдателя приводит к затруднениям при его реализации.

#### **Алгоритм определения матрицы для систем со скалярным выходом**

Если пара  $\{A, C\}$  наблюдаема, то в пространстве вектора состояния существует базис  $[i]$ , в котором эта пара имеет идентификационное каноническое представление (ИКП)  $\{A_i, C_i\}$ .

Обозначим некоторый исходный базис как  $[h]$ . В этом базисе дифференциальное уравнение для ошибки оценки вектора состояния имеет вид:

$$\dot{\vec{e}}_h(t) = \mathcal{L}_h \vec{e}_h(t). \quad (2.11.11)$$

Перейдем к базису ИКП. Используем уже известное соотношение, связывающее координатные столбцы одного и того же вектора в разных базисах:

$$\vec{e}_h = HI \cdot \vec{e}_i. \quad (2.11.12)$$

Используя эту подстановку, запишем:

$$HI \cdot \dot{\vec{e}}_i(t) = \mathcal{L}_h \cdot HI \cdot \vec{e}_i(t).$$

Умножив обе части последнего равенства на  $IH$ , получим:

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \mathcal{L}_i \vec{e}_i(t),$$

где

$$\mathcal{L}_i = IH \cdot \mathcal{L}_h \cdot HI. \quad (2.11.13)$$

Кроме того,

$$\mathcal{L}_i = A_i - K_i C_i, \quad (2.11.14)$$

где

$$A_i = IH \cdot \mathcal{A}_h \cdot HI; \quad (2.11.15)$$

$$C_i = C_h \cdot HI; K_i = IH \cdot K_h.$$

Матрица динамики наблюдателя в базисе ИКП в соответствии с уравнением (2.11.14) имеет вид:

$$\mathcal{L}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & K_{I1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{I2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{I3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{In-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{In} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\beta_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\beta_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\beta_1 \end{bmatrix},$$

где  $\beta_i$  – коэффициенты характеристического полинома наблюдателя, которые вычисляются на основании желаемых собственных чисел наблюдателя  $\lambda_i^N$  согласно выражению

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^N) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n. \quad (2.11.16)$$

Очевидно выражение для элементов матрицы  $K$  в базисе ИКП:

$$k_{ij} = \beta_{n+1-j} - \alpha_{n+1-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11.17)$$

Перевод матрицы  $K$  в исходный или какой-либо другой базис может быть произведен в соответствии с выражением (2.11.15) с использованием (2.7.13).

### ПРИМЕР 2.11.1

Построить наблюдатель полного порядка для объекта со структурной схемой, приведенной на рис. 2.18.

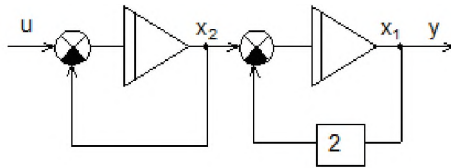


Рис. 2.18. Объект для примера 2.11.1

Запишем матрицы объекта в исходном базисе:

$$A = A_h = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{b}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = C_h = [1 \quad 0].$$

Характеристический полином объекта (матрицы динамики  $A$ )

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2,$$

его коэффициенты

$$\alpha_1 = 3; \quad \alpha_2 = 2,$$

нули (собственные числа)

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2.$$

Время переходного процесса в объекте определяется наиболее близким к мнимой оси собственным числом  $\lambda_1$ :

$$t_{\text{пер}} \approx \frac{3}{-\lambda_{11}} = 3c.$$

Зададим собственные числа наблюдателя

$$\lambda_1^N = \lambda_2^N = -3.$$

Им соответствует характеристический полином наблюдателя

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\lambda) = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9,$$

его коэффициенты

$$\beta_1 = 6; \quad \beta_2 = 9.$$

В соответствии с (2.11.17) определяем элементы матрицы и саму эту матрицу в базисе ИКП:

$$\begin{aligned} k_{i1} &= \beta_2 - \alpha_2 = 7; \\ k_{i2} &= \beta_1 - \alpha_1 = 3; \end{aligned} \quad K_i = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы перевести матрицу  $K$  в исходный базис, рассчитаем матрицу наблюдаемости и обратную ей в исходном базисе:

$$N_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad N_h^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

учитывая представление в базисе ИКП

$$C_i = [0 \ 1]; \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

рассчитаем в этом базисе матрицу наблюдаемости

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.8.28) вычислим матрицу перехода от исходного базиса  $[h]$  к базису ИКП  $[i]$ :

$$HI = N_h^{-1} N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$



Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  рассматривать как неизвестные, то здесь мы имеем  $n$  неизвестных и  $n_y < n$  уравнений. Таким образом, недостает  $(n - n_y)$  уравнений. Полагаем, что  $\text{rank} C = n_y$ , то есть все строки матрицы  $C$  линейно независимы. Введем  $(n - n_y)$ -мерный вектор  $\vec{q}$ , дополнив матрицу  $C$  до квадратной невырожденной матрицы  $C_p$  с помощью матрицы  $C_q$ :

$$C_p = \begin{bmatrix} C \\ C_q \end{bmatrix}. \quad (2.11.21)$$

Запишем:

$$\begin{bmatrix} \vec{y} \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C_q \end{bmatrix} \vec{x}, \quad (2.11.22)$$

откуда следует

$$\vec{x} = C_p^{-1} \begin{bmatrix} \vec{y} \\ \vec{q} \end{bmatrix}. \quad (2.11.23)$$

Обозначим:

$$C_p^{-1} = \begin{bmatrix} F_y [n \times n_y] & F_q [n \times (n - n_y)] \end{bmatrix}, \quad (2.11.24)$$

тогда

$$\vec{x} = F_y \vec{y} + F_q \vec{q}. \quad (2.11.25)$$

Если удастся найти оценку  $\hat{q}$  вектора  $\vec{q}$ , то можно будет вычислить оценку вектора состояния

$$\hat{x} = F_y \vec{y} + F_q \hat{q}. \quad (2.11.26)$$

Так как  $\vec{q} = C_q \vec{x}$ , то

$$\dot{\vec{q}} = C_q A \vec{x} + C_q B \vec{u}. \quad (2.11.27)$$

Подставим сюда  $\vec{x}$  из (2.11.26):

$$\dot{\vec{q}} = C_q A F_y \vec{y} + C_q A F_q \vec{q} + C_q B \vec{u}. \quad (2.11.28)$$

Построим наблюдатель для вектора  $\vec{q}$ . В последнем уравнении векторы  $\vec{y}$  и  $\vec{u}$  выступают в качестве входов. Если попытаться коррекцию наблюдателя ввести традиционным образом:  $K(\vec{y} - \hat{\vec{y}})$ , то получим:

$$\hat{\vec{y}} = C \hat{\vec{x}} = C F_y \vec{y} + C F_q \hat{\vec{q}}. \quad (2.11.29)$$

Но из (2.11.21) и (2.11.24) имеем:

$$C_p C_p^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ C_q \end{bmatrix} [F_y \quad F_q] = \begin{bmatrix} CF_y & CF_q \\ C_q F_y & C_q F_q \end{bmatrix} = E_n,$$

откуда должно следовать  $CF_y = E_n$ ;  $CF_q = 0$ , то есть  $\hat{y} = \vec{y}$  и информации о  $\vec{q}$  здесь нет. Поэтому примем:

$$\dot{\hat{q}} = C_q A F_q \hat{q} + C_q B \vec{u} + C_q A F_y \hat{y} + K (\dot{\vec{y}} - \dot{\hat{y}}). \quad (2.11.30)$$

Проведем необходимые преобразования. Так как

$$\dot{\vec{y}} = C \dot{\vec{x}} = CA \hat{x} + CB \vec{u},$$

то с учетом (2.11.26) получим:

$$\dot{\hat{y}} = CA F_y \vec{y} + CA F_q \hat{q} + CB \vec{u}. \quad (2.11.31)$$

Проследим за поведением ошибки оценки:

$$\Delta \dot{\hat{q}} = \dot{\vec{q}}(t) - \dot{\hat{q}}(t).$$

Используя полученные выше выражения (2.11.28) и (2.11.30) для  $\dot{\vec{q}}$  и  $\dot{\hat{q}}$ , получим:

$$\Delta \dot{\hat{q}} = C_q A F_q \Delta \vec{q} - K (\dot{\vec{y}} - \dot{\hat{y}}).$$

Вычислим разность  $\dot{\vec{y}} - \dot{\hat{y}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}} &= C \dot{\vec{x}} = CA \vec{x} + CB \vec{u} = CA F_y \vec{y} + CA F_q \vec{q} + CB \vec{u} \\ &- \\ \dot{\hat{y}} &= C \dot{\hat{x}} = CA \hat{x} + CB \vec{u} = CA F_y \hat{y} + CA F_q \hat{q} + CB \vec{u} \\ \dot{\vec{y}} - \dot{\hat{y}} &= CA F_y (\vec{y} - \hat{y}) + CA F_q \Delta \vec{q}. \end{aligned}$$

Так как выше было показано, что  $\hat{y} = \vec{y}$ , то окончательно получим:

$$\Delta \dot{\hat{q}}(t) = \mathcal{L}^q \Delta \vec{q}, \quad (2.11.32)$$

где матрица наблюдателя

$$\mathcal{L}^q = C_q A F_q - K C A F_q. \quad (2.11.33)$$

Очевидно, что можно «заказать динамику обнуления ошибки», выбирая  $K$  ( $C_q A F_q$  и  $C A F_q$  – заданные матрицы). Матрицу  $K$  следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить заданное расположение собственных чисел наблюдателя.

Если, например,  $n_y = 1$ , то  $C_q A F_q$  имеет размер  $[(n - n_y) \times (n - n_y)]$ , а  $C A F_q - [1 \times (n - n_y)]$  и  $K - [(n - n_y) \times 1]$ . В этом случае задача решается аналогично расчету наблюдателя полного порядка со скалярным выходом.

Таким образом, рассчитав собственные значения матрицы  $C_q A F_q$ , задавшись желаемыми собственными значениями наблюдателя пониженного порядка и получив соответствующие значения коэффициентов его характеристического полинома, легко записать выражение для матрицы  $K$  в базисе идентификационного канонического представления. После этого потребуется перевести матрицу  $K$  в исходный базис. Если известна пара матриц  $\{C_q A F_q, C A F_q\}$ , то через матрицы наблюдаемости в исходном базисе и в базисе идентификационного канонического представления  $N_h$  и  $N_l$ , причем  $N$  должна быть построена с использованием пары матриц  $\{C_q A F_q, C A F_q\}$ , можно найти матрицу перехода от базиса  $[i]$  к исходному базису  $[h]$ .

Теперь следует позаботиться о реализуемости алгоритма наблюдателя. Из уравнения (2.11.30) с учетом (2.11.25) получим:

$$\dot{\vec{q}} = \mathcal{L}^q \hat{\vec{q}} + (C_q B - K C B) \vec{u} + (C_q A F_y - K C A F_y) \vec{y} + K \dot{\vec{y}}. \quad (2.11.34)$$

Это уравнение для реализации не годится, так как в случае его использования пришлось бы осуществлять операции дифференцирования вектора  $\vec{y}(t)$ . В реальных условиях на вектор выхода объекта, как правило, наложены шумы измерений и другой физической природы. Эти шумы характеризуются широким спектром, и дифференцирование существенно увеличивает шумовую составляющую в выходном сигнале.

Для того чтобы не решать задачу измерения  $\dot{\vec{y}}$ , введем новую переменную  $\vec{\xi} = \vec{q} - k \vec{y}$ . Тогда

$$\vec{q} = \vec{\xi} + k \vec{y}. \quad (2.11.35)$$

Проведем соответствующую замену в (2.11.34) и в результате получим первое уравнение наблюдателя:

$$\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{L}^q \vec{\xi} + (C_q B - KCB)\vec{u} + (\mathcal{L}^q K + C_q A F_y - KCA F_y)\vec{y}. \quad (2.11.36)$$

Теперь из уравнений (2.11.30) и (2.11.35) имеем:

$$\hat{\vec{x}} = F_y \vec{y} + F_q \hat{\vec{q}} = F_y \vec{y} + F_q \vec{\xi} + F_q K \vec{y},$$

или

$$\hat{\vec{x}} = (F_y + F_q K)\vec{y} + F_q \vec{\xi}. \quad (2.11.37)$$

Это второе уравнение наблюдателя. Таким образом, получено уравнение оценки  $\hat{\vec{x}}$  вектора  $\vec{x}$  с помощью наблюдателя пониженного порядка.

### 2.11.3. Наблюдатель Люенбергера минимального порядка

Рассмотрим еще один подход к формированию наблюдателя. Так же как в п. 2.11.2, сформируем матрицы  $C_q$ ,  $C_p$  и введем вектор

$$\vec{q}(t) = C_q \vec{x}(t). \quad (2.11.38)$$

Оценку вектора  $\vec{q}(t)$  будем искать как решение уравнения

$$\dot{\vec{q}}(t) = \mathcal{L}^q \vec{q}(t) + G^y \vec{y}(t) + G^u \vec{u}(t), \quad (2.11.39)$$

где  $\mathcal{L}^q$ ,  $G^y$  и  $G^u$  – некоторые, пока неизвестные матрицы.

Как и прежде, ошибкой оценки вектора  $\vec{q}$  будем считать разность

$$\vec{\Delta}_q(t) = \vec{q}(t) - \hat{\vec{q}}(t). \quad (2.11.40)$$

В соответствии с уравнением объекта и выражением (2.11.38)

$$\dot{\vec{q}}(t) = C_q A \vec{x}(t) + C_q B \vec{u}(t). \quad (2.11.41)$$

Найдем дифференциальное уравнение для ошибки  $\Delta \vec{q}(t)$ :

$$\dot{\vec{\Delta}}_q(t) = C_q A \vec{x}(t) + C_q B \vec{u}(t) - \mathcal{L}^q \vec{q}(t) - G^y \vec{y}(t) - G^u \vec{u}(t). \quad (2.11.42)$$

Добавим и вычтем в правой части последнего равенства  $\mathcal{L}^q \vec{q}$  и с учетом (2.11.38) получим:

$$\dot{\hat{\Delta}}_q(t) = \mathcal{L}^q \vec{\delta}_q(t) + (C_q B - G^u) \vec{u}(t) + (C_q A - G^y C - \mathcal{L}^q C_q) \vec{x}(t). \quad (2.11.43)$$

Положим:

$$G^u = C_q B, \quad (2.11.44)$$

и потребуем выполнения равенства

$$C_q A - G^y C - \mathcal{L}^q C_q = 0. \quad (2.11.45)$$

Тогда получим уравнение для ошибки наблюдателя

$$\dot{\hat{\Delta}}_q(t) = \mathcal{L}^q \vec{\Delta}_q(t). \quad (2.11.46)$$

Если назначить матрицу  $\mathcal{L}^q$  так, чтобы ее собственные числа лежали в левой полуплоскости достаточно далеко от мнимой оси, то ошибка наблюдателя, имеющая изначально место при ненулевых начальных условиях, будет с соответствующей скоростью стремиться к нулю. Так же быстро вектор

$$\hat{\vec{x}}(t) = C_p^{-1} \begin{bmatrix} \vec{y} \\ \vec{q} \end{bmatrix} \quad (2.11.47)$$

будет стремиться к вектору  $\vec{x}(t)$ . Вытекающее из (2.11.45) уравнение

$$C_q A - \mathcal{L}^q C_q = G^y C \quad (2.11.48)$$

называется **матричным уравнением Люенбергера**.

Теперь учтем, что задача построения наблюдателя, то есть нахождения оценки  $\hat{\vec{x}}$  вектора состояния  $\vec{x}$ , возникла из-за необходимости реализовать управление

$$\vec{u}(t) = -L\vec{x}(t) + k^v \vec{v}(t). \quad (2.11.49)$$

Сама по себе оценка вектора состояния часто не нужна. Поэтому попытаемся найти оценку  $\hat{L}\vec{x}$  линейной комбинации координат вектора состояния  $L\vec{x}$ . Будем искать эту оценку в виде:

$$L\hat{\vec{x}}(t) = \chi \hat{\vec{q}}(t) + \eta \vec{y}(t). \quad (2.11.50)$$

Так как с течением времени  $\hat{q}$  стремится к  $\vec{q}$ , то с учетом (2.11.38) и уравнения выхода объекта получим:

$$L\hat{x}(t) = \chi C_q \vec{x}(t) + \eta C \vec{x}(t), \quad (2.11.51)$$

откуда следует:

$$L = \chi C_q + \eta C. \quad (2.11.52)$$

Таким образом, необходимо решить следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} C_q A - \mathcal{L}^q C_q &= G^y C; \\ \chi C_q + \eta C &= L. \end{aligned} \quad (2.11.53)$$

Эта система всегда имеет решение, если, во-первых, собственные числа матриц  $\mathcal{L}^q$  и  $A$  не совпадают друг с другом и, во-вторых, размерность вектора  $\vec{q}$  (размерность матрицы наблюдателя  $\mathcal{L}^q$ )

$$s \geq n_u(v - 1), \quad (2.11.54)$$

где  $n_u$  – размер вектора управления;  $v$  – индекс наблюдаемости. Это такое число, для которого матрица

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{v-1} \end{bmatrix} \quad (2.11.55)$$

имеет ранг, равный  $n$ .

Таким образом, может быть сформулирован следующий итоговый алгоритм:

1. Найти индекс наблюдаемости  $v$  и размерность наблюдателя  $s$ .
2. Задать желаемую динамику наблюдателя и записать матрицу его динамики  $\mathcal{L}^q$  в виде матрицы, сопровождающей свой характеристический полином.
3. Вычислить матрицы  $C_q, G^y, \chi, \eta$  согласно (2.11.53), также матрицу  $G^u$  согласно (2.11.44).
4. Реализовать алгоритмы регулятора, включая наблюдатель Люенбергера минимального порядка:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}}(t) &= \mathcal{L}^q \hat{q}(t) + G^y \vec{y}(t) + G^u \vec{u}(t); \\ \vec{u}(t) &= \chi \hat{q}(t) + \eta \vec{y}(t) + k^v \vec{v}(t).\end{aligned}\quad (2.11.56)$$

## § 2.12. Синтез реализуемого управления, обеспечивающий заданные динамические и статические свойства системы управления

### 2.12.1. Динамические свойства системы с обратной связью и наблюдателем полного порядка

Предполагается, что известны уравнения управляемого и наблюдаемого объекта:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t).\end{cases}\quad (2.12.1)$$

Кроме того, проведен синтез управления и получены матрица  $L$  и коэффициент  $k^v$  для равенства

$$\vec{u}(t) = -L\vec{x}(t) + k^v \vec{v}(t),\quad (2.12.2)$$

обеспечивающего желаемые собственные числа замкнутой системы  $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \dots, \lambda_n^3$ , или нули характеристического полинома замкнутой системы

$$\varphi_{AC}(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \lambda + \gamma_n.\quad (2.12.3)$$

Предполагается также, что имеется наблюдатель

$$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = (A - KC)\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K\vec{y}(t),\quad (2.12.4)$$

спроектированный таким образом, что его характеристический полином  $\varphi_{\mathcal{L}}(\lambda)$  имеет коэффициенты  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , соответствующие некоторой выбранной совокупности собственных чисел  $\lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots, \lambda_n^N$ .

Учтем, что при формировании управления фактически можно воспользоваться не самим вектором состояния  $\vec{x}$ , а лишь его оценкой  $\hat{\vec{x}}$ , то есть

$$\vec{u}(t) = -L\hat{\vec{x}}(t) + k^v \vec{v}(t).\quad (2.12.5)$$

Таким образом, рассматривается функциональная схема полной системы (объект, формирователь управления и наблюдатель), представленная на рис. 2.19.

Запишем уравнения этой системы, то есть совместно уравнения объекта с управлением и наблюдателя:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) - BL\vec{x}(t) + Bk^v\vec{v}(t); \\ \dot{\hat{\vec{x}}}(t) = (A - KC)\hat{\vec{x}}(t) - BL\vec{x}(t) + Bk^v\vec{v}(t) + KC\vec{x}(t). \end{cases} \quad (2.12.6)$$

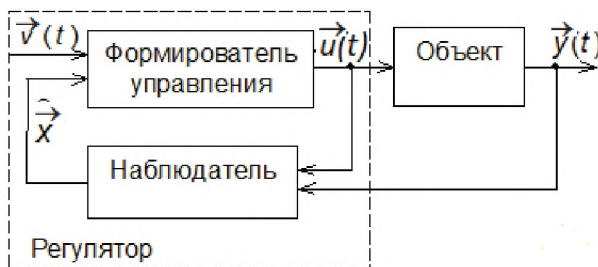


Рис. 2.19. Функциональная схема полной системы

С использованием блочных матриц получим:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{x}}(t) \\ \dot{\hat{\vec{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BL \\ KC & A - KC - BL \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \hat{\vec{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk^v \\ Bk^v \end{bmatrix} \vec{v}(t). \quad (2.12.7)$$

Поведение этой системы зависит от собственных чисел матрицы динамики полной системы

$$X = \begin{bmatrix} A & BL \\ KC & A - KC + BL \end{bmatrix}. \quad (2.12.8)$$

Надо попытаться для  $X$  найти некоторую подобную матрицу, такую, чтобы можно было легко определить ее собственные числа. Перейдем к подобной матрице с помощью преобразования

$$X_f = FH \cdot X_h \cdot HF. \quad (2.12.9)$$

Матрицу  $HF$  выберем следующей:

$$HF = \begin{bmatrix} E_n & 0_n \\ E_n & -E_n \end{bmatrix}, \quad (2.12.10)$$

где индекс  $n$  указывает на размеры соответствующих нулевой и единичных матриц. Легко убедиться, что  $HF^{-1} = HF$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_f &= \begin{bmatrix} E_n & 0_n \\ E_n & -E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BL \\ KC & A - KC - BL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n & 0_n \\ E_n & -E_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A + BL & -BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Характеристический полином матрицы  $\mathcal{X}$  не зависит от базиса и определяется следующим образом:

$$\varphi_{\mathcal{X}}(\lambda) = |\lambda E_{2n} - \mathcal{X}| = |\lambda E_n - (A - BL)| \cdot |\lambda E_n - (A - KC)|.$$

Отсюда следует:

$$\varphi_{\mathcal{X}} = \varphi_{AC}(\lambda)\varphi_{\mathcal{L}}(\lambda). \quad (2.12.11)$$

Таким образом, полная система, в которой управление вычисляется в функции оценки вектора состояния, имеет  $2n$  собственных чисел:  $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \dots, \lambda_n^3, \lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots, \lambda_n^N$ . Собственные числа замкнутой системы сохранили те значения, которые были заданы при синтезе управления.

Отметим, что в полной системе передаточная функция от командного сигнала  $\vec{v}$  до выходного сигнала  $\vec{y}$  тождественно равна передаточной функции в идеализированной системе без наблюдателя. Это действительно так, потому что по определению передаточная функция связывает изображения соответствующих переменных при нулевых начальных условиях. При нулевых начальных условиях выход объекта  $\vec{y}$  и выход наблюдателя  $\hat{\vec{y}}$  тождественно равны.

### 2.12.2. Динамические свойства системы с обратной связью и наблюдателем минимального порядка

В случае использования наблюдателя минимального порядка в соответствии с (2.11.56) и (2.11.44) уравнения регулятора имеют

вид:

$$\dot{\hat{q}}(t) = \mathcal{L}^q \hat{q}(t) + G^y \vec{y}(t) + C_q B \vec{u}(t) \vec{u}(t) = \chi \hat{q}(t) + \mu \vec{y}(t) + k^y \vec{v}(t).$$

С учетом управления запишем совместно уравнения объекта и наблюдателя:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \vec{x}(t) + B \nu C \vec{x}(t) + B \chi \hat{q}(t) + B k^y \vec{v}(t), \quad (2.12.12)$$

$$\dot{\hat{q}}(t) = G^y C \vec{x}(t) + C_q B \nu C \vec{x}(t) + \mathcal{L}^q \hat{q}(t) + C_q B \chi \hat{q}(t) + C_q B k^y \vec{v}(t). \quad (2.12.13)$$

Отсюда матрица динамики полной системы имеет вид:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} A + B \nu C & B \chi \\ G^y C + C_q B \nu C & \mathcal{L}^q + C_q B \chi \end{bmatrix}. \quad (2.12.14)$$

Перейдем к подобной матрице с помощью преобразования (2.12.9), где

$$HF = HF^{-1} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ C_q & -E_s \end{bmatrix}. \quad (2.12.15)$$

В результате, учитывая (2.11.52) и (2.11.48), получим:

$$\mathcal{X}_f = \begin{bmatrix} A - BL & -B\chi \\ 0 & \mathcal{L}^q \end{bmatrix}. \quad (2.12.16)$$

Отсюда следуют те же выводы, что и полученные выше для системы с наблюдателем полного порядка.

### 2.12.3. Результирующий алгоритм синтеза для системы с одним входом и одним выходом

1. Для матрицы объекта  $A$  вычислить характеристический полином  $\varphi_A(\lambda)$  и зафиксировать его коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .
2. В соответствии с требованиями к динамике замкнутой системы задать желаемые значения собственных чисел  $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \dots, \lambda_n^3$ , вычислить

$$\varphi_{AC} = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^3),$$

то есть найти коэффициенты желаемого характеристического полинома  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

3. Рассчитать матрицу обратной связи в базисе УКП:

$$L_u = [I_{u1} \quad I_{u2} \quad \cdots \quad I_{un}], \text{ где } I_{uj} = \alpha_{1n+1-j} - \gamma_{n-1n+1-j}.$$

4. Задать желаемые собственные числа наблюдателя  $\lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots, \lambda_n^N$  и вычислить коэффициенты характеристического полинома наблюдателя  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ .
5. Рассчитать матрицу обратной связи наблюдателя в базисе ИКП:

$$\vec{K}_i = \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{i3} \\ \vdots \\ k_{in} \end{bmatrix}, \text{ где } k_{Ij} = \beta_{n-1n+1-j} - \alpha_{1n+1-j}.$$

6. Рассчитать матрицу перехода от исходного базиса к базису УКП  $HU = UU_u^{-1}$ , матрицу выхода в этом базисе  $C_u = C \cdot HU$  и при наличии требования обеспечить единичную статику вычислить коэффициент по командному сигналу  $k^v = \frac{\gamma_n}{C_{u1}}$ .
7. Рассчитать матрицу перехода от базиса  $[u]$  УКП к базису  $[i]$  ИКП  $UI = N_i^{-1} \cdot N_u$  и обратную ей матрицу (см. 2.7.13).
8. Рассчитать вектор  $\vec{b}$  в базисе ИКП, используя переход от базиса УКП  $\vec{b}_i = IU \cdot \vec{b}_u$ .
9. Рассчитать матрицу обратной связи  $L$  в базисе ИКП, используя переход от базиса  $[u]$  к базису  $[i]$ :  $L_i = L_u \cdot UI$ .
10. Записать уравнение наблюдателя в базисе ИКП:

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = (A_i - \vec{K}_i C_i + \vec{b}_i L_i) \hat{x}_i(t) + \vec{K}_i y(t) + \vec{b}_i k^v v(t).$$

11. Записать уравнение для формирования управления:

$$u(t) = -L_i \hat{x}_i(t) + k^v v(t).$$

Уравнения, полученные в пунктах 10 и 11, – это уравнения регулятора. Следует подчеркнуть, что в них используется вектор оценки состояния объекта, записанный не в исходном базисе, а в базисе идентификационного канонического представления.

### 2.12.4. Итоговые примеры полного синтеза систем управления

Система со скалярными входом и выходом и наблюдателем полного порядка

Задан объект, представленный структурной схемой на рис. 2.20.

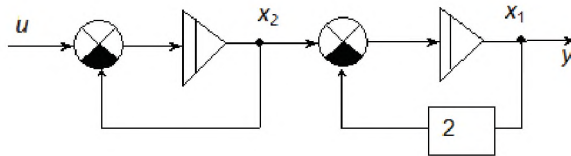


Рис. 2.20. Структурная схема объекта

Требуется синтезировать реализуемое управление, обеспечивающее единичную статику по командному сигналу, а также динамику основного контура системы и наблюдателя в соответствии с желаемыми собственными числами

$$\lambda_{1,2}^3 = -5 \pm j5; \lambda_1^N = \lambda_2^N = -10.$$

Ниже приведены промежуточные результаты расчета. Матрица управляемости объекта и ей обратная в исходном базисе:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости объекта и ей обратная в базисе УКП:

$$U_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; U_u^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты характеристического полинома объекта, желаемой системы и наблюдателя:

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix}; \vec{\beta} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Матрица обратной связи в базисе УКП:

$$L_u = [-48 \quad -7]. \quad (2.12.17)$$

Матрица наблюдателя:

$$\vec{K}_i = \begin{bmatrix} 98 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса к базису УКП:

$$HU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица выхода в базисе УКП:

$$C_u = [1 \quad 0].$$

Коэффициент по командному сигналу  $k^v = 50$ .

Матрица наблюдаемости в базисе УКП, обратная ей и та же матрица в базисе ИКП:

$$N_u = N_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода от базиса ИКП к базису УКП:

$$IU = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Вектор передачи управления в базисе ИКП:

$$\vec{b}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Матрица обратной связи в базисе ИКП:

$$L_i = [-7 \quad -27].$$

Матрица динамики наблюдателя в базисе ИКП:

$$\mathcal{L}_i = A_i - \vec{K}_i C_i = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix}.$$

Результирующие уравнения регулятора:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -100\hat{x}_2 + u + 98y; \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 - 20\hat{x}_2 - 3u + 17y; \\ u = -7\hat{x}_1 - 27\hat{x}_2 + 50v. \end{cases}$$

В этих уравнениях индекс  $i$  при координатах вектора оценки состояния опущен.

**Система со скалярным входом и выходом и наблюдателем пониженного порядка**

Для объекта, заданного на рис. 2.20, построить наблюдатель пониженного порядка. Учесть, что управление объектом строится на основе собственных чисел замкнутой системы  $\lambda_{1,2}^3 = -5 \pm 5j$ .

Для этого объекта

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [ 1 \quad 0 ],$$

собственные числа объекта

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Порядок объекта  $n = 2$ , размерность выхода  $n_y = 1$ , следовательно, размерность наблюдателя пониженного порядка  $n_q = 1$ .

Зададимся собственным числом наблюдателя  $\lambda_1^H = -10$ , которое должно располагаться на комплексной плоскости левее собственных чисел замкнутой системы.

Так как  $y = x_1$ , то примем  $q = x_2$ . Тогда

$$\begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, выбрана матрица

$$C_q = [ 0 \quad 1 ].$$

Ей соответствует невырожденная квадратная матрица

$$C_p = C_p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Соответственно получаем:

$$F_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; F_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь в соответствии с (2.11.33) определим  $\mathcal{L}^q$ :

$$\mathcal{L}^q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 - K.$$

Поскольку назначено  $\lambda^H = -10$ , то  $-1 - K = -10$  и  $K = 9$ .

Таким образом,  $\mathcal{L}^q = -10$ , и первое уравнение наблюдателя принимает вид:

$$\dot{\xi} = -10\xi - 72y + u.$$

Запишем оценку для  $\vec{x}$ :

$$\hat{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xi = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{x}_2 = 9y + \xi.$$

Замкнем систему (сформируем управление). Ранее была рассчитана матрица обратной связи (2.12.17):

$$L_u = \begin{bmatrix} -48 & -7 \end{bmatrix}.$$

Переведем ее в исходный базис:

$$L = L_u \cdot UH = L_u \cdot U_u \cdot UH = \begin{bmatrix} -34 & -7 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, управление принимает вид:

$$u = -34y - 7x_2 + 50v.$$

Структурная схема полной схемы с регулятором и наблюдателем пониженного порядка представлена на рис. 2.22.

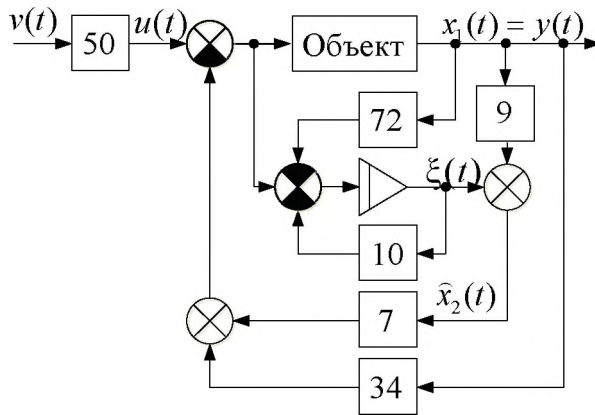


Рис. 2.21. Структурная схема полной системы управления

### 2.12.5. Система со скалярными входом и выходом и наблюдателем минимального порядка

Структурная схема объекта представлена на рис. 2.22.

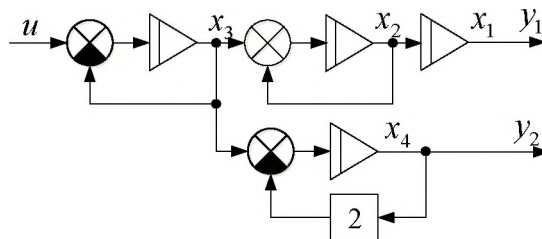


Рис. 2.22. Структурная схема объекта

Ему соответствуют матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется рассчитать управление и построить наблюдатель минимального порядка. Объект имеет собственные числа

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = +1; \lambda_3 = -1; \lambda_4 = -2$$

и характеристический полином

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda.$$

Найдем матрицу управляемости:

$$U = [ B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ее определитель  $|U| = -6$ , то есть отличен от нуля. Это означает, что объект управляем. Рассчитаем закон управления (матрицу обратной связи), обеспечивающий следующие желаемые собственные числа замкнутой системы:

$$\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3 = \lambda_4^3 = -1,$$

которым соответствует характеристический полином

$$\varphi_{A^c}(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1.$$

Таким образом, имея коэффициенты характеристических полиномов объекта и желаемой замкнутой системы

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

можно в соответствии с (2.9.18) рассчитать матрицу обратной связи в базисе УКП:

$$L_u = [ -1 \quad -6 \quad -7 \quad -2 ].$$

Чтобы найти эту матрицу в исходном базисе, нужно знать матрицу  $HU$  перехода от исходного базиса к базису УКП. Так как столбцы

этой матрицы являются координатными столбцами векторов базиса  $[u]$  УКП  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  в исходном базисе  $[h]$ , то, используя (2.8.6), можно записать:

$$\vec{u}_{h4} = \vec{b}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{u}_{h3} = A_h \vec{u}_{h4} + \alpha_1 \vec{b}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{u}_{h2} = A_h \vec{u}_{h3} + \alpha_2 \vec{b}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \vec{u}_{h1} = A_h \vec{u}_{h2} + \alpha_3 \vec{b}_h = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем:

$$HU = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } UH = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & -4/3 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.9.12)

$$L \equiv L_h = L_u \cdot UH = \begin{bmatrix} -1/2 & -29/6 & -2 & -1/6 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.6.8)

$$C_u = C \cdot HU = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя (3.8.22), запишем передаточные функции:

$$W_{u y_1}(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-1)}; \quad W_{u y_2}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)};$$

$$W_{v y_1}(p) = k^v \frac{p+2}{(p+1)^4}; \quad W_{v y_2}(p) = k^v \frac{p(p-1)}{(p+1)^4}.$$

В замкнутой системе будет обеспечена единичная статика по координате  $y_1$ , если задать

$$k^v = \frac{1}{2}.$$

Теперь перейдем к синтезу наблюдателя. Построим матрицу  $\tilde{N}$ :

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен четырем, то есть порядку объекта. Так как старшая степень блока  $CA$ , входящего в нее, равна единице, то индекс наблюдаемости  $\nu = 2$  и порядок наблюдателя в соответствии с (2.11.54)  $s = 1$ . Это означает, что в данном случае может быть построен наблюдатель первого порядка. Зададим единственное собственное число наблюдателя  $\lambda_1^N = -4$ . Отсюда сразу определяется матрица наблюдателя  $\mathcal{L}^q = -4$ .

Раскроем матричное уравнение Люенбергера (2.11.48), учитывая, что в данном случае матрица  $C_q$  имеет размер  $[4 \times 1]$ . Для этого запишем подробно каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} C_q A &= \begin{bmatrix} c_{q1} & c_{q2} & c_{q3} & c_{q4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c_{q1} + c_{q2} & c_{q2} - c_{q3} + c_{q4} & -2c_{q4} \end{bmatrix}; \\ \mathcal{L}^q C_q &= \begin{bmatrix} -4c_{q1} & -4c_{q2} & -4c_{q3} & -4c_{q4} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$G^y C = \begin{bmatrix} g_{y1} & g_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{y1} & 0 & 0 & g_{y2} \end{bmatrix}.$$

С учетом этих выражений матричное уравнение Люенбергера можно представить в виде системы скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} 4c_{q1} &= g_{y1}; \\ c_{q1} + 5c_{q2} &= 0; \\ c_{q2} + 3c_{q3} + c_{q4} &= 0; \\ 2c_{q4} &= g_{y2}. \end{aligned}$$

Аналогично поступим со вторым матричным уравнением системы (2.11.53), учитывая вытекающие из этого уравнения размерности матриц  $\chi$  и  $\eta$ :

$$\chi C_q = [ \chi c_{q1} \quad \chi c_{q2} \quad \chi c_{q3} \quad \chi c_{q4} ] ;$$

$$\eta C = [ \eta_1 \quad \eta_2 ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [ \eta_1 \quad 0 \quad 0 \quad \eta_2 ]$$

и

$$\chi c_{q1} + \eta_1 = I_1;$$

$$\chi c_{q2} = I_2;$$

$$\chi c_{q3} = I_3;$$

$$\chi c_{q4} + \eta_2 = I_4.$$

Таким образом, получено восемь уравнений при наличии девяти неизвестных  $c_{q1}, c_{q2}, c_{q3}, c_{q4}, g_{y1}, g_{y2}, \eta_1, \eta_2, \chi$ . Примем  $\chi = 1$ . После этого легко находятся остальные неизвестные:

$$C_q = [ \frac{145}{6} \quad -\frac{29}{6} \quad -2 \quad \frac{65}{6} ] ;$$

$$\eta = [ -\frac{74}{3} \quad -11 ] ; \quad G^y = [ \frac{290}{3} \quad \frac{65}{3} ] .$$

В соответствии с (2.11.44) вычисляем

$$G^u = C_q B = -2.$$

В результате можем записать уравнения регулятора совместно наблюдателем Люенбергера минимального (первого) порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}(t) &= -4\hat{q}(t) - 2u(t) + \frac{290}{3}y_1(t) + \frac{65}{3}y_2(t); \\ u(t) &= \frac{1}{2}v(t) + \hat{q}(t) - \frac{74}{3}y_1(t) - 11y_2(t). \end{aligned}$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема системы управления, приведенная на рис. 2.23.

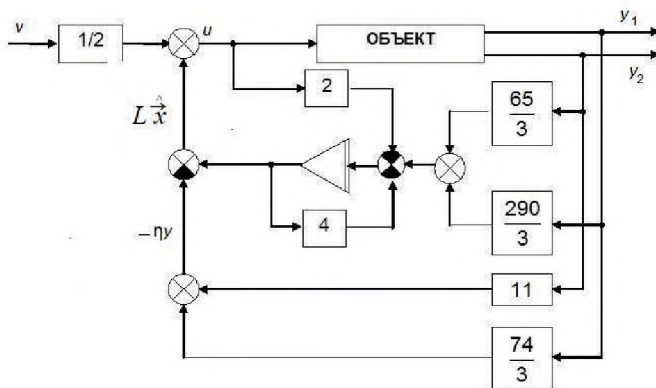


Рис. 2.23. Структурная схема системы управления

### 2.12.6. Многомерная система с разделением каналов и наблюдателем минимального порядка

Задан объект, представленный структурной схемой на рис. 2.24

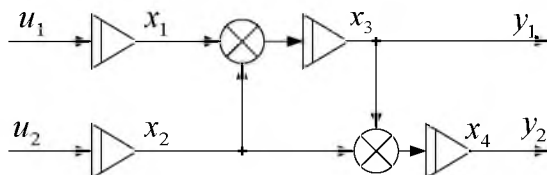


Рис. 2.24. Структурная схема объекта

Объекту соответствуют матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет матриц управляемости и наблюдаемости определяет объект как полностью управляемый и наблюдаемый.

Синтез управления в соответствии с п.2.10:

1. Расчет чисел  $m_i$ :

$$\begin{aligned} C_1 A^0 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & C_1 A^1 B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ C_2 A^0 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & C_2 A^1 B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует  $m_1 = m_2 = 2$ .

2. Вычисление матриц  $F_*$ ,  $B_*$ .

При  $m_1 = m_2 = 2$

$$F_* = -CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_* = CAB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Расчет  $B_*^{-1}$ :

$$B_*^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку эта матрица существует, задача разделения каналов имеет решение.

4. Вычисление матриц  $\underset{\vee}{A}$ ,  $\underset{\vee}{B}$ :

$$\underset{\vee}{B} = \underset{\vee}{B} \underset{\vee}{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underset{\vee}{A} = \underset{\vee}{A} + \underset{\vee}{B} \underset{\vee}{F}_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.10.13) этим матрицам отвечают уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + q_1 - q_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + q_2; \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2; \\ \dot{x}_4 &= x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Соответственно этим уравнениям

$$\begin{aligned}x_3^{(2)} &= q_1; \\x_4^{(2)} &= q_2,\end{aligned}$$

то есть, действительно, исходная система разбита на две независимые подсистемы, состоящие из последовательно включенных интеграторов.

5. Построение матрицы  $EF$ .

В данном случае

$$EF = \left[ \begin{array}{cc|cc} A \vec{b}_1 & \vec{b}_1 & A \vec{b}_2 & \vec{b}_2 \\ \hline \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Новому базису соответствуют матрицы

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Расчет матрицы обратной связи промежуточной системы в базисе  $[f]$ .

Зададим желаемые собственные числа для первого канала

$$\lambda_{1,2}^I = -1 \pm j1$$

и для второго канала

$$\lambda_{1,2}^{II} = -5 \pm j5.$$

Им соответствуют характеристические полиномы

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda + 2; \\ \varphi_2(\lambda) &= \lambda^2 + 10\lambda + 50.\end{aligned}$$

Получаем строки матрицы  $L_f$ :

$$l_{f1} = [ -2 \quad -2 ]; \quad l_{f2} = [ -50 \quad -10 ],$$

и саму матрицу

$$L_f = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -10 \end{bmatrix}.$$

Пункты 7 и 8 итогового алгоритма расчета управления для данного случая не нужны, так как в рассматриваемом примере сумма порядков подсистем  $m_1 + m_2$  равна порядку объекта и матрица  $A_{00}$  отсутствует.

7. Расчет матрицы при командном сигнале. Потребуем выполнение равенства

$$W_{v_1 y_1}(0) = W_{v_2 y_2}(0) = 1.$$

Тогда

$$k_{\checkmark 1}^v = 2; \quad k_{\checkmark 2}^v = 50$$

и

$$k_{\checkmark}^v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

8. Расчет матрицы обратной связи промежуточной системы в исходном базисе:

$$\begin{aligned}L_{\checkmark} &= L_f \cdot EF = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & -50 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

9. Расчет результирующей матрицы обратной связи:

$$L = B_*^{-1}(F_* + L_{\checkmark}) = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 8 & 50 \\ -1 & -11 & -10 & -50 \end{bmatrix}.$$

10. Расчет матрицы передаточных коэффициентов по вектору командных сигналов:

$$k^v = B_*^{-1} k_v^v = \begin{bmatrix} 2 & -50 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получено управление, использующее координаты вектора состояния объекта:

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 50x_4 + 2v_1 - 50v_2; \\ u_2 &= -x_1 - 11x_2 - 10x_3 - 50x_4 + 50v_2. \end{aligned}$$

*Синтез наблюдателя в соответствии с п. 2.11.3:*

1. Расчет индекса наблюдаемости.

Строим матрицу  $\tilde{N}$ :

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} C \\ CA^{2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет четыре линейно независимые строки, ее детерминант отличен от нуля, значит,  $\text{rank}(\tilde{N}) = 4 = n$ . Следовательно, индекс наблюдаемости объекта  $v = 2$  и размерность наблюдателя  $s = 2$ .

2. Задание динамики наблюдателя. Зададим собственные числа  $\lambda_{1,2}^N = -10$ . Соответственно матрица динамики наблюдателя

$$\mathcal{L}^q = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

3. Решение системы матричных уравнений (2.11.53). Матрица  $C_q$  имеет размерность  $[2 \times 4]$ , матрицы  $G^y$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  —  $[2 \times 2]$ .

Следовательно, система скалярных уравнений, соответствующая системе матричных уравнений (2.11.53), содержит 16 уравнений и 20 неизвестных. Таким образом, мы имеем право произвольно задать четыре «лишних» неизвестных. Зададим матрицу  $\chi$  единичной, то есть

$$\chi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого из первого матричного уравнения (2.11.53) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{q13} + 10c_{q11} = 0; \\ c_{q13} + c_{q14} + 10c_{q12} = 0; \\ c_{q14} + 10c_{q13} = g_{11}; \\ 10c_{q14} = g_{12}; \\ c_{q23} + 10c_{q21} = 0; \\ c_{q23} + c_{q24} + 10c_{q22} = 0; \\ c_{q24} + 10c_{q23} = g_{21}; \\ 10c_{q24} = g_{22}. \end{cases} \quad (2.12.18)$$

Второе матричное уравнение (2.11.53) преобразуется в систему скалярных уравнений:

$$\begin{cases} c_{q11} = -1; \\ c_{q12} = 9; \\ c_{q13} + \eta_{11} = 8; \\ c_{q14} + \eta_{12} = 50; \\ c_{q21} = -1; \\ c_{q22} = -11; \\ c_{q23} + \eta_{21} = -10; \\ c_{q24} + \eta_{22} = -50. \end{cases} \quad (2.12.19)$$

Совместное решение последних шестнадцати скалярных уравнений позволяет найти все элементы искомым матриц:

$$C_q = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 10 & -100 \\ -1 & -11 & 10 & 100 \end{bmatrix}; \quad G^y = \begin{bmatrix} 0 & -1000 \\ 200 & +1000 \end{bmatrix}; \\ \eta = \begin{bmatrix} -2 & 150 \\ -20 & -150 \end{bmatrix}.$$

Используя (2.11.44), вычислим матрицу

$$G^u = C_q B = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & -11 \end{bmatrix}.$$

4. В соответствии с полученными результатами записать уравнения регулятора, включая наблюдатель:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}_1(t) &= -10\hat{q}_1(t) - 1000y_2(t) - u_1(t) + 9u_2(t); \\ \dot{\hat{q}}_2(t) &= -10\hat{q}_2(t) + 200y_1(t) + 1000y_2(t) - u_1(t) - 11u_2(t); \\ u_1(t) &= \hat{q}_1(t) - 2y_1(t) + 150y_2(t) + 2v_1(t) - 50v_2(t); \\ u_2(t) &= \hat{q}_2(t) - 20y_1(t) - 150y_2(t) + 50v_2(t). \end{aligned}$$

Результирующая структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 2.26. На рис. 2.25 итоговая структурная схема системы управления с использованием передаточных функций. Как и отмечалось выше, передаточные функции, связывающие соответствующие координаты вектора входа и вектора выхода системы, не зависят от наличия наблюдателя. Из рисунка хорошо видно, что результирующая система имеет полностью развязанные каналы, по каждому из каналов обеспечены единичная статика и заданные при синтезе собственные числа (полосы передаточных функций).

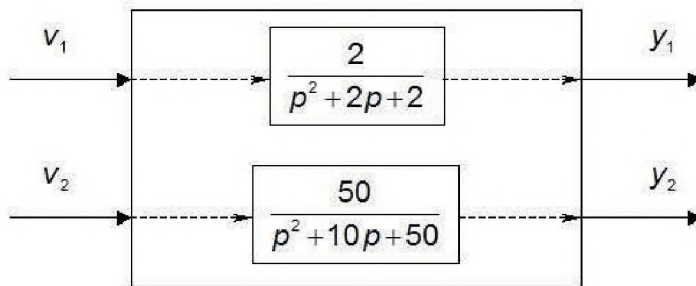


Рис. 2.25. Итоговая структурная схема системы управления

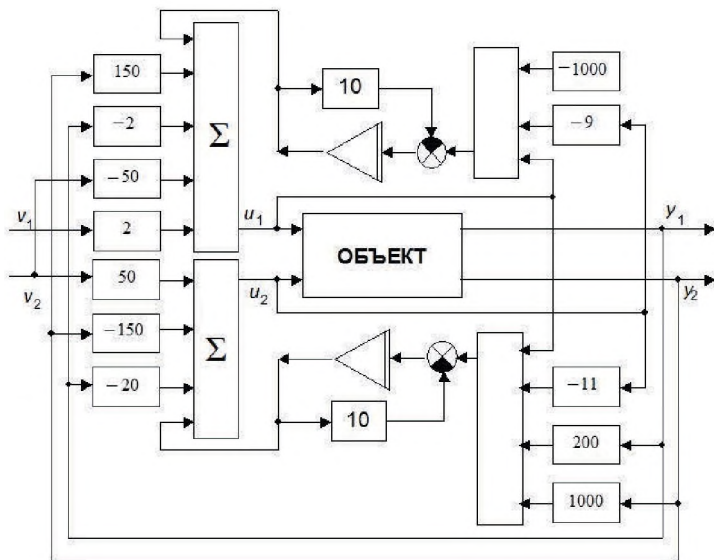


Рис. 2.26. Структурная схема замкнутой системы

**ПРИМЕР 2.12.1.**

В п. 2.2. в качестве примера был рассмотрен смесительный банк (рис. 1.6). В этом примере мы рассмотрим задачу разделения каналов управления концентрацией  $\Delta C$  и выходным расходом  $\Delta F$  с теоретических позиций настоящего раздела. Ниже перечислены основные параметры системы:

$\theta = 50\text{с}$  – время наполнения бака;

$V_0 = 1\text{ м}^3$  – базовое значение объема бака;

$c_1 = 1\text{ кмоль/м}^3$  – концентрация растворенного вещества в левом потоке;

$c_2 = 2\text{ кмоль/м}^3$  – концентрация растворенного вещества в правом потоке;

$c_0 = 1,25\text{ кмоль/м}^3$  – базовая концентрация растворенного вещества в выходном потоке;

$F_{10} = 0,015 \text{ м}^3/\text{с}$  – концентрация растворимого вещества в левом входном потоке;

$F_{20} = 0,02 \text{ м}^3/\text{с}$  – концентрация растворимого вещества в правом входном потоке;

$F_0 = 0,02 \text{ кмоль}/\text{м}^3$  – базовая концентрация растворенного вещества в выходном потоке.

Линеаризованные уравнения смесительного бака как объекта управления имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A_{ob}\vec{x} + B_{ob}\vec{u}; \\ \vec{y} = C_{ob}\vec{x}, \end{cases}$$

где матрицы:

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\theta} \end{bmatrix}; B_{ob} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_0} - c_0 & \frac{1}{V_0} - c_0 \\ c_1 - c_0 & c_2 - c_0 \end{bmatrix}; C_{ob} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Векторы состояния, управления и выхода имеют вид:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 = \Delta_V \\ x_2 = \Delta_C \end{bmatrix}; \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 = \Delta_{F_1} \\ u_2 = \Delta_{F_2} \end{bmatrix}; \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 = \Delta_F \\ y_2 = \Delta_C \end{bmatrix}.$$

Найдем порядки  $m_1$  и  $m_2$  каналов. Для двухканальной системы второго порядка приведенное в теоретической части правило неприемлемо. Легко убедиться в том, что при  $m_1 = m_2 = 1$  первые производные

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = C_{ob}\dot{\vec{y}}_1 = C_{ob}A_{ob}\vec{x} + C_{ob}B_{ob}\vec{u}$$

не содержат производной управления, в то время как старшие производные  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{y}$  – содержат. Поэтому в рассматриваемом примере  $m_1 = m_2 = 1$ .

Получаем:

$$\dot{\vec{y}} = C_{ob}A_{ob}\vec{x} + C_{ob}B_{ob}\vec{u},$$

или

$$\vec{q} = -F_*\vec{x} + B_*\vec{u}, \quad (2.12.20)$$

где

$$F_* = -C_{ob}A_{ob}, \quad B_* = C_{ob}B_{ob} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1 - \frac{2\theta}{V_0}c_0} & \frac{1}{c_2 - \frac{2\theta}{V_0}c_0} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае матрица  $B_*$  не вырождена и

$$B_*^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\theta(c_0 - c_2)}{c_1 - c_2} & \frac{V_0}{c_1 - c_2} \\ \frac{-2\theta(c_0 - c_1)}{c_1 - c_2} & \frac{-V_0}{c_1 - c_2} \end{bmatrix}.$$

Из (2.12.20) получим:

$$\vec{u} = B_*^{-1}\vec{q} + B_*^{-1}F_*\vec{x}. \quad (2.12.21)$$

Этому уравнению соответствуют структурные схемы, приведенные на рис. 2.10 и 2.11.

В рассматриваемом примере матрицы, входящие в схему рис. 2.11, следующие:

$$\underset{\vee}{B} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underset{\vee}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{ob} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что каналы выходных расходов и концентрации разделены. С учетом этих результатов получаем структурные схемы: в векторно-матричном виде, изображенную на рис. 2.27, и в скалярном виде – на рис. 2.28.

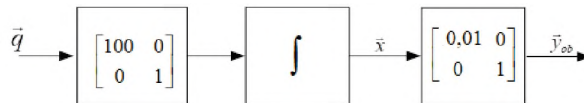


Рис. 2.27. Система с развязанными каналами в векторном представлении

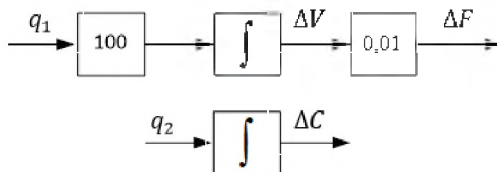


Рис. 2.28. Система с развязанными каналами в скалярном представлении

На рис. 2.29 представлен заключительный этап синтеза управления на примере  $i$ -го канала. В результате для каждого канала мы получаем инерционное звено с постоянной времени  $T_i$ .

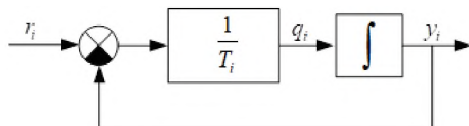


Рис. 2.29. Заключительный этап синтеза управления

На рис. 2.30 представлена структурная схема системы управления смешительным баком с разделением каналов.

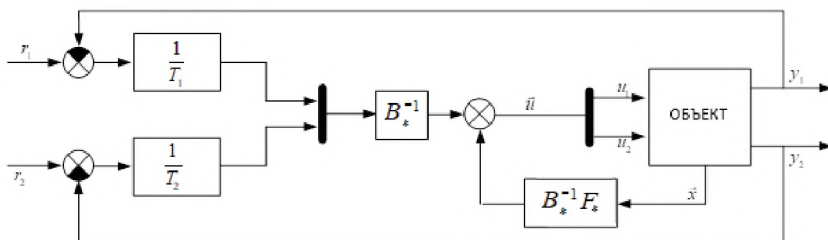


Рис. 2.30. Система управления смешительным баком с разделением каналов

Часть II

**Нелинейные системы  
управления**



## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Мы живем в непростом мире, повсюду протекают процессы (механические, электромагнитные, химические, оптические, биологические, социальные, экономические), характер которых зависит от множества условий и факторов, зачастую о существовании которых даже и не задумываешься. Человек может управлять этими процессами, вносить корректировки в естественный ход событий, тем самым приспособлявая их к своим целям. Некоторые системы очень легко моделировать и корректировать, другие не дадутся просто так – для них необходимы специальные методы. Теория автоматического управления – это аппарат, позволяющий провести анализ таких систем и процессов и синтез соответствующего управления.

В данной главе будут изучены методы анализа нелинейных непрерывных и импульсных систем. Нелинейными называются такие системы автоматического управления, у которых зависимость между входными и выходными переменными одного или нескольких элементов описывается нелинейными уравнениями. Большинство реальных элементов систем нелинейны, и к понятию линейной системы можно прийти путем линеаризации.

Линеаризацией называется замена реальных нелинейных уравнений характеристик элементов близкими к ним линейными уравнениями. На практике встречаются такие нелинейные элементы, к которым операция линеаризации неприменима. Такие нелинейности называют существенными.

Существенно-нелинейная система обладает рядом свойств:

1. Обычная линеаризация дает качественно неверные результаты или неприменима совсем.
2. В отличие от линейных САУ, качество динамических процессов существенно зависит от уровня входных сигналов и начальных условий.
3. Обогащается понятие устойчивости: устойчивость процесса; устойчивость траектории; асимптотическая устойчивость; устойчивость в малом и в большом.
4. Появляется качественно новое понятие устойчивости периодического режима.

В данной главе будут рассмотрены два метода исследования нелинейных систем:

- 1) метод фазовой плоскости,
- 2) метод гармонической линеаризации и гармонического баланса.

В следующей главе будут рассмотрены импульсные, или дискретные, системы автоматического управления – такие системы, в которых имеется хотя бы один элемент, нарушающий непрерывность передачи воздействий.

### § 3.1. Метод фазовой плоскости

Метод изображения переходных процессов в фазовом пространстве и фазовой плоскости был введен в теорию регулирования академиком А. А. Андроновым. Метод позволяет получить наглядную картину всей совокупности переходных процессов при некоторых заданных начальных условиях. С современных позиций фазовая плоскость – это чаще всего пространство состояний для случая систем второго порядка. Есть возможность использовать этот метод для систем высших порядков, но в этом случае пропадает наглядность, так как придется рассматривать  $n$ -мерную систему координат. Более подробно о применении метода фазовой плоскости к  $n$ -мерным системам можно прочитать в книге В. И. Уткина [3]. В данном же издании мы рассмотрим частный случай – систему второго порядка.

### 3.1.1. Фазовая плоскость. Основные понятия

При изображении процессов на фазовой плоскости некоторое заданное уравнение второго порядка удобно свести к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2), \quad (3.1.2)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – в общем случае нелинейные функции.

Будем рассматривать  $x_1$  и  $x_2$  как координаты некоторой точки на плоскости. **Фазовой плоскостью** называется плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные, характеризующие процессы, протекающие в системе. Наиболее часто в качестве таких переменных принимают отклонение регулируемой величины  $x$  и скорость ее изменения  $\dot{x}$ .

Каждой точке, задаваемой координатами  $x_1$  и  $x_2$ , соответствует определенное состояние системы. Движение точки по фазовой плоскости соответствует изменению состояния системы. Эта точка называется **изображающей точкой**, а ее траектория (след на фазовой плоскости) – **фазовой траекторией** (рис. 3.1).

Каждой совокупности начальных условий  $(x_{10}, x_{20})$  соответствует своя фазовая траектория. Совокупность фазовых траекторий на фазовой плоскости, в полной мере отображающая свойства системы, называется фазовым портретом системы.

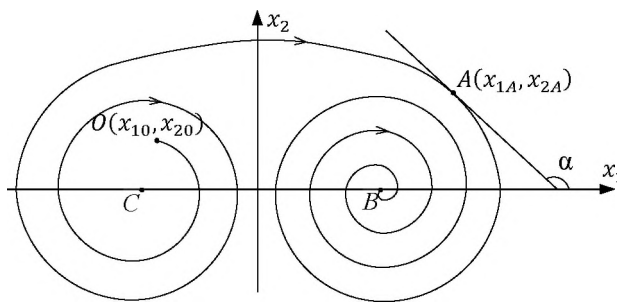


Рис. 3.1. Фазовая плоскость и фазовая траектория для начального условия

Уравнения фазовых траекторий получаются из соответствующих уравнений состояния системы (3.1.1) и (3.1.2):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (3.1.3)$$

В любой точке фазовой траектории (за исключением особых точек, в которых одновременно  $\frac{dx_1}{dt} = 0$  и  $\frac{dx_2}{dt} = 0$ ) величина  $\frac{dx_2}{dx_1}$  определяет наклон касательной к этой траектории в данной точке. Угол наклона касательной к траектории определяется как  $\alpha = \arctg \frac{dx_2}{dx_1}$ . Если функции  $f_1$  и  $f_2$  однозначны, то каждой точке  $(x_1, x_2)$  на фазовой плоскости, за исключением особых точек, соответствует только одно значение  $\frac{dx_2}{dx_1}$ . Это означает, что через каждую точку на фазовой плоскости проходит одна и только одна фазовая траектория, и, таким образом, фазовые траектории не пересекаются друг с другом. В особых точках  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0}{0}$ , значит, через них проходит бесчисленное множество фазовых траекторий (такowymi являются точки  $B$  и  $C$  на рис. 3.1).

Так как в особых точках  $\frac{dx_1}{dt} = 0$  и  $\frac{dx_2}{dt} = 0$ , то эти точки соответствуют состояниям равновесия системы.

**Состояние равновесия**  $x_1 = x_{1*}$ ,  $x_2 = x_{2*}$  называется **устойчивым**, если для любого наперед заданного, сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что выполняются условия:

$$|x_1(t_0) - x_{1*}(t_0)| < \delta(\varepsilon), \quad (3.1.4)$$

$$|x_2(t_0) - x_{2*}(t_0)| < \delta(\varepsilon), \quad (3.1.5)$$

и для  $t \leq t_0 < \infty$ :

$$|x_1(t) - x_{1*}(t)| < \varepsilon, \quad (3.1.6)$$

$$|x_2(t) - x_{2*}(t)| < \varepsilon. \quad (3.1.7)$$

Другими словами, состояние равновесия является устойчивым, если при любой заданной области допустимых отклонений от состо-

яния равновесия (область  $\epsilon$ ) мы можем указать область  $\delta(\epsilon)$ , обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри  $\delta(\epsilon)$ , никогда не достигнет границы области  $\epsilon$ .

Потребуем более жесткого условия для состояния равновесия – асимптотической устойчивости. Если выполняется условие устойчивости, и для любого  $t_0$  существует такое  $\rho(t_0)$ , что при:

$$|x_1(t_0) - x_{1*}(t_0)| < \rho, \quad (3.1.8)$$

$$|x_2(t_0) - x_{2*}(t_0)| < \rho, \quad (3.1.9)$$

выполняется условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x_{1*}(t)| = 0, \quad (3.1.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t) - x_{2*}(t)| = 0, \quad (3.1.11)$$

то такая **устойчивость называется асимптотической**.

Для того чтобы анализировать различные фазовые портреты для систем второго порядка, требуется осуществить линеаризацию, в результате которой мы должны получить матрицу динамики  $A$ .

Пусть  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  – вещественные аналитические функции и число особых точек в любой ограниченной области конечно. Тогда для анализа поведения системы в окрестности особой точки  $x_{1*}, x_{2*}$  положим:

$$\begin{cases} x_1 = x_{1*} + \Delta x_1, \\ x_2 = x_{2*} + \Delta x_2. \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Разложим функции  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  в ряд Тейлора. Тогда исходные дифференциальные уравнения (3.1.1) и (3.1.2) запишутся в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\Delta x_1}{dt} = \left. \frac{df_1}{dx_1} \right|_{\substack{x_1 = x_{1*} \\ x_2 = x_{2*}}} \Delta x_1 + \left. \frac{df_1}{dx_2} \right|_{\substack{x_1 = x_{1*} \\ x_2 = x_{2*}}} \Delta x_2 + R_1(\Delta \vec{x}), \quad (3.1.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\Delta x_2}{dt} = \frac{df_2}{dx_1} \Big|_{\substack{x_1 = x_{1*} \\ x_2 = x_{2*}}} \Delta x_1 + \frac{df_2}{dx_2} \Big|_{\substack{x_1 = x_{1*} \\ x_2 = x_{2*}}} \Delta x_2 + R_2(\Delta \vec{x}), \quad (3.1.14)$$

где  $R_1(\Delta \vec{x})$  и  $R_2(\Delta \vec{x})$  – функции, содержащие члены выше первого порядка. Пренебрегая  $R_1(\Delta \vec{x})$  и  $R_2(\Delta \vec{x})$  (при достаточно малых  $\Delta \vec{x}$ ), и опуская знак вариации  $\Delta$ , получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \quad (3.1.15)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad (3.1.16)$$

здесь  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  – элементы матрицы динамики  $A$  в окрестности особой точки.

Собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $A$  полностью определяют характер движения нелинейной системы в окрестности особой точки  $x_{1*}, x_{2*}$  (когда мы перешли к отклонениям, то перенесли начало системы координат в особую точку, то есть  $\Delta x_1^* = 0, \Delta x_2^* = 0$ ).

Таким образом, вблизи особой точки поведение нелинейной системы определяется поведением соответствующей линейной, полученной линеаризацией в окрестности выбранной особой точки, то есть собственными значениями матрицы  $A$ :  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . В связи с этим рассмотрим возможные варианты фазовых портретов линейных систем второго порядка.

### 3.1.2. Фазовые портреты линейного звена второго порядка

Рассмотрим на фазовой плоскости свободное движение системы второго порядка, которое в общем случае определяется однородным дифференциальным уравнением (ОДУ):

$$T^2 \ddot{x} + 2\gamma T \dot{x} + x = 0, \quad (3.1.17)$$

или

$$\ddot{x} + 2\frac{\gamma}{T} \dot{x} + \frac{1}{T^2} x = 0. \quad (3.1.18)$$

Введем обозначения:

$$h = \frac{\gamma}{T},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T},$$

где  $\omega_0$  – частота собственных колебаний системы.

В результате получим:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1.19)$$

Приведем дифференциальное уравнение к нормальному виду, то есть разрешим его относительно первых производных. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x - 2hy. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

При таком выборе координат вектора состояния, когда вторая координата  $x_2 = y$  является производной по времени от первой  $x_1 = x$ , можно отметить два характерных свойства фазовых траекторий:

1. При  $y > 0$  имеем  $\frac{dx}{dt} > 0$ , то есть в верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо; в нижней полуплоскости – справа налево.
2. Так как  $\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2 x - 2hy}{y}$ , то при  $y = 0$ , за исключением особой точки  $(0; 0)$ , отношение  $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$ , то есть в точках пересечения фазовой траектории с осью  $x$  касательные к фазовым траекториям перпендикулярны оси  $x$ .

Рассмотрим, как значения корней характеристического уравнения влияют на фазовый портрет системы. Определим корни характеристического уравнения (3.1.19):

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (3.1.21)$$

Для случая некрратных корней

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad (3.1.22)$$

откуда при  $t = 0$  получим значения координат начальных точек семейства фазовых траекторий, определяемых однородным дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2, \\ y_0 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2, \end{cases} \quad (3.1.23)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.24)$$

Решая это матричное уравнение относительно  $C_1$  и  $C_2$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1, \\ \Delta C_1 &= \begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ y_0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 x_0 - y_0, \\ \Delta C_2 &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ \lambda_1 & y_0 \end{vmatrix} = y_0 - x_0 \lambda_1, \\ C_1 &= \frac{\lambda_2 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ C_2 &= \frac{y_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что  $C_1 = 0$  тогда, когда  $y_0 = \lambda_2 x_0$ , а  $C_2 = 0$  тогда, когда  $y_0 = \lambda_1 x_0$ , что возможно только при вещественных корнях. Рассмотрим подробнее возможные варианты.

Рассмотрим вариант, когда *корни вещественные*.

Если связь между начальными условиями  $x_0$  и  $y_0$  описывается уравнением  $y_0 = \lambda_2 x_0$ , то  $C_1 = 0$ . Тогда система уравнений (3.1.22) изменится следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad (3.1.25)$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \lambda_2. \quad (3.1.26)$$

Это означает, что изображающая точка движется по прямой, тангенс угла наклона которой стремится к  $\lambda_2$ . Если начальные условия выбрать на прямой  $y_0 = \lambda_1 x_0$ , то  $C_2 = 0$ . Тогда:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, \end{cases} \quad (3.1.27)$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \lambda_1, \quad (3.1.28)$$

то есть изображающая точка движется по той же прямой, на которой мы указанным образом выбрали начальные условия. Эти два частных случая описывают идеальные ситуации, но изображающая точка может располагаться абсолютно произвольно.

При произвольных начальных условиях, используя систему уравнений (3.1.22), получим выражение для фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}. \quad (3.1.29)$$

Рассмотрим различные значения вещественных корней и их влияние на внешний вид фазовых траекторий:

- $\lambda_1 > 0$ ;  $\lambda_2 > 0$ .

Для того чтобы построить фазовые траектории, стоит начать с нанесения асимптот, наклон которых определяется соответствующими уравнениями  $y_{01} = \lambda_2 x_0$  и  $y_{02} = \lambda_1 x_0$ . Если выбрать точку на этих асимптотах, то изображающая точка будет двигаться вдоль этих асимптот. Если начальные условия задаются произвольно, необходим дополнительный анализ. Пусть  $t \rightarrow 0$ , тогда попадаем в точку начальных условий. В этом случае фазовый портрет будет иметь вид, представленный на рис. 1.2 (стрелками указаны направления

движения изображающих точек). При  $t \rightarrow \infty \frac{dy}{dx} \rightarrow \max(\lambda_1, \lambda_2)$ , и наклоны всех фазовых траекторий стремятся к  $\lambda_{\max}$ .

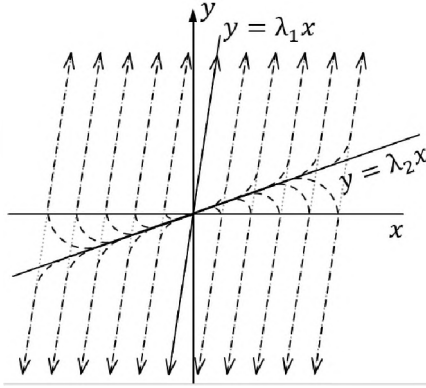


Рис. 3.2. Фазовая плоскость и фазовая траектория для начального условия

- $\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0$ .

В этом случае наклон обеих асимптот по отношению к оси  $x$  будет отрицательным. При  $t \rightarrow \infty$  изображающая точка будет сдвигаться к началу координат, то есть  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ . При  $t \rightarrow 0$  попадаем в точку начальных условий.

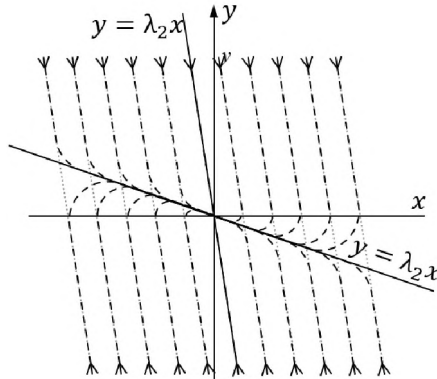


Рис. 3.3. Фазовый портрет с особой точкой типа «устойчивый узел»

- $\lambda_1 > 0; \lambda_2 < 0$ .

При таких корнях характеристического уравнения получаем асимптоты, которые пересекаются в начале координат. Это означает, что фазовый портрет такой системы представляет собой гиперболы.

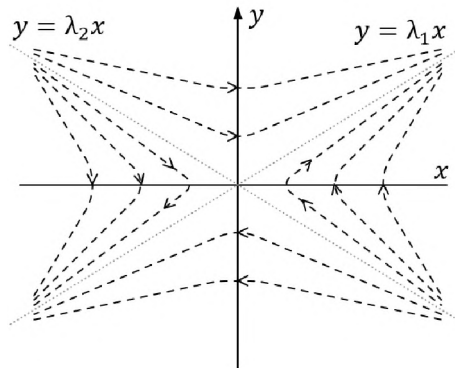


Рис. 3.4. Фазовый портрет с особой точкой типа «седло»

Рассмотрим вариант, когда *корни комплексные*. В этом случае корни характеристического уравнения запишутся как:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j\Omega. \quad (3.1.30)$$

Получаем общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-ht} \sin \Omega t + C_2 e^{-ht} \cos \Omega t, \\ y(t) = \frac{dx}{dt}. \end{cases} \quad (3.1.31)$$

Введем обозначения:

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

$$\sin \psi_1 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos \psi_1 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$

или

$$\psi_1 = \arcsin\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right) = \arccos\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right).$$

В результате получим:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{-ht} \sin \psi_1 \sin \Omega t + A_1 e^{-ht} \cos \psi_1 \cos \Omega t, \\ y(t) = \frac{dx}{dt}, \end{cases} \quad (3.1.32)$$

используя свойство косинуса суммы

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{-ht} \cos(\Omega t - \psi_1), \\ y(t) = A_2 e^{-ht} \cos(\Omega t - \psi_2), \end{cases} \quad (3.1.33)$$

где  $A_2 = -A_1 \sqrt{h^2 + \omega^2}$ ,

$$\psi_2 = \psi_1 + \arccos\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + \omega^2}}\right).$$

Таким образом, решения имеют вид колебаний, где  $A_1, A_2, \psi_1, \psi_2$  определяются начальными условиями.

Рассмотрим различные значения корней характеристического уравнения и их влияние на внешний вид фазовых траекторий:

- Если  $h = 0$ , то имеем особую точку типа центр (рис. 3.5), так как  $e^{-ht}|_{h=0} = 1$ . Вследствие этого амплитуды колебаний неизменны для любых  $t$ . Данный случай соответствует системе, в которой протекают периодические процессы, причем система на границе устойчивости.

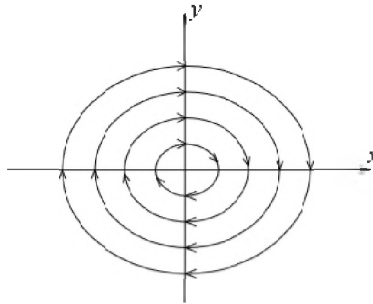


Рис. 3.5. Фазовый портрет с особой точкой типа «центр»

- Если  $h < 0$ , то имеем особую точку типа «устойчивый фокус» (рис. 3.6). Проанализируем фазовую траекторию. При  $t \rightarrow \infty$

значение  $e^{-ht} \rightarrow 0$ . Процесс в системе периодический, затухающий.

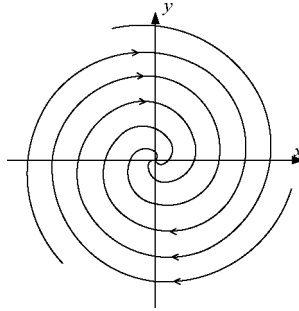


Рис. 3.6. Фазовый портрет с особой точкой типа «устойчивый фокус»

- Если  $h > 0$ , то имеем особую точку типа «неустойчивый фокус» (рис. 3.7). При  $t \rightarrow \infty$  процесс периодический, расходящийся.

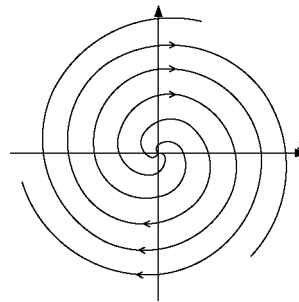


Рис. 3.7. Фазовый портрет с особой точкой типа «неустойчивый фокус»

Кроме случаев, перечисленных выше, существуют также фазовые портреты для систем имеющих один или два нулевых корня. Такие портреты не имеют особых точек, поэтому стоит рассматривать их отдельно от приведенных ранее.

- $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0$ .

Система представляет собой два интегрирующих звена, соединенных последовательно. Для того чтобы получить портрет для заданного случая, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = u, \end{cases} \quad (3.1.34)$$

для которой уравнение фазовой траектории имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{y}. \quad (3.1.35)$$

На основании приведенного дифференциального уравнения могут иметь место три различных фазовых портрета в зависимости от значения входной величины  $u$ .

Если  $u < 0$  или  $u > 0$ , то фазовый портрет будет представлять собой одинаковые параболы, сдвигаемые по оси абсцисс (рис. 3.8, а, б). Если  $u = 0$ , то фазовый портрет будет представлять собой траектории, параллельные оси абсцисс (рис. 3.8, в).

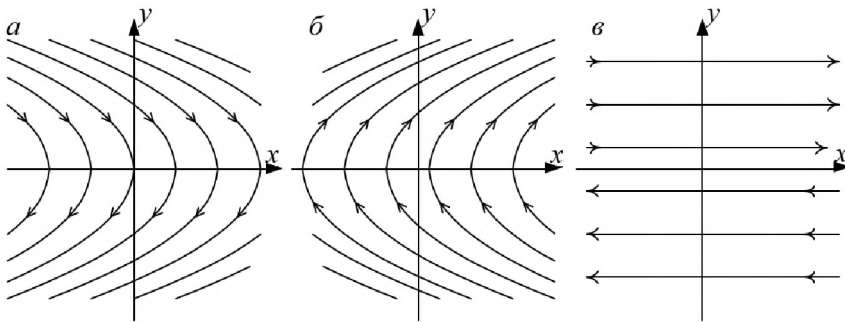


Рис. 3.8. Фазовые портреты для случая двух нулевых корней уравнения

- $\lambda_1 < 0; \lambda_2 = 0$ .

Система включает в себя инерционное звено и интегратор. Для того чтобы построить фазовый портрет, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{T}(Ku - y), \end{cases} \quad (3.1.36)$$

для которой уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T} \frac{(Ku - y)}{y}. \quad (3.1.37)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, есть три варианта фазовых портретов системы в зависимости от значения входного управляющего сигнала. Начнем с самого простого из них, а именно  $u = 0$ . Тогда фазовый портрет будет состоять из прямых, имеющих один и тот же наклон  $-\frac{1}{T}$  относительно оси  $x$ . Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 3.9, *a*.

Если  $u = \text{const} \neq 0$ , то можно преобразовать и проинтегрировать уравнение фазовой траектории следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{ydy}{Ku - y} &= \frac{1}{T} dx, \\ \left( \frac{Ku}{Ku - y} + \frac{y - Ku}{Ku - y} \right) dy &= \frac{1}{T} dx, \\ \left( \frac{Ku}{y - Ku} + 1 \right) d(y - Ku) &= -\frac{1}{T} dx, \\ Ku \ln |y - Ku| + y &= -\frac{1}{T} x + C. \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Если  $y = Ku$ , то  $\frac{dy}{dx} = 0$ , что соответствует прямолинейной асимптоте, параллельной оси абсцисс. Если  $y$  будет расти по модулю, то  $\frac{dy}{dx}$  будет стремиться к асимптоте, задаваемой уравнением  $y \approx -\frac{1}{T}x + C$ . Фазовые портреты для случаев  $u > 0$  и  $u < 0$  изображены на рис. 3.9, *б* и *в* соответственно.

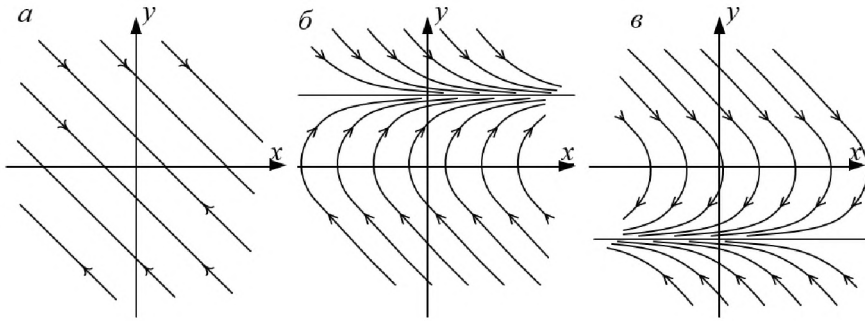


Рис. 3.9. Фазовые портреты для случая одного нулевого и одного отрицательного корней уравнения

- $\lambda_1 > 0$ ;  $\lambda_2 = 0$ .

Система включает в себя неустойчивое звено первого порядка и интегратор. Фазовый портрет описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{T}(Ku + y), \end{cases} \quad (3.1.39)$$

для которой уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T} \frac{(Ku + y)}{y}. \quad (3.1.40)$$

Фазовые портреты для случаев  $u = 0$ ,  $u > 0$ ,  $u < 0$  изображены на рис. 3.10 соответственно под буквами *а*, *б*, *в*. Как можно заметить, они похожи на траектории, изображенные в предыдущем примере, но теперь реализуется своего рода неустойчивая система.

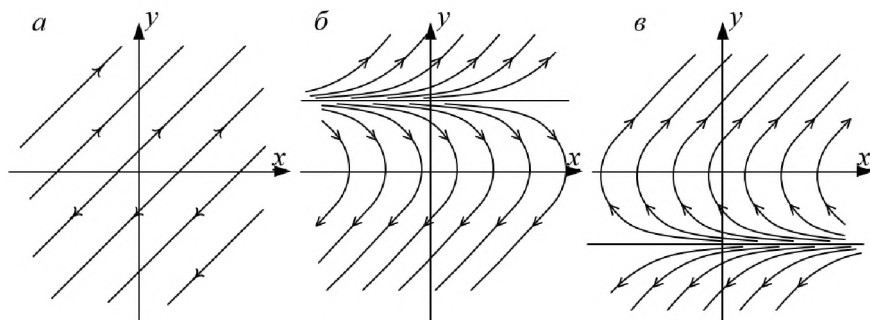


Рис. 3.10. Фазовые портреты для случая одного нулевого и одного положительного корней уравнения

Если вернуться к нелинейным системам, то вспомним, что особые точки изначально определяются именно для нелинейной системы, а уже в их окрестности, используя разложение нелинейных функций  $f_1$  и  $f_2$  в ряд Тейлора, можно определить тип особой точки, и соответственно, характер процессов в ее окрестности.

Для нелинейной системы необходимо рассматривать большие отклонения от особых точек – точек равновесия. При этом большую роль играет понятие особых траекторий на фазовой плоскости.

### 3.1.3. Особые траектории на фазовой плоскости

Рассмотрим основные особые траектории, которые могут встретиться на фазовой плоскости:

1. Особые точки (точки равновесия). Особые точки также являются самостоятельными фазовыми траекториями, так как отображают поведение системы при  $0 \leq t \leq \infty$ .

2. Предельные циклы. Это замкнутые фазовые траектории, разделяющие две области фазового портрета с различным качеством движения. Это периодические движения. Спустя период времени, равный  $T$ , система вновь возвращается в прежнее состояние. Однако не каждому периодическому движению соответствует предельный цикл. Предельным циклом называют изолированную замкнутую траекторию.

Приведем типы предельных циклов:

- Устойчивые предельные циклы (рис. 3.11).

В этом случае если изображающая точка находится снаружи предельного цикла, то попадает в сферу притяжения особой точки типа «устойчивый фокус», процессы начинают затухать. И наоборот, если изображающая точка находится внутри области, ограниченной некоторой фазовой траекторией, соответствующей предельному циклу, то система начинает расходиться и изнутри навивается на предельный цикл. Геометрически это можно интерпретировать как наложение двух систем с особыми точками типа «неустойчивый фокус» и «устойчивый фокус» (рис. 3.12). Таким образом, система устойчива в большом и неустойчива в малом. Это означает, что с помощью замкнутой траектории предельного цикла можно разделить всю фазовую плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю, именуемые условно малой и большой.

- Неустойчивые предельные циклы (рис. 3.13).

Если изображающая точка находится снаружи предельного цикла, то процессы в системе начнут расходиться, внутри – система начинает затухать. В этом случае имеем систему, устойчивую в малом и неустойчивую в большом (рис. 3.13).

- Полуустойчивые предельные циклы (рис. 3.14).

В отличие от соответствующих особых точек, имеющих схожие фазовые портреты, в данном случае имеем некоторый замкнутый контур, при достижении которого с одной их сторон попадаем на замкнутую траекторию, соответствующую границе устойчивости.

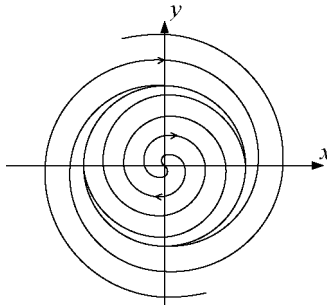


Рис. 3.11. Устойчивый предельный цикл на фазовой плоскости

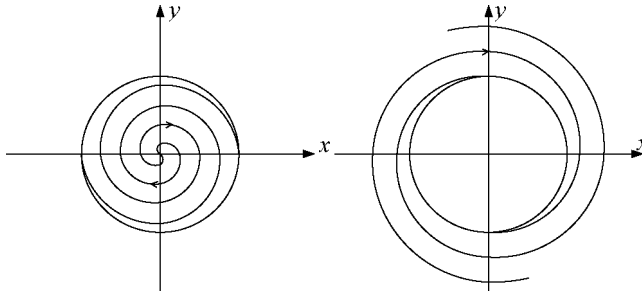


Рис. 3.12. Составляющие устойчивого предельного цикла

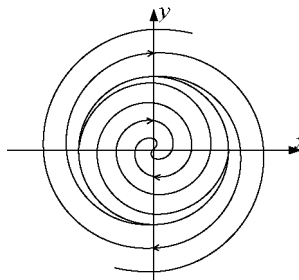


Рис. 3.13. Неустойчивый предельный цикл на фазовой плоскости

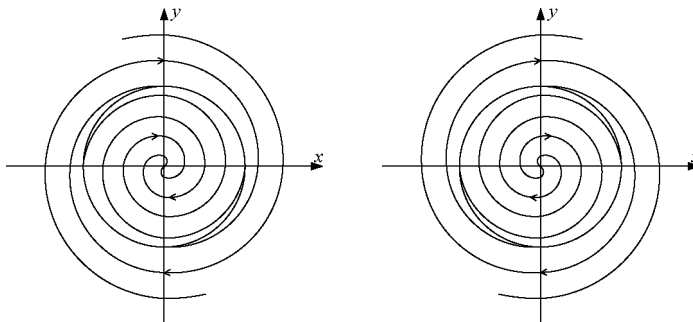


Рис. 3.14. Полуустойчивые предельные циклы

3. Сепаратрисы. Сепаратрисами называют «усы» седел. В окрестности седла сепаратрисы совпадают с его асимптотами. При удалении от седла «ус» оказывается уже не прямой, а кривой линией.

Сепаратрисы отделяют один вид движения от другого. На рис. 3.15 изображены: особая точка типа «седло» (1), сепаратрисы (2), устойчивые фокусы (3).

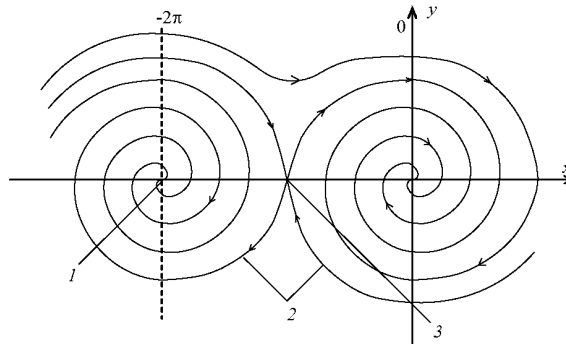


Рис. 3.15. Особые траектории на фазовой плоскости

В качестве примера – исследуем колебания математического маятника при наличии вязкого трения (рис. 3.16). Требуется построить фазовый портрет для данной системы.

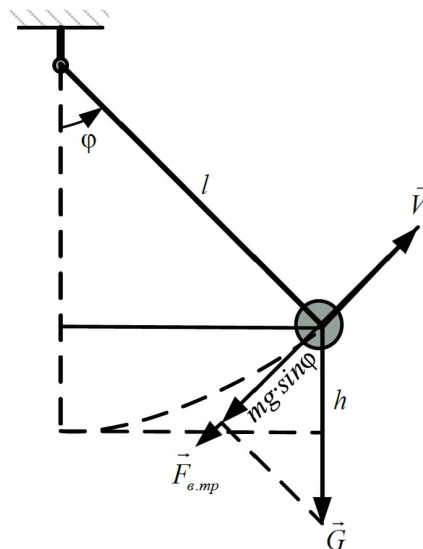


Рис. 3.16. Математический маятник

Уравнения математического маятника могут быть выведены из соображений сил, проекций реакций и всего прочего подобного. Этому посвящена много книг учебников, но есть более элегантный путь – метод уравнений Лагранжа второго рода [15]. Уравнения Лагранжа второго рода – это дифференциальные уравнения в обобщенных координатах, описывающие движение механической системы с  $n$  степенями свободы. Они находят широкое применение в исследовании поведения не только механических, но и других физических систем (гравитационного или электромагнитного поля, электромеханических систем и др.).

Уравнение Лагранжа второго рода имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial T(\vec{q})}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial P(\vec{q})}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial D(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{\vec{q}}} = \vec{F}, \quad (3.1.41)$$

где  $\vec{q}$  – вектор обобщенных координат;  $\vec{F}$  – вектор обобщенных активных сил;  $T$  – кинетическая энергия системы;  $P$  – потенциальная энергия системы;  $D$  – диссипативная энергия системы.

В нашем случае в качестве единственной обобщенной координаты выберем угол  $\varphi$ . Внешние активные силы равны нулю:  $F = 0$ . Теперь уравнение Лагранжа имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial P(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial D(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad (3.1.42)$$

Кинетическую энергию будем писать в терминологии вращательного движения:

$$T = \frac{J\omega^2}{2},$$

где момент инерции маятника, массой  $m$ , вращающегося вокруг точки подвеса на нити длиной  $l$ , равен  $J = ml^2$ , круговая скорость  $\omega = \dot{\varphi}$  и, таким образом,

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2},$$

Полная потенциальная энергия определяется массой маятника  $m$  и расстоянием до центра Земли. Нас интересует лишь энергия,

изменяющаяся с изменением угла наклона маятника. Эта энергия равна  $P = mgh$ . И на рис. 3.16 следует, что  $h = l - l \cos \varphi$ , и

$$P = mg(l - l \cos \varphi).$$

Диссипативная энергия в нашем случае определяется сопротивлением воздуха движению маятника, силой вязкого трения  $F_{\text{втр}} = c_{\text{втр}}V$  и равна

$$D = \frac{c_{\text{втр}}V^2}{2}.$$

Так как  $V = l\omega = l\dot{\varphi}$ , то

$$D = \frac{c_{\text{втр}}l^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Вычислим элементы формулы Лагранжа.

$$\frac{\partial T(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left( \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \right) = ml^2\dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) = ml^2\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial P(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (mg(l - l \cos \varphi)) = mgl \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial D(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left( \frac{c_{\text{втр}}l^2\dot{\varphi}^2}{2} \right) = c_{\text{втр}}l^2\dot{\varphi}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения свободного математического маятника

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi + c_{\text{втр}}l^2\dot{\varphi} = 0$$

и приведем его к окончательному виду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_{\text{втр}}}{m} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Введем обозначения:  $2h = \frac{c_{\text{втр}}}{m}$ ;  $K^2 = \frac{g}{l}$ ;  $x = \varphi$ ,

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + K^2 \sin x = 0, \quad (3.1.43)$$

откуда приходим к следующей СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -2hy - K^2 \sin x, \end{cases} \quad (3.1.44)$$

значит:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - K^2 \sin x}{y}. \quad (3.1.45)$$

Приравнивая числитель и знаменатель (3.1.45) к нулю, получим особые точки:  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pm\pi$ ;  $x = \pm 2\pi, \dots$  Ограничимся рассмотрением трех особых точек:  $y_{1,2,3} = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = -\pi$ .

Определим тип особых точек. Представим функцию  $f_2(x, y)$  в виде ряда Тейлора и проведем линеаризацию.

Линеаризация в окрестности особых точек  $A(x = 0, \pm 2\pi k; y = 0)$ ,  $k$  – любое целое число.

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y) = f_2(x, y)|_{(0,0)} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{0,0} \Delta x + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{0,0} \Delta y + R. \quad (3.1.46)$$

Пренебрегая остаточным членом  $R$  и вычислив соответствующие значения производных, получим:

$$\frac{dy}{dt} = -K^2 \cos x \Big|_{x=0} \Delta x - 2h\Delta y = -K^2 \Delta x - 2h\Delta y, \quad (3.1.47)$$

откуда, полагая, что  $\Delta y = \frac{d\Delta x}{dt}$ , приходим к ОДУ относительно  $\Delta x$ :

$$\Delta \ddot{x} + 2h\Delta \dot{x} + K^2 \Delta x = 0. \quad (3.1.48)$$

Составив характеристическое уравнение для (3.1.48) и решив его, получим корни:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - K^2}. \quad (3.1.49)$$

Коэффициент  $h$  связан с  $C_{\text{тр}}$ . В воздухе трение не такое большое, и при ненулевых начальных условиях маятник будет качаться, медленно успокаиваясь. Следовательно,  $K > h$ , и характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j\Omega,$$

при  $\Omega = \sqrt{K^2 - h^2}$ .

Так как  $\text{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0$ , то точка  $A$  – особая точка типа «устойчивый фокус». Если опустить маятник в жидкость, то  $K \leq h$ , процесс вместо колебательного станет аperiodическим, и получим особую точку типа «устойчивый узел».

Линеаризация в окрестности особых точек  $B_k (x = (1 \pm 2k)\pi, y = 0)$ . Рассуждая аналогично, приходим к СДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta y}{dt} = K^2\Delta x - 2h\Delta y, \\ \frac{d\Delta x}{dt} = \Delta y. \end{cases} \quad (3.1.50)$$

Перейдя от системы двух дифференциальных уравнений первого к одному дифференциальному уравнению второго порядка, запишем:

$$\Delta\ddot{x} + 2h\Delta\dot{x} - K^2\Delta x = 0. \quad (3.1.51)$$

Решая характеристическое уравнение этого ОДУ, находим корни. При  $h > 0$   $\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 + K^2} > 0$  и  $\lambda_2 = -h + \sqrt{h^2 + K^2} < 0$ . Точки равновесия  $B_k$ , которым соответствуют движения в силу полученных корней, являются особыми точками типа «седло».

Используя полученные результаты, можно построить фазовый портрет (рис. 3.17) движений математического маятника в соответствии с (3.1.43).

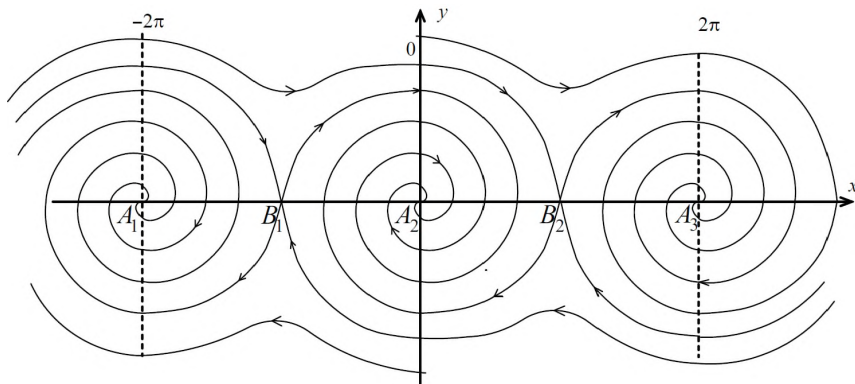


Рис. 3.17. Фазовый портрет системы, описывающей движение математического маятника под действием приложенных к нему сил

### 3.1.4. Методы построения фазовых траекторий

#### Метод изоклин

Геометрические места точек, в которых наклон касательных ко всем фазовым траекториям одинаков, представляют собой линии, называемые изоклинами. Метод изоклин применяется, когда нахождение фазовых траекторий с помощью интегрирования уравнений затруднено. Метод изоклин позволяет качественно проследить ход фазовых траекторий. Недостаток метода заключается в его низкой точности и в том, что он применим лишь для систем второго порядка.

Рассмотрим наглядный пример применения метода изоклин для линейной системы второго порядка.

Пусть исходные уравнения системы имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -2hy - \omega_0^2 x, \end{cases} \quad (3.1.52)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-\omega_0^2 x - 2hy}{y}. \quad (3.1.53)$$

Как было изложено выше, это выражение определяет в каждой точке фазовой траектории угол наклона касательной, проведенной

к фазовой траектории в этой точке:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2 x - 2hy}{y} = K_{\text{тр}}, \quad (3.1.54)$$

где  $K_{\text{тр}} = \text{tg } \alpha$ .

Далее, получаем уравнение изоклины

$$y = -K_{\text{из}}x, \quad (3.1.55)$$

где

$$K_{\text{из}} = \frac{-\omega_0^2}{K_{\text{тр}} + 2h}. \quad (3.1.56)$$

Здесь  $K_{\text{из}}$  – угловой коэффициент изоклины. Как видим, для линейного случая изоклины – это прямые линии.

Отметим некоторые характерные изоклины:

1. Ось абсцисс ( $y = 0$ ) является изоклиной с  $K_{\text{тр}} = \pm\infty$ , то есть касательные к фазовым траекториям в точке пересечения последними оси абсцисс перпендикулярны к ней.
2. Ось ординат ( $x = 0$ ) является изоклиной с  $K_{\text{тр}} = -2h$ . Если  $h > 0$ , то  $K_{\text{тр}} < 0$ , и эта изоклина тем круче, чем больше коэффициент демпфирования. Если  $h = 0$ , то  $K_{\text{тр}} = 0$ .
3. Уравнение изоклины, соединяющей точки экстремумов фазовых траекторий ( $K_{\text{тр}} = 0$ ):

$$-\omega_0^2 x - 2hy = 0, \quad (3.1.57)$$

отсюда находим уравнение изоклины, которое имеет вид:

$$y = -\frac{\omega_0^2}{2h}x. \quad (3.1.58)$$

4. Биссектрисы координатных углов (из (1.1.55) следует, что их уравнение  $y = \pm x$ , так как  $K_{\text{из}} = \pm 1$ ). Используя равенство (3.1.56), получим

$$K_{\text{тр}} = -2h \mp \omega_0^2.$$

Учитывая рассмотренные случаи, строим изоклины, на которые штрихами наносим отрезки касательных в виде засечек (естественно, что для каждой изоклины они имеют соответствующий постоянный наклон). Отправляясь от какой-либо выбранной на фазовой плоскости точки, с помощью построенных изоклин качественно строятся фазовые траектории (рис. 3.18). Если начальная точка оказалась не на изоклине, то направление касательной в выбранной точке оценивается по засечкам на ближайших к ней изоклинах.

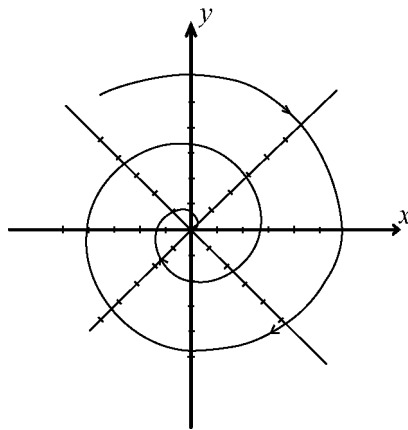


Рис. 3.18. Построение фазовой траектории вблизи особой точки типа «устойчивый фокус»

### Метод Льенара

Рассмотрим уравнение вида:  $\ddot{x} + \varphi_1(\dot{x}) + K^2x = 0$ , где  $\varphi_1(\dot{x})$  – некоторая нелинейная функция, заданная аналитически или в табличном виде. Введем замену:  $\tau = Kt$ , то есть изменим масштаб времени. Тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = K \frac{dx}{d\tau}. \quad (3.1.59)$$

Дифференцируя это равенство по времени еще раз, приходим к выражению:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( K \frac{dx}{d\tau} \right) = K^2 \frac{d^2x}{d\tau^2}. \quad (3.1.60)$$

Таким образом, исходное уравнение запишется в виде:

$$K^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \varphi_1 \left( K \frac{dx}{d\tau} \right) + K^2 x = 0. \quad (3.1.61)$$

Разделив (3.1.61) на  $K^2$  и обозначая  $\varphi = \frac{\varphi_1}{K}$ , получим:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \varphi \left( \frac{dx}{d\tau} \right) + x = 0. \quad (3.1.62)$$

Пусть  $\frac{dx}{d\tau} = y$ , тогда  $\frac{dy}{d\tau} = -\varphi(y) - x$  и  $\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - x}{y}$ .

Чтобы пояснить дальнейшие преобразования, произведем ряд построений на фазовой плоскости (рис. 3.18):

1. Строим на фазовой плоскости кривую  $x = -\varphi(y)$ .
2. Задаем точку  $P(x_1, y_1)$ .
3. Получаем точки  $M$  и  $N$ .
4. Проводим перпендикуляр к  $PN$  в точке  $P$ .

Несложно установить, что

$$MP = x_1 - [-\varphi(y_1)] = x_1 + \varphi(y_1), \quad (3.1.63)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1 + \varphi(y_1)}. \quad (3.1.64)$$

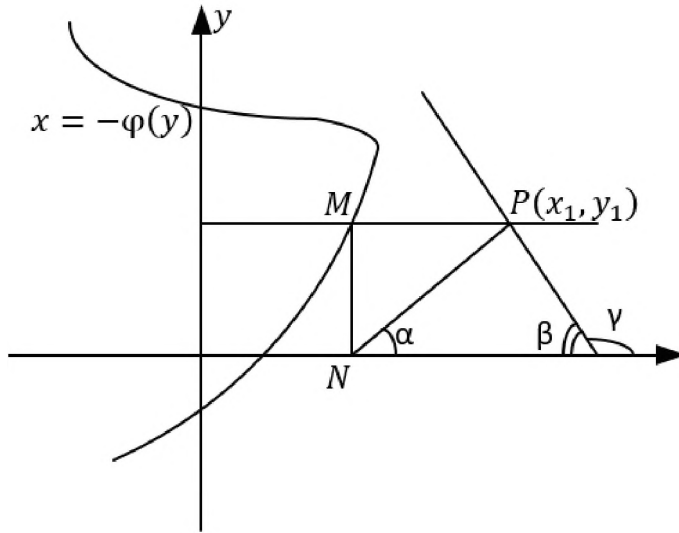


Рис. 3.19. Построения на фазовой плоскости для метода Лъенара

Задача состоит в получении выражения для угла  $\gamma$ . Руководствуясь проведенными ранее построениями, несложно установить, что:

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi;$$

$$\gamma = \pi - \beta = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

следовательно:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-x_1 - \varphi(y_1)}{y_1}. \quad (3.1.65)$$

Таким образом, перпендикуляр к  $PN$  имеет наклон  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1, y_1}$  или:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-x_1 - \varphi(y_1)}{y_1}. \quad (3.1.66)$$

Это означает, что перпендикуляр к отрезку  $NP$  в точке  $P$  является касательной к фазовой траектории.

Рассмотрим пример применения метода Лъенара.

Нас интересует влияние сухого трения на гармонический осциллятор. Пусть дана система, состоящая из груза и двух растянутых пружин. Структурная схема данной следящей системы с астатизмом второго порядка представлена на рис. 3.20.

Если брусок движется по плоскости, то, если будем прикладывать силу  $F$  до тех пор, пока сила воздействия не превысит силу трения  $F_{\text{тр}}$ , брусок будет неподвижен.

При нулевом входном сигнале ( $u = 0$ ) уравнение системы запишется:

$$\ddot{x} = -K^2x - \varphi_1(\dot{x}). \quad (3.1.67)$$

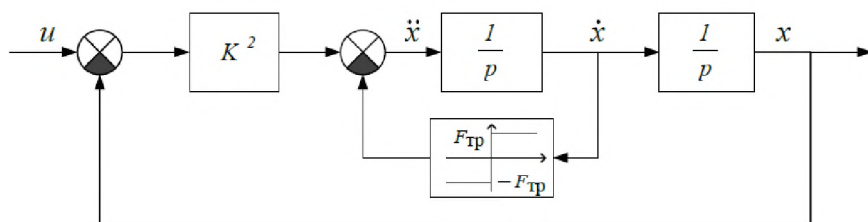


Рис. 3.20. Структурная схема гармонического осциллятора

Введем масштаб для нового времени  $\tau = Kt$ . Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{K^2}\varphi_1\left(K\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0, \quad (3.1.68)$$

следовательно:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varphi_1(y) + x = 0. \quad (3.1.69)$$

Вновь полученная функция  $\varphi(C)$  описывается следующим образом:

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{T}{K^2}, & \text{при } y > 0, \\ -\frac{T}{K^2}, & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (3.1.70)$$

Строим на фазовой плоскости график функции  $x = -\varphi(y)$ , а затем, опираясь на него, — фазовые траектории (рис. 3.21). На рисунке

$O_1O_2$  – зона застоя, при достижении которой фазовыми траекториями движение заканчивается. Отметим, что фазовые траектории для исследуемого случая будут представлять собой concentric полукружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ .

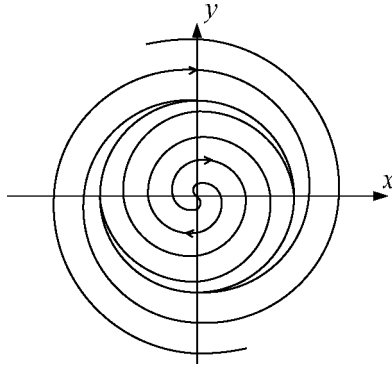


Рис. 3.21. Фазовый портрет исследуемой системы

### 3.1.5. Методы определения основных показателей переходного процесса по фазовым траекториям системы

Задача состоит в том, чтобы определить следующие показатели переходного процесса:

- 1) отклонение регулируемой координаты;
- 2) скорость отклонения регулируемой координаты;
- 3) ускорение;
- 4) моменты времени.

Изображающая точка на фазовой плоскости позволяет определить отклонение регулируемой координаты и скорость этого отклонения.

Ускорение  $\frac{d^2x}{dt^2}$  определяется поднормалью  $\overline{ab}$  в точке  $P$ , отображающей состояние системы в рассматриваемый момент времени (рис. 3.22).

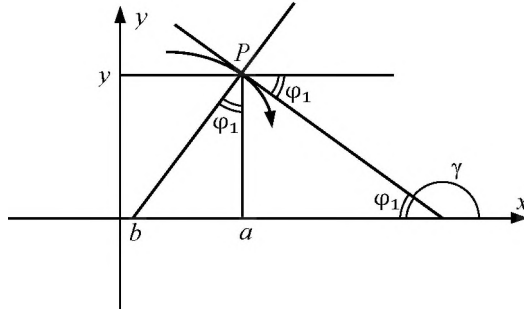


Рис. 3.22. Определение ускорения с помощью построений на фазовой траектории

Этот факт, в частности, можно обосновать с помощью несложных преобразований:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \operatorname{tg} \gamma \cdot y. \quad (3.1.71)$$

В соответствии с рис. 3.23 поднормаль  $\overline{ab} = (\operatorname{tg} \varphi_1) y$ , и так как  $\varphi_1 = \pi - \gamma$ , то  $\overline{ab} = (-\operatorname{tg} \gamma) y = -\ddot{x}$ . Знак ускорения зависит от направления поднормали. В точке  $P$  ускорение отрицательное.

Рассмотрим траекторию на фазовой плоскости (см. рис. 3.20). Зададимся целью определить временной интервал, который соответствует движению изображающей точки на фазовой плоскости вдоль кривой  $AB$ . Запишем ряд очевидных соотношений:

$$y = \frac{dx}{dt},$$

$$dt = \frac{dx}{y},$$

откуда определяем время:

$$t = \int_a^b \frac{dx}{y}. \quad (3.1.72)$$

Рассмотрим метод Дипроза, который позволяет графически оценить время. Возьмем траекторию на фазовой плоскости и определим время, которое соответствует движению изображающей точки

на фазовой плоскости вдоль кривой  $AB$ . Разобьем кривую  $AB$  на отрезки, как это показано на рис. 3.23, так, чтобы углы  $\Theta$  были равны между собой. Тогда если угол  $\Theta$  мал, то  $x_2 - x_1 \approx \Theta \cdot y_1$ , откуда временной интервал, соответствующий отрезку  $[x_1, x_2]$ , можно определить как:

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{y} \approx \frac{x_2 - x_1}{y_1} \approx \Theta, \quad (3.1.73)$$

а значит, время, соответствующее движению изображающей точки на фазовой плоскости вдоль кривой  $AB$ , определяется как  $t_A - t_B \approx \approx N\Theta$ .

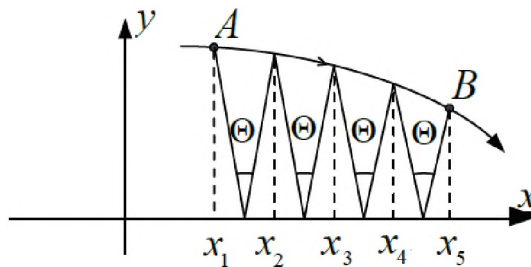


Рис. 3.23. Определение времени методом Дипроза

Если масштабы  $x$  и  $y$  отличаются, то угол  $\Theta$  должен быть умножен на отношение масштабов. Для точек, расположенных на фазовой плоскости вблизи оси абсцисс (рис. 3.24), время определяется следующим образом.

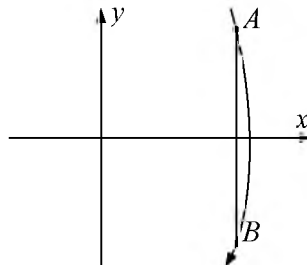


Рис. 3.24. Фазовая траектория пересекает ось  $x$

Примем допущения. Для уравнения  $\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x, \dot{x}) = 0$ :

1.  $f(\dot{x})$  и  $g(x, \dot{x})$  – нечетные симметричные относительно  $\dot{x} = 0$  функции, или они являются функциями, меняющимися плавно, когда  $\dot{x}$  меняет знак.
2.  $x$  считается постоянным на промежутке  $(A, B)$ ,  $x = x_A$ . При этом:

$$\int_{t_A}^{t_B} f(\dot{x}) dt \approx f(0)(t_B - t_A), \quad (3.1.74)$$

$$\int_{t_A}^{t_B} g(x, \dot{x}) dt \approx g(x_A)(t_B - t_A). \quad (3.1.75)$$

Интегрируя уравнение  $\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x, \dot{x}) = 0$  по времени между точками  $A$  и  $B$ , получим:

$$\int_{t_A}^{t_B} \ddot{x} dt + \int_{t_A}^{t_B} f(\dot{x}) dt + \int_{t_A}^{t_B} g(\dot{x}, x) dt = 0, \quad (3.1.76)$$

следовательно:

$$(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + [f(0) + g(x_A, 0)](t_B - t_A) = 0. \quad (3.1.77)$$

$$t_B - t_A \approx \frac{\dot{x}_A - \dot{x}_B}{f(0) + g(x_A, 0)}.$$

Таким образом получаем формулу для определения времени перемещения точки по фазовой траектории от некоторой точки  $A$  до точки  $B$ .

### 3.1.6. Фазовые портреты релейных схем. Многолистая фазовая плоскость

На практике встречаются элементы, у которых зависимость выходной от входной величины изображается в виде кусочно-линейных функций. Существует большое количество разнообразных кусочно-линейных характеристик. С некоторыми из них мы ознакомимся в дальнейшем.

Если система состоит из линейной динамической части и безинерционного нелинейного звена, то движение такой системы может быть разбито на ряд интервалов, соответствующих определенным отрезкам нелинейной характеристики. В интервалах движение описывается линейным дифференциальным уравнением, а фазовые траектории представляют собой отрезки фазовых траекторий линейного звена [16].

Рассмотрим пример исследования системы, состоящей из инерционного звена, интегратора, нелинейного звена (типа трехпозиционного идеального реле с гистерезисом) и обратных связей (рис. 3.25).

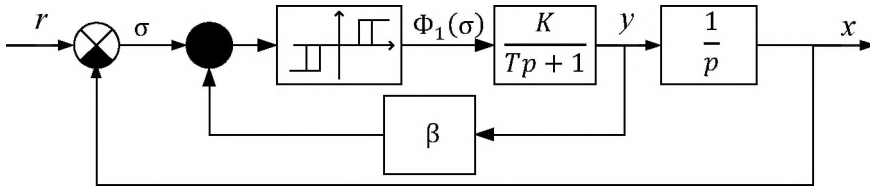


Рис. 3.25. Нелинейная система второго порядка

Пусть  $r = 0$ . Нелинейное звено, изображенное на рис. 3.25, можно описать следующим образом:

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} \frac{K}{T} & \text{при } \sigma \geq \varepsilon - \frac{\Delta}{2}, \quad \Phi(\sigma_0) = \frac{K}{T}; \\ 0 & \text{при } |\sigma| < \varepsilon + \frac{\Delta}{2}, \quad \Phi(\sigma_0) = 0; \\ -\frac{K}{T} & \text{при } \sigma \leq -(\varepsilon - \frac{\Delta}{2}), \quad \Phi(\sigma_0) = -\frac{K}{T}, \end{cases} \quad (3.1.78)$$

где  $\sigma_0$  – начальное условие по координате. Характеристика нелинейного звена, соответствующего данному описанию, изображена на рис. 3.26.

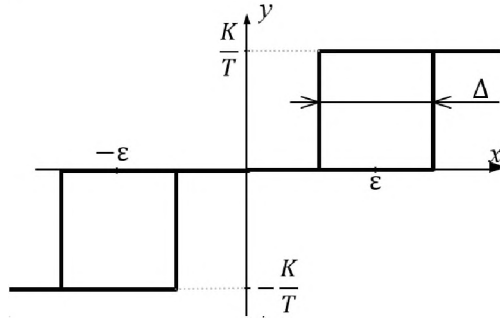


Рис. 3.26. Характеристика нелинейного звена

Запишем дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции инерционного звена:

$$T\ddot{x} + \dot{x} = K\Phi_1(\sigma). \quad (3.1.79)$$

Пусть  $\Phi(\sigma) = \frac{K}{T}\Phi_1(\sigma)$  и  $\vartheta = \frac{1}{T}$ . Тогда уравнение (3.1.79) можно представить следующим образом:

$$\ddot{x} = \Phi(\sigma) - \vartheta\dot{x}. \quad (3.1.80)$$

Исходная система уравнений распадается на три линейных уравнения, последовательно сменяющих друг друга. Вся фазовая плоскость распадается на области, называемые листами, на каждом из которых действует свое уравнение. Найдём уравнения границ этих областей, а затем уравнения фазовых траекторий, принадлежащих каждой из них. Воспользуемся описанием (3.1.78) нелинейного звена.

Для первой из областей имеем:

$$\sigma \geq \varepsilon - \frac{\Delta}{2},$$

где  $\sigma = -x - \beta y$ .

Если выразить  $y$ , то получим следующее неравенство:

$$y \leq -\frac{1}{\beta}x - \frac{1}{\beta}\left(\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right). \quad (3.1.81)$$

Это значит, что первый из листов на фазовой плоскости будет располагаться ниже прямой, имеющей наклон  $-\frac{1}{\beta}$  относительно оси  $x$ .

Для второго листа фазовой плоскости имеем:

$$|\sigma| < \varepsilon + \frac{\Delta}{2},$$

или, раскрывая модуль,

$$\begin{cases} -x - \beta y < \varepsilon + \frac{\Delta}{2}, \\ -x - \beta y > -\left(\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right), \end{cases} \begin{cases} y > -\frac{1}{\beta}x - \frac{1}{\beta}\left(\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right), \\ y < -\frac{1}{\beta}x + \frac{1}{\beta}\left(\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right). \end{cases} \quad (3.1.82)$$

Таким образом, для второго листа получаем полосу на фазовой плоскости, задаваемую системой неравенств.

Наконец, для последней области имеем:

$$y \geq -\frac{1}{\beta}x + \frac{1}{\beta}\left(\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right). \quad (3.1.83)$$

Находим уравнения фазовых траекторий для каждого из листов. В общем виде уравнения для всех трех листов можно описать уравнением фазовой траектории (3.1.40). Применительно к нашему случаю для первого листа уравнение фазовых траекторий примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T} \frac{K - y}{y}, \quad (3.1.84)$$

для второго листа получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T}, \quad (3.1.85)$$

для третьей области:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \frac{K + y}{y}. \quad (3.1.86)$$

В результате получим многолистную фазовую плоскость, соответствующую заданной изначально системе. В зависимости от значений коэффициентов  $\beta$  и  $T$  можно получить два различных фазовых портрета. На рис. 3.27 изображены фазовый портрет и две фазовых траектории для некоторых начальных условий, для которых

$\beta < T$ . На рис. 3.28 изображены плоскость и три фазовых траектории для заданных начальных условий. Для данного случая выполняется условие  $\beta > T$ .

В большей мере интересен рис. 3.28, так как на нем наблюдаются последовательные переходы между листами на фазовой плоскости. Если задать условие  $\frac{\Delta}{2} \rightarrow 0$  для нелинейного звена, то полоса пересечения листов стягивается в линию. Причем фазовые траектории по обе стороны от нее направлены навстречу друг другу. Очевидно, что после попадания на поверхность разрыва изображающая точка не может двигаться ни по одной из траекторий, примыкающих к этой поверхности, в течение какого-либо конечного интервала времени. Действительно, при любом смещении возникает движение, возвращающее изображающую точку на поверхность разрыва.

Таким образом, в рассматриваемой системе изображающая точка может двигаться лишь вдоль поверхности разрыва; это движение принято называть скользящим режимом [22].

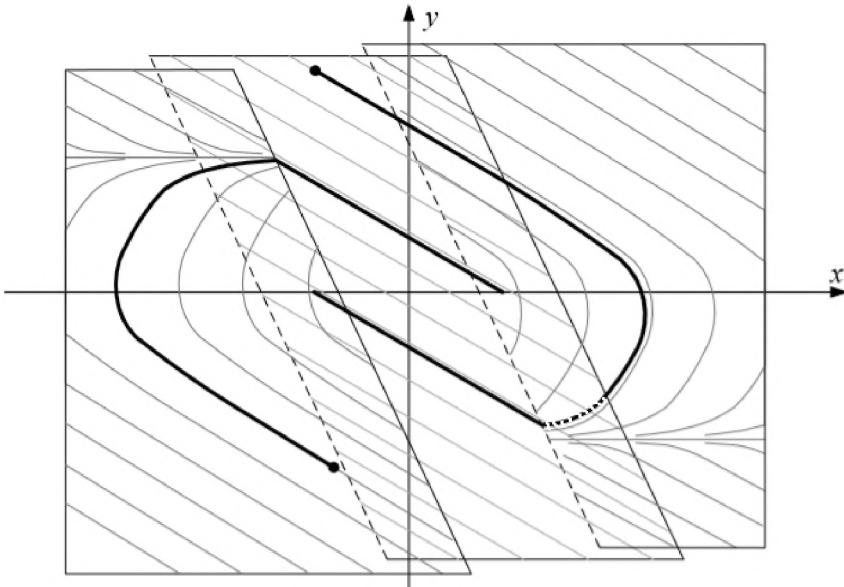


Рис. 3.27. Фазовый портрет релейной системы,  $\beta < T$

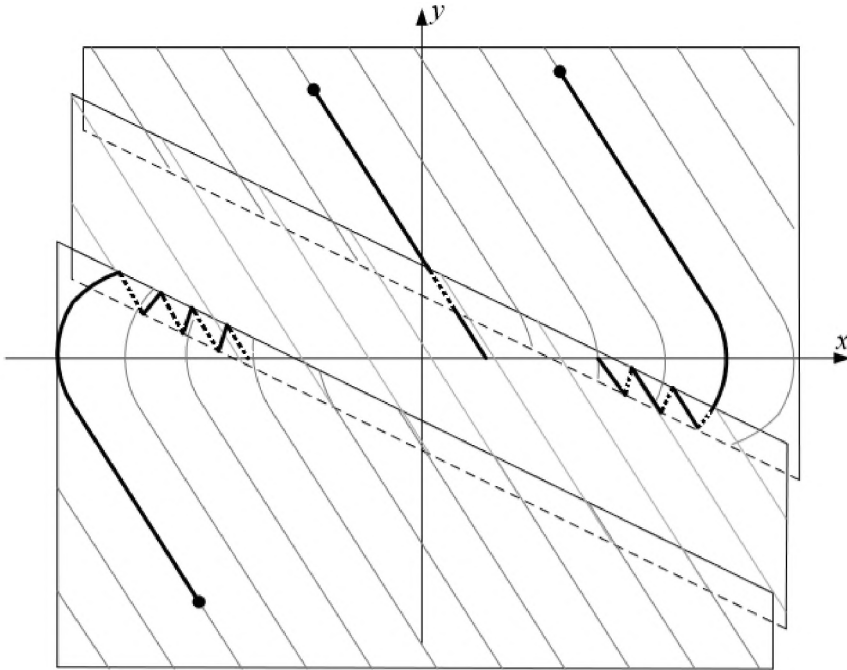


Рис. 3.28. Фазовый портрет релейной системы,  $\beta > T$

### 3.1.7. Понятие о системах с переменной структурой

Рассмотрим замкнутую систему с некоторым линейным звеном, изображенную на рис. 3.29.



Рис. 3.29. Замкнутая система

Передаточная функция линейного звена задается как

$$W(p) = \frac{K}{p^2 + ap + b},$$

где  $K, a, b$  – некоторые параметры, которые могут изменяться в широких пределах. Условимся, что всегда  $K > b$ .

Обычно если знаем параметры объекта, то можем синтезировать корректирующее звено методом желаемых частотных характеристик или задать желаемые полюса с последующим применением модального синтеза. Но так как параметры объекта переменные, нужен другой метод. Будем менять знак обратной связи по закону:

$$\alpha = f(x, \dot{x}) = \text{sign}((T\dot{x} + x)x). \quad (3.1.87)$$

На рис. 3.30 изображена система с переменной структурой – регулятор меняет по некоторому закону знак обратной связи.

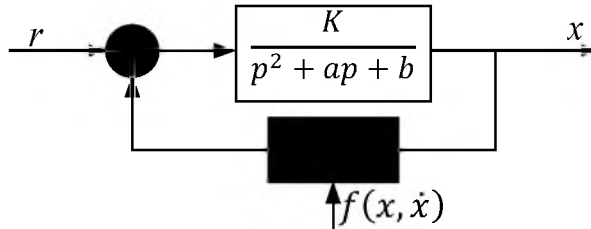


Рис. 3.30. Система с изменяющейся обратной связью

Свободное движение системы определяется уравнением:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = K(-\alpha + r). \quad (3.1.88)$$

Положим, что входной сигнал  $r = 0$ . Решение, в зависимости от значения коэффициента  $\alpha$ , распадается на два случая:

1. Если  $\alpha = 1$ , то уравнение (3.1.88) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (K + b)x = 0, \quad (3.1.89)$$

или в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -ay - (K + b)x. \end{cases} \quad (3.1.90)$$

Уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay - (K + b)x}{y}, \quad (3.1.91)$$

что соответствует особой точке типа «устойчивый фокус» или «устойчивый узел».

2. Если  $\alpha = -1$ , то уравнение (3.1.88) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{x} + a\dot{x} - (K - b)x = 0, \quad (3.1.92)$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -ay - (K - b)x. \end{cases}$$

Уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay + (K - b)x}{y}, \quad (3.1.93)$$

что соответствует особой точке типа «седло».

Смена типа уравнений будет происходить на линиях переключения, которые находятся из уравнения  $f(x, \dot{x}) = 0$ , то есть  $(T\dot{x} + x)x = 0$ . Последнее уравнение имеет два решения, следовательно, существует две линии переключения:  $x = 0$  и  $y = -\frac{1}{T}x$ . Эти линии переключения разбивают плоскость на четыре области.

Неравенство  $(Tu + x)x > 0$  требует одновременного выполнения условий:

$$0) \begin{cases} x > 0, \\ y > -\frac{1}{T}x \end{cases} \quad \text{— лист I или} \quad 1) \begin{cases} x < 0, \\ y < -\frac{1}{T}x \end{cases} \quad \text{— лист III.}$$

Неравенство  $(Tu + x)x < 0$  требует одновременного выполнения условий:

$$2) \begin{cases} x < 0, \\ y > -\frac{1}{T}x \end{cases} \quad \text{— лист II или} \quad 3) \begin{cases} x > 0, \\ y < -\frac{1}{T}x \end{cases} \quad \text{— лист IV.}$$

Таким образом, на листах I и II действуют уравнения для первого случая ( $\alpha = 1$ ). Им соответствуют собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b + K)}, \quad (3.1.94)$$

и особая точка в начале координат типа устойчивого узла, если  $b + K < \frac{a^2}{4}$ , или устойчивого фокуса при  $b + K > \frac{a^2}{4}$ .

На листах III и IV действуют уравнения для второго случая ( $\alpha = -1$ ). Им соответствуют собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b + K)}, \quad (3.1.95)$$

и особая точка типа «седло» с асимптотами  $y = \lambda_1 x$  и  $y = \lambda_2 x$ .

Если  $|\lambda_2| < \frac{1}{T}$ , то изображающая точка последовательно переходит с одного листа на другой, чему соответствуют медленно затухающие колебания. На рис. 3.31 показан соответствующий фазовый портрет и выделены фазовые траектории с начальными условиями в точках *A* и *B*.

Если при синтезе системы предусмотреть обязательное выполнение условия  $|\lambda_2| > \frac{1}{T}$ , то получим фазовый портрет, изображенный на рис. 3.32. Здесь выделены три фазовые траектории с начальными условиями *C*, *D*, *E*. Очевидно, что изображающая точка из любой области фазовой плоскости после небольшого перерегулирования по выходной координате  $x$  попадет на линию  $y = -\frac{1}{T}x$ . Фазовая траектория в этом случае, независимо от начальных условий, заканчивается скольльзящим режимом на прямой  $y = -\frac{1}{T}x$ , чему соответствует экспоненциальный процесс  $x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$  с постоянной времени  $T$  независимо от параметров объекта.

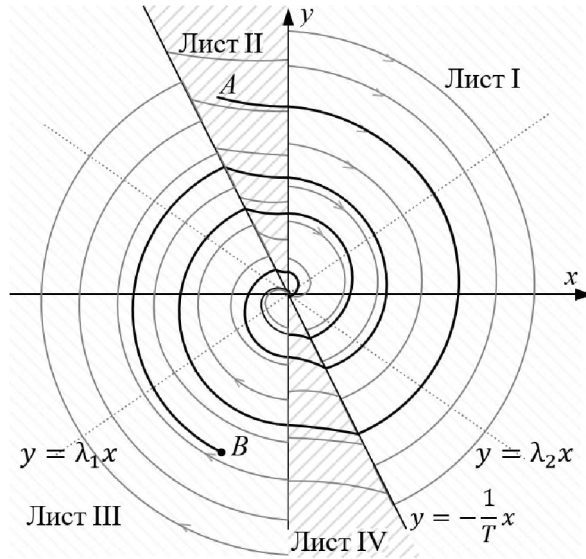


Рис. 3.31. Фазовый портрет системы с переменной структурой,  $|\lambda_2| < \frac{1}{T}$

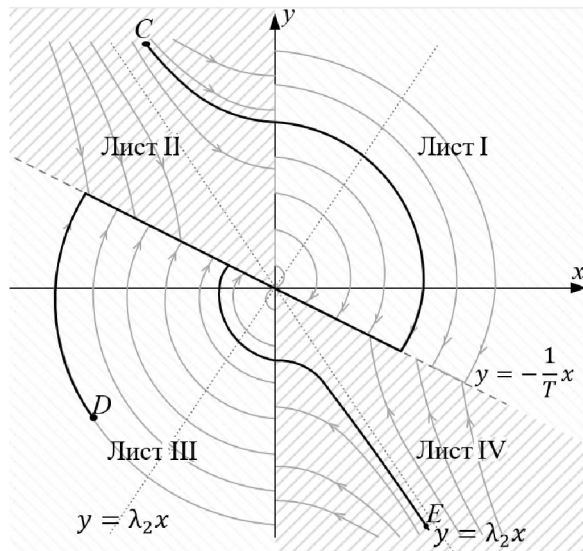


Рис. 3.32. Фазовый портрет системы с переменной структурой,  $|\lambda_2| > \frac{1}{T}$

Как изменится фазовый портрет системы, если подавать на вход командный сигнал  $r = \text{const} \neq 0$ ? В этом случае свободное движение системы определяется уравнением (3.1.88). Решение, как и в предыдущем случае, распадается на два случая, в зависимости от значения обратной связи  $\alpha$ :

1. Если  $\alpha = 1$ , то уравнение (3.1.88) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (K + b)x = Kr, \quad (3.1.96)$$

уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay - (K + b)x + Kr}{y}. \quad (3.1.97)$$

Данное уравнение соответствует особой точке типа «устойчивый фокус», но имеет сдвиг  $\frac{K}{K + b}r$  по оси  $x$ .

2. Если  $\alpha = -1$ , то получаем уравнение:

$$\ddot{x} + a\dot{x} - (K - b)x = Kr, \quad (3.1.98)$$

уравнение фазовой траектории имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay + (K - b)x + Kr}{y}.$$

Данное уравнение соответствует особой точке типа «устойчивый фокус», но имеет сдвиг  $-\frac{K}{K - b}r$  по оси  $x$ .

В результате получен фазовый портрет, изображенный на рис. 3.33, и выделены фазовые траектории с начальным условием в точке  $A$ .

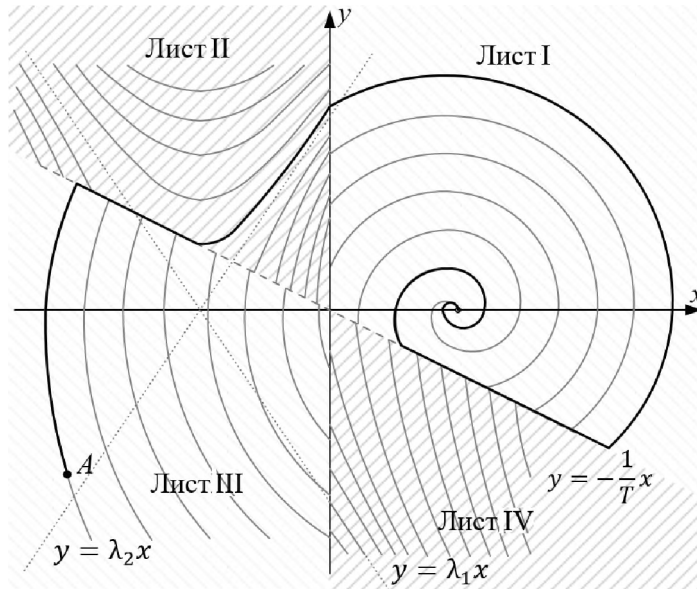


Рис. 3.33. Фазовый портрет системы с переменной структурой,  $r \neq 0$

### § 3.2. Анализ нелинейных систем методом гармонического баланса

Метод гармонического баланса позволяет проанализировать, возможны ли в нелинейной системе периодические режимы, и если они возможны, то определить их устойчивость, рассчитать их частоту и амплитуду. Этот метод позволяет преодолеть ограничение порядка изучаемой системы в отличие от метода фазовой плоскости.

Будем рассматривать такие системы, которые можно представить в виде последовательного соединения безынерционного нелинейного звена (НЗ) и линейной динамической части (ЛЧ) (рис. 3.34).

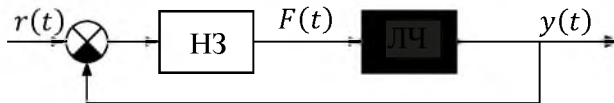


Рис. 3.34. Нелинейная замкнутая система с отрицательной единичной обратной связью

### 3.2.1. Гармоническая линеаризация нелинейных звеньев. Эквивалентный комплексный передаточный коэффициент

Идея метода гармонической линеаризации принадлежит Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову и базируется на замене нелинейного элемента системы линейным звеном, параметры которого определяются при гармоническом входном воздействии из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента

и эквивалентного ему линейного звена.

Рассмотрим прохождение через систему поданного на вход нелинейного звена гармонического сигнала (рис. 3.35). В этом случае на выходе нелинейного звена получим периодическую функцию  $F(t)$ , которую можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad (3.2.1)$$

где коэффициенты ряда Фурье

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin(\omega t) d\omega t, \quad (3.2.2)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos(\omega t) d\omega t. \quad (3.2.3)$$

Амплитуды  $a_k$  и  $b_k$ , или  $A_k$ , убывают с увеличением частоты. Часто в системах управления встречаются нелинейные звенья с нечетными характеристиками. Спектр выходного сигнала таких нелинейностей не содержит четных гармоник.

Если на вход линейной части поступает сумма гармонических сигналов, то прохождение каждой гармоники можно рассматривать независимо (рис. 3.35).

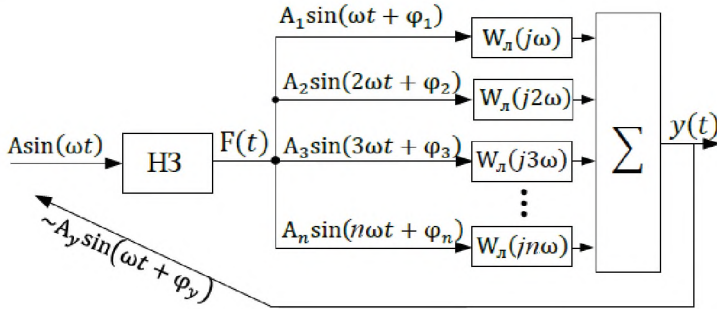


Рис. 3.35. Модель обработки линейным звеном  $W_{\text{Л}}(j\omega)$  суммы гармонических сигналов  $F(t)$

Теоретически на выход системы и в обратную связь поступает бесконечное множество гармоник, порожденных нелинейным звеном. Однако учтем, во-первых, что с ростом номера гармоники амплитуда гармоники на выходе нелинейного звена уменьшается. Во-вторых, для физически реализуемых линейных динамических звеньев и систем порядок знаменателя передаточной функции выше порядка ее числителя и с ростом частоты сигнала подавление его линейной частью возрастает. В результате в большинстве практических ситуаций совместное подавление нелинейным звеном и линейной частью колебаний на выходе нелинейного звена настолько велико, что в выходном сигнале системы и в сигнале обратной связи остается лишь первая гармоника входного сигнала (рис. 3.35). В случае когда  $A_y = A$  и  $\varphi_y = \pi$ , из обратной связи возвращается тот же сигнал, что был подан на вход. С учетом отрицательного знака обратной связи мы получили незатухающие и невозрастающие колебания в системе, то есть автоколебания.

Все эти рассуждения справедливы, когда выполняется так называемая гипотеза фильтра. Если эта гипотеза выполняется, то при наличии периодического режима из всего полигармонического сигнала  $F(t)$  на выходе нелинейного звена представляет интерес только первая гармоника. Таким образом, в рассматриваемом режиме вместо нелинейного звена может рассматриваться эквивалентное линейное звено, которое при входном гармоническом сигнале  $A \sin(\omega t)$  выдает гармонический сигнал той же частоты  $\omega$ , в общем случае некоторой другой амплитуды  $A_1$  и сдвинутый по фазе на величину  $\varphi_1$ .

Введем понятие эквивалентного комплексного передаточного коэффициента нелинейного звена (ЭКПК НЗ) как отношения первой гармонической составляющей выходного колебания нелинейного звена к входному сигналу при условии их записи в символической форме:

$$W_H(jA) = \frac{A_1}{A} e^{j\varphi(A)} = W_H(A) e^{j\varphi_H(A)}.$$

Эквивалентный комплексный передаточный коэффициент может быть представлен как:

$$W_H(jA) = W_H(A) \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi_H) = q(A) + j q_1(A) \quad (3.2.4)$$

Найдем выражения для  $q(A)$  и  $q_1(A)$ :

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_1 \cos \varphi_1 \sin \omega t + A_1 \sin \varphi_1 \cos \omega t, \quad (3.2.5)$$

$$W(jA) = \frac{A_1}{A} \cos \varphi_1 + j \frac{A_1}{A} \sin \varphi_1, \quad (3.2.6)$$

откуда:

$$q(A) = \frac{a_1}{A}, \quad (3.2.7)$$

$$q_1(A) = \frac{b_1}{A}. \quad (3.2.8)$$

Используя текущие выражения и (3.2.2), (3.2.3), составим выражения для  $q(A)$  и  $q_1(A)$ :

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(t) \sin(\omega t) d\omega t, \quad (3.2.9)$$

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(t) \cos(\omega t) d\omega t. \quad (3.2.10)$$

Рассмотрим пример нахождения ЭКПК НЗ типа идеальное двухпозиционное реле. Пусть на вход звена подается гармонический сигнал  $u(t) = A \sin(\omega t)$ . Как следует из рис. 3.36, сигнал на выходе звена

представляет собой меандр. Найдем компоненты эквивалентного передаточного коэффициента:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{1}{\pi A} \left( \int_0^{\pi} C \sin(\omega t) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} -C \sin(\omega t) d\omega t \right) = \frac{4C}{\pi A}, \quad (3.2.11)$$

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(t) \cos(\omega t) d\omega t = \frac{1}{\pi A} \left( \int_0^{\pi} C \cos(\omega t) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} -C \cos(\omega t) d\omega t \right) = 0. \quad (3.2.12)$$

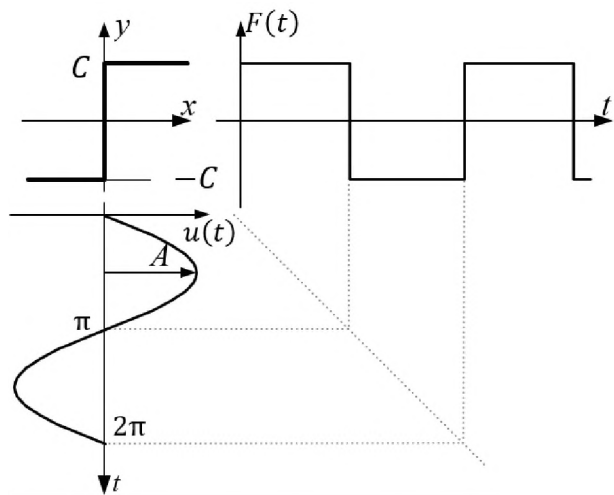


Рис. 3.36. Входной и выходной сигнал двухпозиционного реле

ЭКПК двухпозиционного реле равен:

$$W(jA) = \frac{4C}{\pi A}. \quad (3.2.13)$$

Нетрудно согласиться с тем, что для однозначных нелинейностей ЭКПК всегда является функцией вещественной,  $q_1(A) = 0$ . Однозначными называем такие нелинейности, для которых каждому входному значению соответствует только одно значение выхода.

Проанализируем полученное выражение (3.2.13). Если рассмотреть его модуль, то получим:

$$|W(jA)| = W(A) = \frac{4C}{\pi A}. \quad (3.2.14)$$

Ясно, что графиком данной функции является гипербола (рис. 3.37), монотонно убывающая на всей области определения, при  $A \rightarrow 0$  имеем  $W(A) \rightarrow \infty$ , при  $A \rightarrow \infty$  имеем  $W(A) \rightarrow 0$ .

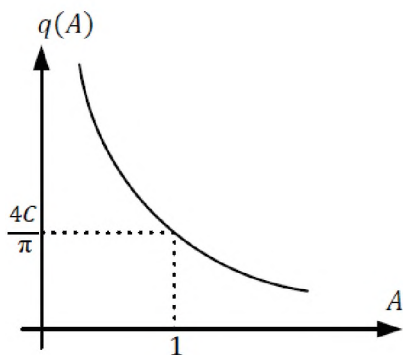


Рис. 3.37. ЭКПК для идеального двухпозиционного реле

Рассмотрим другой пример. В качестве нелинейного звена выступает двухпозиционное реле с гистерезисом. Пусть на вход звена подается гармонический сигнал  $u(t) = A \sin(\omega t)$ . Данная нелинейность задана неоднозначно, или другими словами, каждому значению  $x$  на характеристике нелинейного звена может соответствовать несколько значений  $y(x)$ . На рис. 3.38 представлена обработка данной нелинейности.

Как можно увидеть, гистерезис приводит к фазовому сдвигу между входным гармоническим сигналом и первой гармоникой на выходе нелинейного звена. При этом амплитуда первой гармоники такая же, как и в предыдущем случае. При нахождении выражения для ЭКПК в данном случае воспользуемся другим методом, основанным

на знании простейших свойств тригонометрических функций. В общем виде ЭКПК НЗ задается следующим образом:

$$W_H(jA) = q(A) + jq_1(A) = |W_H(jA)|e^{j\varphi_H}, \quad (3.2.15)$$

значение амплитуды:

$$|W(jA)| = Wt(A) = \frac{4C}{\pi A}, \quad (3.2.16)$$

сдвиг по фазе:

$$\varphi = -\alpha,$$

где

$$A \sin(\alpha) = b, \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{A}. \quad (3.2.17)$$

Из  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  следует соотношение:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (3.2.18)$$

Запишем выражения для компонентов  $q(A)$  и  $q_1(A)$ , используя (3.2.17) и (3.2.18):

$$q(A) = W_H(A) \cos \alpha = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}, \quad (3.2.19)$$

$$q_1(A) = W_H(A) \sin \alpha = \frac{4C}{\pi A} \frac{B}{A}. \quad (3.2.20)$$

Окончательно получаем:

$$W_H(jA) = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + j \frac{4C}{\pi A} \cdot \frac{B}{A}. \quad (3.2.21)$$

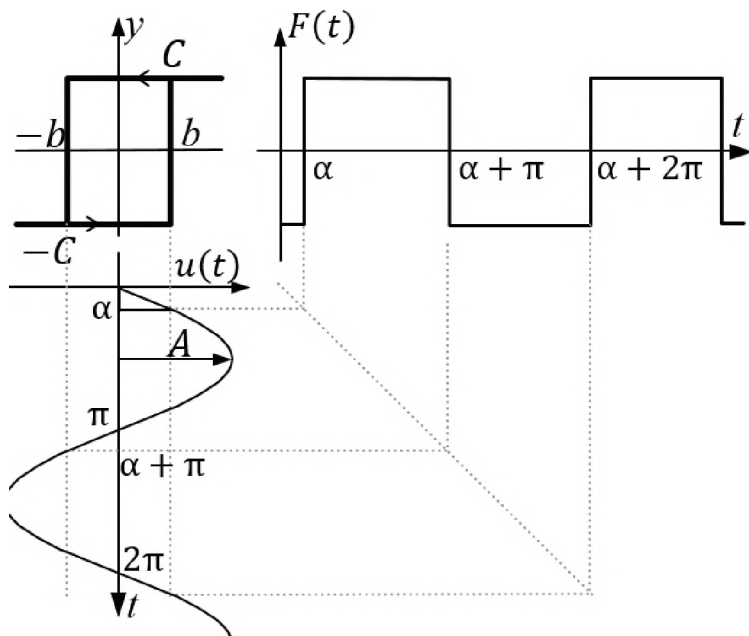


Рис. 3.38. Входной и выходной сигнал двухпозиционного реле с гистерезисом

На рис. 3.39 изображены зависимости действительного и мнимого коэффициентов ЭКПК НЗ.

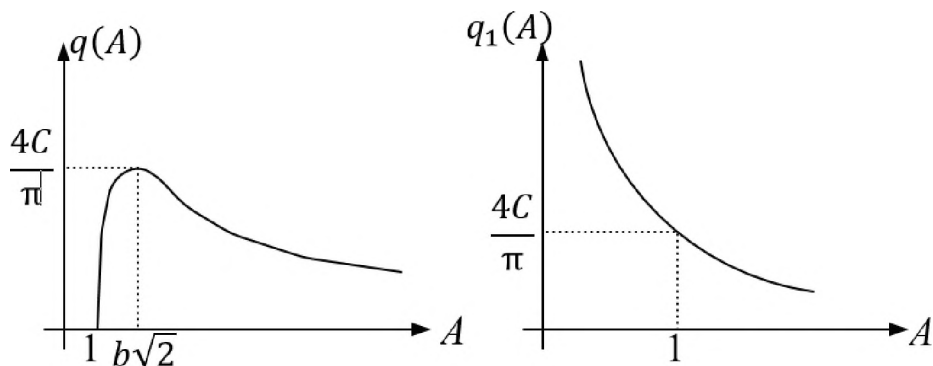


Рис. 3.39. Зависимости от амплитуды входного сигнала для идеального реле с гистерезисом

На рис. 3.40 представлены графики типовых нелинейных звеньев.

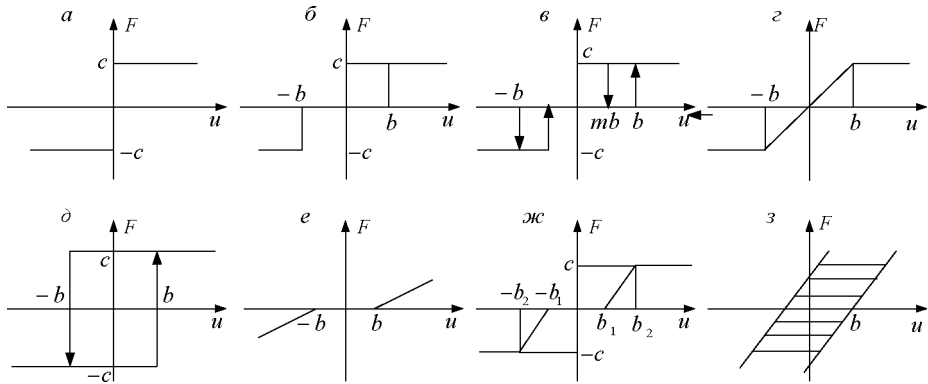


Рис. 3.40. Типовые нелинейные звенья

Запишем выражения для компонентов  $q(A)$  и  $q_1(A)$  типовых звеньев, представленных на рис. 3.40:

а. Идеальное двухпозиционное реле

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A}, \quad q_1(A) = 0;$$

б. Идеальное трехпозиционное реле

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad q_1(A) = 0;$$

в. Трехпозиционное реле с гистерезисом

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right], \quad q_1(A) = \frac{2cb^2}{\pi A^2} (1 - m);$$

г. Звено с насыщением

$$\text{при } A > b \quad q(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \quad q_1(A) = -\frac{2c}{\pi b} \cdot \frac{2b^2}{A};$$

$$\text{при } A < b \quad q(A) = K, \quad q_1(A) = -\frac{2c}{\pi b} \cdot \frac{2b^2}{A};$$

д. Двухпозиционное реле с гистерезисом

$$q(A) = \frac{2c}{\pi b} \cdot \frac{2b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad q_1(A) = -\frac{2c}{\pi b} \cdot \frac{2b^2}{A};$$

е. Звено с зоной нечувствительности

$$q(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \quad q_1(A) = 0;$$

ж. Звено с зоной нечувствительности и насыщением

$$\text{при } A > b_2 \quad q(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b_2}{A} - \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{A^2}} - \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right),$$

$$q_1(A) = 0;$$

$$\text{при } A \leq b_2 \quad q(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \quad q_1(A) = 0;$$

з. Люфт

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right), \quad q_1(A) = -\frac{k}{\pi} \cos^2 \alpha = -\frac{4kb}{\pi A} \left( 1 - \frac{b}{A} \right);$$

$$\alpha = \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{A} \right).$$

На рис. 3.41 представлены графики для типовых нелинейных звеньев, изображенных на рис. 3.40.

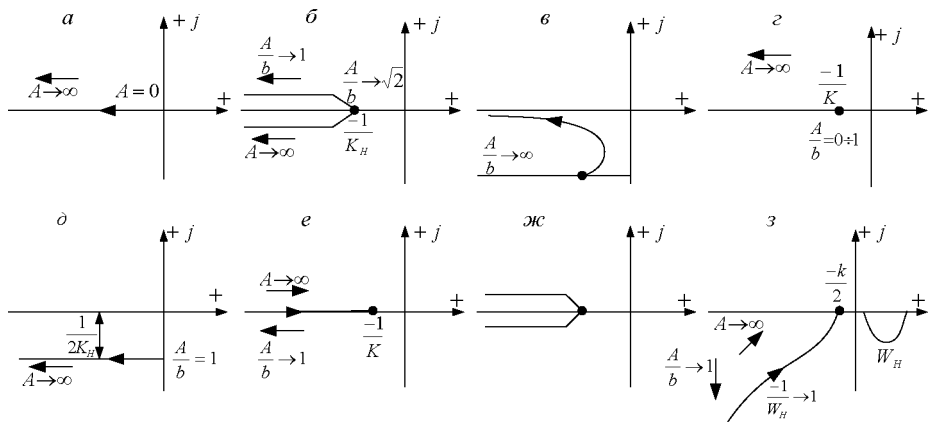


Рис. 3.41. График  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  для типовых нелинейных звеньев

### 3.2.2. Математические модели нелинейных звеньев

Как упоминалось ранее, для каждого звена линейной непрерывной системы управления можно написать свое дифференциальное уравнение динамики. Для существенных нелинейностей, не поддающихся обычному способу линеаризации, уравнение может быть записано в общем виде:

$$y = F(x), \quad (3.2.22)$$

где  $F(x)$  есть характеристика реле.

Прежде чем приступить к следующей части, хотелось бы рассмотреть виды нелинейных звеньев. В практике довольно часто встречаются элементы, у которых зависимость выходной величины от входной изображается кусочно-линейными графиками. Наиболее часто встречающиеся нелинейности изображены на рис. 3.42.

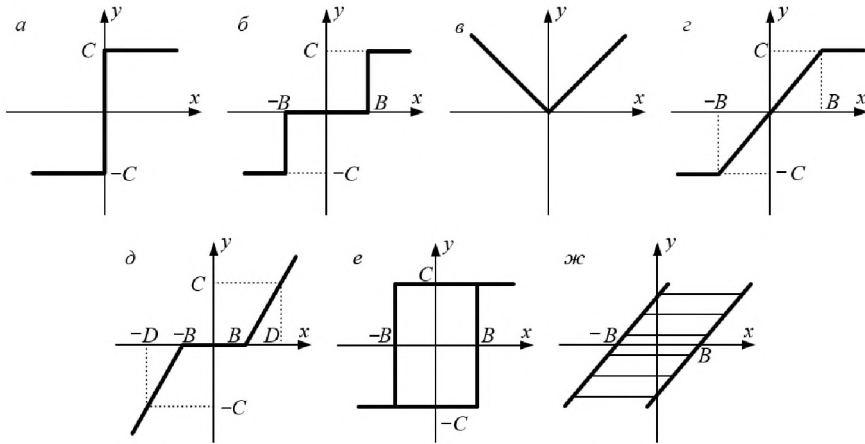


Рис. 3.42. Виды существенных нелинейностей

На рис. 3.42, а изображено идеальное двухпозиционное реле, которое описывается как:

$$y = C \cdot \text{sign}(x).$$

На рис. 3.42, б показана характеристика идеального трехпозиционного реле. При  $-B < x < B$  значение на выходе звена равно нулю. При  $x > B$  реле срабатывает в одну сторону, а при  $x < -B$  – в другую.

На рис. 3.42, в показана характеристика выпрямительного звена, описываемого как:

$$y = k|x|,$$

где  $k$  – коэффициент угла наклона.

На рис. 3.42, г изображена характеристика нелинейного звена с зоной насыщения. Это значит, что пока выполняется условие  $-B < x < B$ , значение на выходе  $y = \frac{C}{B}x$ . Как только входная величина  $x$  превысит значение  $B$ , на выходе установится  $y = C$ ; если  $x < -B$ , то  $y = -C$ .

На рис. 3.42, д показана характеристика нелинейного звена с зоной нечувствительности. Как и для идеального трехпозиционного реле, при  $|x| < B$  выходной сигнал  $y = 0$ . При  $x > B$  имеем  $y = k(x-B)$ ; при  $x < -B$  –  $y = k(x+B)$ . Здесь  $k$  – тангенс угла наклона линейного участка нелинейного звена.

Две последние из приведенных характеристик являются неоднозначными, так как каждому значению функции соответствует несколько значений. Такие звенья обладают памятью. Вопросы систем, обладающих памятью, будут рассмотрены нами позднее, в части об импульсных системах.

На рис. 3.42, *e* показано звено типа идеальное двухпозиционное реле с гистерезисом. Такая нелинейность встречается в микросхемах типа триггер Шмитта.

На рис. 3.42, *жс* изображено нелинейное звено типа люфт. Такая характеристика может встретиться, например, в зубчатых передачах.

Более подробную классификацию нелинейных звеньев можно изучать по учебникам [2], [3].

### 3.2.3. Построение областей устойчивости методом Д-разбиений

Предположим, что в линейной системе имеется характеристическое уравнение:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (3.2.23)$$

Решение этого уравнения дает нам корни характеристического уравнения или собственные числа, соответствующие матрице динамики,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Коэффициенты уравнения  $a_0, a_1, \dots, a_n$  фактически определяются параметрами отдельных элементов структурной или функциональной схемы: от постоянных времени, параметров фильтров, коэффициентов усиления, коэффициентов датчиков, коэффициентов передаточных функций.

Мы привыкли работать в пространстве состояний. Если есть  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , которые называем координатами вектора состояния, то говорим, что этот вектор состояния, или его координаты, можно рассматривать в пространстве состояний. Аналогично говорим, что коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  можно рассматривать в  $n$ -мерном пространстве параметров системы или коэффициентов дифференциальных уравнений системы.

Гиперповерхность, ограничивающая область пространства коэффициентов, каждой точке которой соответствует характеристиче-

ское уравнение с левыми корнями, называется границей области устойчивости.

Предположим, что некоторые из значений  $a_0, a_1, \dots, a_n$  соответствуют характеристическому уравнению с  $k$  корнями слева от мнимой оси и  $n - k$  корнями правее мнимой оси.

Очевидно, что всегда существует гиперповерхность, ограничивающая область, каждая точка которой определяет многочлен, имеющий  $k$  корней слева и  $n - k$  корней справа. Такую область называют  $D(k, n - k)$ .

Понятно, что количество левых корней задается как  $0 \leq k \leq n$ , причем  $k$  – целое число. Для системы третьего порядка в пространстве параметров или коэффициентов дифференциальных уравнений можем иметь следующие области:  $D(0, 3)$ ,  $D(1, 2)$ ,  $D(2, 1)$ ,  $D(3, 0)$ .

Если существует область  $D(3, 0)$ , то каждой ее точке соответствует устойчивая система. Если такой области нет, то такая система называется структурно неустойчивой.

Мнимая ось плоскости корней, или плоскости  $p$ , есть отображение границы  $D$ -разбиения плоскости параметров на плоскость корней. Разбиение пространства коэффициентов характеристического уравнения на области, соответствующие одному и тому же числу корней, расположенных слева от мнимой оси, называется  $D$ -разбиением.

Переход корней из левой полуплоскости в правую при изменении параметров без смены их знаков может быть осуществлен только через мнимую ось.

В пространстве коэффициентов у нас имеется область  $D(k, n - k)$ . Если в пространстве коэффициентов будем переходить из одной области в другую, то пересечем границу  $D$ -разбиения. В этот же момент один из корней на плоскости  $p$  пересекает мнимую ось.

#### 3.2.4. Построение области устойчивости в плоскости одного комплексного параметра методом $D$ -разбиений

Предположим, что имеется некоторое характеристическое уравнение  $L(p) = 0$ , в которое входят коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Выразим этот полином  $L(p)$  в следующем виде:

$$A(p) + SB(p) = 0. \quad (3.2.24)$$

Это то же самое характеристическое уравнение, только здесь фигурируют два полинома  $A(p)$  и  $B(p)$  с известными коэффициентами и некоторый комплексный параметр  $S$ , выбор которого находится в распоряжении разработчика системы управления. Коэффициенты полиномов  $A(p)$  и  $B(p)$  заданы и не подлежат изменению.

Требуется провести процедуру Д-разбиения в плоскости комплексного параметра  $S$  и установить, имеется ли в этой плоскости такая подобласть устойчивости, каждая точка которой, будучи подставленной в уравнение (3.2.24), даст в качестве решения все корни с отрицательной вещественной частью.

Будем искать на плоскости  $S$  такое значение  $S = S(j\omega)$ , при котором один из корней уравнения (3.2.24) является чисто мнимым:  $p = j\omega$ . Такое  $S(j\omega)$  может быть получено из (3.2.24):

$$S(j\omega) = -\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}. \quad (3.2.25)$$

Изменяя  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получаем на плоскости  $S$  кривую, которая и является кривой Д-разбиения. Очевидно, что кривые Д-разбиения являются отображением мнимой оси плоскости комплексной переменной  $p$  на плоскость  $S$ .

Непрерывному изменению коэффициентов алгебраического уравнения соответствует непрерывное изменение координат, поэтому если на плоскости  $p$  непрерывно идти по мнимой оси, меняя  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то на плоскости  $S$  получим непрерывную кривую – кривую Д-разбиения. На этих кривых необходимо провести оцифровку значений  $\omega$ , при которых были получены соответствующие значения кривой  $S$ .

Пусть система задана таким образом, что на плоскости  $S$  сформировалась кривая, изображенная на рис. 3.43, которая делит всю плоскость на четыре области. Возможно, среди них есть области устойчивости. Проведем штриховку. Начнем с плоскости  $p$ . Двигаясь по мнимой оси снизу вверх, наносим штриховку слева по ходу движения. Аналогично на плоскости  $S$ , двигаясь по кривой Д-разбиений в направлении возрастания оцифрованных значений  $\omega$ , также нанесем штриховку слева по ходу движения.

Воспользуемся свойством комформных отображений теории комплексной переменной: если на плоскости  $p$  производится пересечение оси в некоторой точке  $\omega^*$  с заштрихованной стороны мнимой

оси на незаштрихованную, то на плоскости  $S$  в окрестности соответствующего оцифрованного значения  $\omega^*$  также должно произойти пересечение кривой  $D$ -разбиения с заштрихованной ее стороны на незаштрихованную.

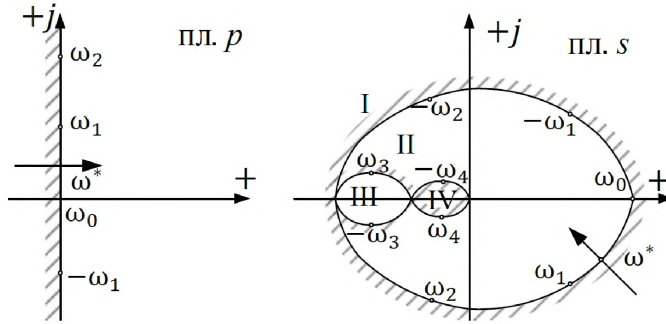


Рис. 3.43. Соответствие между плоскостью корней и плоскостью комплексного параметра  $S$

После проведения процедуры штриховки наши плоскости будут выглядеть так же, как на рис. 3.43. Теперь можно исследовать переходы через границу  $D$ -разбиения, учитывая переходы на плоскости  $p$ . Например, при переходе из области I в область II на плоскости  $S$  один из корней на плоскости  $p$  перейдет из левой в правую полу-плоскость.

В качестве конкретного примера рассмотрим систему, представленную на рис. 3.44, построим для нее кривую  $D$ -разбиения в плоскости комплексного параметра  $K$  (хотя  $K$  является вещественным числом, но на некоторое время будем полагать его комплексным параметром, а в нужный момент времени учтем лишь его вещественные значения).

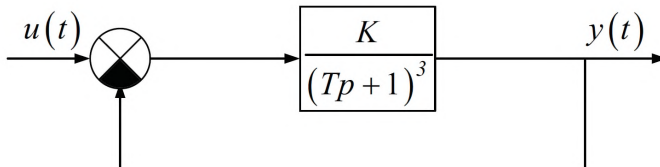


Рис. 3.44. Структурная схема системы управления

Передачная функция разомкнутой системы:

$$W_P(p) = \frac{K}{(Tp + 1)^3},$$

передачная функция замкнутой системы с учетом единичной отрицательной обратной связи:

$$W_3(p) = \frac{K}{(Tp + 1)^3 + K}.$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$L(p) = T^3 p^3 + 3T^2 p^2 + 3Tp + 1 + K.$$

В данной задаче в качестве комплексного параметра  $S$  выступает коэффициент  $K$ . Для того чтобы построить кривую Д-разбиения в плоскости комплексного параметра  $K$ , как было указано выше, заменим в выражении для  $L(p)$   $p$  на  $j\omega$ , приравняем полином  $L(j\omega)$  к нулю и получим:

$$K(j\omega) = jT^3\omega^3 + 3T^2\omega^2 - j3T\omega - 1.$$

Обозначив  $K = u + jv$ , получим:

$$\begin{cases} u = 3T^2\omega^2 - 1, \\ v = T^3\omega^3 - 3T\omega. \end{cases}$$

Проанализируем полученную систему уравнений. Если подставить  $\omega = 0$ , то получим  $u = -1$  и  $v = 0$ . Таким образом, мы сопоставляем начало координат плоскости корней и точку  $(-1, j0)$  на плоскости комплексного параметра  $K$ .

Если подставить  $u = 0$ , то в этом случае:

$$\begin{cases} \omega_u = \pm \frac{1}{T\sqrt{3}}, \\ v = T^3\omega_u^3 - 3T\omega_u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ при } \omega = \frac{1}{T\sqrt{3}}$$

и

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = \frac{8}{3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ при } \omega = -\frac{1}{T\sqrt{3}}.$$

Теперь найдем точки пересечения с действительной осью на плоскости параметров. Подставим  $v = 0$ , имеем:

$$\begin{cases} u = 3T^2\omega^2 - 1, \\ T\omega_v(T^2\omega_v^2 - 3) = 0, \end{cases}$$

откуда при  $\omega = 0$

$$\begin{cases} u = -1, \\ v = 0 \end{cases}$$

и при  $\omega = \pm \frac{\sqrt{3}}{T}$ ,

$$\begin{cases} u = 8, \\ v = 0. \end{cases}$$

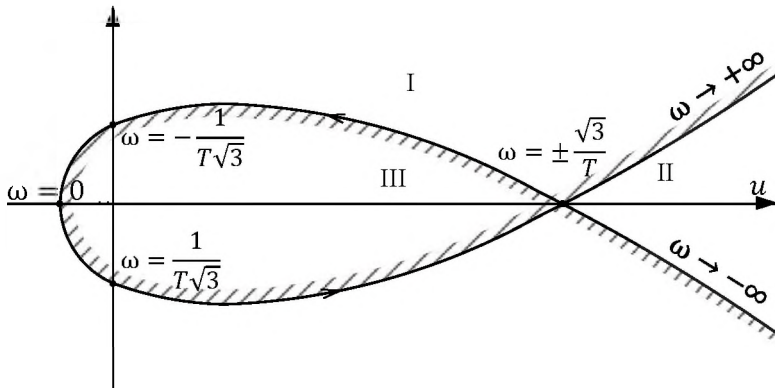


Рис. 3.45. Кривая Д-разбиения для заданной системы

Таким образом, получена кривая Д-разбиения (рис. 3.45), которая делит всю плоскость параметра на три области, причем устойчивой является область III. Это можно определить исходя из нанесенной штриховки, которая позволяет видеть все переходы через мнимую ось плоскости корней.

### 3.2.5. Определение устойчивости и параметров периодических режимов

Рассматриваем типовую структурную схему (рис. 3.46), где изображены безинерционное нелинейное звено и динамическая линейная часть. Командный сигнал  $u(t)$  полагаем равным нулю.

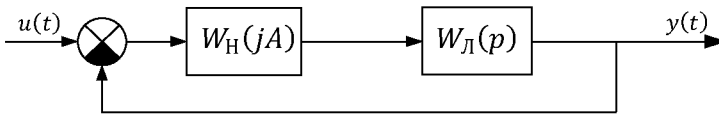


Рис. 3.46. Типовая схема для определения параметров устойчивости

Линейная часть описывается передаточной функцией  $W(p)$ . Предполагаем, что в системе существует периодический режим. Тогда нелинейное звено описываем эквивалентным комплексным передаточным коэффициентом  $W(jA)$ .

Передаточную функцию линейной части можно представить в виде:

$$W_L(p) = \frac{R_L(p)}{Q_L(p)}.$$

В соответствии со структурной схемой передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_P(p, jA) = W_H(jA) \frac{R_L(p)}{Q_L(p)}. \quad (3.2.26)$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_C(p, jA) = \frac{W_P(p, jA)}{1 + W_P(p, jA)},$$

и характеристический полином замкнутой системы:

$$L(p, jA) = Q_L(p) + W_H(jA)R_L(p).$$

Если приравнять его к нулю, то получим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$Q_{\text{Л}}(p) + W_{\text{Н}}(jA)R_{\text{Л}}(p) = 0. \quad (3.2.27)$$

Разделим его на эквивалентный комплексный передаточный коэффициент:

$$\frac{Q_{\text{Л}}(p)}{W_{\text{Н}}(jA)} + R_{\text{Л}}(p) = 0. \quad (3.2.28)$$

Введем в рассмотрение комплексный параметр

$$S = -\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA)}. \quad (3.2.29)$$

В результате характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид:

$$SQ(p) - R(p) = 0. \quad (3.2.30)$$

Проведем  $D$ -разбиение в плоскости комплексного параметра  $S$ . Будем искать те точки, в которых решение характеристического уравнения дает чисто мнимые значения, то есть  $p = j\omega$ . Это семейство точек и будет тем, что мы называли кривой  $D$ -разбиения. Уравнение кривой  $D$ -разбиения примет вид:

$$S = \frac{R_{\text{Л}}(j\omega)}{Q_{\text{Л}}(j\omega)}. \quad (3.2.31)$$

Обнаруживаем, что полученное выражение для комплексного параметра – то же самое, что и комплексный передаточный коэффициент линейной части системы  $W_{\text{Н}}(j\omega)$ . Оказывается, в плоскости комплексного параметра  $S$  кривая  $D$ -разбиения является амплитудно-фазовой характеристикой линейной части рассматриваемой системы.

Таким образом, кривая  $D$ -разбиений делит всю плоскость комплексного параметра на несколько областей. Если мы устремим  $W_{\text{Н}}(jA) \rightarrow 0$ , тогда  $S \rightarrow -\infty$  и уравнение (3.2.27) примет вид:

$$Q_{\text{Л}}(p) = 0. \quad (3.2.32)$$

Это означает, что на плоскости  $S$  вся область  $D$ -разбиения, включающая в себя  $S \rightarrow -\infty$ , соответствует такому же расположению корней характеристического уравнения замкнутой системы относительно мнимой оси плоскости  $p$ , как у характеристического уравнения линейной части.

Мы провели  $D$ -разбиение в плоскости  $S$ , но не должны забывать, что не в наших силах выбирать любую точку на этой плоскости, так как из (3.2.29) видно, что параметр  $S$  задается конкретной нелинейностью, ее эквивалентным комплексным передаточным коэффициентом  $W_H(jA)$ . Пусть кривая  $D$ -разбиения и кривая  $-\frac{1}{W_H(jA)}$ , соответствующая нелинейному звену, изображены на рис. 3.47. Пусть, в соответствии с результатами  $D$ -разбиения области, I и IV являются областями устойчивости.

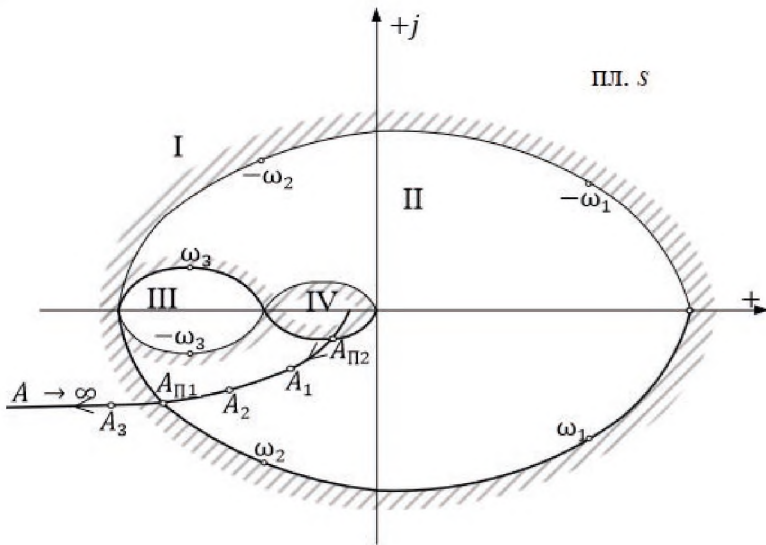


Рис. 3.47. Кривые нелинейного звена и  $D$ -разбиений

Кривые  $D$ -разбиения и  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  пересекаются в двух точках – П1 и П2. Этим точкам соответствуют значения частоты  $\omega_{П1}$  и  $\omega_{П2}$  в соответствии с оцифровкой по кривой  $D$ -разбиений (то есть по амплитудно-частотной характеристике линейной части  $W_H(j\omega)$ ) и значения амплитуды  $A_{П1}$  и  $A_{П2}$  в соответствии с оцифровкой характеристики нелинейного звена  $-\frac{1}{W_H(jA)}$ . В этих точках выполняются

равенства

$$W_{\text{Л}}(j\omega_{\text{П1}}) = -\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA_{\text{П1}})}, W_{\text{Л}}(j\omega_{\text{П2}}) = -\frac{1}{W_{\text{П}}(jA_{\text{П2}})},$$

характеристика разомкнутой системы проходит через точку  $(-1, j0)$ :

$$W_{\text{Н}}(jA_{\text{П1}})W_{\text{Л}}(j\omega_{\text{П1}}) = -1, W_{\text{Н}}(jA_{\text{П2}})W_{\text{Л}}(j\omega_{\text{П2}}) = -1.$$

Как следует из Д-разбиения, в рассмотренных случаях и в точке П1, и в точке П2 замкнутая система находится на границе устойчивости.

Рассматривая нелинейную систему, будем различать понятия устойчивости системы и устойчивости периодического режима в системе.

В точке П1 система находится на границе устойчивости, на входе нелинейного звена существуют колебания с частотой  $\omega_{\text{П1}}$  и амплитудой  $A_{\text{П1}}$ . Если по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена увеличится, то в соответствии с характери-

стикой  $-\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA)}$  система окажется в области I, станет устойчивой.

При этом амплитуда колебаний начнет уменьшаться, и по характеристике  $-\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA)}$  система начнет возвращаться в точку П1. Если по

каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена уменьшится, то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA)}$  си-

стема окажется в области II, станет неустойчивой. При этом амплитуда колебаний начнет увеличиваться, и по характеристике  $-\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA)}$

система начнет возвращаться в точку П1. Таким образом, мы можем утверждать, что в точке П1 существует **устойчивый периодический режим**, автоколебания с амплитудой  $A_{\text{П1}}$  и с частотой  $\omega_{\text{П1}}$ .

Проведем аналогичные рассуждения для точки П2. В точке П2 система находится на границе устойчивости, на входе нелинейного звена существуют колебания с частотой  $\omega_{\text{П2}}$  и амплитудой  $A_{\text{П2}}$ . Если по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелиней-

ного звена уменьшится, то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_{\text{Н}}(jA)}$

система окажется в области IV, станет устойчивой. При этом амплитуда колебаний начнет уменьшаться, и по характеристике  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система начнет еще дальше уходить от точки П2. В конце концов колебания исчезнут, процессы в системе успокоятся. Если система находится в точке П2 и по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена увеличится, то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система окажется в области II, станет неустойчивой. При этом амплитуда колебаний начнет увеличиваться, и по характеристике  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система со временем перейдет в точку П1. Таким образом, мы можем утверждать, что в точке П2 возможен лишь **неустойчивый периодический режим**, система долго в этом режиме работать не может и со временем или перейдет в состояние покоя, оставаясь в области IV, или перейдет к автоколебаниям в точку П1.

Кроме того, можно утверждать, что система устойчива в малом (область IV), неустойчива в среднем (область II) и устойчива в большом (область I).

Таким образом, при исследовании нелинейной системы методом гармонического баланса необходимо на комплексной плоскости построить характеристику нелинейного звена  $S = -\frac{1}{W_H(jA)}$  и амплитудно-фазовую характеристику  $W_H(j\omega)$  линейной части системы. Последняя в данном рассмотрении представляет собой кривую Д-разбиения в плоскости комплексного параметра  $S$ .

Методами Д-разбиения нужно определить, имеются ли среди сформировавшихся в процессе Д-разбиения областей устойчивости. Если нет ни одной, то система неустойчива и дальнейший анализ не нужен. Также следует прекратить анализ, если кривая  $S = -\frac{1}{W_H(jA)}$  не пересекается с границей области устойчивости системы. Далее, следует более внимательно рассмотреть точки пересечения кривой Д-разбиения  $W_H(j\omega)$  и характеристики нелинейного звена  $-\frac{1}{W(jA)}$  на границах областей устойчивости. Эти точки определяют параметры

периодических режимов. По характеристике  $W_H(j\omega)$  определяются частоты, а по характеристике  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  – амплитуды периодических режимов.

В заключение следует решить наиболее важный вопрос – имеются ли среди установленных периодических режимов устойчивые, то есть возможны ли автоколебания. Периодический режим является устойчивым, если в окрестности пересечения характеристик линейной части и нелинейного звена при увеличении параметра  $A$  происходит переход в область устойчивости, а при его уменьшении – в область неустойчивости.

Следует отметить, что данный метод применим и в случаях неустойчивой линейной части.

*ПРИМЕР 3.2.1.*

Пример на определение устойчивости и параметров периодических режимов.

Пусть структурная схема системы такая же, как на рис. 3.46. Пусть линейная часть системы описывается передаточной функцией

$$W_L(p) = \frac{K_L}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Нелинейное звено описывается эквивалентным комплексным передаточным коэффициентом  $W_H(jA)$ . Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$L_L(p) = W_H(jA) \cdot K_L + T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p.$$

Требуется провести Д-разбиение, определить тип полученных областей, найти точки пересечения  $W_L(j\omega)$  и  $S(jA) = -\frac{1}{W_H(jA)}$ , определить характер периодических режимов в этих точках.

На рис. 3.48 приведена амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) линейной части, которая может рассматриваться как кривая Д-разбиения в плоскости комплексного параметра  $S$ . Таким образом, вся плоскость комплексного параметра  $S$  оказалась разбитой на три области различного расположения корней характеристического уравнения замкнутой нелинейной системы. Претендентом на устойчивость является область I.

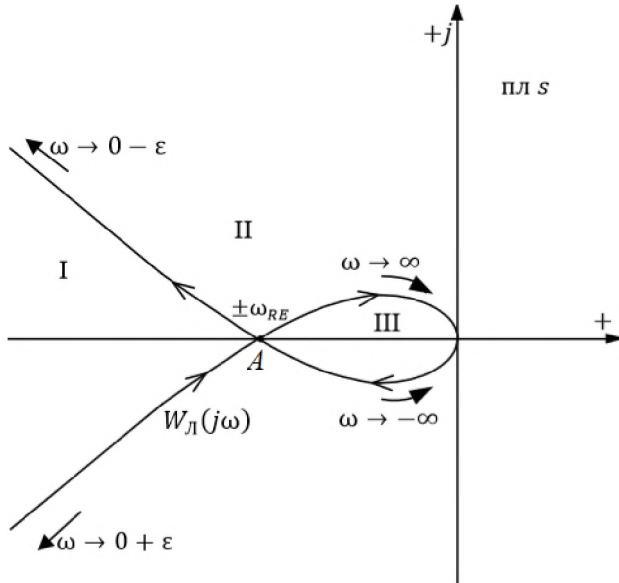


Рис. 3.48. АФХ линейной части системы

Чтобы уточнить, является ли область I областью устойчивости, рассмотрим точку A, через которую проходят две ветви кривой Д-разбиения, соответствующие точкам  $\pm j\omega_{Re}$  на мнимой оси плоскости P.  $\omega_{Re}$  – это та частота, при которой АФХ линейной части пересекает вещественную ось. Нетрудно убедиться, что

$$\omega_{Re} = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \quad \text{и} \quad W_{\text{Л}}(j\omega_{Re}) = -\frac{K_{\text{Л}} T_1 T_2}{T_1 + T_2}.$$

Когда вектор комплексного параметра S заканчивается в точке A, то есть

$$S = W_{\text{Л}}(j\omega_{Re}) = -\frac{K_{\text{Л}} T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \quad \text{и соответственно, } W_{\text{Н}} = \frac{T_1 + T_{\text{Л}2}}{K T_1 T_2},$$

два из трех корней характеристического уравнения замкнутой системы оказываются чисто мнимыми –  $p_{1,2} = \pm j\omega_{Re}$ , а третий,  $p_3$ , – вещественный.

Найдем  $p_3$ . Корням  $p_1, p_2$  соответствует полином  $p^2 + \omega^2$ . Подставив в  $L_3(p)$  полученное выражение  $W_H$  и разделив результат на  $p^2 + \omega^2$ , получим двучлен  $T_1 T_2 p + T_1 + T_2$ . Это означает, что точке соответствует

$$p_3 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}.$$

Отсюда сразу следует, что область I является областью устойчивости.

Введем в рассмотрение некоторое значение  $K_{кр}$ , такое, что если  $K_L = K_{кр}$ , то система, состоящая только из линейной части с отрицательной обратной связью, будет находиться на границе устойчивости.

Рассмотрим два варианта нелинейных звеньев, когда в качестве нелинейного звена выступает звено с зоной насыщения и звено с зоной нечувствительности.

1. Звено с зоной насыщения, эквивалентный комплексный передаточный коэффициент для которого (табл. 3.1) равен:

$$W_H(jA) = \frac{2}{\pi A} \left[ \arcsin \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \right].$$

Требуется проанализировать взаимное расположение характеристик  $\frac{1}{W_H(jA)}$  и  $W_L(j\omega)$  для того, чтобы делать вывод о существовании периодических режимов.

Если  $K_L < K_{кр}$ , имеем расположение характеристик, изображенное на рис. 3.49,а.

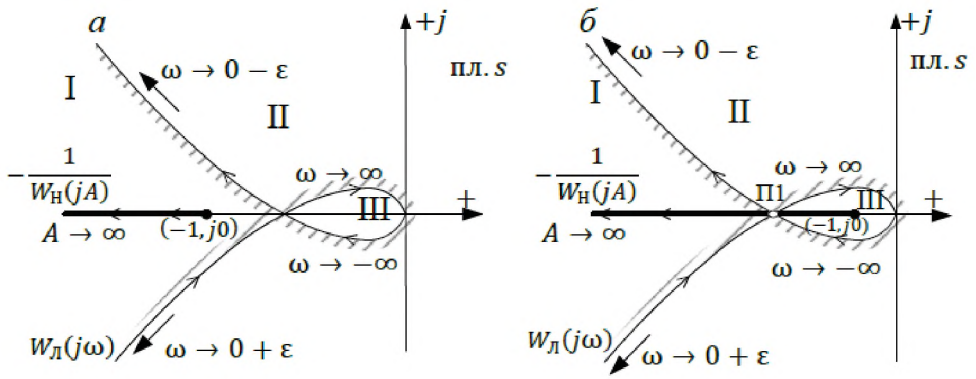


Рис. 3.49. Графический расчет точки пересечения характеристик

$$-\frac{1}{W_H(jA)} \text{ и } W_L(j\omega)$$

Если  $K_L > K_{кр}$ , то характеристики имеют общую точку. Расположение характеристик в данном случае приведено на рис. 3.49, б. Требуется проанализировать влияние изменения амплитуды колебаний на входе нелинейного звена. В точке III система находится на границе устойчивости, на входе нелинейного звена существуют колебания с частотой  $\omega_{III}$  и амплитудой  $A_{III}$ . Если по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена увеличится, то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система окажется в области I и станет устойчивой. При этом амплитуда колебаний начнет уменьшаться, и по характеристике  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система начнет возвращаться в точку III. Если по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена станет меньше, чем  $A_1$ , то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система окажется в области II, станет неустойчивой. При этом амплитуда колебаний начнет увеличиваться, и по характеристике  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система начнет возвращаться в точку III. Таким образом, мы можем утверждать, что в точке III существует устойчивый периодический режим, авто-

колебания с амплитудой  $A_{\text{П1}}$  и с частотой  $\omega_{\text{П1}}$ .

Итак, точка П1 – точка устойчивого периодического режима.

2. Звено с зоной нечувствительности (табл. 3.1), эквивалентный комплексный передаточный коэффициент для которого равен:

$$1 - \frac{2}{\pi A} \left[ \arcsin \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \right].$$

Анализируем расположение характеристик для различных  $K_{\text{Л}}$ .

Если  $K_{\text{Л}} < K_{\text{кр}}$ , имеем расположение характеристик, изображенное на рис. 3.50,а, вся характеристика находится в области устойчивости (I) замкнутой системы, все процессы в системе успокаиваются.

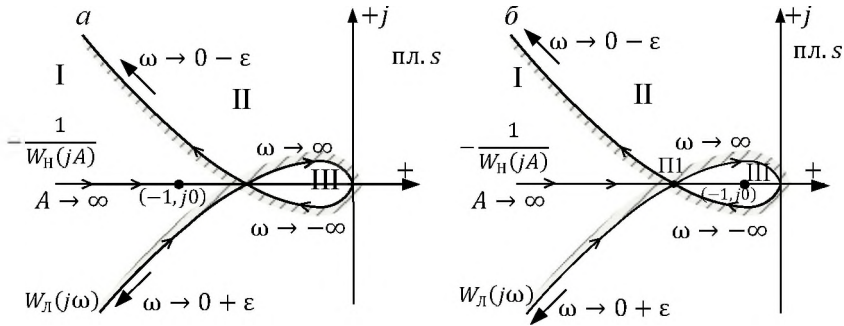


Рис. 3.50. Графический расчет точки пересечения характеристик

$$-\frac{1}{W_H(jA)} \text{ и } W_L(j\omega)$$

Если  $K_{\text{Л}} > K_{\text{кр}}$ , то характеристики имеют общую точку. Расположение характеристик в данном случае приведено на рис. 3.50,б. Требуется проанализировать устойчивость системы при изменениях амплитуды колебаний на входе нелинейного звена. В точке П1 система находится на границе устойчивости, на входе нелинейного звена существуют колебания с частотой  $\omega_{\text{П1}}$  и амплитудой  $A_{\text{П1}}$ . Если по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена увеличится, то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_H(jA)}$

система окажется в области III, станет неустойчивой и амплитуда колебаний будет продолжать увеличиваться. Если по каким-нибудь причинам амплитуда колебаний на входе нелинейного звена станет меньше, чем  $A_{П1}$ , то в соответствии с характеристикой  $-\frac{1}{W_H(jA)}$  система окажется в области I, станет устойчивой, амплитуда колебаний будет продолжать уменьшаться, система успокоится. Таким образом, мы можем утверждать, что П1 является точкой неустойчивого периодического режима.

### 3.2.6. Режим вынужденных колебаний

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.51. Передаточную функцию линейной части и комплексный передаточный коэффициент обозначаем соответственно  $W_L(j\omega)$  и  $W_H(jA)$ .

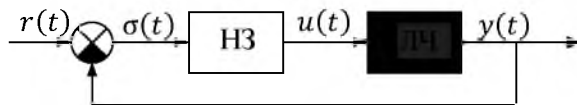


Рис. 3.51. Система с командным сигналом  $r(t)$

Подадим на вход системы гармонический командный сигнал с известными амплитудой  $C_{ВХ}$  и частотой  $\omega_{ВХ}$ :

$$r = C_{ВХ} \sin(\omega_{ВХ}t). \quad (3.2.33)$$

Предположим, что под действием этого сигнала в системе установятся навязанные колебания той же частоты и сигнал на входе нелинейного звена будет иметь вид:

$$\sigma = A \sin(\omega_{ВХ}t + \varphi). \quad (3.2.34)$$

Если представлять гармонический сигнал на входе системы и колебания в системе в комплексной форме, то запишем:

$$r_{ВХ}^{\circ} = C_{ВХ} e^{-j0}, \quad (3.2.35)$$

$$\sigma^{\circ} = A(\omega_{ВХ}, C_{ВХ}) e^{-j\varphi(\omega_{ВХ}, C_{ВХ})}. \quad (3.2.36)$$

Требуется определить, как соотносятся параметры сигналов  $r$  и  $\sigma$ . Составим отношение:

$$\frac{\overset{\circ}{\sigma}}{\overset{\circ}{r}} = \frac{Ae^{-j\varphi}}{C_{ВХ}} = \frac{1}{1 + W_H(jA)W_L(j\omega_{ВХ})}. \quad (3.2.37)$$

В этом равенстве линейная часть представлена одним комплексным коэффициентом, соответствующим  $\omega = \omega_{ВХ}$ . Неизвестными, подлежащими определению, являются  $A$  и  $\varphi$ . Чтобы их найти, запишем предыдущее равенство в виде:

$$C_{ВХ}e^{j\varphi} = A [1 + W_H(jA)W_L(j\omega_{ВХ})] = \Phi(jA). \quad (3.2.38)$$

Записанное в такой форме равенство позволяет построить на одной плоскости графики  $C_{ВХ}e^{j\varphi}$  и  $\Phi(jA)$ . Пересечение этих графиков и позволит найти искомые параметры.

Правая часть уравнения (3.2.38) полностью определена, и задавая конкретные значения переменной  $A$ , нетрудно построить ее на комплексной плоскости.

Левая часть равенства (3.2.38) может быть представлена окружностью с центром в начале координат, радиус которой равен амплитуде командного сигнала  $C_{ВХ}$ . Искомая величина фазового сдвига между сигналами  $r$  и  $\sigma$  – это угол указанной окружности в точке пересечения.

Возможные результаты представлены на рис. 3.52. Из рисунка следует, что в гипотетической системе при  $C_{ВХ} < C_{ПОР}$ , несмотря на присутствие на входе гармонического сигнала, навязанный режим не наступает – графики левой и правой частей равенства (3.2.38) не пересекаются, в системе возможен автоколебательный режим.

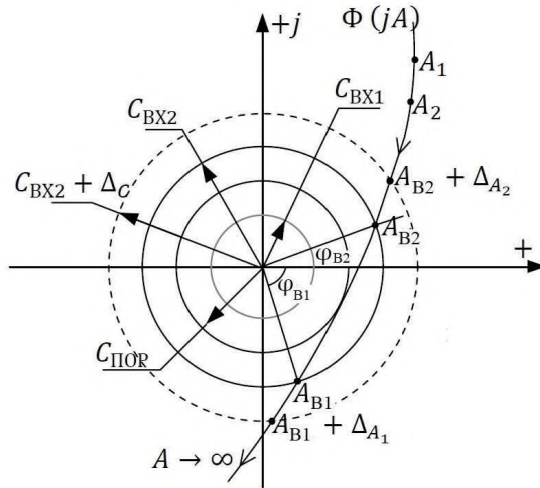


Рис. 3.52. Пересечение характеристик  $C_{ВХ} e^{j\varphi}$  и  $\Phi(jA)$

После того как  $C_{ВХ}$  превысило пороговое значение, автоколебания сорвались и возникли вынужденные (навязанные) колебания.

Если кривая  $\Phi(jA)$  проходит через начало координат, то теоретически вынужденный режим будет возникать при сколь угодно малых амплитудах командного сигнала.

Как видно из рисунка, при  $C_{ВХ} > C_{ПОР}$  появляется сразу две точки пересечения рассматриваемых графиков. Это означает, что возможны два вынужденных режима – с параметрами  $A_{В1}$ ,  $\varphi_{В1}$  и  $A_{В2}$ ,  $\varphi_{В2}$ . Как правило, один из них – неустойчивый. В рассматриваемом случае устойчивым является режим 1. Действительно, если несколько увеличить амплитуду командного сигнала до величины  $C_{ВХ2} + \Delta C$ , то амплитуда навязанного колебания также увеличится до величины  $A_{В1} + \Delta A_1$ , что соответствует здравому смыслу. Аналогичные рассуждения по поводу второй точки пересечения приводят к выводу о неустойчивости навязанного режима во второй точке.

Вычерчивая серию кривых  $\Phi(jA)$  для фиксированных значений  $\omega_{ВХ1}, \omega_{ВХ2}, \dots$  можно построить зависимости  $A_{ВХ}$  от  $C_{ВХ}, \omega_{ВХ}$ .

### ПРИМЕР 3.2.2.

Рассмотрим конкретный пример исследования вынужденных колебаний. В качестве передаточной функции линейной динамической части системы выступает:

$$W_{\text{Л}}(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)^2}$$

Пусть для данного примера нелинейное безинерционное звено – это идеальное двухпозиционное реле, эквивалентный комплексный передаточный коэффициент которого

$$W_{\text{Н}}(jA) = \frac{4C}{\pi A}$$

Найдем выражение для  $\Phi(jA)$ :

$$\Phi(jA) = A \left[ 1 + \frac{4C}{\pi A} \cdot \frac{K}{j\omega_{\text{ВХ}}(1 + j\omega_{\text{ВХ}}T)^2} \right] = A + \frac{4CK}{\pi} \cdot \frac{1}{j\omega_{\text{ВХ}}(1 + j\omega_{\text{ВХ}}T)^2}$$

Отметим, что кривая  $\Phi(jA)$  начинается (при  $A = 0$ ) в конце вектора  $\frac{4C}{\pi}W_{\text{Л}}(j\omega_{\text{ВХ}})$  и далее, с увеличением  $A$ , представляет собой горизонтальную прямую. На рис. 3.53 пунктирной линией показана кривая  $\frac{4C}{\pi}W_{\text{Л}}(j\omega)$ .

Это позволяет провести сравнительный анализ вынужденных режимов при различных частотах командного сигнала.

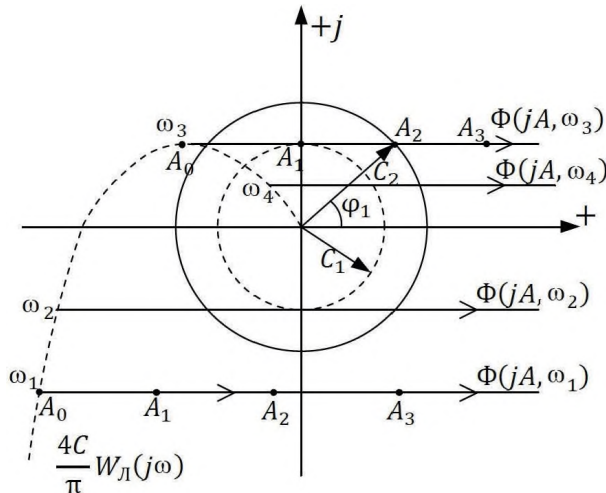


Рис. 3.53. Графический расчет вынужденных колебаний

## Часть III

# Цифровые (импульсные) системы управления



---

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ****§ 4.1. Исходные понятия**

Импульсные, или дискретные, системы автоматического управления – это такие системы, в которых имеется хотя бы один элемент, нарушающий непрерывность передачи воздействий. В отличие от непрерывных систем, для которых характерны передача и преобразование каждого мгновенного значения сигнала, в импульсных системах по крайней мере одна из величин квантуется по времени, то есть происходит выделение из непрерывного сигнала его значений лишь в отдельные, дискретные моменты времени. Эти значения называются дискретами. Выделение дискрет из непрерывного сигнала производится импульсным элементом (ИЭ, рис. 4.1), на выходе которого образуется последовательность модулированных входным сигналом импульсов  $u_n(t)$ , непосредственно или после переработки (в цифровых системах) воздействующих на непрерывную часть системы (НЧ).

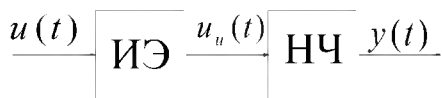


Рис. 4.1. Система с импульсным элементом

В настоящее время большинство импульсных систем – это цифровые системы, то есть системы с цифровыми управляющими машинами (ЦУМ), так называемыми контроллерами (рис. 4.2). ЦУМ, или контроллер, состоит из устройств связи с объектом – в простейших

случаях это аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи (АЦП и ЦАП), и вычислителя (ЦВМ) с операционной системой жесткого реального времени. Дискретный характер получения и обработки информации в ЦУМ приводит к так называемому квантованию по времени, что и влечет необходимость применения в этом случае теории импульсных систем.

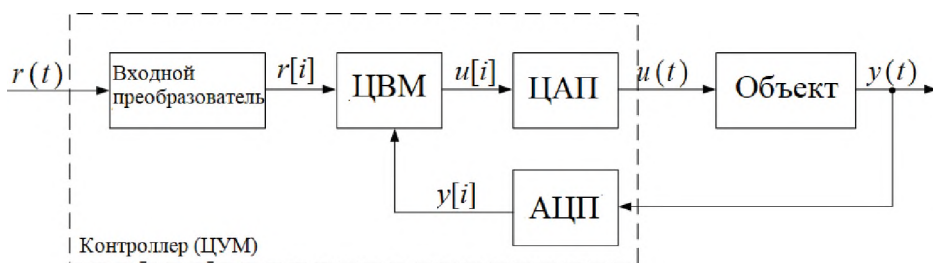


Рис. 4.2. Импульсная система с ЦУМ

Системы с ЦВМ оказываются более сложными вследствие так называемого квантования сигналов по уровню, что делает их нелинейными. Поэтому теория импульсных систем в случае использования ЦВМ применима только для приближенных исследований, когда задача может быть линеаризована. Однако следует отметить, что с развитием техники – с ростом числа разрядов аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, а также с ростом числа разрядов цифровой части системы нелинейными эффектами ЦУМ становится возможным пренебречь.

## § 4.2. Идеальный импульсный элемент и формирующее звено

В учебной литературе приведено достаточно примеров классических систем с импульсными элементами. Это импульсные регуляторы «обегаящего контроля», многоточечные промышленные регуляторы, радиолокационные системы сопровождения взлета и посадки самолетов и многие другие.

Импульсная система содержит ИЭ, осуществляющий квантование сигнала по времени, то есть преобразование непрерывного входного сигнала в последовательность модулированных импульсов. По-

этому импульсный элемент можно рассматривать как модулятор импульсов, осуществляющий модуляцию какого-либо параметра периодически повторяющихся импульсов по закону изменения входного непрерывного сигнала, называемого модулирующим сигналом. Основными параметрами последовательности импульсов являются амплитуда (высота) импульса  $A$ , длительность (ширина) импульса, период повторения импульсов. В зависимости от того, какой из параметров последовательности импульсов изменяется в соответствии с модулирующим сигналом, в теории управления в основном используют: амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ) и широтно-импульсную модуляцию (ШИМ).

Если модулируемый параметр остается постоянным в течение времени существования импульса, то имеем импульсную модуляцию первого рода — ИМ<sub>I</sub>, если же он изменяется в соответствии с текущим значением модулирующей функции, то имеем импульсную модуляцию второго рода — ИМ<sub>II</sub>.

Импульсные элементы в зависимости от вида и рода импульсной модуляции подразделяются на амплитудные и широтные импульсные элементы соответственно первого и второго рода.

В амплитудном импульсном элементе происходит АИМ. Если на вход ИЭ, осуществляющего АИМ, подать непрерывный сигнал, то на выходе будем иметь последовательность импульсов постоянной длительности с постоянным периодом повторения  $T_0$ , амплитуда которых пропорциональна значениям модулирующего (входного) сигнала в равноотстоящие дискретные моменты времени (в моменты возникновения импульсов). Частными случаями амплитудного импульсного элемента с АИМ являются: а) ИЭ, выходные импульсы которого имеют длительность значительно меньшую, чем период повторения; б) ИЭ, длительность импульсов которого равна периоду повторения импульсов.

При АИМ<sub>II</sub> амплитуда импульса изменяется в течение времени существования импульса в соответствии с текущим значением модулирующего сигнала.

В широтном импульсном элементе происходит ШИМ. ИЭ с ШИМ формирует последовательность импульсов с неизменяемой амплитудой  $A_n$  и периодом повторения  $T_0$ , но ширина импульсов пропорциональна значениям модулирующего (входного) сигнала в моменты возникновения импульсов.

Импульсные САУ получили широкое распространение в технике. Они, например, используются для автоматической регулировки усиления, автоматической подстройки частоты приемников импульсных сигналов, автоматического сопровождения цели по дальности, автоматического сопровождения целей по угловым координатам при работе радиолокационной станции в режиме кругового обзора, автоматического управления движением транспорта на магнитном подвесе и т. д.

Импульсы на выходе ИЭ могут иметь различную форму – прямоугольную, треугольную, колоколообразную и т. д. Преодолеть это многообразие позволяет использование следующего математического приема. Реальный импульсный элемент подменяется (рис. 4.3) последовательно соединенными идеальным импульсным элементом (ИИЭ) и формирующим звеном (ФЗ).

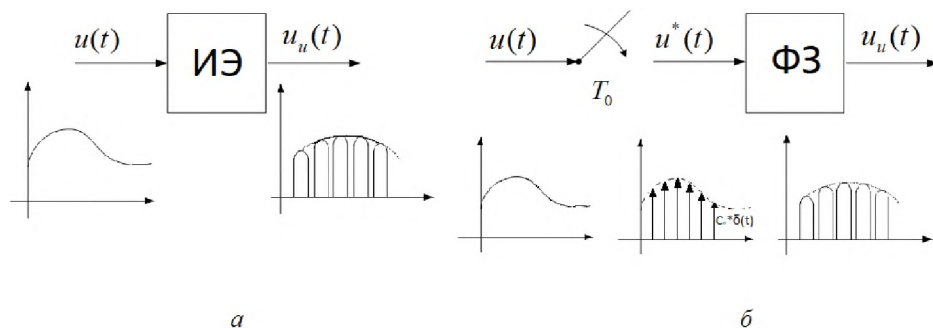


Рис. 4.3. Обобщающий подход к математическому описанию импульсного элемента: а – реальный ИЭ, б – модель реального ИЭ

В качестве выходной координаты ИИЭ принимается взвешенная дискретными входного сигнала последовательность  $\delta$ -функций:

$$u^*(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(iT_0)\delta(t - iT_0). \quad (4.2.1)$$

Это физически нереализуемый сигнал. На рис. 4.4 изображена выходная координата ИИЭ  $u^*(t)$ . Каждая  $\delta$ -функция – это бесконечно короткий по времени и имеющий бесконечно большую амплитуду импульс, площадь которого равна 1. На рис. 4.4 высота каждой стрелки равна площади импульса, то есть величине  $1 \cdot u(iT_0)$ .

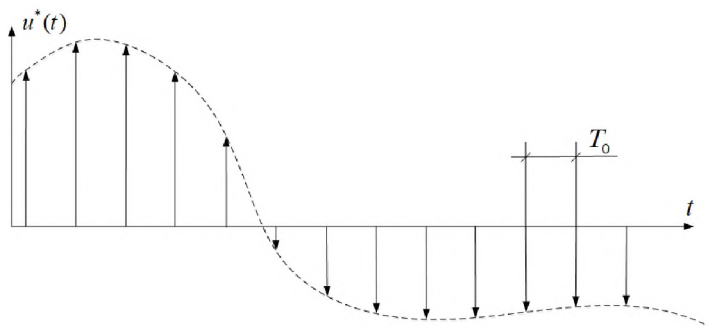


Рис. 4.4. Выходная координата ИИЭ

ФЗ нужно искать в виде линейного динамического звена (фильтра). Для того чтобы найти передаточную функцию ФЗ, учтем, что передаточная функция – это изображение по Лапласу от весовой функции, которая, в свою очередь, является реакцией на дельта-функцию. Поэтому часто импульсы на выходе ИЭ можно рассматривать как весовые функции ФЗ, умноженные на значения входного сигнала ИЭ в моменты замыкания ключа ИИЭ.

#### ПРИМЕР 4.2.1

Найдем передаточную функцию формирующего звена импульсного элемента с АИМ, на выходе которого следуют импульсы постоянной длительности  $t_i \leq T_0$  (рис. 4.5).

Эту передаточную функцию можно определить как преобразование Лапласа от прямоугольного импульса единичной амплитуды и длительности  $t_i$ :

$$W_{\text{ФЗ}}(p) = L\{w_{\text{ФЗ}}(t)\}, \quad (4.2.2)$$

$$W_{\text{ФЗ}}(p) = \int_0^{\infty} w_{\text{ФЗ}}(t)e^{-pt} dt = \int_0^{t_n} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pt_n}}{p}. \quad (4.2.3)$$

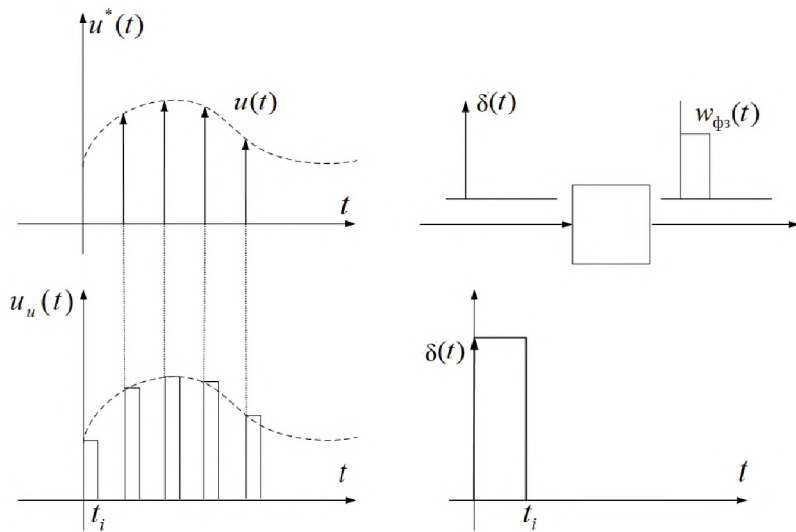


Рис. 4.5. Требуемая характеристика ФЗ

Возможен другой метод расчета передаточной функции ФЗ (рис. 4.6). Пропустив  $\delta$ -функцию через интегратор получим единичную функцию. Вычтем из нее тоже единичную функцию, сдвинутую на  $t_i$ . Преобразуя эту структурную схему, получим передаточную функцию ФЗ, как в уравнении (5.2.3).

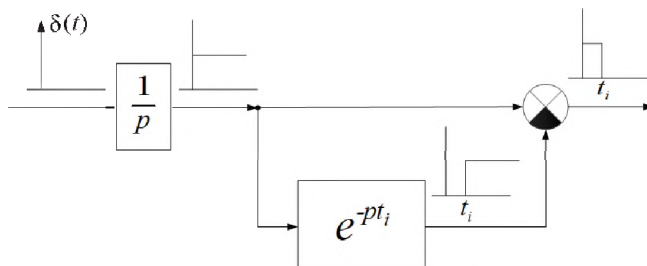


Рис. 4.6. Структурный метод расчета ФЗ

При  $t_i = T_0$  мы получаем импульсный элемент, реализующий так называемый фиксатор нулевого порядка, иначе говоря ЦАП-0. Та-

ким образом, получаем функцию ФЗ для ЦАП-0:

$$W_{\text{ФЗ}}(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p}. \quad (4.2.4)$$

В этом случае выход такого импульсного элемента представляет собой кусочно-постоянную функцию с периодом постоянства  $T_0$ .

Рассмотрим интересный пример, в котором выходом ИЭ является кусочно-линейная функция с интервалом линейности, равным периоду квантования  $T_0$  (рис. 4.7).

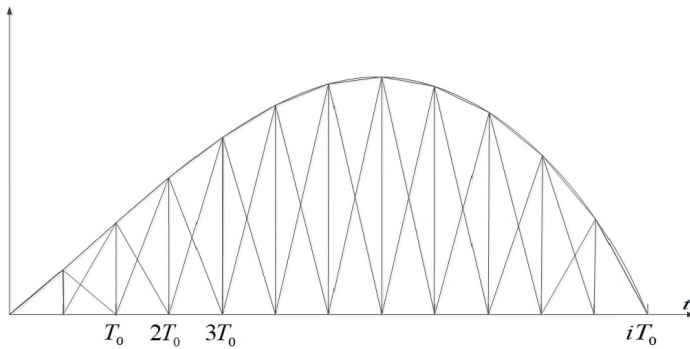


Рис. 4.7. Кусочно-линейная аппроксимация входного непрерывного сигнала, квантованного по времени с периодом  $T_0$  (ЦАП-1)

Интересно, что весовая функция ФЗ для ЦАП-1 имеет вид, представленный на рис. 4.8.

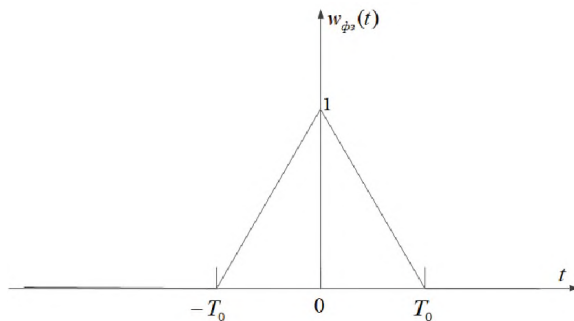


Рис. 4.8. Весовая функция для ФЗ ЦАП-1

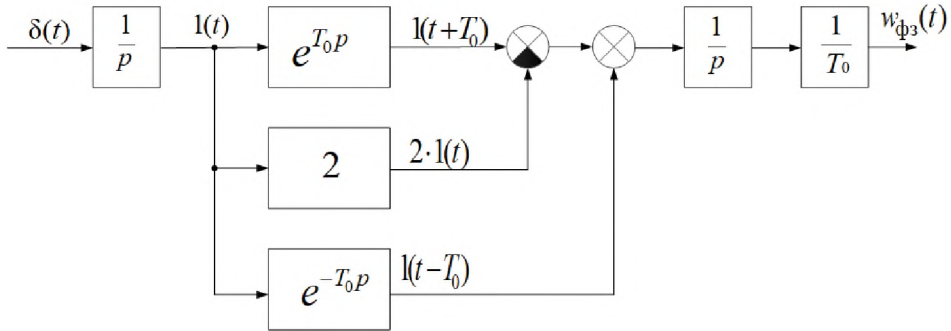


Рис. 4.9. Вычисление весовой и передаточной функций ФЗ ЦАП-1

Передаточная функция такого ФЗ в соответствии с рис. 4.9 имеет вид:

$$W_{\text{Фз}}(p) = \frac{e^{T_0 p} - 2 + e^{-T_0 p}}{T_0 p^2} = e^{T_0 p} \frac{(1 - e^{-T_0 p})^2}{T_0 p^2}. \quad (4.2.5)$$

Конечно, это выражение является физически нереализуемым, так как оно требует идеального прогноза на время  $T_0$ . Если не требовать невыполнимого и согласиться с передаточной функцией ФЗ

$$W_{\text{Фз}}(p) = \frac{(1 - e^{-T_0 p})^2}{T_0 p^2}, \quad (4.2.6)$$

то выход ЦАП будет кусочно-линейным, но задержанным относительно входного сигнала ИЭ на величину периода квантования по времени  $T_0$ , которая, как правило, является достаточно малой величиной.

Таким образом, структурная схема исходного фрагмента (рис. 4.1) принимает следующий вид (рис. 4.10).

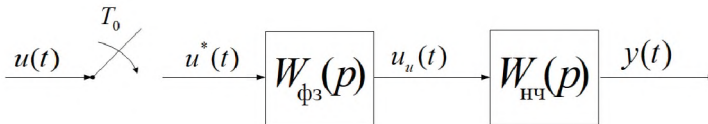


Рис. 4.10. Схема исходного фрагмента с ИЭ

Так как ФЗ получено как линейное динамическое звено, относим

его к непрерывной части (рис. 4.1) и вводим понятие «приведенная непрерывная часть»:

$$W(p) = W_{\text{фз}}(p) \cdot W_{\text{ИЧ}}(p). \quad (4.2.7)$$

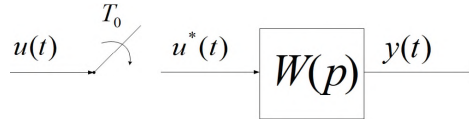


Рис. 4.11. Система с приведенной непрерывной частью

Как правило, выход  $W_{\text{ИЧ}}(p)$  подается в обратную связь (рис. 4.2). Понятно, что свойства замкнутой системы определяются лишь значениями  $u(t)$  и  $y(t)$  в дискретные моменты времени ( $t = iT_0$ ). Вход и выход замкнутой системы в моменты времени ( $t = iT_0$ ) примут вид  $-u(iT_0)$  и  $y(iT_0)$ .

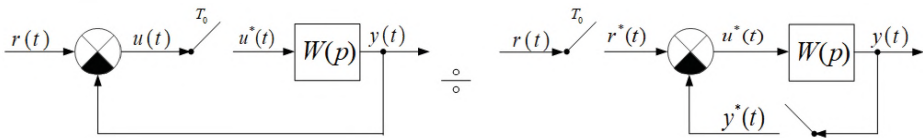


Рис. 4.12. Схема с ИЭ и обратной связью

Для получения  $y^*(t)$  введем в систему, изображенную на рис. 4.11, после  $y(t)$  еще один ИИЭ с периодом дискретизации  $T_0$  (рис. 4.13).

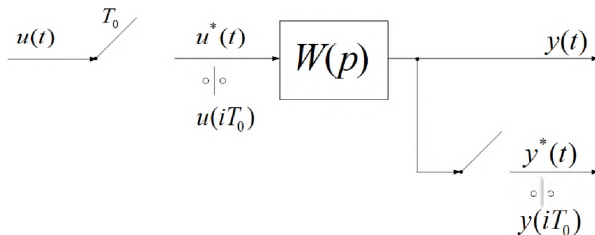


Рис. 4.13. Система с дискретизацией по  $y(t)$

§ 4.3. Уравнения движения ИСАУ

Начнем с примера.

*ПРИМЕР 4.3.1*

Дана система, представленная на рис. 4.13 и имеющая передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{1}{p(Tp + 1)},$$

где  $W(p)$  – это приведенная непрерывная часть с некоторым неизвестным ФЭ. Найдем связь между функциями  $u(t)$  и  $y(t)$  в моменты времени  $t = iT_0, i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Функция  $u^*(t)$  является последовательностью  $\delta$ -функций с весами, равными значениям входной непрерывной функции в моменты замыкания ИЭ –  $u(0), u(T_0), u(2T_0), \dots, u(iT_0)$ , определенная выражением (4.2.1).

Реакция  $W(p)$  на  $\delta$ -функцию – это весовая функция. В нашем примере:

$$w(t) = \sum_{v=1}^n c_v e^{p_v t}, \quad c_v = \frac{1}{Q'(p_v)} = \frac{1}{2Tp_v + 1}, \quad (4.3.1)$$

где  $p_1 = 0, p_2 = -\frac{1}{T}$  – полюсы передаточной функции. Таким образом, имеем:

$$w(t) = \frac{1}{1} e^0 + \frac{1}{-1} e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}. \quad (4.3.2)$$

В соответствии с выражением (4.2.1) можно записать связь между входом и выходом приведенной непрерывной части:

$$\begin{aligned} u(0) \cdot \delta(t) &\rightarrow u(0) \cdot w(t); \\ u(T_0) \delta(t - T_0) &\rightarrow u(T_0) \cdot w(t - T_0) \\ &\dots \\ u(lT_0) \cdot \delta(t - lT_0) &\rightarrow u(lT_0) \cdot w(t - lT_0) \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Таким образом, к моменту  $t = iT_0$

$$y(iT_0) = \sum_{l=0}^i u(lT_0)w(iT_0 - lT_0). \quad (4.3.4)$$

Введем обозначение (пока только для сокращения записи):

$$u(lT_0) \equiv u[l],$$

тогда получим дискретный аналог интеграла свертки (рис. 4.14)

$$y[i] = \sum_{l=0}^i u[l]w[i-l].$$

Другую форму записи дискретного аналога интеграла свертки получим, если перейдем к новому индексу:  $m = i - l$ ,  $l = i - m$ .

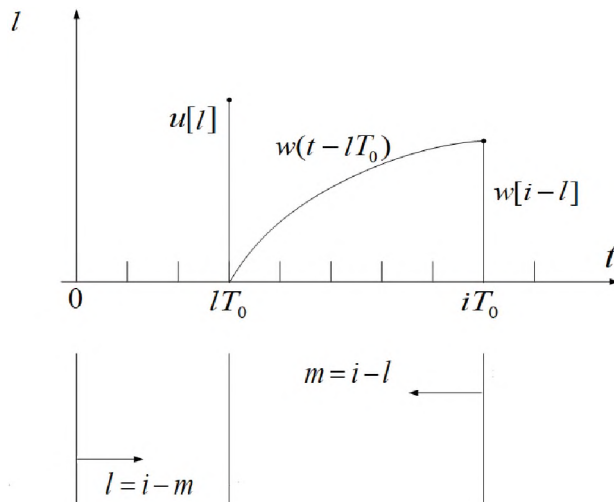


Рис. 4.14. Графическое представление цифрового аналога интеграла свертки

При этом если  $l = 0$ , то  $m = i$ . Если  $l = i$ , то  $m = 0$ . Таким образом:

$$y[i] = \sum_{m=0}^i u[i-m] \cdot w[m]. \quad (4.3.5)$$

Вернемся к примеру 4.3.1. С учетом (4.3.2) запишем:

$$w[i] \equiv w(iT_0) = 1 - e^{-\frac{T_0}{T}i} = 1 - e^{-\beta i}, \quad (4.3.6)$$

где  $\beta = \frac{T_0}{T}$ . Тогда

$$y[i] = \sum_{m=0}^i u[i-m](1 - e^{-\beta m}) = \sum_{m=0}^i u[i-m] - \sum_{m=0}^i u[i-m]e^{-\beta m}. \quad (4.3.7)$$

По аналогии:

$$y[i-1] = \sum_{m=0}^{i-1} u[i-1-m] - \sum_{m=0}^{i-1} u[i-1-m]e^{-\beta m}. \quad (4.3.8)$$

Произведем замену:  $m+1=l$ . В этом случае, если  $m=0$ , то  $l=1$ , а если  $m=i-1$ , то  $l=i$ . Тогда

$$m+1=l : m=0 \rightarrow l=1; m=i-1 \rightarrow l=i,$$

$$y[i-1] = \sum_{l=1}^i u[i-l] - \sum_{l=1}^i u[i-l]e^{-\beta l} e^{\beta}. \quad (4.3.9)$$

Переобозначим  $l$  на  $m$ :

$$y[i-1] = \sum_{m=1}^i u[i-m] - \sum_{m=1}^i u[i-m]e^{-\beta m} e^{\beta}, \quad (4.3.10)$$

и найдем разность:

$$\begin{aligned} y[i] - y[i-1] &= u[i] + \sum_{m=1}^i u[i-m] - u[i] - \sum_{m=1}^i u[i-m]e^{-\beta m} - \\ &\quad - \sum_{m=1}^i u[i-m] + e^{\beta} \sum_{m=1}^i u[i-m]e^{-\beta m} = \\ &= (e^{\beta} - 1) \sum_{m=1}^i u[i-m]e^{-\beta m}. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Запишем:

$$y[i-1] - y[i-2] = (e^\beta - 1) \sum_{m=1}^{i-1} u[i-1-m] e^{-\beta m}. \quad (4.3.12)$$

Действуя аналогично предыдущему, получим

$$y[i-1] - y[i-2] = (e^\beta - 1) \sum_{m=2}^i u[i-m] e^{-\beta m} e^\beta. \quad (4.3.13)$$

С учетом последнего результата для  $y[i-1] - y[i-2]$  преобразуем (4.3.11):

$$\begin{aligned} y[i] - y[i-1] &= (e^\beta - 1)u[i-1]e^{-\beta} + (e^\beta - 1) \sum_{m=2}^i u[i-m]e^{-\beta m} \cdot e^\beta \cdot e^{-\beta} = \\ &= (1 - e^{-\beta})u[i-1] + (y[i-1] - y[i-2])e^{-\beta} = \\ &= (1 - e^{-\beta})u[i-1] + e^{-\beta}y[i-1] - e^{-\beta}y[i-2], \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

откуда

$$y[i] - (1 + e^{-\beta})y[i-1] + e^{-\beta}y[i-2] = (1 - e^{-\beta})u[i-1]. \quad (4.3.15)$$

Это уравнение связывает между собой значения входа  $u$  и выхода  $y$  в дискретные моменты времени. Вообще, имея это уравнение, можно ничего не знать о соответствующих ему непрерывных функциях  $u(t)$  и  $y(t)$ .

Следует также обратить внимание на рекуррентную форму результата. Те выражения, которые получены, не требуют кропотливых действий, связанных с вычислениями сумм большого числа слагаемых.

Функции  $y[i]$  и  $u[i]$  называют решетчатыми функциями (РФ) (рис. 4.15).

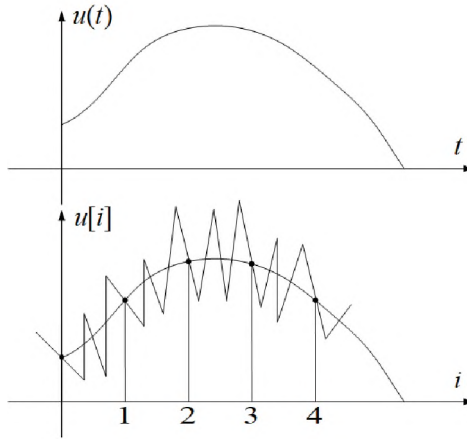


Рис. 4.15. Непрерывная и решетчатая функции

Дискретные моменты времени могут быть также определены для смещенных моментов времени  $t = iT_0 + \Delta t$ . Смещенная РФ:

$$u(iT_0, \Delta t) = u(t) \Big|_{t=iT_0+\Delta t}, \quad 0 \leq \Delta t \leq T_0. \quad (4.3.16)$$

Заметим, что обратная задача – формирование непрерывной функции из решетчатой – не может быть решена однозначно, так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций. Непрерывные функции, совпадающие с заданными дискретами, называются огибающими РФ. Под основной огибающей будем понимать непрерывную функцию, совпадающую с заданными дискретами. Основная огибающая может быть получена как результат решения дифференциального уравнения, порядок которого наименьший по сравнению с другими возможными огибающими. Для периодических РФ, кроме того, выполняется требование минимальности значений частот гармоник.

Решетчатые функции могут вообще не иметь непосредственно порождающих их непрерывных функций (например, количество пассажиров в вагоне поезда на очередном перегоне). Скорость изменения РФ характеризуется ее первой разностью, или разностью первого порядка, – аналог первой производной непрерывной функции.

$$\Delta u[i] = u[i + 1] - u[i]. \quad (4.3.17)$$

Аналогично вводится понятие «вторая разность» (разность второго порядка):

$$\Delta^2 u[i] = \Delta u[i + 1] - \Delta u[i] = u[i + 2] - 2u[i + 1] + u[i], \quad (4.3.18)$$

и т. д.

Таким образом, для нахождения первой разности используются два соседних значения РФ, второй – 3, третьей – 4 и т. д. Соотношение между РФ  $u[i]$  и ее разностями определяет уравнение в конечных разностях, или разностное уравнение (РУ):

$$a_0 \Delta^n u[i] + a_1 \Delta^{n-1} u[i] + \dots + a_{n-1} \Delta u[i] + a_n u[i] = b_0 \Delta^m u[i] + \dots + b_m u[i]. \quad (4.3.19)$$

Эта форма полностью аналогична форме дифференциального уравнения. Если от разностей перейти к дискретам, получим:

$$A_0 u[i + n] + \dots + A_{n-1} u[i + 1] + A_n u[i] = B_0 u[i + m] + \dots + B_m u[i]. \quad (4.3.20)$$

Уравнения (4.3.19) и (4.3.20) являются уравнениями движения ИС. Будем рассматривать только случай постоянных во времени коэффициентов (стационарные ИС). Существуют методы решения РУ, аналогичные методам решения дифференциальных уравнений. В так называемом «классическом» методе производится подстановка в РУ предполагаемого решения  $y[i] = cz^i$ .

В результате такой подстановки получается характеристическое уравнение, корни которого  $z_1, z_2, \dots, z_n$  позволяют составить общее решение. Постоянные суммирования  $c_i$ , входящие в общее решение, определяются через значения функции в первые  $n$  циклов ( $n$  – порядок РУ).

#### 4.3.1. Аналитическое решение разностных уравнений

Рассмотрим однородное РУ

$$A_0 u[i + n] + A_1 u[i + n - 1] + \dots + A_{n-1} u[i + 1] + A_n u[i] = 0, \quad (4.3.21)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Начальные условия РУ задаются аналогично начальным условиям дифференциального уравнения:  $y[0], y[1], y[2] \dots y[n-1]$ , где  $n$  – порядок РУ. Характеристическим полиномом уравнения (4.3.21) называется

$$L(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n. \quad (4.3.22)$$

Допустим,  $z_1, \dots, z_n$  – различные вещественные или комплексные корни полинома  $L(z)$ . Общее решение уравнения (4.3.21) будем искать в виде:

$$y[i] = c_1 z_1^i + c_2 z_2^i + \dots + c_n z_n^i, \quad (4.3.23)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – произвольные вещественные или комплексные коэффициенты. Подставляя общее решение РУ (4.3.23) в исходное уравнение (4.3.21), получаем выражение:

$$\begin{aligned} & A_0 c_1 z_1^{i+n} + \dots + A_0 c_n z_n^{i+n} + \\ & + A_1 c_1 z_1^{i+n-1} + \dots + A_1 c_n z_n^{i+n-1} + \\ & \dots + \\ & + A_{n-1} c_1 z_1^{i+1} + \dots + A_{n-1} c_n z_n^{i+1} + \\ & + A_n c_1 z_1^i + \dots + A_n c_n z_n^i = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые по столбцам:

$$\begin{aligned} & A_0 c_1 z_1^{i+n} + A_1 c_1 z_1^{i+n-1} + \dots + A_{n-1} c_1 z_1^{i+1} + A_n c_1 z_1^i + \\ & + \dots + \\ & + A_0 c_n z_n^{i+n} + A_1 c_n z_n^{i+n-1} + \dots + A_{n-1} c_n z_n^{i+1} + A_n c_n z_n^i = 0. \end{aligned}$$

Вынесем за скобки в каждой  $k$ -й строчке множитель  $c_k z_k^i$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} & c_1 z_1^i (A_0 z_1^n + \dots + A_{n-1} z_1 + A_n) + \\ & + \dots + \\ & + c_n z_n^i (A_0 z_n^n + \dots + A_{n-1} z_n + A_n) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Коэффициенты  $c_1, \dots, c_n$  находим из системы линейных уравнений, построенной по начальным условиям:

$$\begin{cases} c_1 z_1^0 + \dots + c_n z_n^0 = y[0], \\ \dots\dots\dots \\ c_1 z_1^{n-1} + \dots + c_n z_n^{n-1} = y[n-1]. \end{cases}$$

Определитель этой системы является определителем Вандермонда, и при различных  $z_i$  он отличен от нуля. Поэтому решение системы существует и единственно.

Таким образом, если все корни различны, то решение однородного РУ (4.3.21) имеет вид:

$$y[i] = \sum_{k=1}^n c_k z_k^i.$$

Допустим, характеристический полином  $L(z)$  имеет кратные корни, например,  $z_1 = z_2 = z_a$ . Тогда в решении (4.3.23) РУ появляется слагаемое  $(c_1 + c_2 i) z_a^i$ , то есть

$$y[i] = (c_1 + c_2 i) z_a^i + c_3 z_3^i + \dots + c_n z_n^i.$$

Коэффициенты  $c_1, \dots, c_n$  также находятся из  $n$  начальных условий.

#### ПРИМЕР 4.3.2

Найдем решение РУ при единичном управляющем сигнале:  $u[i] = 1[i]$ .

$$y[i] - (1 + e^{-\beta})y[i-1] + e^{-\beta}y[i-2] = (1 - e^{-\beta})u[i]. \quad (4.3.25)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$z^2 - (1 + e^{-\beta})z + e^{-\beta} = 0.$$

Его корни  $z_1 = 1, z_2 = e^{-\beta}$ . Свободная составляющая решения

$$y_{св}[i] = C_1 + C_2 \cdot e^{-\beta i}.$$

Вынужденную составляющую будем искать в виде линейной функции  $a \cdot i$  дискретного времени  $i$ , так как единичный корень характеристического уравнения говорит о наличии интегратора в составе

объекта (следует отметить, что передаточная функция приведенной непрерывной части объекта имеет нулевой полюс  $p_1 = 0$ ):

$$y_v[i] = a \cdot i. \quad (4.3.26)$$

Подставим (4.3.26) в (4.3.25):

$$ai - (1 + e^{-\beta})a(i - 1) + e^{-\beta}a(i - 2) = (1 - e^{-\beta}) \cdot 1[i].$$

Проведем упрощения:

$$\begin{aligned} a(i - (1 + e^{-\beta})(i - 1) + e^{-\beta}(i - 2)) &= (1 - e^{-\beta}) \cdot 1[i]; \\ a(i - (1 + e^{-\beta})i + (1 + e^{-\beta}) + e^{-\beta}i - 2e^{-\beta}) &= (1 - e^{-\beta}) \cdot 1[i]; \\ a(i - (1 + e^{-\beta})i + e^{-\beta}i + (1 + e^{-\beta}) - 2e^{-\beta}) &= (1 - e^{-\beta}) \cdot 1[i]; \\ a(1 - e^{-\beta} - 2e^{-\beta}) &= (1 - e^{-\beta}) \cdot 1[i]. \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$a = 1[i]$$

и

$$y_v = i \cdot 1[i].$$

Итак, отправляясь от того, что решение РУ состоит из суммы общего решения однородного РУ и одного из частных решений полного, неоднородного РУ, то есть:

$$y[i] = y_{св}[i] + y_v[i],$$

из вышеизложенного получаем:

$$y[i] = C_1 + C_2 \cdot e^{-\beta i} + i \cdot 1[i].$$

Зададимся нулевыми начальными условиями:

$$y[0] = 0, y[1] = 0.$$

При  $i = 0$  имеем  $0 = C_1 + C_2$ ,  $C_2 = -C_1$ .

При  $i = 1$  имеем  $0 = C_1 - C_1 e^{-\beta} + 1$ , откуда  $C_1 = \frac{-1}{1 - e^{-\beta}}$ .

Решение РУ (4.3.25) примет вид:

$$y[i] = \frac{-1}{1 - e^{-\beta}} + \frac{1 \cdot e^{-\beta i}}{1 - e^{-\beta}} + i \cdot 1[i] = i \cdot 1[i] - \frac{1 - e^{-\beta i}}{1 - e^{-\beta}}.$$

Проверка проходит подстановкой начальных условий.

### 4.3.2. Прямой метод решения разностных уравнений в реальном времени

В отличие от использования достаточно большого числа численных методов решения дифференциальных уравнений, отличающихся величиной методической погрешности и требующих различных по объему вычислительных затрат ЦВМ, РУ позволяют находить свое решение без методических погрешностей и при минимальных вычислительных затратах. Разностные уравнения великолепно приспособлены для оперативного решения в текущее время. Проиллюстрируем это на рассмотренном выше примере – уравнении (4.3.25):

$$y[i] - (1 + e^{-\beta})y[i - 1] + e^{-\beta}y[i - 2] = (1 - e^{-\beta})u[i - 1]. \quad (4.3.27)$$

Оставим в левой части  $y[i]$  :

$$y[i] = (1 - e^{-\beta})u[i - 1] + (1 + e^{-\beta})y[i - 1] - e^{-\beta}y[i - 2].$$

Пусть  $i$  – текущий дискретный момент времени. Предполагается, что к этому моменту времени уже вычислены значения решения  $y$  в предыдущие моменты времени:

$$i - 1 \Rightarrow y[i - 1], u[i - 1]; i - 2 \Rightarrow y[i - 2].$$

Начинаем с известных или заданных начальных условий  $y[0], y[1]$  и циклически выполняем программу:

1. Измерение текущего  $u$ .
2. Вычисление текущего выхода объекта  $y$

$$y := (1 - e^{-\beta})u_{-1} + (1 + e^{-\beta})y_{-1} - e^{-\beta}y_{-2}.$$

3. Подготовка к следующему шагу – сдвиги

- (a)  $u_{-1} := u;$
- (b)  $y_{-2} := y_{-1};$
- (c)  $y_{-1} := y.$

- Ожидание момента очередного измерения входа (интервал времени  $T_0$  и переход к п. 1.

Выше использованы обозначения:  $_1$ ,  $_2$  – задержки на один и на два такта.

### 4.3.3. Алгоритмические схемы. Векторно-матричные разностные уравнения

Обозначим через  $z^{-1}$  оператор задержки на один такт времени  $T_0$  и представим выражение (4.3.27) в виде следующей структурной схемы, отображающей алгоритм решения соответствующего РУ (рис. 4.16).

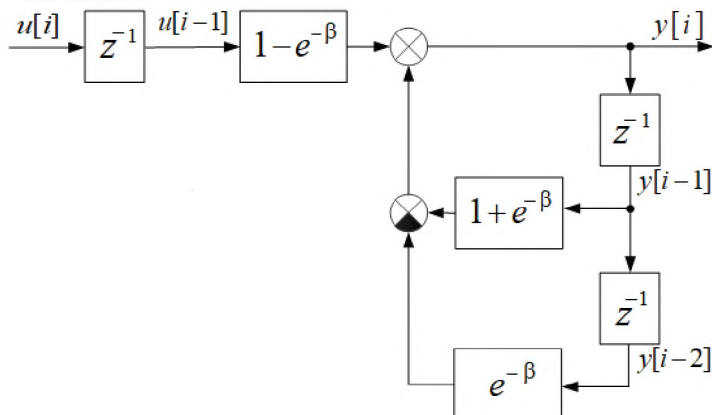


Рис. 4.16. Алгоритмическая схема решения уравнения (4.3.27), вариант 1

Такого рода схемы принято называть алгоритмическими.

Аналогично тому, как это делается в непрерывных системах, здесь выходы операторов задержки на один цикл ( $z^{-1}$ ) целесообразно рассматривать как координаты вектора состояния. Количество координат вектора состояния равно порядку системы. Поэтому алгоритмическую схему, изображенную на рис. 4.16, следует представить некоторой эквивалентной схемой с двумя операторами задержки, например, так, как это предлагается на рис. 4.17.

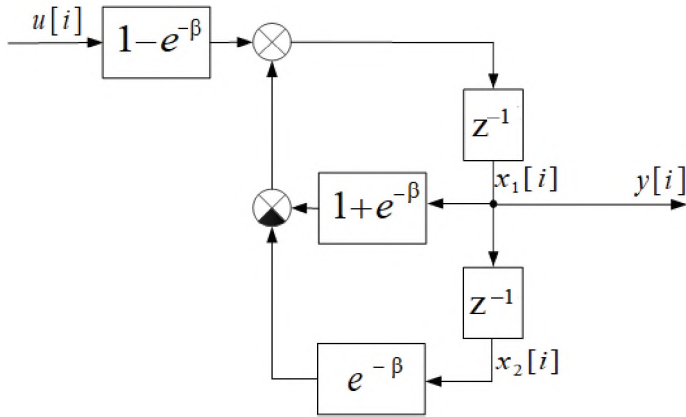


Рис. 4.17. Алгоритмическая схема решения уравнения (4.3.27), вариант 2

Теперь можно записать уравнения состояния системы:

$$\begin{aligned} x_1[i+1] &= (1 + e^{-\beta})x_1[i] - e^{-\beta}x_2[i] + (1 - e^{-\beta})u[i]; \\ x_2[i+1] &= x_1[i] \end{aligned}$$

и уравнение выхода:

$$y[i] = x_1[i],$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned} \vec{x}[i+1] &= F\vec{x}[i] + H\vec{u}[i]; \\ \vec{y}[i] &= C\vec{x}[i], \end{aligned}$$

где

$$F = \begin{bmatrix} 1 + e^{-\beta} & e^{-\beta} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\beta} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

В пространстве состояний может существовать бесконечное число базисов. Поэтому число вариантов алгоритмических схем практически не ограничено. На рис. 4.18 представлены решения рассматриваемого РУ, полученные аналитическим и алгоритмическим образом.

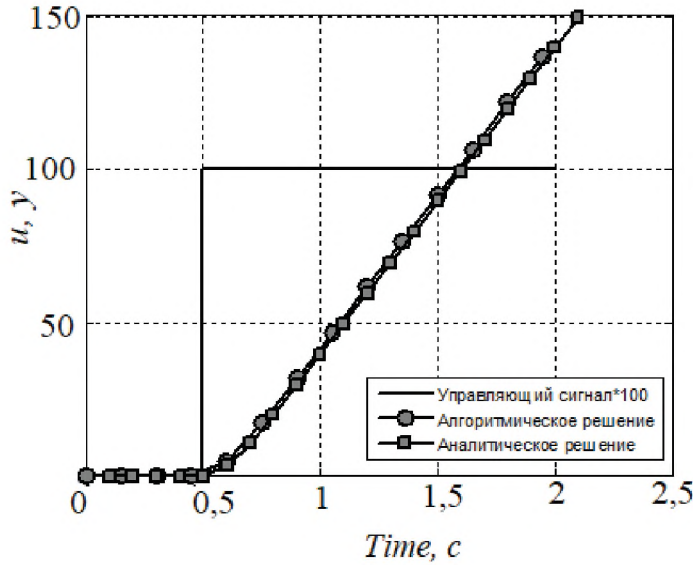


Рис. 4.18. Решения уравнения (4.3.27)

Значительно упрощает анализ импульсных систем использование дискретного преобразования Лапласа в текущий момент. та

## § 4.4. Дискретное преобразование Лапласа

### 4.4.1. Основные определения

Дискретное преобразование Лапласа (ДПЛ) значительно упрощает решение РУ и является основным методом при анализе линейных импульсных систем. Аналогично непрерывному преобразованию Лапласа, с помощью ДПЛ производится переход от функции времени (исходного дискретного аргумента) к функции комплексной переменной. Далее это позволяет ввести понятие передаточной функции. Реакция ИИЭ на входной сигнал  $u(t)$  имеет вид (4.2.1):

$$u^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} u(lT_0)\delta(t - lT_0).$$

Преобразование Лапласа от  $u^*(t)$ :

$$\begin{aligned}
 L\{u^*(t)\} &= \int_0^{\infty} u^*(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u(lT_0)\delta(t-lT_0)e^{-pt} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} u(0)\delta(t)e^{-pt} dt + \sum_{l=1}^{\infty} u(lT_0) \int_0^{\infty} \delta(t-lT_0)e^{-pt} dt. \quad (4.4.1)
 \end{aligned}$$

Остановимся на характерных свойствах дельта-функции. Наиболее часто определяют дельта-функцию  $\delta(t)$  как идеализированный импульс, равный нулю при  $t \neq 0$ , при  $t = 0$  имеющий бесконечно большую амплитуду. Интеграл  $\int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1$ . Использование такой функции в классической математике проблематично, поэтому здесь целесообразно рассматривать дельта-функцию как обобщенную функцию, как предел последовательности классических регулярных непрерывных дифференцируемых функций, которые при изменении некоторого параметра превращаются в определенную выше дельта-функцию. В качестве примеров можно привести последовательности следующих функций:

- Лоренцев импульс

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{\pi} \cdot \frac{1}{t^2 + \epsilon^2} \right); \quad (4.4.2)$$

- Гауссов импульс

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \cdot e^{-t^2/4\epsilon} \right). \quad (4.4.3)$$

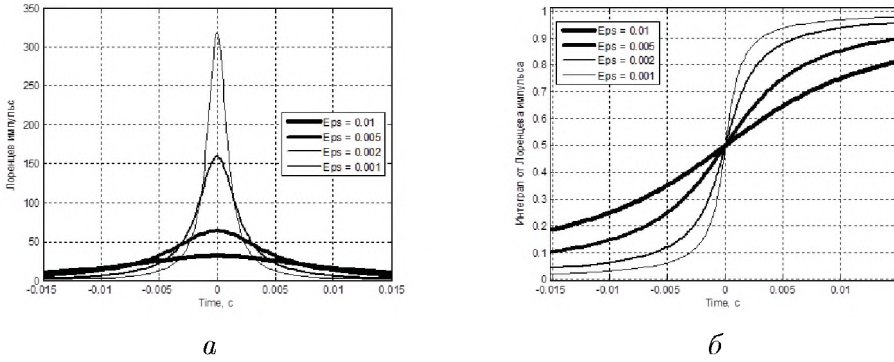


Рис. 4.19. Представление дельта-функции и единичной функции с помощью: *a* – предела Лоренцовых импульсов, *б* – предела интегралов от Лоренцовых импульсов

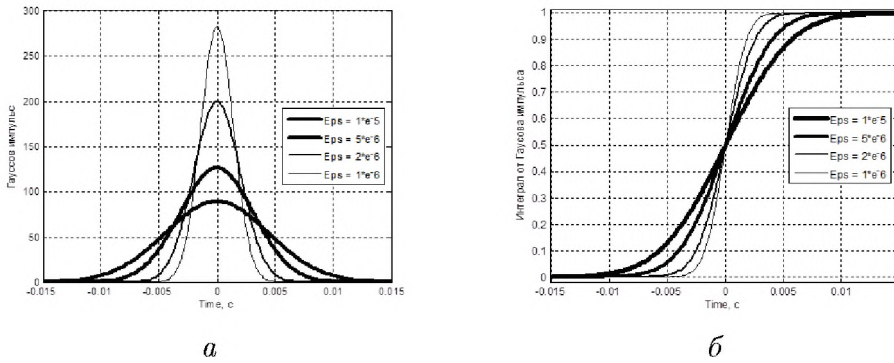


Рис. 4.20. Представление дельта-функции и единичной функции с помощью: *a* – предела Гауссовых импульсов, *б* – предела интегралов от Гауссовых импульсов

Рис. 4.19 и 4.20 иллюстрируют получение  $\delta(t)$ -функции и единичной функции  $1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi$  как обобщенных функций на базе последовательностей Лоренцовых и Гауссовых импульсов.

Использование обобщенных функций позволяет сделать следую-

щие уточнения:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{2}; \quad (4.4.4)$$

$$1(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.4.5)$$

Если функция  $f(t)$  непрерывна в точке  $t = a$ , то в пределе при  $t \rightarrow a > 0$  имеем  $f(t) \rightarrow f(a)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t-a) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x=a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t) \delta(t-a) dt = \\ &= f(a) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a) dt = f(a). \end{aligned}$$

Возвращаясь к основному изложению, из (4.4.1) с учетом (4.4.4) получаем:

$$\begin{aligned} L \{u^*(t)\} &= \int_0^{\infty} u(0) \delta(t) e^{-pt} dt + \sum_{l=1}^{\infty} u(lT_0) \int_0^{\infty} \delta(t-lT_0) e^{-pt} dt = \\ &= \frac{u(0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} u(lT_0) e^{-lpT_0} = \sum_{l=0}^{\infty} u(lT_0) e^{-lpT_0} - \frac{u(0)}{2}. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$L \{u^*(t)\} = U^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} u(lT_0) e^{-lpT_0} - \frac{u(0)}{2}. \quad (4.4.6)$$

ДПЛ решетчатой функции  $u[i]$  называется функция комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$ :

$$D \{u[i]\} = \sum_{i=0}^{\infty} u[i] e^{-pT_0 i}.$$

Справедливо равенство:

$$L \{u^*(t)\} = U^*(p) = D \{u[i]\} - \frac{u(0)}{2}.$$

Дискретное преобразование Лапласа является трансцендентной функцией комплексной переменной  $p$ . Введем новую комплексную переменную:

$$z = e^{pT_0}.$$

Z-преобразованием решетчатой функции  $u[i]$  называют дробно-рациональную функцию комплексной переменной  $z$

$$Z \{u[i]\} = U(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u[i] \cdot z^{-i}. \quad (4.4.7)$$

*ПРИМЕР 4.4.1*

Найдем Z-преобразование функции  $u[i] = e^{\alpha T_0 i}$ .

$$U(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\alpha T_0 i} \cdot z^{-i} = 1 + \frac{e^{\alpha T_0}}{z} + \left(\frac{e^{\alpha T_0}}{z}\right)^2 + \dots$$

Как известно, сумма бесконечной геометрической прогрессии  $1 + a + a^2 + \dots = \frac{1}{1-a}$  абсолютно сходится при  $|a| < 1$ . Поэтому функция

$$U(z) = \frac{1}{1 - \frac{e^{\alpha T_0}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T_0}}$$

определена при  $|\frac{e^{\alpha T_0}}{z}| < 1$ , то есть при  $|z| > e^{\alpha T_0}$ .

Из определения переменной  $z$  получаем область абсолютной сходимости ДПЛ на плоскости  $P$ :

$$p \in P : |e^{(\alpha-p)T_0}| < 1.$$

В этой области  $Re(p) > \alpha$ .

### 4.4.2. Модифицированное z-преобразование

Нужно уметь находить значения решетчатой функции в промежуточные моменты времени на выходе непрерывной части между моментами  $(i - 1)T_0$  и  $iT_0$  (функция может вести себя приемлемо в моменты  $(i - 1)T_0, iT_0, \dots$ , но в другие моменты – нет). В связи с этим и вводится модифицированное Z-преобразование. Если выход непрерывной части –  $y(t)$ , то ему соответствует решетчатая функция  $y[i] = y(t) \Big|_{t=iT_0}$ . Нас может интересовать решетчатая функция  $y[i + \epsilon] = y(t) \Big|_{t=(iT_0 + \epsilon T_0)}$ .

В соответствии с определением Z-преобразования решетчатой функции (4.4.7):

$$Z \{y[i, \epsilon]\} = \sum_{l=0}^{\infty} y[l, \epsilon] z^{-l} = Y(z, \epsilon).$$

С учетом результата решения примера 4.4.1:

$$Y(z, \epsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{\alpha T_0 l} e^{\alpha \epsilon T_0} z^{-l} = \frac{e^{\alpha \epsilon T_0} z}{z - e^{\alpha T_0}} = e^{\alpha \epsilon T_0} Y(z).$$

### 4.4.3. Основные свойства дискретного преобразования Лапласа и z-преобразования

#### *Линейность оригиналов и изображений*

Пусть каждой решетчатой функции  $x_m[i]$  соответствует z-изображение  $X_m(z) : x_m[i] \div X_m(z)$ . Тогда

$$Z \left\{ \sum_m a_m x_m[i] \right\} \div \sum_m a_m X_m(z). \quad (4.4.8)$$

*Связь между ДПЛ решетчатой функции  $x[i]$  и непрерывным пре-*

образованием Лапласа функции  $x(t)$  при малых  $T_0$

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \rightarrow 0} D\{x[iT_0]\} &= \lim_{T_0 \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_0)e^{-lT_0p} = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_0)e^{-p l T_0} \cdot T_0 = \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} L\{x(t)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при малых  $T_0$

$$T_0 D\{x[iT_0]\} \approx L\{x(t)\}. \quad (4.4.9)$$

Естественно, следовало ожидать, что при малых периодах квантования свойства импульсных систем будут приближаться к свойствам непрерывных. Множитель  $T_0$  свидетельствует о различной размерности ДПЛ (размерность сигнала) и преобразования Лапласа (размерность сигнала, умноженного на время) – сумма дискрет  $x[i]$  и площадь под функцией  $x(t)$  как результат интегрирования.

*Z-преобразование смещенной функции (сдвиг во временной области). Теорема сдвига*

Пусть  $x[i] \div X(z)$ . Найдем  $Z$ -преобразование опережающей на  $k$  тактов последовательности  $x[i+k] = x[k], x[k+1], \dots$

$$Z\{x[i+k]\} = \sum_{i=0}^{\infty} x[i+k]z^{-i}.$$

Произведем замену переменной  $i = l - k$ :

$$Z\{x[i+k]\} = \sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l+k} = z^k \left( \sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \right). \quad (4.4.10)$$

Отсюда легко получается следующий результат:

$$Z\{x[i+k]\} = z^k X(z) - z^k \left( \sum_{l=0}^{k-1} x[l]z^{-l} \right). \quad (4.4.11)$$

Второе слагаемое в этой формуле является результатом учета начальных условий решетчатой функции  $x[i]$ . Можно усмотреть некоторую аналогию с изображением по Лапласу  $k$ -й производной непрерывной функции  $x(t)$ .

Нетрудно получить Z-преобразование от запаздывающей на  $k$  тактов решетчатой функции  $x[i]$  :

$$Z\{x[i - k]\} = z^{-k}X(z) + z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} x[l]z^{-l}. \quad (4.4.12)$$

*Предельное значение решетчатой функции*

Задача – определить  $\lim_{i \rightarrow \infty} x[i]$ , если он существует. Найдем Z-преобразование первой разности решетчатой функции  $x[i]$ :

$$Z\{\Delta x[i]\} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta x[i]z^i = \sum_{i=0}^{\infty} x[i + 1]z^i - X(z).$$

В соответствии с (4.4.11) получим:

$$Z\{\Delta x[i]\} = z(X(z) - x(0)) - X(z) = (z - 1)X(z) - zx(0). \quad (4.4.13)$$

Найдем предел

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} Z\{\Delta x[i]\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \Delta x[i] = \\ &= (x[1] - x[0]) + (x[2] - x[1]) + (x[3] - x[2]) + \dots = \lim_{i \rightarrow \infty} x[i] - x[0]. \end{aligned}$$

Сопоставляя этот результат с (4.4.13), в итоге получим:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x[i] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z). \quad (4.4.14)$$

#### 4.4.4. Передаточная функция импульсной системы (Дискретная передаточная функция)

Как было показано в предыдущих разделах, в основе теории импульсных систем лежит типовая схема (рис. 4.10), в которой реальный ИЭ представлен последовательным соединением ИИЭ, на выходе которого действует сигнал (мы называем его «сигнал со звездочкой»):

$$u^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u(iT_0)\delta(t - iT_0), \quad (4.4.15)$$

и ФЗ. Приведенная непрерывная часть  $W(p)$  является последовательным соединением формирующего звена и непрерывной части.

В п. 4.3 было получено разностное уравнение (4.3.20):

$$A_0 y[i+n] + \dots + A_{n-1} y[i+1] + A_n y[i] = B_0 u[i+m] + \dots + B_m u[i].$$

Применим к обеим частям этого уравнения  $Z$ -преобразование и при нулевых начальных условиях решетчатых функций  $y[i]$  и  $u[i]$  получим алгебраическое уравнение:

$$A_0 z^n Y(z) + \dots + A_{n-1} z Y(z) + A_n Y(z) = B_0 z^m U(z) + \dots + B_m U(z),$$

откуда

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B_0 z^m + \dots + B_{m-1} z + B_m}{A_0 z^n + \dots + A_{n-1} z + A_n} = W(z). \quad (4.4.16)$$

Получено выражение передаточной функции импульсной системы (дискретной передаточной функции) как отношение  $Z$ -преобразований выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях.

*Определение дискретной передаточной функции  $W(z)$  через передаточную функцию приведенной непрерывной части  $W(p)$*

Приведенное выше определение аналогично определению передаточной функции непрерывной системы. Однако следует отметить, что в непрерывных системах дифференциальные уравнения получают чаще всего на основании физических законов, определяющих динамику объектов управления. В импульсных, дискретных системах получение непосредственно разностных уравнений является трудоемкой процедурой. В то же время к этапу работы с импульсными системами все характеристики их непрерывных частей, в том числе передаточные функции непрерывных систем, уже хорошо известны и изучены. Поэтому займемся получением дискретной передаточной функции  $W(z)$  на основании передаточной функции приведенной непрерывной части  $W(p)$  применительно к типовой схеме (рис. 4.13). В п. 4.3 было получено выражение (4.3.5) дискретного аналога интеграла свертки для выходного дискретного сигнала:

$$y[i] = \sum_{\ell=0}^i u[\ell]w[i-\ell], \quad w[i] = 0, \quad \text{при } i < 0.$$

Рассмотрим  $Z$ -преобразование выходной решетчатой функции  $\{y[i]\}$ :

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^i u[\ell]w[i-\ell]z^{-i}.$$

В этой формуле верхний предел в суммировании по  $\ell$  заменим на бесконечность, так как при  $\ell > i$  имеем отрицательный аргумент у весовой функции:

$$w[i-\ell] = w[q] \quad \text{при } q < 0.$$

В физически реализуемых системах весовая функция (реакция системы на  $\delta$ -функцию) при этом равна нулю, так как реакция не может возникнуть раньше причины.

Произведем замену переменной  $i \rightarrow r = i - \ell$ . Учтем, что  $r = -\ell$  при  $i = 0$ . Получим:

$$Y(z) = \sum_{r=-\ell}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell]w[r] \cdot z^{-(r+\ell)}.$$

В связи с тем, что в физически реализуемых системах  $w[r] = 0$  при  $r < 0$ ,

$$Y(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell]z^{-\ell}w[r] \cdot z^{-r} = Z\{w[r]\} \cdot Z\{u[i]\}$$

или

$$Y(z) = W(z) \cdot U(z),$$

где  $W(z)$  –  $Z$ -преобразование весовой функции  $w[i]$ .

Пусть передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Ограничимся случаем, когда все полюсы  $q_v$  передаточной функции  $W(p)$  различны и вещественны. В соответствии с формулами

(1.6.14), (1.6.15) п. 1.6.2. «Основные свойства передаточных функций»

$$w(t) = \sum_{v=1}^n w_v(t); \quad w_v(t) = C_v e^{q_v t};$$

$$C_v = \frac{R(q_v)}{Q'(q_v)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (q_v - r_i)}{\prod_{j=1, j \neq v}^n (q_v - q_j)}. \quad (4.4.17)$$

Таким образом, решетчатая функция

$$w[i] = \sum_{v=1}^n C_v e^{q_v T_0 i} = \sum_{v=1}^n C_v z_v^i,$$

где обозначено:

$$z_v = e^{q_v T_0}.$$

Z-преобразование от решетчатой весовой функции  $w[i]$  и есть искомая дискретная передаточная функция:

$$W(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{v=1}^n C_v z_v^i \right) z^{-i} = \sum_{v=1}^n \left( C_v \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{z_v}{z} \right)^i \right).$$

Внутренняя сумма является сходящейся геометрической прогрессией при условии, что

$$|z| > |z_v|, \text{ или } e^{\sigma T_0} > e^{q T_0}, \text{ или } \operatorname{Re}\{p\} > \operatorname{Re}\{q_v\}.$$

В результате получаем итоговую формулу:

$$W(z) = \sum_{v=1}^n \left( C_v \frac{z}{z - z_v} \right). \quad (4.4.18)$$

Для вычисления  $W(z)$  можно воспользоваться таблицей z-преобразования.

Таблица  $z$ -преобразований

Непрерывная ПФ $W(p)$	Непрерывная весовая функция $w(t)$	Дискретная ПФ $W(z)$
$\frac{1}{p}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$t \cdot 1(t)$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-z_\alpha}, z_\alpha = e^{-\alpha T_0}$
$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{z(1-z_\alpha)}{(z-1)(z-z_\alpha)}$
$\frac{\gamma-\alpha}{(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}$	$\frac{z(z_\alpha - z_\gamma)}{(z-z_\alpha)(z-z_\gamma)}, z_\gamma = e^{-\gamma T_0}$

## § 4.5. Особенности структурных преобразований в импульсных системах

### 4.5.1. Основные определения

Структурные схемы импульсных систем можно рассматривать как графическое изображение разностных уравнений. С помощью ДПЛ производится алгоритмизация разностных уравнений, и эти уравнения изображаются графически.

#### Предупреждение

Имеется много аналогий в правилах эквивалентных преобразований структурных схем непрерывных и импульсных систем, но не все они верны. Основная особенность для импульсных систем заключается в том, что изложенный выше переход от  $W(p)$  к  $W(z)$  допустим только в тех случаях, когда на входе непрерывной системы с передаточной функцией  $W(p)$  действует сигнал типа «сигнала со звездочкой» (4.4.15). Рассмотрим несколько характерных эквивалентных преобразований структурных схем ИСАУ.

**4.5.2. Система с единичной отрицательной обратной связью**

Система представлена на рис. 4.21.

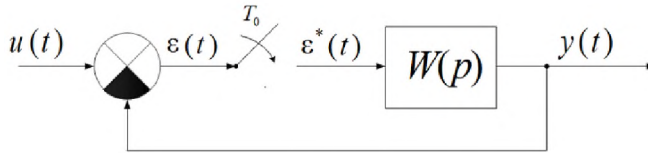


Рис. 4.21. Исходная схема I

Этой схеме эквивалентна схема, приведенная на рис. 4.22.

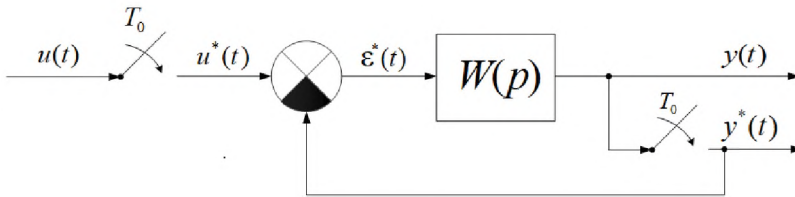


Рис. 4.22. Первый этап преобразования схемы I на рис. 4.21

Сопоставим сигналам со звездочкой соответствующие решетчатые функции (рис. 4.23).

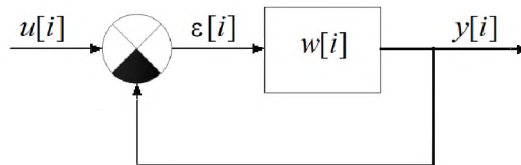


Рис. 4.23. Второй этап преобразования схемы I на рис. 4.21

Введем дискретную передаточную функцию  $W(z)$  в соответствии с рис. 4.23 и получим результирующую схему (рис. 4.24).

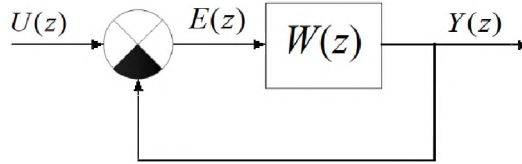


Рис. 4.24. Результирующая эквивалентная схема к схеме I на рис. 4.21

Получаем эквивалентную дискретную передаточную функцию замкнутого контура:

$$W_{\text{экв}}(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}.$$

### 4.5.3. Наличие последовательно соединенных непрерывных звеньев

Система представлена на рис. 4.25.

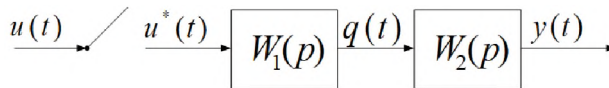


Рис. 4.25. Исходная схема II

Здесь допустимы вычисления:

$$W_1(z) = Z\{L^{-1}\{W_1(p)\}\};$$

$$W_{12}(z) = Z\{L^{-1}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}\},$$

и эквивалентные схемы, приведенные на рис. 4.26 и 4.27.

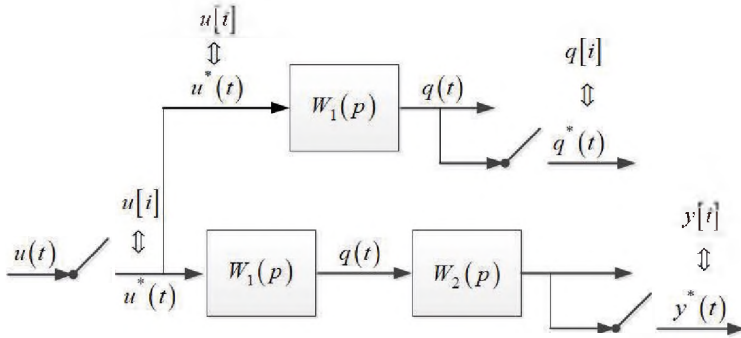


Рис. 4.26. Идеология рассмотрения структурной схемы II на рис. 4.25

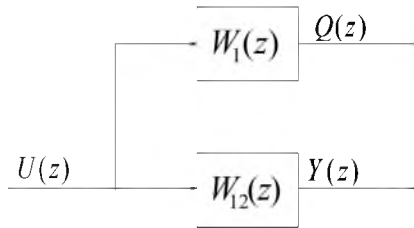


Рис. 4.27. Эквивалент схемы II на рис. 4.25

#### 4.5.4. Последовательно соединенные дискретные звенья

Система представлена на рис. 4.28.

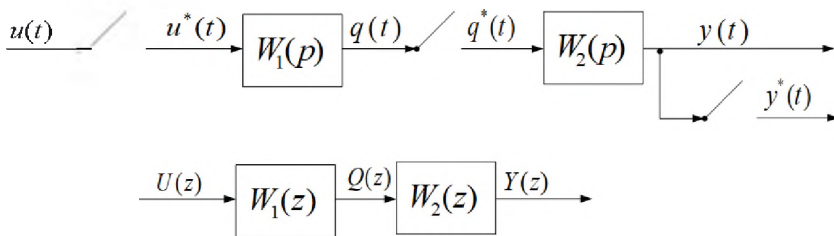


Рис. 4.28. Последовательное соединение дискретных звеньев.  
Схема III

В отличие от предыдущего случая здесь на входах и первого, и второго непрерывных звеньев действуют сигналы со звездочкой. Поэтому правомерным оказывается вычисление как  $W_1(z)$ , так и  $W_2(z)$ .

#### 4.5.5. Встречно-параллельное соединение динамических звеньев

Система представлена на рис. 4.29.

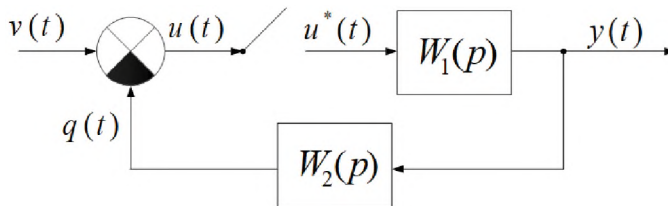


Рис. 4.29. Встречно-параллельное соединение. Схема IV

В соответствии со схемой, приведенной на рис. 4.29, можем записать:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= W_1(z) \cdot U(z); \\
 U(z) &= V(z) - Q(z); \\
 Q(z) &= W_{12}(z) \cdot U(z); \\
 Y(z) &= W_1(z) \cdot [V(z) - W_{12}(z)U(z)] = \\
 &= W_1(z) \cdot V(z) - W_{12}(z) \cdot W_1(z) \cdot U(z) = \\
 &= W_1(z) \cdot V(z) - W_{12}(z) \cdot Y(z),
 \end{aligned}$$

откуда

$$Y(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_{12}(z)} \cdot V(z).$$

#### ПРИМЕР 4.5.1

Упрощение структурной схемы с импульсным звеном. Найти дискретную передаточную функцию для следующей структурной схемы.

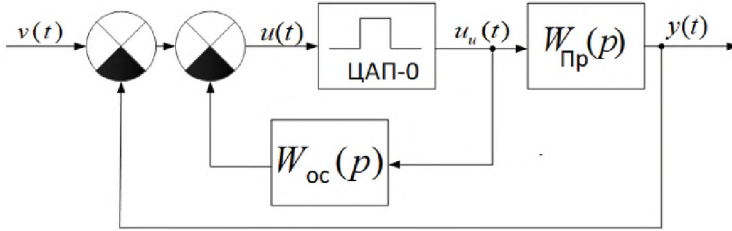


Рис. 4.30. Исходная схема. Схема V

Представим импульсный элемент типа цифро-аналогового преобразователя нулевого порядка в виде последовательно соединенных ИИЭ и ФЗ (рис. 4.31).

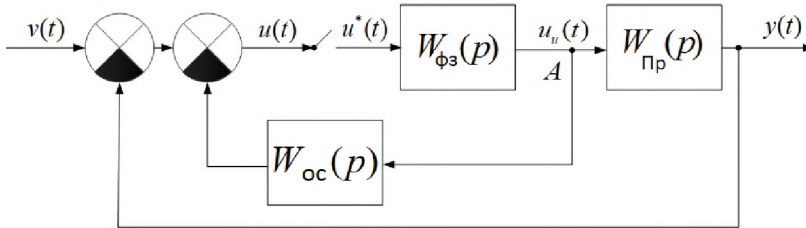


Рис. 4.31. Введение ИИЭ и ФЗ

Комплексную переменную  $p$  в знаменателе  $W(p) = \frac{1 - e^{-T_0 p}}{p}$  отнесем к непрерывной части.

Перенесем формирующее звено через точку разветвления (рис. 4.32).

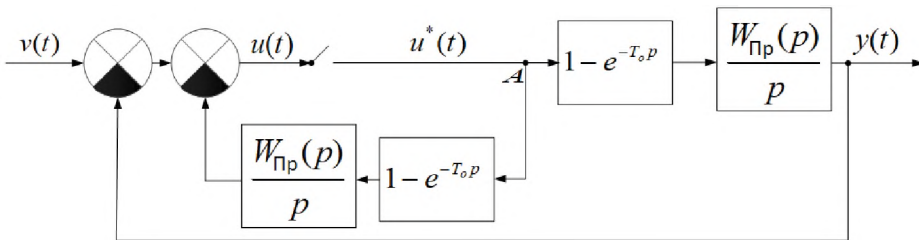


Рис. 4.32. Перенос ФЗ через точку

Переход к дискретным передаточным функциям:

$$\frac{W_{\text{Пр}}(p)}{p} \rightarrow W_1(z); \quad \frac{W_{\text{ОС}}(p)}{p} \rightarrow W_2(z).$$

Переход от оператора  $1 - e^{-T_0 p}$  к оператору  $1 - z^{-1}$ . В результате получаем структурную схему, приведенную на рис. 4.33.

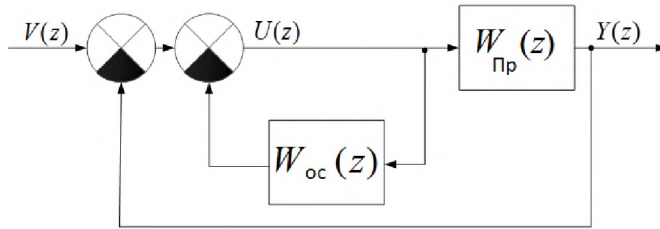


Рис. 4.33. Результирующая эквивалентная схема

В соответствии с этой схемой результирующая дискретная передаточная функция:

$$W_{\text{Экв}}(z) = \frac{W_{\text{Пр}}(z)}{1 + W_{\text{ОС}}(z) + W_{\text{Пр}}(z)}.$$

## § 4.6. Частотные характеристики импульсных систем

### 4.6.1. Понятие об амплитудно-фазовых характеристиках импульсных систем (годографы z-преобразований)

В п. 4.4 было введено понятие дискретного преобразования Лапласа (ДПЛ):

$$D \{u[i]\} = \sum_{i=0}^{\infty} u[i] e^{-pT_0 i}.$$

и Z-преобразования:

$$U(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u[i] \cdot z^{-i}$$

решетчатой функции  $u[i]$ , где комплексные переменные  $p$  и  $z$  связаны соотношением

$$z = e^{pT_0}.$$

Если  $p = \sigma + j\omega$ , то  $z = e^{\sigma T_0} e^{j\omega T_0}$ . Изменению  $p$  вдоль мнимой оси ( $p = j\omega$ ) соответствует изменение  $z$  вдоль окружности единичного радиуса. Кривая, описываемая дискретной передаточной функцией  $W(z)$  при изменении  $z$  вдоль окружности единичного радиуса, то есть  $W(z)|_{z=e^{j\omega T_0}} = W^D(j\omega)$ , называется **годографом  $z$ -преобразования**, или **амплитудно-фазовой характеристикой импульсной системы**.

Рассмотрим два примера.

**ПРИМЕР 4.6.1**

Построить АФХ для следующей структурной схемы (рис. 4.34).

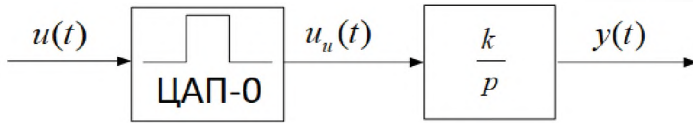


Рис. 4.34. Исходная схема

Укажем передаточную функцию ФЗ для ЦАП нулевого порядка (рис. 4.35).

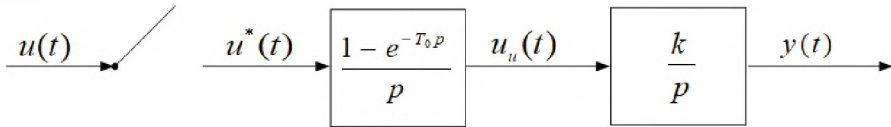


Рис. 4.35. Схема с развернутым ФЗ

Отнесем  $\frac{1}{p}$  в передаточной функции ФЗ к передаточной функции объекта и получим непрерывную передаточную функцию  $W_1(p) = \frac{k}{p^2}$ . По табл. 4.1 ей соответствует ДПФ:

$$W_1(z) = \frac{kT_0 z}{(z-1)^2} = \frac{kT_0 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

С учетом оператора  $1 - e^{-T_0 p}$  с дискретным аналогом  $1 - z^{-1}$  получаем ДПФ разомкнутой системы:

$$W(z) = (1 - z^{-1})W_1(z) = \frac{kT_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Интересно отметить, что полученной дискретной передаточной функции при  $k = 1$  соответствует разностное уравнение

$$y[i + 1] = y[i] + T_0 u[i - 1],$$

являющееся формулой интегрирования по методу левых прямоугольников (метод Эйлера). Для получения АФХ произведем замену и при  $p = j\omega$  получаем:

$$W^D(j\omega) = W(z)|_{z=e^{j\omega T_0}} = \frac{kT_0 e^{-j\omega T_0}}{1 - e^{-j\omega T_0}}.$$

Далее несколько элементарных преобразований:

$$W^D(j\omega) = \frac{kT_0 e^{-j\frac{\omega T_0}{2}}}{e^{j\frac{\omega T_0}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_0}{2}}} = \frac{kT_0 (\cos \frac{\omega T_0}{2} - j \sin \frac{\omega T_0}{2})}{2j \sin \frac{\omega T_0}{2}}.$$

В результате получаем:

$$W^D(j\omega) = \frac{kT_0}{2} (-j \operatorname{ctg} \frac{\omega T_0}{2} - 1).$$

АФХ функции  $W^D(j\omega)$  является периодической функцией с периодом  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . При изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$  получаем вертикальную прямую на комплексной плоскости, отстоящую от мнимой оси на  $-\frac{kT_0}{2}$  (рис. 4.36). При  $k = 1$  это годограф интегратора.

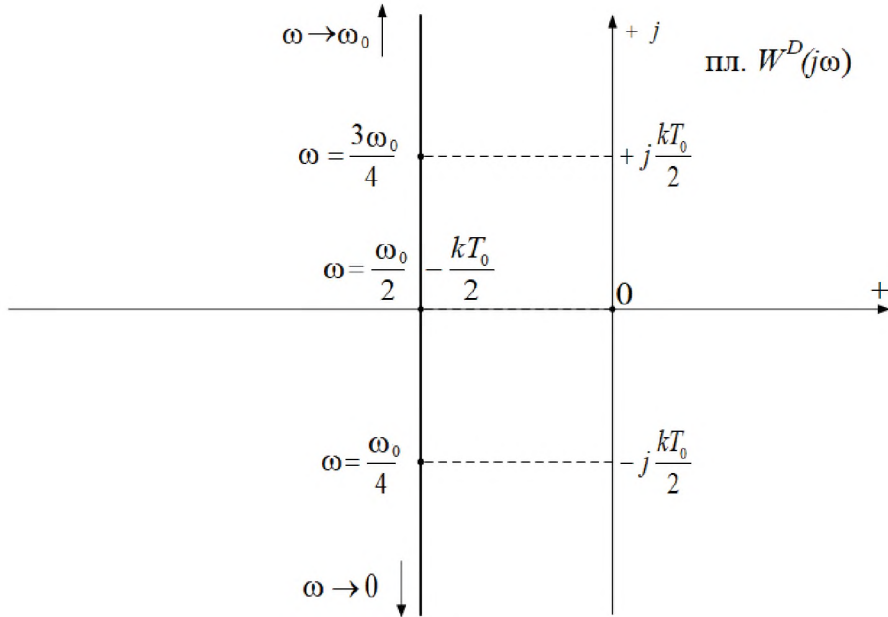


Рис. 4.36. АФХ импульсной системы для произвольного  $k$

Интересно сравнить АФХ цифрового и непрерывного интеграторов. Прежде всего следует отметить, что АФХ импульсного интегратора является периодической функцией частоты и что она не проходит через начало координат. Видно, что при уменьшении периода квантования  $T_0$  АФХ импульсной и непрерывной систем приближаются друг к другу.

**ПРИМЕР 4.6.2**

Построить АФХ для следующей структурной схемы (рис. 4.37)

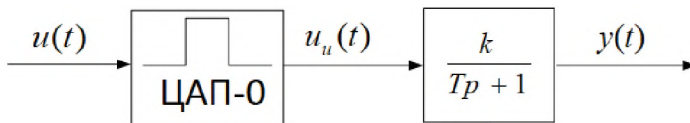


Рис. 4.37. Исходная схема примера 4.6.2

Действуя аналогично тому, как поступали в предыдущем примере, найдем:

$$W_1(p) = \frac{1}{p(Tp + 1)} = \frac{1}{Tp^2 + p}, \quad p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{T}.$$

Производная от знаменателя передаточной функции  $W_1(p)$ :

$$Q_1'(p) = 2Tp + 1.$$

В соответствии с формулой (4.4.17):

$$C_1 = \frac{1}{Q_1'(p_1)}; \quad C_2 = \frac{1}{Q_1'(p_2)} = \frac{1}{-1}.$$

В соответствии с формулой (4.4.18):

$$W_1(z) = \frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2},$$

где  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = e^{p_2 T_0} = e^{-\frac{T_0}{T}}$ .

То есть

$$W_1(z) = \frac{z(1 - z_2)}{(z - 1)(z - z_2)}.$$

Учитываем оставшуюся часть ФЗ  $1 - e^{-T_0 p}$ . Так как  $e^{-T_0 p}$  – это задержка на период квантования  $T_0$ , то заменяем эту задержку на дискретный оператор запаздывания на один такт  $z^{-1}$ . В результате имеем:

$$1 - e^{-T_0 p} \div 1 - z^{-1}$$

и

$$W(z) = W_1(z)(1 - z^{-1}) = \frac{1 - z_2}{z - z_2}.$$

Отсюда следует:

$$W^D(j\omega) = \frac{1 - z_2}{e^{j\omega T_0} - z_2}.$$

Построение АФХ  $W^D(j\omega)$  удобно выполнить в следующей последовательности:

1. Построить годограф знаменателя  $e^{j\omega T_0} - z_2$ .

2. Построить функцию обратную предыдущей  $\frac{e^{j\omega T_0} - z_2}{1 - z_2}$ .
3. Построить  $W^D(j\omega) = \frac{1 - z_2}{e^{j\omega T_0} - z_2}$  – это периодическая функция с периодом  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ .

В результате получим следующую АФХ (рис. 4.38).

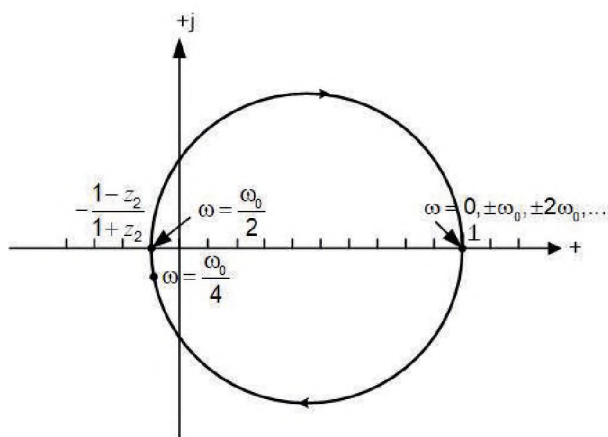


Рис. 4.38. АФХ импульсной системы, представленной на рис. 4.37

#### 4.6.2. Основные особенности частотных функций импульсных систем

Рассмотрение двух последних примеров показывает, что даже в простых случаях расчет и построение частотных характеристик импульсной системы – непростая операция. Кроме того, и это главное, уже в этих простых примерах мы обнаруживаем существенную специфику частотных характеристик импульсных систем. Отметим выявленные особенности.

1. Периодичность частотных функций.  
 Функции  $W^D(j\omega)$  и  $W^D(p)$  являются периодическими функциями с периодами  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  и  $j\omega_0$  соответственно. Действительно, например,

$$\begin{aligned} W^D(p + j\omega_0) &= \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-iT_0(p+j\omega_0)} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-iT_0p} e^{-ij\omega_0 T_0} = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-iT_0p} = W^D(p), \end{aligned}$$

так как  $e^{-ji\omega_0 T_0} = e^{-ji2\pi} = 1$ .

2. Комплексная сопряженность частотных функций.

При изменении  $\omega$  во второй половине периода от  $\frac{\omega_0}{2}$  до  $\omega_0$  значения  $W^D(j\omega)$  являются комплексно-сопряженными к значениям  $W^D(j\omega)$  из первой половины для диапазона  $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ .

Действительно, при  $0 \leq \Delta\omega \leq \frac{\omega_0}{2}$

$$W^D[j(\Delta\omega + \frac{\omega_0}{2})] = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-iT_0j(\frac{\omega_0}{2} + \Delta\omega)} = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-jT_0\Delta\omega i} e^{-j\pi i}.$$

Учитывая, что  $e^{-j\pi} = e^{j\pi} = -1$ ,

$$\begin{aligned} W^D[j(\Delta\omega + \frac{\omega_0}{2})] &= \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-jT_0\Delta\omega i} e^{+j\pi i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-jT_0\Delta\omega i} e^{+j\frac{\omega_0 T_0}{2} i} = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{+j(\frac{\omega_0}{2} - \Delta\omega)T_0 i}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W^D[j(\Delta\omega + \frac{\omega_0}{2})] = W^D[j(\frac{\omega_0}{2} - \Delta\omega)]^{KC}. \quad (4.6.1)$$

3. Действительность частотных функций.

Значения  $W(z)$  (а значит, и  $W^D(j\omega)$ ) всегда действительны при  $z = 1$  ( $\omega = 0$ ) и  $z = -1$  ( $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ ), так как, например,

$$W(z)|_{z=1} = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]1^{-i};$$

$$W^D(j\frac{\omega_0}{2}) = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-j\frac{\omega_0}{2}T_0i} = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-j\pi i} = \sum_{i=0}^{\infty} w[i](-1)^i.$$

4. Конечная точка АФХ.

В отличие от непрерывных систем, АФХ импульсных систем могут заканчиваться не в начале координат, а на вещественной оси.

5. Замкнутость АФХ.

$W^D(j\omega)$  конечно при  $\omega = 0$ , если  $W(p)$  не имеет полюсов в начале координат. Аналогично,  $W(z)$ , конечно при  $z = 1$ , если  $W(z)$  не имеет полюсов  $z = 1$ . В этом случае если,  $W(p)$  не имеет полюсов на мнимой оси, то есть  $W(z)$  не имеет полюсов на единичной окружности, то  $W^D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$  представляет собой замкнутую кривую.

**4.6.3. Расчет частотных характеристик импульсной системы на основании частотных характеристик приведенной непрерывной части**

Предыдущие примеры продемонстрировали трудность прямого метода построения частотных характеристик импульсных систем. Кроме того, наиболее характерные особенности частотных характеристик ИСАУ не проявились. Рассмотрим выход идеального ИЭ:

$$u^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u[i]\delta(t - iT_0).$$

В связи с тем, что  $\delta(t - iT_0) = 0$  везде, кроме  $t = iT_0$ , можно записать:

$$u^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u(t)\delta(t - iT_0) = u(t) \cdot \delta_T(t),$$

где нижний предел суммирования расширили до  $-\infty$ , полагая, что  $u(t) = 0$  при  $t < 0$ , а функция

$$\delta_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_0)$$

– периодическая, с периодом  $T_0$  и частотой следования  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ .

Разложим эту функцию в ряд Фурье на интервале  $[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}]$ , используя при этом комплексную формулу записи ряда Фурье:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (4.6.2)$$

где

$$C_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

В пределах  $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$   $\delta_T(t) = \delta(t)$ , поэтому:

$$c_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2}{T_0} e^{-j0} = \frac{2}{T_0}.$$

Следовательно,

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

и

$$u^*(t) = \frac{1}{T_0} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}. \quad (4.6.3)$$

Найдем непрерывное преобразование Лапласа от решетчатой функции  $u^*(t)$ :

$$L\{u^*(t)\} = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{T_0} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u(t) e^{-(p-jk\omega_0)t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(p + jk\omega_0),$$

где  $U(p) = L\{u(t)\}$  – непрерывное преобразование Лапласа входного сигнала  $u(t)$

Когда вводилось понятие дискретного преобразования Лапласа, было показано (4.4.6), что:

$$L\{u^*(t)\} = U^*(p) - \frac{u(0)}{2},$$

поэтому

$$D\{u[i]\} = U^D(p) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(p + jk\omega_0) + \frac{u(0)}{2}. \quad (4.6.4)$$

Для весовой решетчатой функции  $w[i]$  дискретное преобразование Лапласа имеет вид:

$$W^D(p) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(p + jk\omega_0) + \frac{w(0)}{2}, \quad (4.6.5)$$

где  $W(p) = L\{w(t)\}$  – непрерывная передаточная функция объекта и  $w(t)$  – его непрерывная весовая функция.

Для комплексного передаточного коэффициента (КПК) импульсной системы имеем:

$$W^D(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + k\omega_0)] + \frac{w(0)}{2}. \quad (4.6.6)$$

#### 4.6.4. Особенности спектров сигналов в ИСАУ

Рассмотрим физический смысл полученного выражения (4.6.5). Обратимся к рис. 4.39.

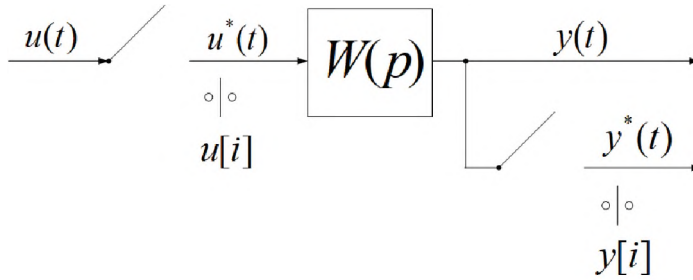


Рис. 4.39. К прохождению гармонического сигнала через импульсную систему

Пусть

$$u(t) = \cos \omega_s t = \frac{e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t}}{2} = \frac{u_+(t)}{2} + \frac{u_-(t)}{2}.$$

Спектр гармонического сигнала представлен на рис. 4.40,а. В связи с тем, что мы рассматриваем линейную систему, рассмотрим прохождение сигналов  $u_+(t) = e^{j\omega_s t}$ ,  $u_-(t) = e^{-j\omega_s t}$  независимо друг от друга.

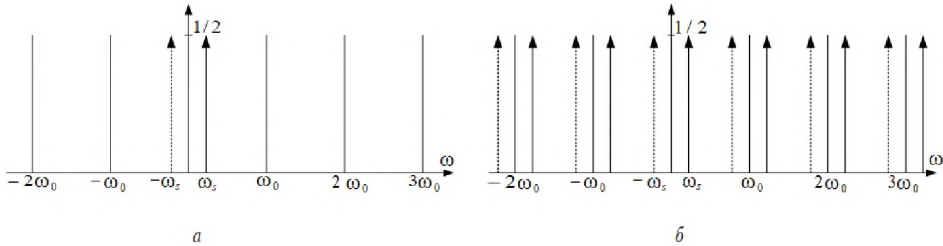


Рис. 4.40. Спектр гармонического сигнала (а) и спектр отклика ИЭ на гармонический сигнал  $u(t) = \cos \omega_s t$  (б)

В соответствии с (4.6.3)

$$\begin{aligned} u_+^*(t) &= \frac{1}{T_0} u_+(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jK\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_s + K\omega_0)t} = \\ &= \frac{1}{T_0} \{ e^{j\omega_s t} + e^{j(\omega_s + \omega_0)t} + e^{j(\omega_s - \omega_0)t} + e^{j(\omega_s - 2\omega_0)t} + e^{j(\omega_s + 2\omega_0)t} + \dots \}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$u_{-}^{*}(t) = \frac{1}{T_0} \{ e^{j\omega_s t} + e^{j(-\omega_s + \omega_0)t} + e^{j(-\omega_s - \omega_0)t} + e^{j(-\omega_s - 2\omega_0)t} + e^{j(-\omega_s + 2\omega_0)t} + \dots \}.$$

Импульсный элемент как бы размножает спектр входного сигнала, как это показывает рис. 4.40, б.

Отметим еще пару существенных свойств преобразования спектра входного сигнала  $u(t)$  импульсным элементом:

1. Пусть, например, на входе ИЭ действует сигнал помехи с частотой  $f_{dst} = 1001$  Гц, частота квантования в контроллере установлена  $f_0 = 10$  Гц. При этом на выходе ИЭ будет действовать полигармонический сигнал с частотами  $f_{dst} \pm k f_0$ , и при  $k = 100$  на выходе ИИЭ появляется сигнал с частотой 1 Гц.

Это означает, что высокочастотное изначально возмущение трансформировалось при входе в «цифру» на частоту 1 Гц рабочих движений системы, и на этом месте никакая фильтрация не поможет.

Вывод: высокочастотные помехи необходимо отфильтровывать до входа в вычислитель.

2. Пусть на входе ИЭ действует непериодический сигнал  $u(t)$  с непрерывным спектром (рис. 4.41, а). Так же как и в случае гармонического входного сигнала, ИЭ размножает спектр. В случае рис. 4.41, а) из полученного в «цифре» сигнала путем фильтрации может быть полностью восстановлен сигнал, поступивший на вход ИЭ. Этого нельзя утверждать в ситуации, представленной на рис. 4.41, б). Достаточно представить себе, как выглядит суммарный спектр, чтобы согласиться с этим.

Очевидно, что для обеспечения возможности восстанавливаемости спектра входного сигнала необходимо так выбрать частоту квантования, чтобы обеспечить выполнение неравенства  $\omega_{урр} < \frac{\omega_0}{2}$ , где  $\omega_{урр}$  – верхняя существенная частота в спектре входного непрерывного сигнала. Этот результат известен в теории связи как **теорема Котельникова**.

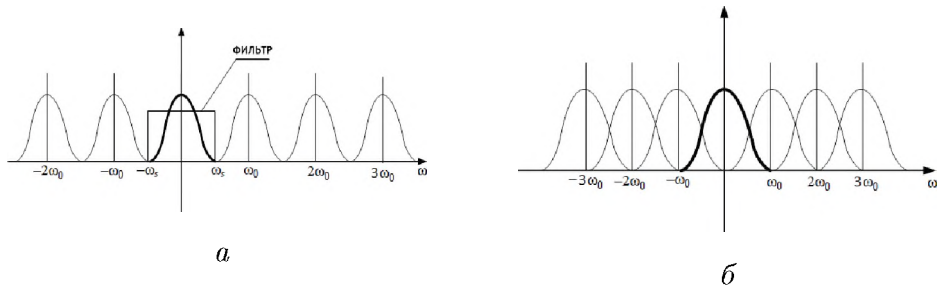


Рис. 4.41. Восстановление входного сигнала: *a* – возможно, *б* – невозможно.

Вернемся к физическому смыслу формулы (4.6.6). Для линейной системы можно рассматривать независимо происхождение каждой гармонической составляющей через непрерывную часть, как это показано на рис. 4.42.

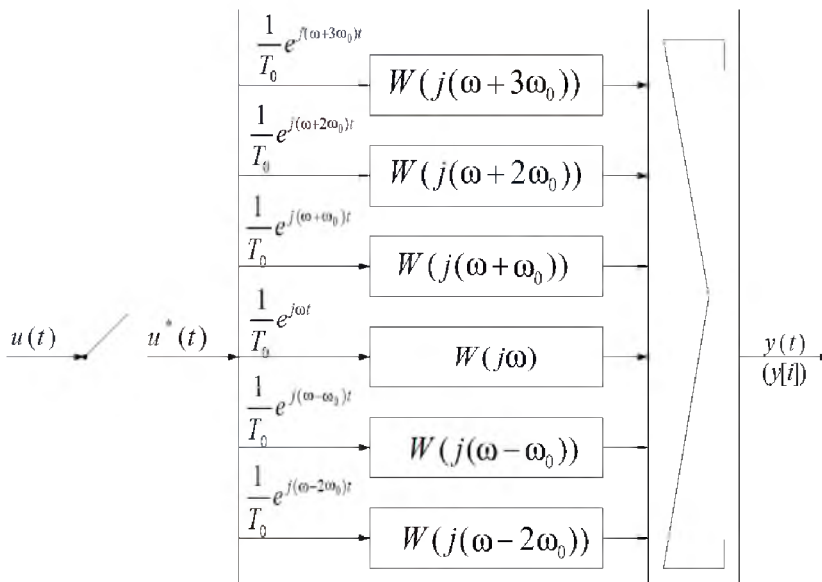


Рис. 4.42. Прохождение гармонического сигнала через импульсную систему

В соответствии с рис. 4.42 сигнал на выходе непрерывной части

импульсной системы должен иметь вид:

$$y_+[i] = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + k\omega_0)] \cdot e^{j(\omega+k\omega_0)t}.$$

Таким образом, в то время как на вход импульсной системы действует моногармонический (одночастотный) сигнал, сигнал на выходе непрерывной части ИС оказывается полигармоническим. Примем во внимание, что рассматривается импульсная система, на входе и выходе которой действуют решетчатые функции:

$$u_+[i] = e^{j\omega T_0 i}$$

и

$$\begin{aligned} y_+[i] &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + k\omega_0)] \cdot e^{j(\omega+k\omega_0)T_0 i} = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + k\omega_0)] \cdot e^{j\omega T_0 i}, \end{aligned}$$

так как  $\omega_0 T_0 = 2\pi$ . Несколько неожиданно, но красиво: по моментам съема (моментам квантования) любая гармоника, порожденная гармоническим входным сигналом, в моменты квантования имеет частоту входного сигнала. Для примера на рис. 4.43 представлена ситуация, в которой частота квантования  $f_0 = 10$  Гц, частота входного сигнала  $f_c = 1$  Гц, на рисунке представлена гармоника частотой  $f_c + f_0 = 11$  Гц. Видно, что точки на этой гармонике, отстоящие на расстоянии периода квантования  $T_0 = 0,1$  с, образуют гармонический сигнал частотой 1 Гц.

Кроме того, подтверждается, что комплексный передаточный коэффициент импульсной системы.

$$W^D(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + k\omega_0)]. \quad (4.6.7)$$

Эта формула позволяет рассчитать частотные характеристики импульсной системы по частотным характеристикам приведенной непрерывной части.

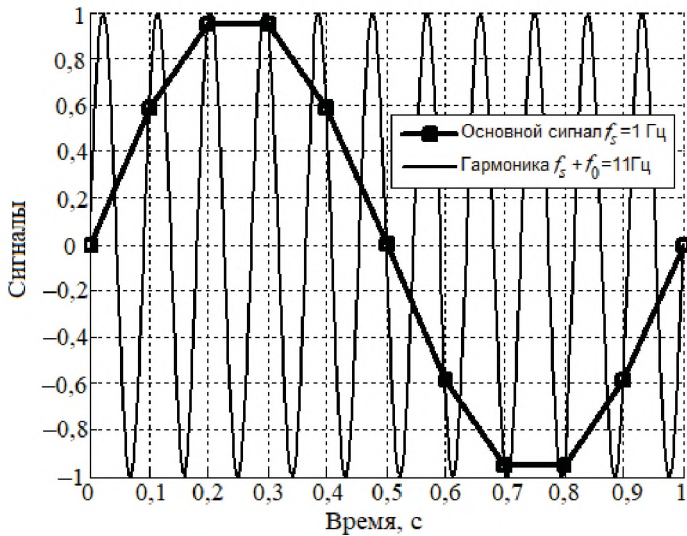


Рис. 4.43. Эффект выделения частоты входного сигнала

## § 4.7. Анализ устойчивости импульсных систем

### 4.7.1. Характеристический полином дискретной замкнутой системы

Допустим, имеется разомкнутая импульсная система с непрерывной приведенной частью  $W(p)$  (рис. 4.44).

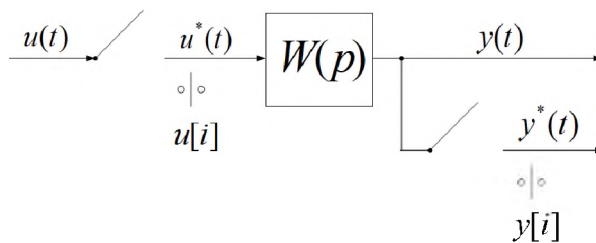


Рис. 4.44. Разомкнутая импульсная система

В соответствии с п. 4.4.2 по заданной функции  $W(p)$  с помощью формул (4.4.17) и (4.4.18) или с помощью табл. 4.1 можно рассчитать

передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}. \quad (4.7.1)$$

Параметр  $T_0$  дискретизации по времени влияет на коэффициенты многочлена  $Q(z)$ . В частности, если  $p_k$ -полюсы непрерывной передаточной функции  $W(p)$ , то  $z_k = e^{p_k T_0}$  являются корнями характеристического уравнения разомкнутой системы  $Q(z) = 0$ . Замкнем импульсную систему с помощью единичной отрицательной обратной связи (рис. 4.45).

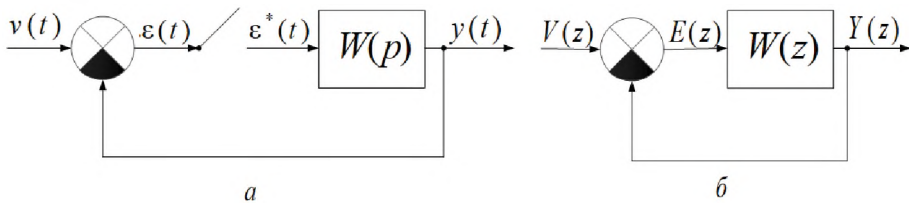


Рис. 4.45. Замкнутая импульсная система: *a* – в пространстве  $p$ ; *б* – в пространстве  $z$

Передаточная функция замкнутой линейной импульсной системы имеет вид:

$$W_3(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{R(z)}{R(z) + Q(z)} = \frac{R(z)}{L(z)}, \quad (4.7.2)$$

где  $L(z) = R(z) + Q(z)$  – характеристический полином дискретной замкнутой системы. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$L(z) = Q(z) + R(z) = 0.$$

Допустим, импульсная система записана в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \vec{x}[i + 1] = \Phi \vec{x}[i] + H \vec{u}[i], \\ \vec{y}[i] = C \vec{x}[i + 1] \\ \vec{x}[0] = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (4.7.3)$$

По аналогии с непрерывной динамической системой, заданной в матричной форме,  $z$ -преобразование также позволяет получить дискретные передаточные функции этой системы. По свойству (4.4.11)  $z$ -преобразования

$$Z\{\vec{x}[i+1]\} = z\vec{X}(z) - z\vec{x}_0.$$

Тогда из (4.7.3) имеем:

$$z\vec{X}(z) - z\vec{x}_0 = \Phi\vec{X}(z) + H\vec{U}(z),$$

$$(zE - \Phi)\vec{X}(z) = H\vec{U}(z) + z\vec{x}_0.$$

Отсюда, полагая начальные условия нулевыми ( в соответствии с определением передаточной функции), имеем:

$$\vec{X}(z) = (zE - \Phi)^{-1}H\vec{U}(z),$$

$$\vec{Y}(z) = C(zE - \Phi)^{-1}H\vec{U}(z).$$

По общему правилу построения передаточных функций получаем:

$$W_{ux}(z) = (zE - \Phi)^{-1}H,$$

$$W_{uy}(z) = C(zE - \Phi)^{-1}H.$$

Определитель  $|zE - \Phi|$  является характеристическим полиномом импульсной системы, а собственные числа матрицы динамики  $\Phi$  — корнями характеристического уравнения системы. Дальнейшее решение импульсной системы (4.7.1) осуществляется аналогично решению непрерывной системы: находятся собственные векторы матрицы  $\Phi$ , строятся импульсные и переходные характеристики.

#### 4.7.2. Исследование устойчивости импульсных систем по корням характеристического уравнения

Ранее было показано, что  $z$ -преобразование отображает левую полуплоскость  $P$  в круг единичного радиуса с центром в начале координат на плоскости  $Z$ . В то же время общее решение однородного разностного уравнения (4.3.21) представляется в виде суммы:

$$y_{\text{св}}[i] = \sum_{k=1}^n c_k z_k^i. \quad (4.7.4)$$

Отсюда следует:

Для того, чтобы **линейная импульсная система была устойчива**, то есть  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{\text{св}}[i] = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы все **все собственные числа матрицы динамики  $\Phi$**  (полюсы передаточной функции) располагались **внутри круга единичного радиуса** с центром в начале координат плоскости  $Z$ :

$$|z_k| < 1, k = 1, 2, \dots, n.$$

**ПРИМЕР 4.7.1**

Разомкнутая импульсная система состоит из последовательного соединения импульсного элемента типа ЦАП-0, звена интегрирования и множителя  $k$  (рис. 4.46). Начальное условие интегратора  $y(0) = 1$ . Исследовать устойчивость замкнутой системы при различных  $k$ .

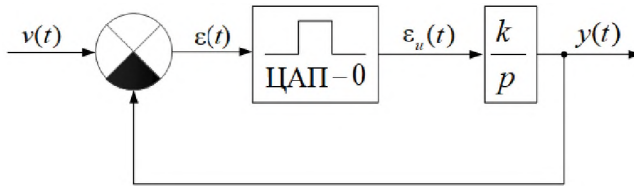


Рис. 4.46. Замкнутая импульсная система с интегратором

Как было показано в примере 4.6.1, дискретная передаточная функция данной разомкнутой системы:

$$W(z) = \frac{kT_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{kT_0}{z - 1}.$$

Дискретная передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi(z) = \frac{\frac{kT_0}{z - 1}}{1 + \frac{kT_0}{z - 1}} = \frac{kT_0}{kT_0 + z - 1}. \quad (4.7.5)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$kT_0 + z - 1 = 0,$$

откуда получаем полюс  $z = 1 - kT_0$ . Рассмотрим несколько вариантов значений множителя  $k$ .

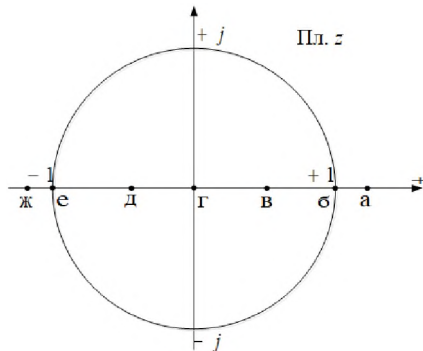


Рис. 4.47. Варианты полюсов при различных значениях множителя  $k$

1.  $k = -\frac{1}{2T_0}$ .

В данном случае полюс  $z_1 = 1 + 0,5 = 1,5$ . Система аperiodически неустойчивая, так как  $|z_1| > 1$ . Выход системы при  $v = 0$   $y[i] = c_1 z_1^i = c_1 1,5^i$ . Так как начальное условие интегратора  $y[0] = 1$ , то  $c_1 = 1$ , поэтому  $y[i] = 1,5^i$  (рис. 4.48,а).

2.  $k = 0$ .

Полюс  $z_1 = 1$ . Система находится на границе устойчивости (нейтральная), при этом  $y[i] = 1$  (рис. 4.48,б).

3.  $k = \frac{1}{2T_0}$ .

Полюс  $z_1 = 0,5$ . Система аperiodически устойчивая,  $y[i] = 0,5^i$  (рис. 4.48,в).

4.  $k = \frac{1}{T_0}$ .

Полюс  $z_1 = 0$  и  $y[i] = 0^i$ . Система с конечной памятью (рис. 4.48,г).

5.  $k = \frac{3}{2T_0}$ .

Полюс  $z_1 = -0,5$ ,  $y[i] = (-0,5)^i$  (рис. 4.49, *д*). Возникает колебательный процесс. Так как максимальные значения повторяются через  $2T_0$ , то  $\omega = \frac{2\pi}{2T_0} = \frac{\omega_0}{2}$ .

6.  $k = \frac{2}{T_0}$ .

Полюс  $z_1 = -1$ ,  $y[i] = (-1)^i$ . Система находится на границе колебательной устойчивости с частотой  $\frac{\omega_0}{2}$  (рис. 4.49, *е*).

7.  $k = \frac{5}{2T_0}$ .

Полюс  $z = -1,5$ ,  $y[i] = (-1,5)^i$ . Расходящийся колебательный процесс с частотой  $\omega = \frac{\omega_0}{2}$  (Рис. 4.49, *ж*).

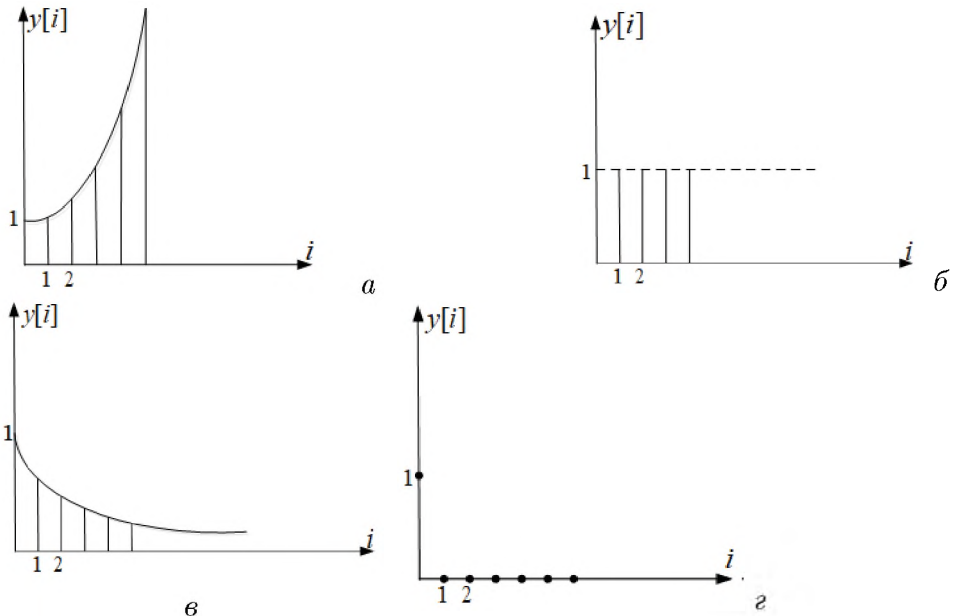


Рис. 4.48. Полюсы и варианты устойчивости замкнутой импульсной системы при различных значениях  $k$

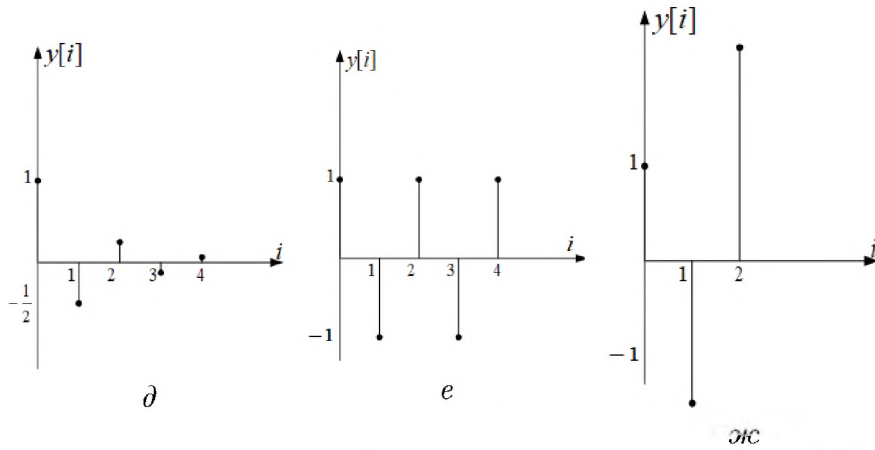


Рис. 4.49. Окончание рис. 4.48 (начало см. на с. 190)

**ПРИМЕР 4.7.2**

Для системы с цифровым управлением (ЦАП типа фиксатора нулевого порядка), представленной на рис. 4.50, провести анализ устойчивости в зависимости от величины статического передаточного коэффициента  $k$ . Выбрать величину  $k$  и найти переходную функцию  $R[i]$ .

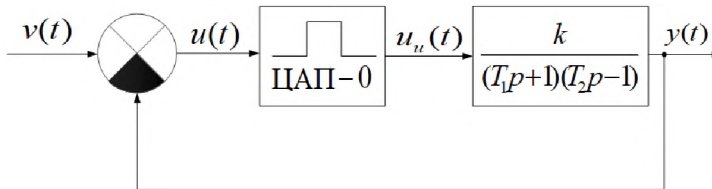


Рис. 4.50. Исходная схема к примеру 4.7.2

Как обычно, представим реальный импульсный элемент, в качестве которого здесь выступает ЦАП-0, в виде последовательно соединенных ИИЭ и ФЗ. Передаточная функция ФЗ имеет вид:

$$W_{\text{фз}}(p) = \frac{1 - e^{T_0 p}}{p}, \tag{4.7.6}$$

Отнесем  $\frac{1}{p}$  ФЗ к непрерывной части

$$W_{\text{нч}}(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p - 1)} \quad (4.7.7)$$

и обозначим:

$$W_1(p) = \frac{1}{p} \cdot W_{\text{нч}}(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p - 1) \cdot p}.$$

Пусть  $T_1 = 0,62$  с;  $T_2 = 10,49$  с;  $T_0 = 1,0$  с. Тогда полюсы  $W_1(p)$  равны:

$$p_1 = -1,613; \quad p_2 = 0,0953; \quad p_3 = 0.$$

Найдем дискретную передаточную функцию  $W_1(z)$ . Значения полюсов этой функции, найденные с помощью формулы  $z_v = e^{p_v T_0}$ , имеют вид:

$$z_1 = 0,2; \quad z_2 = 1,1; \quad z_3 = 1.$$

С помощью уравнения (4.4.17) определим  $C_v$  :

$$C_1 = \frac{k}{T_1 T_2 (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} = 0,05858k;$$

$$C_2 = \frac{k}{T_1 T_2 (p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} = 0,9445k;$$

$$C_3 = \frac{k}{T_1 T_2 (p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} = -k.$$

В соответствии с (4.4.18) определим  $W_1(z)$  :

$$W_1(p) = \sum_{v=1}^n C_v \frac{z}{z - z_v} = k \left( \frac{0,05858z}{z - 0,2} + \frac{0,9445z}{z - 1,1} + \frac{z}{z - 1} \right).$$

Заменим оператор  $1 - e^{-T_0 p}$  оператором  $1 - z^{-1}$  и перейдем к искомой передаточной функции  $W(z)$  :

$$W(z) = (1 - z^{-1})W_1(z) = k \frac{0,05z + 0,0305}{(z - 0,2)(z - 1,1)}. \quad (4.7.8)$$

Дискретная передаточная функция рассматриваемой разомкнутой системы имеет один нуль  $z_{N1} = -0,6$ . Так как один из полюсов

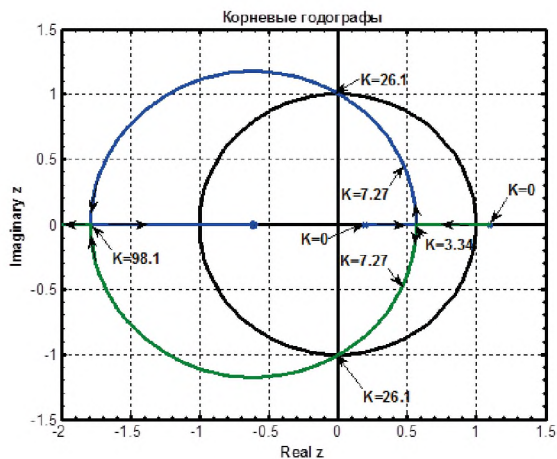


Рис. 4.51. Корневые годографы к примеру 4.7.2

дискретной передаточной функции разомкнутой системы имеет модуль, больше единицы ( $z_2 = 1, 1$ ), то дискретная разомкнутая система (как и непрерывная часть с передаточной функцией  $W(p)$ , имеющая один полюс справа от мнимой оси) неустойчива.

На рис. 4.51 представлены корневые годографы замкнутой системы, которые показывают, как в зависимости от статического передаточного коэффициента перемещаются на комплексной плоскости полюсы передаточной функции замкнутой системы.

Корневые годографы начинаются ( $k = 0$ ) в полюсах разомкнутой системы ( $z_1, z_2$ ).

При  $k = 1$  полюс  $z_1^{\text{close}}$  увеличивается до 0,223, а бывший неустойчивым второй полюс  $z_2^{\text{close}}$  уменьшается до 1, то есть неустойчивая замкнутая система выходит на границу устойчивости.

При  $k = 3,34$  обе вещественные ветви корневого годографа встречаются в точке  $z_1^{\text{close}} = z_2^{\text{close}} = 0,567$ , затем расходятся и переходят в комплексную плоскость.

При  $k = 26,1$  оба полюса выходят на колебательную границу устойчивости с частотой  $\frac{\omega_0}{4}$ , принимая значения  $z_{1,2}^{\text{close}} = \pm j1$ .

При дальнейшем увеличении  $k$  до величины 98,1 обе комплексные ветви годографа встречаются на вещественной оси в точке  $z_1^{\text{close}} =$

$= z_2^{\text{close}} = -1,79$ . Далее при  $k \rightarrow \infty$  одна ветвь идет к нулю  $z = -0,61$  функции  $W(z)$ , а другая ветвь уходит в  $-\infty$ .

Найдем переходную функцию  $h[i]$  замкнутой системы при  $k = 7,27$ .

Передаточная функция замкнутой системы имеет числитель, совпадающий с числителем передаточной функцией разомкнутой системы.

$$W_{\text{close}}(z) = \frac{7,27(0,05z + 0,0305)}{z^2 - 0,938z + 0,440}. \quad (4.7.9)$$

Полюсы этой передаточной функции:

$$z_{1,2}^{\text{close}} = 0,469 \pm j0,469 = 0,6633 \cdot e^{\pm j\frac{\pi}{4}}. \quad (4.7.10)$$

Передаточной функции (4.7.9) соответствует разностное уравнение:

$$\begin{aligned} y[i+2] - 0,938y[i+1] + 0,440y[i] &= \\ &= 7,27(0,05u[i+1] + 0,0305u[i]). \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Решение этого уравнения есть сумма свободной и вынужденной составляющих (см. п. 4.3.1):

$$y[i] = y_{\text{св}}[i] + y_{\text{в}}[i].$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} y_{\text{св}}[i] &= C_1 z_1^{\text{close}i} + C_2 z_2^{\text{close}i} = C_1 \cdot 0,6633^i e^{j\frac{\pi}{4}i} + C_2 \cdot 0,6633^i e^{-j\frac{\pi}{4}i}; \\ y_{\text{в}}[i] &= \lim_{i \rightarrow \infty} y[i], \text{ при условии, что } u = 1[i]. \end{aligned}$$

При определении вынужденной составляющей учитываем, что при достаточно больших  $i$  свободная составляющая уже обнулилась и процесс перестал зависеть от  $i$ :

$$y[i+2] = y[i+1] = y[i] = y_{\text{в}}$$

и

$$u[i+1] = u[i] = 1.$$

С учетом этого из (4.7.11) получаем, что  $y_{\text{в}} = 1,1586$ .

Принимая во внимание, что коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  равны:

$$C_1 = C_2 = C_{1,2} = C e^{\pm j\varphi_c},$$

записываем решение разностного уравнения и получаем в виде:

$$y[i] = 1,1586 + C \cdot 0,6633^i (e^{j(\frac{\pi}{4}i + \varphi_c)} + e^{-j(\frac{\pi}{4}i + \varphi_c)}). \quad (4.7.12)$$

Теперь можно учесть начальные условия. Пусть при  $i = 0 \Rightarrow y[0] = 0$  и при  $i = 1 \Rightarrow y[1] = 0,361$ . Подставляя эти данные в последнюю формулу (4.7.12), получаем:

$$\begin{aligned} y[0] &= 1,1586 + C(e^{j\varphi_c} + e^{-j\varphi_c}) = 1,1586 + C \cdot 2 \cos(\varphi_c) = \\ &= 0,5793 + C \cos(\varphi_c) = 0; \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

$$y[1] = 1,1586 + C \cdot 0,6633 \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_c\right) = 0,361.$$

Учитывая, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_c\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi_c) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(\varphi_c) = 0,7071(\cos(\varphi_c) - \sin(\varphi_c)),$$

запишем

$$y[1] = 1,1586 - 0,361 + C \cdot 0,6633 \cdot 2 \cdot 0,7071 \cdot (\cos(\varphi_c) - \sin(\varphi_c)) = 0$$

или

$$y[1] = 0,8503 + C(\cos(\varphi_c) - \sin(\varphi_c)) = 0. \quad (4.7.14)$$

Используя уравнения (4.7.13) и (4.7.14), разрешим эти равенства относительно  $C$  и  $\varphi_c$  и поделим их друг на друга:

$$\frac{C(\cos(\varphi_c) - \sin(\varphi_c))}{C \cdot \cos(\varphi_c)} = \frac{-0,8503}{-0,5793} = 1,4678.$$

$$1 - \operatorname{tg}(\varphi_c) = 1,4678.$$

Откуда получаем:

$$\varphi_c = -0,4376 \text{ рад.} \quad (4.7.15)$$

Теперь из уравнения (4.7.13) находим значение  $C$ :

$$C = -\frac{0,5793}{\cos(\varphi_c)} = -0,6396. \quad (4.7.16)$$

Подставляя полученные значения  $C$  и  $\varphi_c$  в решение разностного уравнения (4.7.12) и проводя элементарные преобразования, получаем:

$$y[i] = 1,1586 - 1,2788 \cdot 0,6633^i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}i - 0,4376\right).$$

Напомним, что период квантования  $T_0$ [с], частота  $f_0$ [Гц] и круговая частота  $\omega_0$ [рад/с] связаны между собой соотношениями:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ и } \omega_0 T_0 = 2\pi.$$

Видоизменив аргумент функции косинуса с  $\frac{\pi}{4}i$  на  $\frac{\omega_0}{8}T_0i$ , окончательно получим:

$$y[i] = 1,1586 - 1,2788 \cdot 0,6633^i \cdot \cos\left(\frac{\omega_0}{8}T_0i - 0,4376\right). \quad (4.7.17)$$

На рис. 4.52 представлен график переходной функции системы.

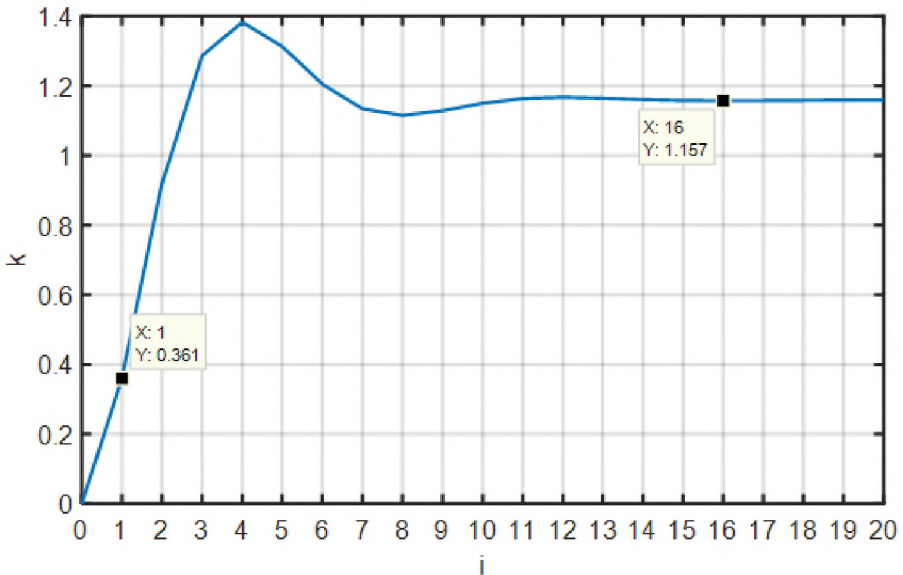


Рис. 4.52. Переходная функция

### 4.7.3. Частотный критерий устойчивости

Разомкнутая импульсная система, структурная схема которой представлена на рис. 4.45,б, строится на основе разомкнутой непрерывной системы. Их передаточные функции связаны между собой:  $W(z) \div W(p)$  (см. п. 4.4).

Можно утверждать, что устойчивость (неустойчивость) разомкнутой импульсной системы полностью соответствует устойчивости (неустойчивости) непрерывной части.

Сформулируем частотный критерий устойчивости импульсной системы. Обозначим число полюсов вне круга единичного радиуса с центром в начале координат («неустойчивых полюсов») передаточной функции  $W(z)$  разомкнутой импульсной системы (рис. 4.45б)  $m_Q$ ,  $\nu$  – число полюсов на окружности единичного радиуса с центром в начале координат,  $m_L$  – число неустойчивых полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\frac{\omega_0}{2}$  расширенная АФХ разомкнутой импульсной системы повернулась вокруг точки  $(-1; j0)$  на угол  $+m$ . Понятие «расширенная АФХ» будет введено ниже, в процессе доказательства.

Докажем этот критерий. Пусть  $W(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}$ ,  $n$  – степень характеристического полинома  $Q(z)$  разомкнутой системы. Передаточная функция замкнутой системы с отрицательной обратной связью имеет вид:

$$\frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{R(z)}{L(z)},$$

где  $L(z) = Q(z) + R(z)$  – характеристический полином замкнутой системы. С учётом требования физической реализуемости степень полинома  $R(z)$  должна быть не больше степени полинома  $Q(z)$ . Поэтому степень  $L(z)$  также равна  $n$ .

Построим функцию

$$\psi(z) = 1 + W(z) = \frac{L(z)}{Q(z)} \quad (4.7.18)$$

и представим ее в виде:

$$\psi(z) = A \frac{(z - z_1^L)(z - z_2^L) \dots (z - z_n^L)}{(z - z_1^O)(z - z_2^O) \dots (z - z_n^O)}. \quad (4.7.19)$$

Следует заметить, что знаменателем функции  $\psi(z)$  является характеристический полином разомкнутой системы, а числитель – характеристическим полиномом замкнутой системы.

Построим АФХ для функции  $\psi(z)$ , перемещая  $z$  по окружности единичного радиуса с центром в начале координат в положительном направлении. Другими словами  $z = e^{j\omega T_0}$ , где  $\omega$  меняется в направлении:  $0 \rightarrow \frac{\omega_0}{4} \rightarrow \frac{\omega_0}{2} \rightarrow \frac{3\omega_0}{4} \rightarrow \omega_0$ . Напомним, что  $\omega_0 T_0 = 2\pi$ . Определим, какое приращение при этом получит угол или аргумент  $\varphi_\psi$  функции  $\psi(z)$ . Для этого посмотрим, как меняется аргумент  $\varphi_l$  отдельно взятой скобки числителя или знаменателя функции  $\psi(z)$ .

$$l(z) = (z - z_l) = e^{j\omega T_0} - z_l. \quad (4.7.20)$$

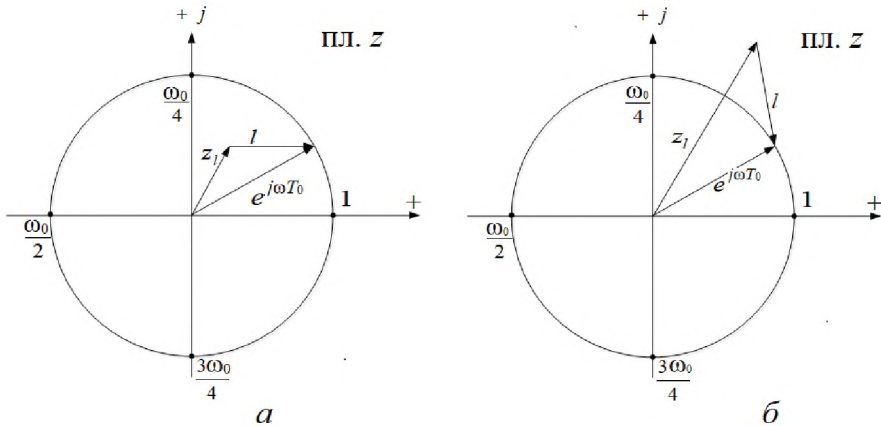


Рис. 4.53. Определение  $l(z)$  и приращения угла  $\varphi_l$  :  
 а – для внутреннего корня  $z_l$ ; б – для внешнего корня  $z_l$

Рассмотрим, на какой суммарный угол повернется годограф функции  $l(z)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$ . Возможны три случая.

1.  $|z_l| < 1$ . Вектор  $l$  сделает полный круг и  $\varphi_l = 2\pi$  (рис. 4.53,а).

2.  $|z_l| > 1$ . Суммарный поворот вектора  $l$  будет равен нулю (рис. 4.53,б).
3.  $|z_l| = 1$ . Корень  $z_l$  лежит на единичной окружности.

Рассмотрим случай 3 подробнее. В теории функций комплексного переменного контуром называется гладкая замкнутая кривая без самопересечений, охватывающая часть комплексной плоскости  $Z$  и не проходящая через полюсы. Возьмем в качестве контура  $C$  окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Контур  $C$  охватывает часть плоскости «устойчивых» полюсов системы. Если на контуре встречаются полюсы, то принято, чтобы контур  $C$  обходил эти полюсы по окружности бесконечно малого радиуса, оставляя их внутри контура (рис. 4.54).

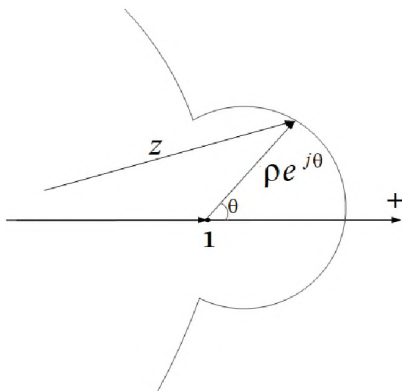


Рис. 4.54. Контур  $C$  в окрестности полюса  $z = 1$

Рассмотрим здесь только случай, когда на контуре лежит единичный корень  $z_l = 1$ . На основной части контура  $C$   $z = e^{j\omega T_0}$ . В окрестности полюса  $z_l = 1$  точки на контуре  $C$  подчиняются выражению:

$$z = 1 + \rho e^{j\Theta},$$

где  $\rho \rightarrow 0$ , а угол  $\Theta$  на рассматриваемом участке контура меняется от  $-\frac{\pi}{2}$  через 0 до  $+\frac{\pi}{2}$ .

С помощью такого подхода все полюсы, расположенные на окружности единичного радиуса, оказываются внутри контура  $C$ . Поэтому для таких полюсов функция  $l(z)$  имеет приращение фазы  $\phi_l = +2\pi$ .

Для построения годографа разомкнутой системы обсудим вид функции  $\psi_c(z)$ . На основной части контура  $C$   $\psi_c(z) = \psi(e^{j\omega T_0})$ . Если передаточная функция разомкнутой системы имеет  $\nu$  полюсов  $z = 1$ , то

$$\psi_c(z) = \frac{L(z)}{(z-1)^\nu Q_1(z)}$$

И при обходе этих полюсов по окружности бесконечно малого радиуса ( $z = 1 + e^{j\theta}$ ) будем иметь:

$$\psi_c(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L(1)}{(1 + \rho e^{j\theta} - 1)^\nu Q_1(1)} = \frac{A}{\rho^\nu} e^{-j\nu\theta},$$

Таким образом, на рассматриваемом участке годографа функция  $\psi_c(z)$  представляет собой дугу бесконечно большого радиуса, которая при обходе контура в положительном направлении поворачивается на угол  $-\nu\theta$ . Этот участок функции  $\psi_c(z)$  и, соответственно,  $W(z)$  называется расширением функций  $\psi_c^D(j\omega)(W^D(j\omega))$ .

Мы нашли, что суммарный поворот вектора  $\psi$  по всем корням числителя  $L$  равен  $\Delta\phi_L = 2\pi(n - m_L)$ , а по всем корням знаменателя  $Q$   $\Delta\phi_Q = 2\pi(n - m_Q)$ . Суммарный поворот угла для всей функции  $\psi$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$  равен

$$\Delta\phi_\psi = \Delta\phi_L - \Delta\phi_Q = 2\pi(m_Q - m_L).$$

Если замкнутая система устойчива, то она не имеет неустойчивых полюсов, то есть  $m_L = 0$ . Тогда, с учетом приведенных выше рассуждений, при изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$  приращение фазы расширенной характеристики  $\psi_c^D(j\omega)$  равно  $\Delta\phi_\psi = 2\pi m_Q$ .

Информативной частью является интервал  $0 \rightarrow \frac{\omega_0}{4} \rightarrow \frac{\omega_0}{2}$ , так как вторая часть характеристики является зеркальным сопряженным отображением первой. На этом интервале  $\Delta\phi_\psi = \pi m_Q$ .

Так как  $\psi(z) = 1 + W(z)$ , то угол, на который поворачивается  $\psi(z)$  вокруг начала координат, такой же, как и угол, на который  $W(z)$  поворачивается вокруг точки  $(-1; j0)$ . Теорема доказана.

Следствие. Если  $\Delta\phi_\psi \neq \pi m_Q$  на интервале изменения  $\omega$  от 0 до  $\frac{\omega_0}{2}$ , то замкнутая система неустойчива и число ее неустойчивых корней равно  $m_l = m_Q - \frac{\Delta\phi_\psi}{\pi}$ .

Критерий можно сформулировать с использованием понятия переходов Цыпкина. Он полностью аналогичен критерию Найквиста для непрерывной системы.

## § 4.8. Билинейное преобразование

### 4.8.1. Сопоставление плоскостей комплексных переменных $p$ , $z$ , $\bar{p}$

Типовая, базовая структура разомкнутой ИС представлена на рис. 4.55.

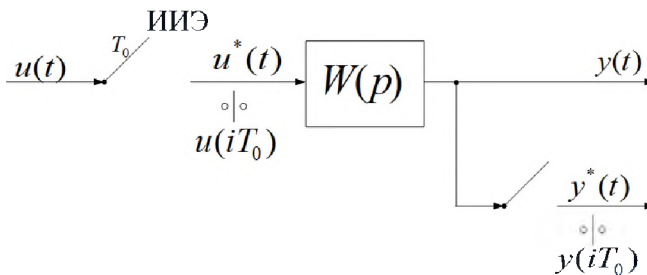


Рис. 4.55. Базовая структура ИС

На рис. 4.55 ИИЭ – идеальный импульсный элемент,  $W(p)$  – передаточная функция приведенной непрерывной части.

С помощью дискретного преобразования Лапласа переходят к дискретной передаточной функции:

$$W^D(p) = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]e^{-pT_0 i}.$$

В п. 4.6.2 показано, что  $W^D(p)$  – периодическая функция с периодом  $j\omega_0$ :

$$W^D(p + j\omega_0) = W^D(p).$$

В примере 4.7.2 мы имели:

1. Передаточная функция непрерывной части:

$$W(p) = \frac{k}{(0,62p + 1)(10,49p - 1)}$$

с полюсами:  $p_1 = -1,613, p_2 = -0,0953$ .

2. Дискретная передаточная функция:

$$W^D(p) = K \frac{0,05e^{pT_0} + 0,0305}{e^{pT_0} - 0,2)(e^{pT_0} - 1,1)},$$

где  $T_0 = 1$  с.

Нуль дискретной передаточной функции  $W^D(p)$  равен  $p_{N1}^D = -\ln \frac{0,0305}{0,05} = +0,494$ . Полюсы  $W^D(p)$  равны  $p_1^D = \ln 0,02 = -1,609, p_2^D = \ln 1,1 = +0,0953$ .

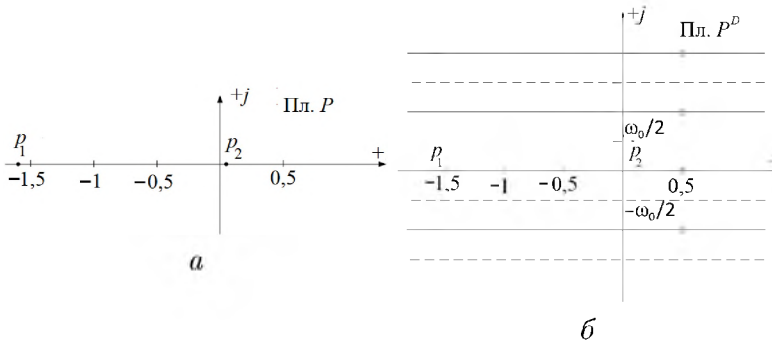


Рис. 4.56. Нули и полюсы: *a* – непрерывной части системы  $W(p)$ , *б* – функции  $W^D(p)$

Из рис. 4.56 видно, что ДПЛ приводит к дискретной передаточной функции  $W^D(p)$  с бесчисленным количеством полюсов и нулей. Для избавления от этой неприятности нужно всю плоскость комплексной переменной  $p^D$  разрезать на полосы шириной  $\omega_0$  ( $-\frac{\omega_0}{2} \div \frac{\omega_0}{2}$ ) и наложить их друг на друга. Тогда все лишние особенности функции (бесчисленное количество полюсов и нулей)  $W^D(p)$  наложатся друг на друга. После этого отрезок мнимой оси  $\pm \frac{\omega_0}{2}$  нужно деформировать в окружность единичного радиуса таким образом (рис. 4.57), чтобы вся левая половина исходной полосы превратилась в круг единичного радиуса, а вся правая ее часть – в остальную часть плоскости комплексной переменной  $z = e^{pT_0}$ .

В нашем примере (рис. 4.57):

$$p_1^D \Rightarrow z_1 = 0,2;$$

$$p_2^D \Rightarrow z_2 = 1,1;$$

$$p_{N1}^D \Rightarrow z_{N1} = -0,61.$$

Переход к комплексной переменной  $z$  и дискретной передаточной функции  $W(z)$  позволил избавиться от периодичности  $W^D(p)$ , но одновременно мнимая ось перестала ассоциироваться с границей устойчивости. На плоскости  $z$  границей устойчивости стала окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Одновременно пришлось отказаться от алгебраических критериев устойчивости.  $W^D(j\omega)$  не дробно-рациональная функция, а трансцендентная функция  $\omega$ , потерял инструмент логарифмических и частотных характеристик, типовых звеньев и т. д.

Для преодоления этих проблем перейдем к новой комплексной переменной  $\bar{p}$ . Разрежем единичную окружность на плоскости  $z$  в точке  $\omega = \frac{\omega_0}{2}$  и, потянув за точку  $A_1$  вверх, а точку  $A_2$  вниз, растянем окружность единичного радиуса на плоскости  $z$  в вертикальную бесконечную прямую, назначив ее мнимой осью плоскости новой комплексной переменной  $\bar{p}$ . При этом круг единичного радиуса на плоскости  $z$  превращается в левую полуплоскость плоскости  $\bar{p}$ , а вся остальная часть плоскости  $z$  – в правую полуплоскость плоскости  $\bar{p}$  (рис. 4.57). Переход от комплексной переменной  $z$  к комплексной переменной  $\bar{p}$  и обратно осуществляется следующими уравнениями:

$$z^{-1} = \frac{1 - \frac{T_0 \bar{p}}{2}}{1 + \frac{T_0 \bar{p}}{2}}, \quad (4.8.1)$$

$$\bar{p} = \frac{2}{T_0} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (4.8.2)$$

Пара уравнений (4.8.1), (4.8.2) называется **билинейным преобразованием**.

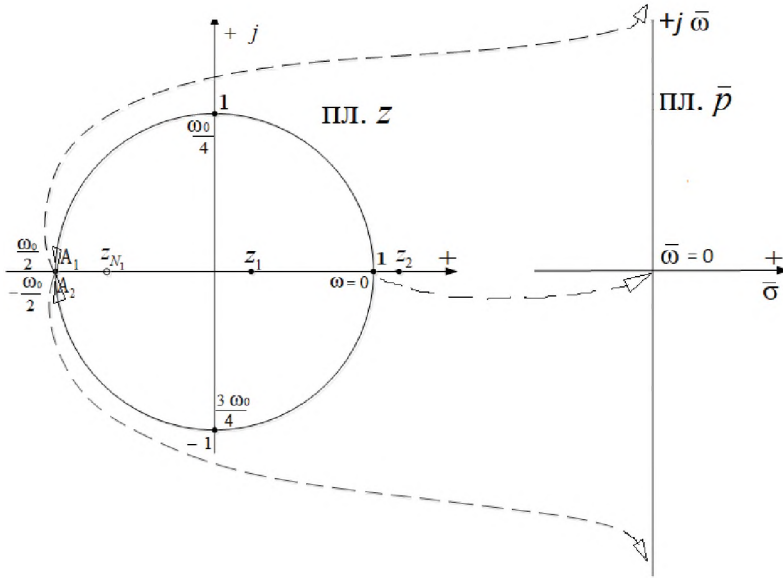


Рис. 4.57. Переход к комплексной переменной  $\bar{p}$

**ПРИМЕР 4.8.1**

Найти дискретную передаточную функцию комплексной переменной  $\bar{p}$  разомкнутой системы из примера 4.7.2.

В примере 4.7.2 была получена дискретная передаточная функция разомкнутой системы:

$$W^D(z) = k \frac{0,05z + 0,0305}{(z - 0,2)(z - 1,1)}.$$

С помощью билинейного преобразования (4.8.2) перейдем от комплексной переменной  $z$  к комплексной переменной  $\bar{p}$ . Получим передаточную функцию:

$$W(\bar{p}) = k \frac{(1 + 0,1211\bar{p})(1 - 0,5\bar{p})}{(1 + 0,75\bar{p})(-1 + 10,5\bar{p})}. \quad (4.8.3)$$

Эта функция имеет два нуля:

$$\bar{r}_1 = -8,258; \bar{r}_2 = +2,$$

и два полюса:

$$\bar{p}_1 = -1,333; \bar{p}_2 = +0,0953.$$

Заметим, что статический коэффициент дискретной передаточной функции  $W(\bar{p})$  равен статическому коэффициенту непрерывной части системы  $W(p)$ . Обе системы (непрерывная и дискретная) неустойчивы, так как  $p_1$  и  $\bar{p}_1$  лежат в правой полуплоскости.

Передаточная функция  $W(\bar{p})$  является дробно-рациональной функцией комплексной переменной  $\bar{p}$ .

Сравнение плоскостей  $p$  и  $\bar{p}$  показывает, что отображение точек основной полосы плоскости  $p$  на плоскость  $\bar{p}$  нелинейно. Без искажения отображается только точка  $p = 0$ . Следовательно, полюсы дискретной системы оказываются смещенными относительно их расположения в плоскости  $p$ . Это смещение возрастает по мере их удаления от начала координат.

Можно показать, что в области, ограниченной окружностью  $|pT_0| = 1$ , отклонение полюсов дискретной системы  $\bar{p}_v$  от полюсов непрерывной системы не превышает 10%. Можно показать, что для этой области  $\bar{p} \approx p$ , то есть все полюсы отображаются в себя. Таким образом, величина периода квантования по времени, при котором все собственные движения непрерывной системы точно воспроизводятся дискретной системой, определяется по формуле:

$$T_0 < \frac{1}{\max(\lambda_i)}, \quad (4.8.4)$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы динамики  $A$  исходной системы.

#### 4.8.2. Псевдочастотные характеристики. Псевдочастотный синтез ИСАУ

Комплексная переменная  $\bar{p}$  имеет вещественную и мнимую части:

$$\bar{p} = \bar{\sigma} + j\bar{\omega}. \quad (4.8.5)$$

Воспользуемся формулой (4.8.2) и запишем ее, заменив  $z$  на  $e^{(\sigma+j\omega)T_0}$ :

$$\bar{p} = \frac{2}{T_0} \frac{1 - e^{-(\sigma+j\omega)T_0}}{1 - e^{-(\sigma+j\omega)T_0}}.$$

При  $\sigma = 0$  эта формула примет вид:

$$\bar{p} = \frac{2}{T_0} \frac{1 - e^{-j\omega T_0}}{1 - e^{-j\omega T_0}} = \frac{2}{T_0} \frac{e^{j\frac{\omega T_0}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_0}{2}}}{e^{j\frac{\omega T_0}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_0}{2}}} = j \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}.$$

С учетом уравнения (4.8.5) имеем:

$$\bar{\omega} = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}, \quad (4.8.6)$$

где  $\bar{\omega}$  – псевдочастота.

Очевидно, что с уменьшением  $T_0\omega$  частота и псевдочастота сближаются. Если известна передаточная функция  $W(\bar{p})$ , то элементарно записывается:

$$W(j\bar{\omega}) = W(\bar{p}) \Big|_{\bar{p}=j\bar{\omega}}. \quad (4.8.7)$$

Передаточную функцию можно разложить на простейшие множители, например:

$$W(\bar{p}) = K \frac{\bar{T}_k \bar{p} + 1}{(\bar{T}_l \bar{p} + 1)(\bar{T}_v \bar{p}^2 + 2\bar{\xi}_v \bar{T}_v \bar{p} + 1)}, \quad (4.8.8)$$

воспользоваться инструментом типовых звеньев, построить псевдочастотные характеристики, определить запасы устойчивости, провести псевдочастотный синтез.

#### ПРИМЕР 4.8.2

Для разомкнутой системы с дискретной передаточной функцией (4.8.3):

$$W(\bar{p}) = \frac{(1 + 0,1211\bar{p})(1 - 0,5\bar{p})}{(1 + 0,75\bar{p})(-1 + 10,5\bar{p})}.$$

1. Построить псевдочастотные характеристики.
2. Проанализировать устойчивость замкнутой системы.
3. Используя метод желаемых ЛФЧХ, рассчитать ПФ корректирующего звена  $W_{к.з}(\bar{p})$ ,  $W_{к.з}(z)$ .
4. Получить алгоритм СУ.

Как было показано в примере 4.8.1, разомкнутая дискретная система неустойчива, так как ее ПФ  $W(\bar{p})$  имеет один положительный полюс  $\bar{p}_2 = +0,0952$ .

Получим комплексную ПФ  $W(j\bar{\omega})$ , воспользовавшись уравнением (4.8.7):

$$W(j\bar{\omega}) = \frac{(1 + j0,1211\bar{\omega})(1 - j0,5\bar{\omega})}{(1 + j0,75\bar{\omega})(-1 + j10,5\bar{\omega})}$$

Значения сопрягающих частот этой ПФ:

$$\bar{\omega}_1^D = \frac{1}{10,5} = 0,0952; \quad \bar{\omega}_2^D = \frac{1}{0,75} = 1,333;$$

$$\bar{\omega}_1^N = \frac{1}{0,5} = 2; \quad \bar{\omega}_2^N = \frac{1}{0,1211} = 8,258.$$

На рис. 4.58 представлена псевдочастотная характеристика  $W(\bar{p})$ .

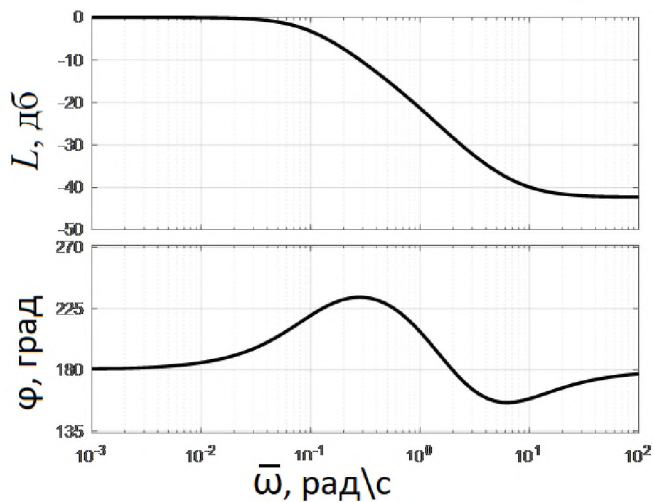


Рис. 4.58. Псевдочастотная характеристика  $W(\bar{p})$  при  $K = 1$

Из рис. 4.58 видно, что замкнутая система неустойчива, так как на всех частотах  $|W|$  и суммарное число переходов равно нулю. Разомкнутая система имеет один неустойчивый полюс, и для устойчивости замкнутой системы требуется половина положительного пере-

да. Если принять  $K = 3.16$ , то в соответствии с рис. 4.59 замкнутая система будет устойчивой, так как получим  $+0.5$  перехода.

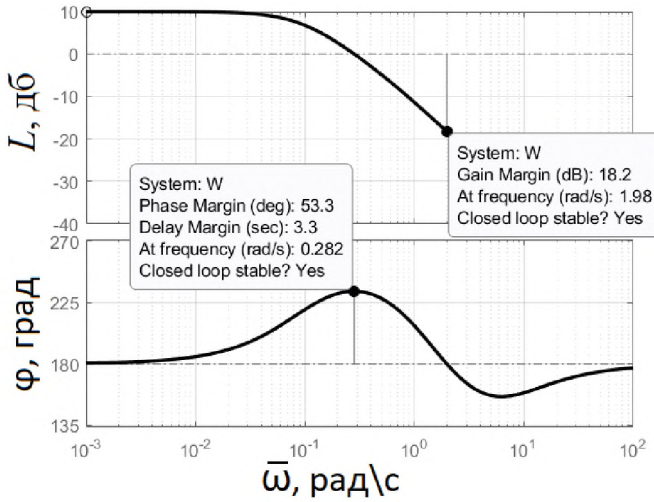


Рис. 4.59. Псевдочастотная характеристика  $W(\bar{p})$  при  $K = 3.16$

Введем корректировочное звено, псевдочастотная характеристика системы с корректирующим звеном представлена на рис. 4.60

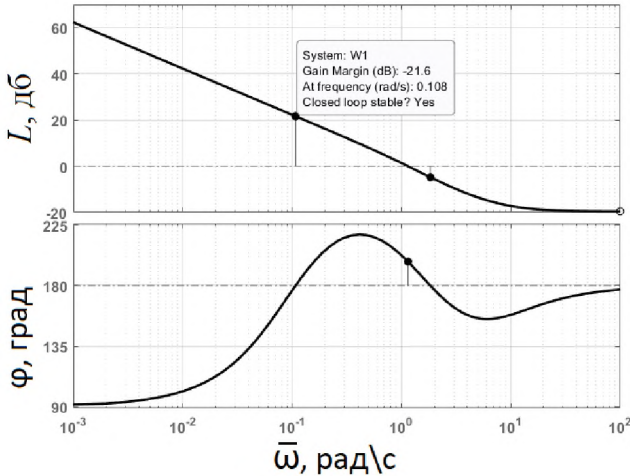


Рис. 4.60. Псевдочастотная характеристика  $W(\bar{p}) \cdot W_{к.з}(\bar{p})$

Проанализируем устойчивость полученной системы: так как корректировочное звено содержит  $\bar{p}$  в знаменателе (наклон амплитуды в псевдочастотной характеристике 20 дБ на декаду), то в этой характеристике необходимо делать доворот в начале на  $+\frac{\pi}{2}$ , следовательно, начинаться фаза будет с  $180^\circ$ . Полученная система имеет  $+\frac{1}{2}$  перехода ( $-\frac{1}{2}$  переход в начале псевдочастотной характеристики,  $+1$  переход на частоте 0, 1рад/с), следовательно, замкнутая система будет устойчивой.

На основании рис. 4.60 запишем передаточную функцию корректирующего звена:

$$W_{к.з}(\bar{p}) = \frac{K_{к.з}(1 + \bar{T}_{к.з}\bar{p})}{\bar{p}},$$

где  $\frac{1}{T_{к.з}} = 0,0952$ ,  $\bar{T}_{к.з} = 10,5$ ;  $K_{к.з} = 1,3$ .

Пользуясь формулой (4.8.2), найдем  $W_{к.з}(z)$ :

$$W_{к.з}(\bar{p}) = 1,3 \frac{1 + 10,5 \frac{2}{T_0} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{\frac{2}{T_0} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = 1,3 \frac{11 - 10z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Построим алгоритмическую схему корректирующего звена (рис. 4.61).

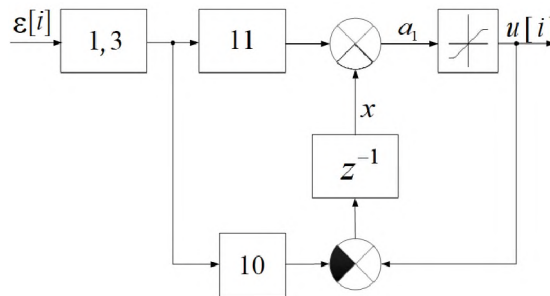


Рис. 4.61. Алгоритмическая схема корректирующего звена

В составе корректирующего звена присутствует интегратор с передаточной функцией:

$$W_n(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Этот интегратор должен быть дополнен устройством, предотвращающим заброс при наличии ограничителей сигналов в исполнительном механизме, так называемым *antiwindar* [4]. В рассматриваемой алгоритмической схеме *antiwindar* можно реализовать, установив ограничитель в прямой цепи интегратора (рис. 4.61). В соответствии с полученной схемой алгоритм, реализующий корректирующее звено, приведен ниже.

1. Установка в блоке начальных условий:

$$x := x_0.$$

2. Основной цикл:

$$a_1 := x + \varepsilon \cdot 1,3 \cdot 11;$$

$$u := a_1;$$

$$\text{if } \text{abs}(a_1) > u_{\text{supr}}$$

$$u := u_{\text{supr}} \cdot \text{sign}(a_1);$$

*end*

$$x := u - 1,3 \cdot 10\varepsilon.$$

На рис. 4.62 представлена переходная функция синтезированной замкнутой системы.

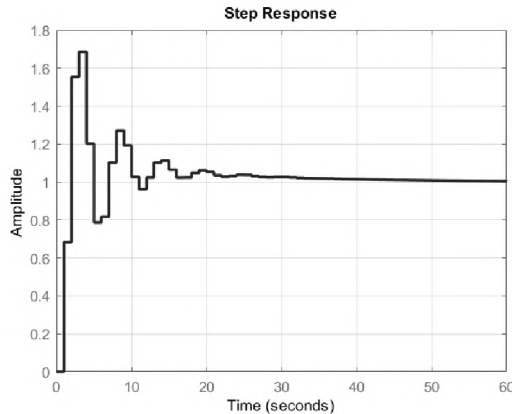


Рис. 4.62. Переходная функция замкнутой системы

На основе рассмотренного примера может быть предложена следующая последовательность частотного синтеза для импульсных систем:

1. Определить  $W(z)$  объекта (неизменяемой части системы).
2. С помощью билинейного преобразования найти  $W(\bar{p})$ , откуда определить  $W(j\bar{\omega})$ . Для удобства  $W(\bar{p})$  можно разложить на простейшие множители (4.8.7).
3. Построить псевдочастотные логарифмические характеристики.
4. Определить запасы устойчивости и прочие косвенные оценки качества.
5. Аналогично методом частотного синтеза непрерывных систем определить ПФ корректирующего звена  $W_{к.з}(\bar{p})$ .
6. С помощью формулы (4.8.2) перейти к  $W_{к.з}(z)$  и далее, к разностному уравнению и алгоритмической схеме корректирующего звена.

#### § 4.9. Синтез линейной ИСАУ с максимальным быстродействием

В непрерывных и в импульсных системах существует понятие «степень устойчивости»  $h$ , которое определяется как расстояние в устойчивой системе до мнимой оси плоскостей  $p$  и  $\bar{p}$  ближайшего к ней полюса. Таким образом,  $h$  определяет время переходного процесса, время регулирования. Чем больше  $h$ , тем быстрее заканчиваются переходные процессы. Теоретически при стремлении  $h$  к  $\infty$  время регулирования стремится к нулю. При использовании  $z$ -преобразования, где  $z = e^{(\sigma+j\omega)T_0}$ , когда вещественные части  $\sigma_i$  всех полюсов стремятся к  $-\infty$ , все  $z_i$  стремятся к нулю, что физически реализуемо. Таким образом, в ИСАУ можно реализовать максимальное быстродействие системы управления.

На рис. 4.63 приведена иллюстрация понятия «степень устойчивости» для непрерывных и импульсных систем.

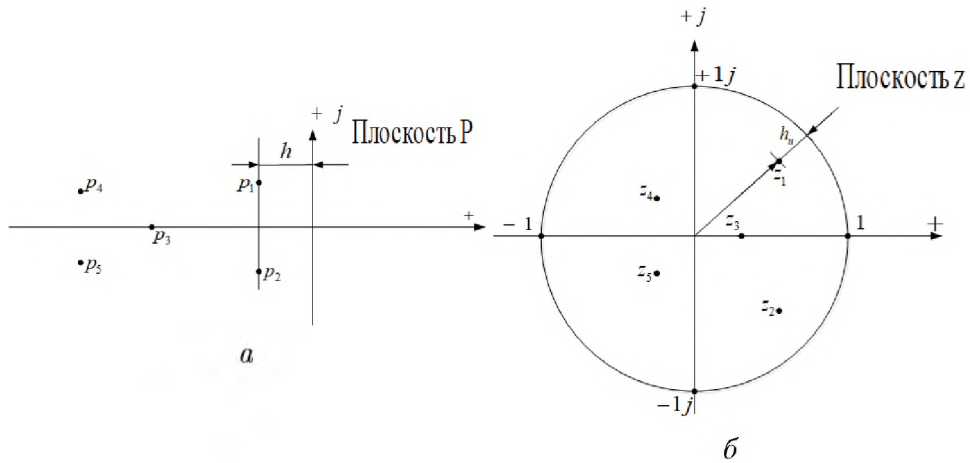


Рис. 4.63. Иллюстрация понятия «степень устойчивости»: *а* – для непрерывных систем, *б* – для импульсных систем

#### 4.9.1. Система со всеми нулевыми полюсами как фильтр с конечной памятью

Рассмотрим замкнутую систему с передаточной функцией:

$$W_3(z) = \frac{b_0 z^l + b_1 z^{l-1} + \dots + b_l z^0}{z^\chi}, \quad (4.9.1)$$

где  $l \leq \chi$ . Характеристический полином этой системы имеет все  $\chi$  полюсов в начале координат импульсной системы:

$$z_1 = z_2 = \dots = z_\chi = 0.$$

Перепишем  $W_3(z)$  в виде:

$$W_3(z) = b_0 z^{-(\chi-l)} + b_1 z^{-(\chi-(l-1))} + \dots + b_l z^{-\chi}. \quad (4.9.2)$$

С другой стороны, передаточная функция импульсной системы определяется как  $z$ -преобразование весовой функции:

$$W_3(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w_3[i] z^{-i}. \quad (4.9.3)$$

Сопоставим уравнение (4.9.2) и уравнение (4.9.3):

$$\begin{aligned}
 w_3[0] &= w_3[1] = w_3[2] = \dots = w_3[\chi - l - 1] = 0; \\
 w_3[\chi - l] &= b_0; \quad w_3[\chi - (l - 1)] = b_1; \quad w_3[\chi - (l - 2)] = b_2; \dots \\
 w_3[\chi - 1] &= b_{l-1}; \quad w_3[\chi] = b_l; \\
 w_3[i] \Big|_{i > \chi} &= 0.
 \end{aligned}$$

На рис. 4.64 показана весовая решетчатая функция рассматриваемой замкнутой системы.

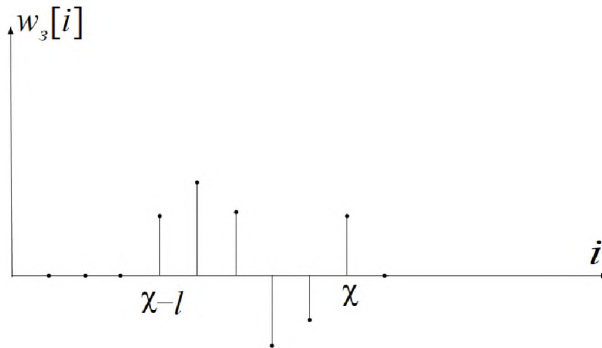


Рис. 4.64. Весовая функция системы с конечной памятью

Пусть командный сигнал  $v[i]$  замкнутой системы заканчивается в момент времени  $i = q$  (рис. 4.65).

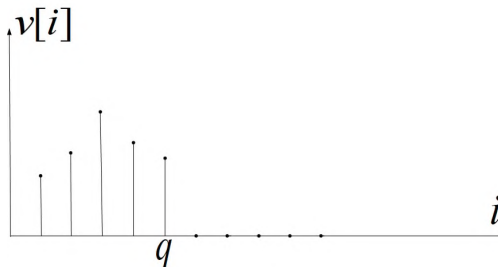


Рис. 4.65. Командный сигнал

Реакция на последнее значение командного сигнала  $v[q]$  будет  $w_3[i - q]$  ( $i \geq q$ ). Но так как  $w_3[m] = 0$  при  $m > \chi$ , то  $w_3[i - q] = 0$  при  $i - q > \chi$ , то есть при  $i > q + \chi$ . Система полностью забывает

все, что было более чем  $\chi$  тактов назад. Такие системы называются системами с конечной памятью.

#### 4.9.2. Синтез системы с максимальным быстродействием

Рассмотрим структурную схему, представленную на рис. 4.66, где  $W(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}$  – дискретная передаточная функция неизменяемой части системы,  $D(z)$  – искомая передаточная функция корректирующего звена, предназначенного для реализации в системе максимального быстродействия. Иначе говоря, для реализации минимального времени переходных процессов.

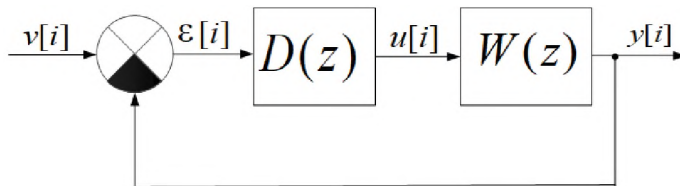


Рис. 4.66. К синтезу максимального быстродействия

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_3(z) = \frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)}. \quad (4.9.4)$$

Потребуем, чтобы все полюсы замкнутой системы были нулевыми:

$$W_3(z) = \frac{A(z)}{z^\chi}. \quad (4.9.5)$$

В физически реализуемых системах порядок числителя  $\alpha$  передаточной функции не должен превышать порядок знаменателя  $\chi$ :

$$\chi \geq \alpha. \quad (4.9.6)$$

Для получения минимального времени регулирования необходимо обеспечить минимально возможную величину  $\chi$ .

Возможна ситуация, когда в моменты времени квантования по времени  $iT_0$   $y[i]$  успокаивается за  $\chi$  тактов, а в промежутках между

ними  $y(t)$  расходится. Для предотвращения такой ситуации потребуем, чтобы вход неизменяемой части системы  $u[i]$  также заканчивался за  $\chi$  тактов управления. Потребуем:

$$W_{vu}(z) = \frac{D(z)}{1 + D(z)W(z)} = \frac{B(z)}{z^\chi}. \quad (4.9.7)$$

Как и в предыдущем случае, должно быть:

$$\chi \geq \beta, \quad (4.9.8)$$

где  $\beta$  – порядок числителя  $W_{vu}(z)$ .

Умножив обе части уравнения (4.9.7) на  $W(z)$ , получим:

$$\frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)} = \frac{B(z)W(z)}{z^\chi} = \frac{A(z)}{z^\chi}. \quad (4.9.9)$$

Из уравнения (4.9.9) следует, что:

$$A(z) = B(z)W(z) = \frac{B(z)R(z)}{Q(z)}. \quad (4.9.10)$$

Из (4.9.10) следует, что  $B(z)$  должно без остатка делиться на  $Q(z)$ , следовательно,

$$\beta \geq n, \quad (4.9.11)$$

где  $n$  – порядок  $Q(z)$ . Так как  $\beta \leq \chi$ , то должно быть:

$$\chi \geq n.$$

Откуда следует:

$$\chi_{\min} = n. \quad (4.9.12)$$

При этом из (4.9.8) и (4.9.12) следует:

$$\beta = n. \quad (4.9.13)$$

Это означает, что степень полинома, полученного от деления  $B(z)$  на  $Q(z)$ , равна нулю:

$$\frac{B(z)}{Q(z)} = k_1$$

и

$$A(z) = k_1 R(z). \quad (4.9.14)$$

Из (4.9.4), (4.9.5) и (4.9.14) получаем:

$$\frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)} = \frac{k_1 R(z)}{z^n}.$$

Подставив в это уравнение  $W(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}$  и произведя элементарные преобразования, получим:

$$D(z) = \frac{k_1 Q(z)}{z^n - k_1 R(z)}. \quad (4.9.15)$$

Теперь в нашем распоряжении есть величина  $k_1$ . Потребуем единичной статике для системы, то есть

$$W_3(z) \Big|_{z=1} = 1, \quad (4.9.16)$$

что дает  $k_1 = \frac{1}{R(1)}$  и

$$D(z) = \frac{Q(z)}{R(1)z^n - R(z)}. \quad (4.9.17)$$

Следует отметить, что  $z = 1$  является полюсом функции  $D(z)$ . Следовательно,  $R(1)z^n - R(z)$  должен без остатка делиться на  $(z - 1)$ .

#### ПРИМЕР 4.9.1

Обратимся к примеру 4.7.2. В этом примере передаточная функция неизменяемой части (4.7.8):

$$W(z) = k \frac{0,05z + 0,0305}{(z - 0,2)(z - 1,1)}, \quad T_0 = 1 \text{ с.}$$

Примем  $k = 1$  и в соответствии с (4.9.17) запишем:

$$D(z) = \frac{(z - 0,2)(z - 1,1)}{0,0805z^2 - 0,05z - 0,0305}. \quad (4.9.18)$$

Имея информацию о наличии единичного полюса у ПФ  $D(z)$ , нетрудно представить  $D(z)$  в виде:

$$D(z) = \frac{(z - 0,2)(z - 1,1)}{(0,0805z + 0,0305)(z - 1)}.$$

Перейдем к отрицательным степеням оператора  $z$ :

$$D(z) = \frac{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 1,1z^{-1})}{(0,0805 + 0,0305z^{-1})(1 - z^{-1})}. \quad (4.9.19)$$

Передаточная функция от командного сигнала  $v$  до выхода  $y$  (рис. 4.66):

$$W_{vy}(z) = \frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)} = 0,621z^{-1} + 0,379z^{-2}. \quad (4.9.20)$$

Передаточная функция от командного сигнала  $v$  до управления  $u$  (рис. 4.66):

$$W_{vu}(z) = \frac{D(z)}{1 + D(z)W(z)} = 12,42 - 16,15z^{-1} + 2,73z^{-2}. \quad (4.9.21)$$

На рис. 4.67 показаны процессы  $u[i]$  и  $y[i]$ .

#### ПРИМЕР 4.9.2

В этом примере обсудим алгоритм реализации корректирующего звена.

В предыдущем примере получена ПФ корректирующего звена  $D(z)$ , обеспечивающего обработку командного сигнала за минимальное время, равное  $nT_0$ , где  $n$  – порядок неизменяемой части. Подтверждено, что полученная система ведет себя как фильтр с конечной памятью. В соответствии с (4.9.18) запишем:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{(z - 0,2)(z - 1,1)}{0,0805z^2 - 0,05z - 0,0305} = \frac{1 - 1,3z^{-1} + 0,22z^{-1}}{0,0805 - 0,05z^{-1} - 0,0305z^{-2}} = \\ &= 12,42 \frac{1 - 1,3z^{-1} + 0,22z^{-1}}{1 - 0,621z^{-1} - 0,379z^{-2}}. \end{aligned} \quad (4.9.22)$$

С этой ПФ можно сопоставить множество алгоритмических схем. Одна из них приведена на рис. 4.68.

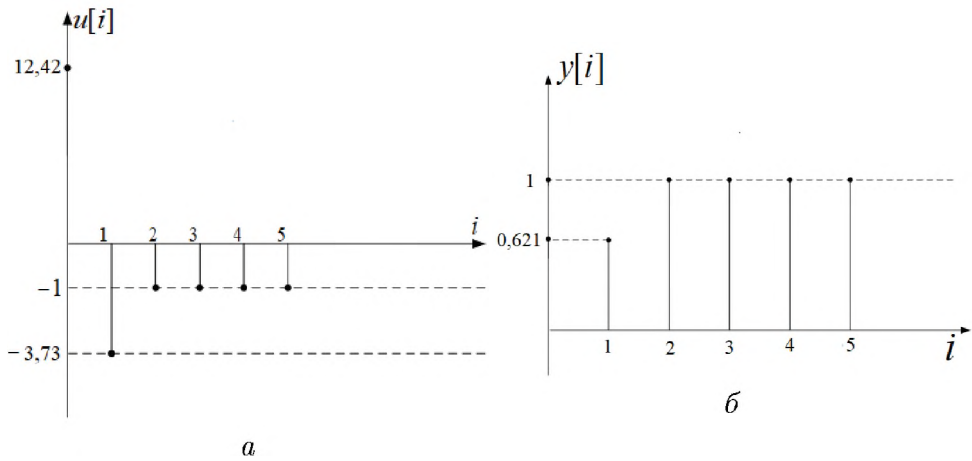


Рис. 4.67. Управление (а) и выход (б) в системе с максимальным быстродействием

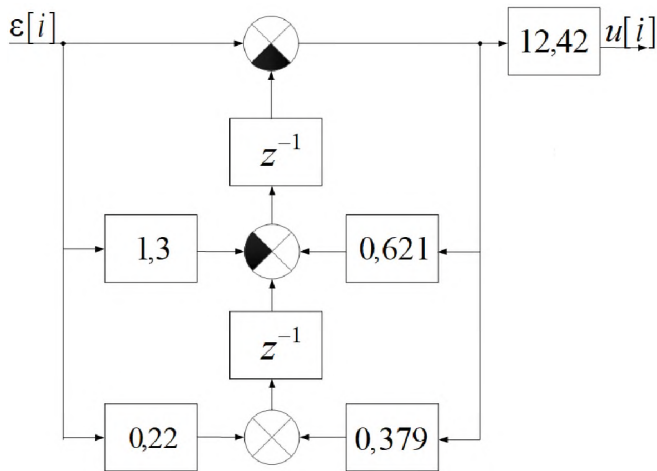


Рис. 4.68. Один из вариантов алгоритмической схемы корректирующего звена  $D(z)$

Перейдем от ПФ к разностному уравнению:

$$\begin{aligned} u[i] - 0,621u[i - 1] - 0,379u[i - 2] = \\ = 12,42(\varepsilon[i] - 1,3\varepsilon[i - 1] + 0,22\varepsilon[i - 2]). \end{aligned} \quad (4.9.23)$$

Откуда непосредственно следует алгоритм вычисления текущего значения выходного сигнала:

$$u[i] = 12,42(\epsilon[i] - 1,3\epsilon[i - 1] + 0,22\epsilon[i - 2]) + 0,621u[i - 1] + 0,379u[i - 2]. \quad (4.9.24)$$

Как уже было отмечено выше, среди полюсов функции  $D(z)$  имеется единичный:  $z = 1$ , что означает, что  $D(z)$  содержит скрытый интегратор, обладает интегрирующими свойствами, и так как в исполнительном механизме объекта имеется ограничение, то возможны забросы интегратора. Поэтому в алгоритме реализации  $D(z)$  обязательно должен быть выделен этот интегратор. Воспользуемся формулой (4.9.23). Ее нетрудно преобразовать к виду:

$$D(z) = 12,42 \frac{1 - 1,1z^{-1}}{1 + 0,379z^{-1}} (1 - 0,02z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (4.9.25)$$

В формуле (4.9.25) последний сомножитель является интегратором. Алгоритмическая реализация ПФ (4.9.25) представлена на рис. 4.68.

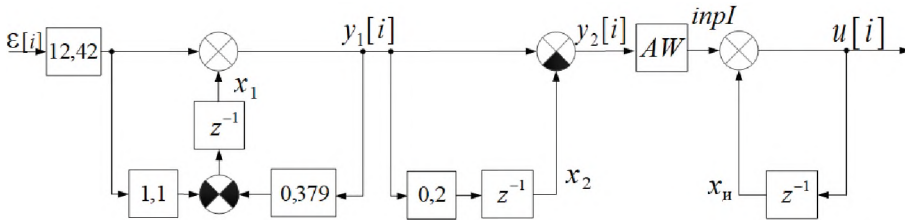


Рис. 4.69. Алгоритмическая схема с выделением интегратора

Алгоритмическая схема содержит модуль AW (antiwindup), о котором говорилось ранее. В соответствии с полученной алгоритмической схемой алгоритм, реализующий ПФ  $D(z)$ , приведен ниже.

1. Установка в блоке начальных условий:

$$\begin{aligned} x_1 &:= x_{10}; \\ x_2 &:= x_{20}; \\ x_n &:= x_{n0}. \end{aligned}$$

2. Основной блок с циклом  $T_0$ :

$$y_1 := x_1 + 12,42\varepsilon;$$

$$y_2 := y_1 - x_2.$$

2.1. Блок antiwindap:

$$\text{inpI} := y_2;$$

$$\text{if } y_2 \geq \text{SatMax and } \varepsilon > 0$$

$$\text{inpI} := 0;$$

end

$$\text{if } y_2 \leq \text{SatMin and } \varepsilon < 0$$

$$\text{inpI} := 0;$$

end

2.2. Блок интегратора:  $u := \text{InpI} + x_{\text{и}}$ .

2.3. Выдача сигнала  $u$  на вход неизменяемой части объекта.

2.4. Переопределение памяти:

$$x_1 := -12,42 \cdot 1,1\varepsilon - 0,379y_1;$$

$$x_2 := 0,2y_1;$$

$$x_{\text{и}} := u.$$

2.5. Ожидание момента окончания текущего цикла.

2.6. Передача управления на п. 2.

В этой программе  $\text{SatMin}$  и  $\text{SatMax}$  – нижнее и верхнее ограничения в исполнительном механизме.

## § 4.10. Векторно-матричное описание непрерывных объектов с дискретным управлением

### 4.10.1. Системы с цифроаналоговым преобразователем нулевого порядка

Рассмотрим непрерывный объект с дискретным управлением. Его схема представлена на рис. 4.70.

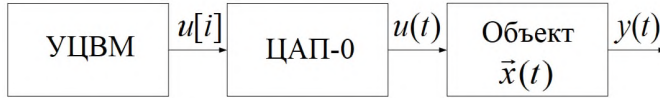


Рис. 4.70. Схема непрерывного объекта с дискретным управлением

Допустим, объект задается в векторно-матричном виде:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t).$$

Решением этого уравнения является вектор-функция

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)d\tau.$$

Зафиксируем моменты времени  $t_0 = iT_0$  и  $t_1 = (i+1)T_0$ . Тогда

$$\vec{x}[i+1] = e^{AT_0}\vec{x}[i] + \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} e^{A[(i+1)T_0-\tau]}B\vec{u}(\tau)d\tau.$$

Так как  $\vec{u}(\tau)$  является выходом цифроаналогового преобразователя ЦАП-0, то на интервале времени  $iT_0 < \tau < (i+1)T_0$  сигнал примет вид  $\vec{u}(\tau) = \vec{u}[i]$ . Вынеся  $\vec{u}[i]$  за знак интеграла, получим:

$$\vec{x}[i+1] = e^{AT_0}\vec{x}[i] + \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} e^{A[(i+1)T_0-\tau]}Bd\tau \cdot \vec{u}[i]. \quad (4.10.1)$$

Введем переходную матрицу  $F(\tau) = e^{A\tau}$ . Тогда

$$e^{AT_0} = F(T_0), \quad e^{A[(i+1)T_0-\tau]} = F[(i+1)T_0 - \tau]. \quad (4.10.2)$$

Произведем замену переменной интегрирования:  $\sigma = (i+1)T_0 - \tau \rightarrow \tau = (i+1)T_0 - \sigma$ . Найдем новые пределы интегрирования. Если  $\tau = iT_0$ , то  $\sigma = T_0$ . Если  $\tau = (i+1)T_0$ , то  $\sigma = 0$ .

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}\vec{x}[i+1] &= F(T_0)\vec{x}[i] + \int_{\sigma=T_0}^{\sigma=0} F(\sigma)Bd(-\sigma) \cdot \vec{u}[i] = \\ &= F(T_0)\vec{x}[i] + \int_0^{T_0} F(\sigma)Bd\sigma \cdot \vec{u}[i].\end{aligned}\quad (4.10.3)$$

Запишем последнее выражение в компактном виде:

$$\vec{x}[i+1] = F\vec{x}[i] + H\vec{u}[i], \quad (4.10.4)$$

где

$$F = F(T_0) = e^{AT_0},$$

$$H = H(T_0) = \int_0^{T_0} e^{A\tau} B d\tau = \int_0^{T_0} e^{A\tau} d\tau \cdot B = \int_0^{T_0} F(\tau) d\tau \cdot B. \quad (4.10.5)$$

#### 4.10.2. Импульсный элемент с укороченным импульсом

Рассмотрим АИМ-I, когда амплитуда импульсов равна значениям квантуемого сигнала в моменты замыкания амплитудного элемента, а длительность импульса  $T_{\text{и}}$  – постоянная величина меньше периода квантования  $T_0$ :

$$T_{\text{и}} < T_0.$$

При этом

$$\vec{x}[i+1] = e^{AT_0}\vec{x}[i] + \int_{iT_0}^{iT_0+T_{\text{и}}} e^{A[(i+1)T_0-\tau]} B d\tau \cdot \vec{u}[i]. \quad (4.10.6)$$

Преобразуем эту формулу к виду:

$$\vec{x}[i+1] = F(T_0)\vec{x}[i] + \int_{iT_0}^{iT_0+T_n} e^{A[iT_0+T_n-\tau]} e^{A[T_0-T_n]} B d\tau \cdot \vec{u}[i].$$

Произведём замену переменной  $\tau$  на  $\xi$  в соответствии с равенством:

$$iT_0 + T_n - \tau = \xi$$

Тогда

$$d\tau = d(-\xi); \quad \text{при } \tau = iT_0 \quad \xi = T_n, \quad \text{при } \tau = iT_0 + T_n \quad \xi = 0.$$

Теперь выражение (4.10.6) примет вид:

$$\vec{x}[i+1] = F(T_0)\vec{x}[i] + e^{A[T_0-T_n]} \int_{\xi=0}^{T_n} e^{A\xi} \cdot B d(\xi) \vec{u}[i]. \quad (4.10.7)$$

Дальнейшее рассмотрение приведем в следующем примере.

#### ПРИМЕР 4.10.1

Пусть передаточная функция непрерывной части системы

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}, \quad (4.10.8)$$

чему соответствует уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t). \quad (4.10.9)$$

Пусть  $K = 10$ ;  $T = 2$  с;  $T_0 = 0,1$  с;  $T_n = \frac{T_0}{2}$ .

Из уравнения (4.10.9) следует, что  $A = -\frac{1}{T}$ ;  $B = \frac{K}{T}$ .

Подставим данные примера в выражение (4.10.7):

$$\begin{aligned} \bar{x}[i+1] &= e^{-\frac{T_0}{T}} \bar{x}[i] - e^{-\frac{T_0}{2T}} K \int_{\xi=0}^{\frac{T_0}{2}} e^{-\frac{\xi}{T}} d\left(-\frac{\xi\tau}{T}\right) \cdot \bar{u}[i] = \\ &= e^{-\frac{T_0}{T}} \bar{x}[i] + K e^{-\frac{T_0}{2T}} (1 - e^{-\frac{T_0}{2T}}) \bar{u}[i] \end{aligned} \quad (4.10.10)$$

Этому уравнению соответствует дискретная передаточная функция:

$$W(z) = \frac{K e^{-\frac{T_0}{2T}} (1 - e^{-\frac{T_0}{2T}})}{z - e^{-\frac{T_0}{T}}}. \quad (4.10.11)$$

### 4.10.3. Система с цифроаналоговым преобразователем нулевого порядка с задержкой в выдаче управления (относительно момента измерения)

#### Задержка в объекте на $\tau < T_0$

Поскольку начальная часть каждого интервала  $T_0$  необходима для реализации вычислений в соответствии с алгоритмом управления, то выдача управляющего сигнала может быть получена спустя некоторое время после измерений в начале каждого такта. Другими словами, выдача управления (В) происходит с задержкой  $\tau$  относительно момента измерения состояния выхода (И) (рис. 4.71).

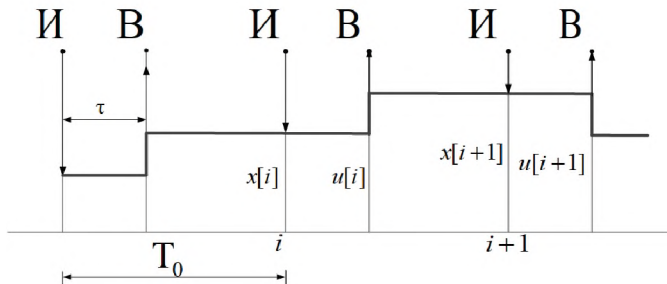


Рис. 4.71. Сигнал на выходе ЦАП с задержкой

Введем обозначения:  $t \rightarrow iT_0$ ,  $y = y[i]$ ;  $\vec{x}_{ob} = \vec{x}_{ob}[i]$ ;  $\vec{u}[i]$  – управление, выданное с задержкой  $\tau$  относительно момента  $iT_0$ .

Рассмотрим интервал  $iT_0 \leq t < (i+1)T_0$ .

При  $iT_0 \leq t < iT_0 + \tau$ ,  $\vec{u}(t) = \vec{u}[i-1]$ .

При  $iT_0 + \tau \leq t < (i+1)T_0$ ,  $\vec{u}(t) = \vec{u}[i]$ .

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ob}[i+1] &= F_{ob}(T_0)\vec{x}_{ob}[i] + \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} e^{A[(i+1)T_0-\sigma]} B\vec{u}_{ob}(\sigma) d\sigma = \\ &= F_{ob}(T_0)\vec{x}_{ob}[i] + \int_{iT_0}^{iT_0+\tau} e^{A[(i+1)T_0-\sigma]} d\sigma \cdot B\vec{u}[i-1] + \\ &\quad + \int_{iT_0+\tau}^{(i+1)T_0} e^{A[(i+1)T_0-\sigma]} d\sigma \cdot B\vec{u}[i]. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы по отдельности.

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_{\sigma=iT_0}^{iT_0+\tau} e^{A[(i+1)T_0-\sigma]} d\sigma \cdot B = \int_{iT_0}^{iT_0+\tau} \underbrace{F_{ob}[(i+1)T_0-\sigma]}_{F_{ob}(T_0) \cdot F_{ob}(iT_0-\sigma)} d\sigma \cdot B = \\ &= F_{ob}(T_0-\tau) \int_{\sigma=iT_0}^{iT_0+\tau} \underbrace{F_{ob}(iT_0+\tau-\sigma)}_{\xi} d\sigma \cdot B = \\ &= F_{ob}(T_0-\tau) \cdot \int_0^{\tau} F_{ob}(\xi) d\xi \cdot B = F_{ob}(T_0-\tau) \cdot H_{ob}(\tau); \end{aligned} \quad (4.10.12)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_{\sigma=iT_0+\tau}^{(i+1)T_0} \underbrace{F_{ob}[(i+1)T_0-\sigma]}_{\xi} d\sigma \cdot B = \\ &= \int_{\xi=0}^{T_0-\tau} F_{ob}(\xi) d\xi B = H_{ob}(T_0-\tau). \end{aligned} \quad (4.10.13)$$

Таким образом:

$$\vec{x}_{ob}[i+1] = F_{ob}(T_0)\vec{x}_{ob}[i] + F_{ob}(T_0 - \tau)H_{ob}(\tau)\vec{u}[i-1] + H_{ob}(T_0 - \tau)\vec{u}[i].$$

Введем  $\vec{x}_\partial[i] = \vec{u}[i-1]$ . Тогда получим уравнение системы в векторно-матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_{ob}[i+1] \\ \vec{x}_\partial[i+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ob}(T_0) & F_{ob}(T_0 - \tau)H(\tau) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_{ob}[i] \\ \vec{x}_\partial[i] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{ob}(T_0 - \tau) \\ E \end{bmatrix} \vec{u}[i], \quad (4.10.14)$$

или

$$\vec{x}[i+1] = F\vec{x}[i] + H\vec{u}[i]. \quad (4.10.15)$$

### Задержка в объекте на целое число тактов

Начнем со структурной схемы, которая представлена на рис. 4.72.

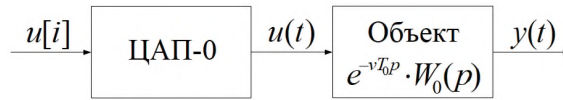


Рис. 4.72. Объект с задержкой на целое число  $\nu$  тактов управления

На этом рисунке используется оператор преобразования Лапласа  $e^{-\nu T_0 p}$  на величину  $\nu T_0$ . Аналогичный оператор преобразования существует и в теории  $z$ -преобразования —  $z^{-\nu}$  (рис. 4.73).

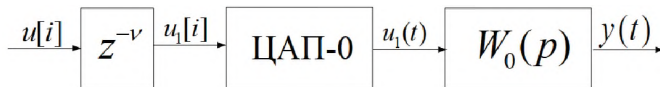


Рис. 4.73. Перенос оператора задержки в дискретную часть системы

ЦАП-0 совместно с оставшейся непрерывной частью  $W_0(p)$  позволяют получить соответствующее дискретное описание:

$$\vec{x}_0[i+1] = F_0\vec{x}_0[i] + H_0u[i]. \quad (4.10.16)$$

Приведем рассматриваемую структуру к виду, представленному на рис. 4.74, где задержка  $z^{-v}$  разложена в последовательно включенных  $v$  блоков задержек и введены дополнительные координаты состояния  $x_{д,v}[i]$ .

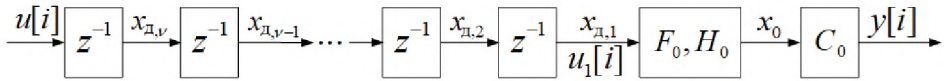


Рис. 4.74. Расчетная схема неизменяемой части в дискретном виде

В соответствии с этим рисунком запишем векторно-матричные уравнения неизменяемой части в дискретном виде:

$$\begin{aligned} x_0[i+1] &= F_0 \vec{x}_0[i] + H_0 x_{д,1}[i]; \\ x_{д,1}[i+1] &= x_{д,2}[i]; \\ x_{д,2}[i+1] &= x_{д,3}[i]; \\ &\dots\dots\dots \\ x_{д,v-1}[i+1] &= x_{д,v}[i]; \\ x_{д,v}[i+1] &= u[i], \end{aligned}$$

или в окончательном виде:

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_0[i+1] \\ \vec{x}_{д,1}[i+1] \\ \vec{x}_{д,2}[i+1] \\ \dots \\ \vec{x}_{д,v-2}[i+1] \\ \vec{x}_{д,v-1}[i+1] \\ \vec{x}_{д,v}[i+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & H_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_0[i] \\ \vec{x}_{д,1}[i] \\ \vec{x}_{д,2}[i] \\ \dots \\ \vec{x}_{д,v-2}[i] \\ \vec{x}_{д,v-1}[i] \\ \vec{x}_{д,v}[i] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[i] \quad (4.10.17)$$

и

$$\vec{x}_{ext}[i+1] = F_{ob} \vec{x}_{ext}[i] + H_{ob} u[i]. \quad (4.10.18)$$

#### 4.10.4. Импульсные системы с кратными частотами квантования

Во многих технических приложениях в управляемом объекте легко выделяются модули с разным быстродействием. Так, например,

если в качестве объекта рассмотреть ракету-носитель, то самым быстродействующим должен быть привод. Поэтому при синтезе управления приводом выбирают минимальный период квантования по времени, например,  $T_0^{SP} = 0,02$  с. Вторым по быстродействию является контур управления угловым движением изделия вокруг центра масс, например,  $T_0^V = 0,04$  с. Далее идут контуры движения центра масс  $T_0^V \approx 0,1$  с и контуры решения навигационной задачи. Специалисты по управлению электроприводами решают аналогичные задачи, создавая системы подчиненного регулирования.

Таким образом, мы приходим к постановке задачи синтеза систем управления с несколькими частотами квантования.

*Суммирование высокочастотной и низкочастотной составляющей управления на входе привода*

Рассмотрим представленную на рис. 4.75 структурную схему системы с двумя частотами квантования: высокой  $f_{HF} = \frac{1}{T_0}$  и низкой  $f_{LF} = \frac{1}{mT_0}$ .

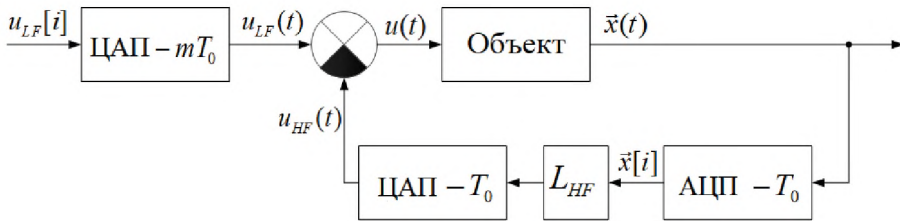


Рис. 4.75. Структурная схема системы с двумя кратными частотами квантования

Полагается, что уже проведен синтез высокочастотной части системы и найдены матрицы обратной связи  $L_{HF}$ . Требуется записать разностные уравнения для синтеза низкочастотного управления  $u_{LF}[i]$  на интервале времени

$$imT_0 \leq t < (i + 1)mT_0.$$

На этом интервале времени низкочастотный сигнал управления будет постоянным:

$$u_{LF} = u_{LF}[i] = \text{const.}$$

На том же интервале времени происходит  $m$  тактов высокочастотного управления, и  $u_{HF}$  принимает  $m$  значений:

$$u_{HF} = \{u_1[i], u_2[i], \dots, u_m[i]\},$$

где

$$u_l = L_{HF} \cdot \vec{x}[imT_0 + (l-1)T_0], \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

В формуле выше  $l$  – номера высокочастотного интервала.

На рис. 4.76 приведена временная диаграмма двухчастотной системы при  $m = 4$ .

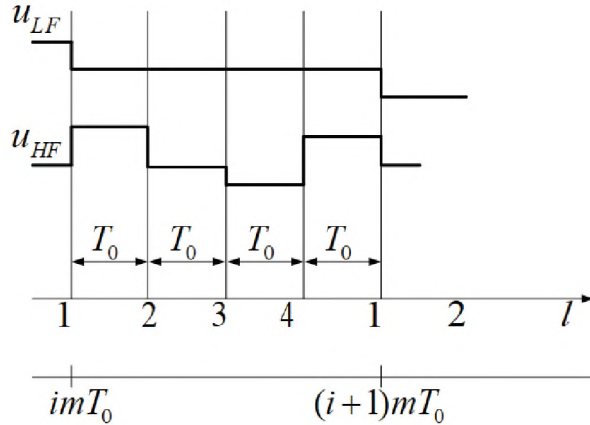


Рис. 4.76. Временная диаграмма двухчастотного управления

Запишем подробнее выражения для высокочастотной составляющей управления на интервале времени  $[imT_0, (i+1)mT_0]$ , учитывая, что  $\vec{x}[i] = \vec{x}[imT_0]$ .

Рассмотрим несколько высокочастотных интервалов.

1. Первый интервал  $l = 1$ .

$$\vec{x}[imT_0 + T_0] = F_{HF}(T_0)\vec{x}[i] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] + H_{HF}(T_0)L_{HF}\vec{x}[i].$$

Здесь  $L_{HF}\vec{x}[i] = u_{HF}[i]$ .

$$\vec{x}[imT_0 + T_0] = \left( F_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0)L_{HF} \right) \vec{x}[i] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i].$$

Обозначим  $\chi_{HF} = F_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0)L_{HF}$ , тогда

$$\vec{x}[imT_0 + T_0] = \chi_{HF}\vec{x}[i] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i].$$

2. Второй интервал  $l = 2$ .

$$\begin{aligned} \vec{x}[imT_0 + 2T_0] &= F_{HF}(T_0)\vec{x}[imT_0 + T_0] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] + \\ &+ H_{HF}(T_0)L_{HF}\vec{x}[imT_0 + T_0] = \left( F_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0)L_{HF} \right) \vec{x}[imT_0 + T_0] + \\ &+ H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] = \chi_{HF}\vec{x}[imT_0 + T_0] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] = \\ &= \chi_{HF} \left( \chi_{HF}\vec{x}[i] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] \right) + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] = \\ &= \chi_{HF}^2\vec{x}[i] + \left( \chi_{HF}H_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0) \right) u_{LF}[i]. \\ \vec{x}[imT_0 + 2T_0] &= \chi_{HF}^2\vec{x}[i] + \left( \chi_{HF}H_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0) \right) u_{LF}[i]. \end{aligned}$$

3. Третий интервал  $l = 3$ .

$$\begin{aligned} \vec{x}[imT_0 + 3T_0] &= F_{HF}(T_0)\vec{x}[imT_0 + 2T_0] + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] + \\ &+ H_{HF}(T_0)L_{HF}\vec{x}[imT_0 + 2T_0] = \chi_{HF} \left( \chi_{HF}^2\vec{x}[i] + \right. \\ &+ \left. \left( \chi_{HF}H_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0) \right) u_{LF}[i] \right) + H_{HF}(T_0)u_{LF}[i] = \\ &= \chi_{HF}^3\vec{x}[i] + \left( \chi_{HF}^2H_{HF}(T_0) + \chi_{HF}H_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0) \right) u_{LF}[i]. \\ \vec{x}[imT_0 + 3T_0] &= \chi_{HF}^3\vec{x}[i] + \left( \chi_{HF}^2H_{HF}(T_0) + \chi_{HF}H_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0) \right) u_{LF}[i]. \end{aligned}$$

4. Последний интервал  $l = m$ .

$$\begin{aligned} \vec{x}[imT_0 + mT_0] &= \vec{x}[(i + 1)mT_0] = \vec{x}[i + 1] = \\ &= \chi_{HF}^m \vec{x}[i] + \sum_{l=1}^m \chi_{HF}^{l-1} H_{HF}(T_0) u_{LF}[i]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\vec{x}[(i + 1)mT_0] = F_{LF} \vec{x}[imT_0] + H_{LF} u_{LF}[i], \quad (4.10.19)$$

где

$$\begin{aligned} F_{LF} &= \chi_{HF}^m; \\ H_{LF} &= \sum_{v=0}^{m-1} \chi_{HF}^v H_{HF}(T_0); \\ \chi_{HF} &= F_{HF}(T_0) + H_{HF}(T_0) L_{HF}. \end{aligned} \quad (4.10.20)$$

*Двухчастотный режим в системе подчиненного регулирования*

Рассмотрим синтез двухчастотного управления на примере учебного стенда [25] «Шар на плате».

Стенд представляет собой настольный прибор, основным блоком которого является плата, управляемая электромагнитным приводом и имеющая две угловые степени свободы. На плату помещается легкий шар, способный перемещаться по плоскости платы при ее отклонениях от горизонтального положения. Положение шара на плате определяется с помощью веб-камеры, углы отклонения платы от горизонтального положения измеряют два потенциометра. На рис. 4.77 представлена функциональная схема стенда.

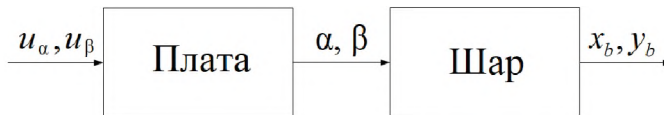


Рис. 4.77. Функциональная схема стенда «Шар на плате»:  $u_\alpha, u_\beta$  – управляющие сигналы на входе электромагнитного привода по каналам  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $\alpha, \beta$  – угловые отклонения платы относительно ортогональных осей  $x, y$  ее плоскости;  $x_b, y_b$  – координаты шара относительно осей  $x, y$

Электромагнитный привод платы является достаточно быстродействующим по сравнению с угловым перемещением платы и перемещением шара на плате, поэтому его динамикой можно пренебречь.

Шар и плата описываются линеаризованными дифференциальными уравнениями второго порядка. Для простоты рассмотрим лишь каналы  $\alpha$  и  $X_b$ :

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_p(t) = A_p \vec{x}_p(t) + B_p u_p(t); \\ y_p(t) = C_p \vec{x}_p(t); \end{cases} \quad (4.10.21)$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_b(t) = A_b \vec{x}_b(t) + B_b u_p(t); \\ y_b(t) = C_b \vec{x}_b(t), \end{cases} \quad (4.10.22)$$

где

$$\vec{x}_p(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_\alpha \end{bmatrix}; \quad \vec{x}_b(t) = \begin{bmatrix} X_b \\ V_{X_b} \end{bmatrix}; \quad (4.10.23)$$

$$\omega_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}; \quad V_{X_b} = \frac{dX_b}{dt}; \quad (4.10.24)$$

выходы подсистем платы и шара:

$$y_p(t) = \alpha; \quad y_b = X_b; \quad (4.10.25)$$

матрицы платы:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_{kard}}{(J_p + J_b)} & 0 \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{(J_p + J_b)} \end{bmatrix}; \quad C_p = [1 \quad 0]; \quad (4.10.26)$$

матрицы шара:

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_b \cdot g \cdot R_b^2}{(m_b \cdot R_b^2 + J_b)} \end{bmatrix}; \quad C_b = [1 \quad 0]. \quad (4.10.27)$$

Подробнее об объекте можно посмотреть в [25].

Приступим к синтезу управления. Естественно, будем синтезировать контур управления платой более быстродействующим, чем контур управления шаром.

Выберем периоды квантования:  $T_p = 0,001$  с;  $T_b = 0,04$  с.

*Расчет высокочастотного контура управления (регулятора платы).*

Сначала синтезируем высокочастотный контур управления, для этого рассчитаем матрицы платы при дискретном управлении через ЦАП- $T_p$ :

$$F_{p\_Tp} = e^{A_p T_p}; H_{p\_Tp} = \int_0^{T_p} e^{A_p \sigma} B_p d\sigma; C_{p\_Tp} = C_p. \quad (4.10.28)$$

Обратим внимание на то, что здесь, как и в подавляющем большинстве случаев, матрицы выхода при переходе от непрерывного к дискретному управлению не меняются.

Для этого расчета воспользуемся операторами MatLab:

$$\begin{aligned} \text{sys\_c\_p} &= \text{ss}(A\_p, B\_p, C\_p, D\_p); \\ \text{sys\_d\_p} &= \text{c2d}(\text{sys\_c\_p}, T\_p); \\ [F\_p\_Tp, H\_p\_Tp, C\_p\_Tp, D\_p\_Tp] &= \text{ssdata}(\text{sys\_d\_p}). \end{aligned} \quad (4.10.29)$$

Рассчитаем собственные числа  $P_{su\_c\_p}$  матрицы динамики непрерывной платы с управлением из условия времени регулирования  $T_{r\_p} = 0,3$  с и переведем их в плоскость  $Z$  с помощью оператора MatLab:

$$P\_su\_p\_Tp = \text{exp}(P\_su\_c\_p, T\_p). \quad (4.10.30)$$

После этого с помощью оператора MatLab найдем матрицу-строку  $L_{su\_p\_Tp}$  регулятора платы:

$$L\_su\_p\_Tp = \text{place}(F\_p\_Tp, H\_p\_Tp, P\_su\_p\_Tp). \quad (4.10.31)$$

Рассчитаем коэффициент  $L_{sp\_p}$ , обеспечивающий единичную статику контура управления платой (см. п. 4.11.2).

Синтез наблюдателя для регулятора платы.

1. Зададим собственные числа матрицы наблюдателя:

$$P_{obs\_p\_Tp} = \exp(10 \cdot P\_su\_c\_p, T\_p). \quad (4.10.32)$$

2. Рассчитаем матрицу невязки наблюдателя:

$$K_{obs\_p\_Tp} = \text{place}(F\_p\_Tp', H\_p\_Tp', P_{obs\_p\_Tp})'. \quad (4.10.33)$$

На рис. 4.78 представлен контур управления платой.

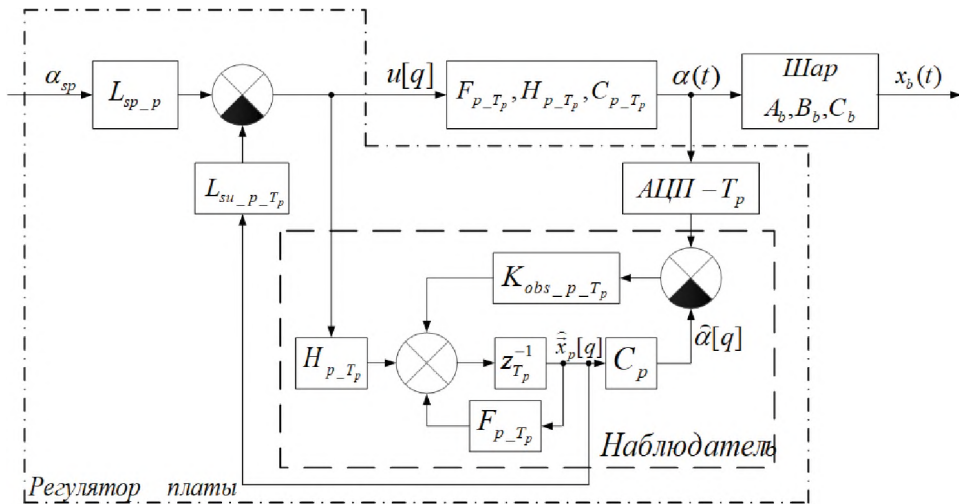


Рис. 4.78. Высокочастотный регулятор платы

*Расчет низкочастотного контура управления (регулятора шара).*

В этой части синтеза не учитывается наблюдатель платы, так как при нулевых начальных условиях он не участвует в процессах. При расчете будем рассматривать схему, представленную на рис. 4.79.

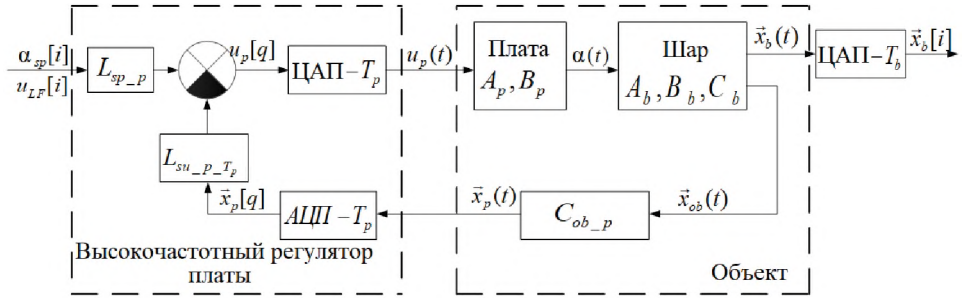


Рис. 4.79. Синтез системы подчиненного регулирования

При расчетах нам нужно иметь на выходе объекта вектор состояния платы. Полагая, что  $\vec{x}_{ob}(t) = [\vec{x}_b(t), \vec{x}_p(t)]'$ , запишем:

$$\vec{x}_p(t) = C_{ob\_p} \cdot \vec{x}_{ob}(t),$$

где

$$C_{ob\_p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.10.34)$$

Найдем уравнения объекта для замкнутой подсистемы высокочастотного управления платой. Для этого, во-первых, рассчитаем матрицы объекта при формировании  $u_p(t)$  через ЦАП нулевого порядка с высокой частотой квантования ( $T_p$ ). Это можно выполнить следующими операторами MatLab:

$$\begin{aligned} \text{sys\_c\_ob} &= \text{ss}(A\_ob, B\_ob, C\_ob, D\_ob); \\ \text{sys\_ob\_Tp} &= \text{c2d}(\text{sys\_c\_ob}, T_p); \\ [F\_ob\_Tp, H\_ob\_Tp, C\_ob\_Tp, D\_ob\_Tp] &= \text{ssdata}(\text{sys\_ob\_Tp}). \end{aligned} \quad (4.10.35)$$

Договоримся об обозначении:  $\vec{x}[i]$  – решетчатая функция с шагом  $T_b = T_p \cdot m$  (низкая частота),  $\vec{x}[q]$  – решетчатая функция с шагом  $T_p$  (высокая частота).

Найдем описание высокочастотного канала объекта с учетом замкнутого контура управления платой.

Имеем разностное уравнение объекта при подаче управления с малым периодом квантования  $T_p$ :

$$\vec{x}_{ob}[q+1] = F_{ob\_T_p} \cdot \vec{x}_{ob}[q] + H_{ob\_T_p} \cdot u[q]. \quad (4.10.36)$$

В соответствии с рис. 4.79

$$u[q] = L_{sp\_p} \cdot \alpha_{sp}[i] - L_{su\_p\_T_p} \cdot \vec{x}_p[q] \quad (4.10.37)$$

и с учетом (4.10.34) и (4.10.37) имеем:

$$\vec{x}_{ob}[q+1] = F_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \vec{x}_{ob}[q] + H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i], \quad (4.10.38)$$

где матрица динамики замкнутой платы:

$$F_{ob\_cl\_p\_T_p} = F_{ob\_T_p} - H_{ob\_T_p} \cdot L_{su\_p\_T_p} \cdot C_{ob\_p}, \quad (4.10.39)$$

матрица управления при замкнутой плате:

$$H_{ob\_cl\_p\_T_p} = H_{ob\_T_p} \cdot L_{sp\_p}. \quad (4.10.40)$$

На интервале времени  $imT_p \leq t < (i+1)mT_p$  производится  $m$  тактов высокочастотного управления и только один такт низкочастотного управления.

При известном  $\vec{x}_{ob}[imT_p]$  рассчитаем последовательно  $\vec{x}_{ob}[imT_p + T_p]$ ,  $\vec{x}_{ob}[imT_p + 2T_p]$ , ...  $\vec{x}_{ob}[imT_p + mT_p] = \vec{x}_{ob}[(i+1)mT_p]$ . Учтем также, что на рассматриваемом интервале времени уставка  $\alpha_{sp} = \alpha_{sp}[i] = \text{const}$ .

$$\vec{x}_{ob}[imT_p + T_p] = F_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \vec{x}_{ob}[imT_p] + H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i].$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ob}[imT_p + 2T_p] &= F_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \vec{x}_{ob}[imT_p + T_p] + \\ &\quad + H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i] = \\ &= F_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot (F_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \vec{x}_{ob}[imT_p] + H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i]) + \\ &\quad + H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i] = \\ &= F_{ob\_cl\_p\_T_p}^2 \vec{x}_{ob}[imT_p] + (F_{ob\_cl\_p\_T_p} + 1) \cdot H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i]. \end{aligned}$$

$$\vec{x}_{ob}[imT_p + 3T_p] = F_{ob\_cl\_p\_T_p}^3 \vec{x}_{ob}[imT_p] + (F_{ob\_cl\_p\_T_p}^2 + F_{ob\_cl\_p\_T_p} + 1) \cdot H_{ob\_cl\_p\_T_p} \cdot \alpha_{sp}[i].$$

В итоге получаем:

$$\vec{x}_{ob}[i + 1] = F_{ob\_cl\_p\_T_b} \cdot \vec{x}_{ob}[i] + H_{ob\_cl\_p\_T_b} \cdot \alpha_{sp}[i], \quad (4.10.41)$$

где матрица динамики объекта для контура низкочастотного управления:

$$F_{ob\_cl\_p\_T_b} = F_{ob\_cl\_p\_T_p}^m, \quad (4.10.42)$$

матрица управления для контура низкочастотного управления:

$$H_{ob\_cl\_p\_T_b} = \sum_{l=1}^m F_{ob\_cl\_p\_T_p}^{l-1} \cdot H_{ob\_cl\_p\_T_p}. \quad (4.10.43)$$

Для полученных матриц динамики низкочастотного канала объекта ((4.10.42), (4.10.43)) необходимо с помощью модального синтеза, рассчитать низкочастотный регулятор шара. Для оценки неизмеряемых координат состояния объекта, должен быть построен низкочастотный наблюдатель Люенбергера.

## § 4.11. Дополнительная информация

### 4.11.1. Дискретный аналог формулы Коши

Если непрерывное векторно-матричное дифференциальное уравнение задано в форме Коши:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u},$$

то его решение задается также формулой Коши:

$$\vec{x}(t) = F(t)\vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\vec{u}(\tau) d\tau.$$

Допустим дискретное векторно-матричное уравнение задано в форме:

$$\vec{x}[i + 1] = F\vec{x}[i] + H\vec{u}[i].$$

Вычислим последовательно вектор состояния объекта в разные отсчеты:

$$\begin{aligned} &\vec{x}[0]; \\ \vec{x}[1] &= F\vec{x}[0] + H\vec{u}[0]; \\ \vec{x}[2] &= F\vec{x}[1] + H\vec{u}[1] = F^2\vec{x}[0] + FH\vec{u}[0] + H\vec{u}[1]; \\ \vec{x}[3] &= F^3\vec{x}[0] + F^2H\vec{u}[0] + FH\vec{u}[1] + H\vec{u}[2]; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.11.1)$$

Записав вектор состояния в общем виде, получим дискретный аналог формулы Коши:

$$\vec{x}[i] = F^i\vec{x}[0] + \left(\sum_{q=0}^{i-1} F^{i-1-q}\right)H\vec{u}[q]. \quad (4.11.2)$$

**Теорема.** "О собственных числах и собственных векторах переходной матрицы".

Собственные векторы матриц  $F \equiv F(T_0) = e^{AT_0}$  и  $A$  совпадают. Собственные числа  $z_v$  матрицы  $F$  и собственные числа  $\lambda_v$  матрицы  $A$  связаны соотношением  $z_v = e^{\lambda_v T_0}$ .

Докажем эту теорему.

Пусть дана матрица  $A$ , и пусть она имеет собственные векторы  $\vec{v}_v$  и собственные числа  $\lambda_v$ , то есть  $A \cdot \vec{v}_v = \lambda_v \vec{v}_v$ . Рассмотрим:

$$\begin{aligned} F \cdot \vec{v}_v &= e^{AT_0} \cdot \vec{v}_v = \left(E + AT_0 + A^2 \frac{T_0^2}{2!} + A^3 \frac{T_0^3}{3!} + \dots\right) \vec{v}_v = \\ &= \left(1 + \lambda_v T_0 + \lambda_v^2 \frac{T_0^2}{2!} + \dots\right) \vec{v}_v = e^{\lambda_v T_0} \cdot \vec{v}_v. \end{aligned}$$

Таким образом,  $F\vec{v}_v = e^{\lambda_v T_0} \cdot \vec{v}_v$ , где  $e^{\lambda_v T_0} = z_v$ , что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет распространить математический аппарат, разработанный для анализа и синтеза непрерывных систем, на анализ и синтез импульсных (цифровых) систем с целью решения следующих задач:

1) вычисление функции от матрицы:

$$f(F) = \sum_{v=1}^n f(z_v) \cdot \vec{v}_v \vec{d}_v^T;$$

2) построение передаточных функций;

3) проведение модального синтеза;

4) расчет наблюдателей.

#### 4.11.2. Обеспечение единичной статики при синтезе дискретной системы без введения дополнительного интегратора

Пусть уравнения непрерывного объекта при дискретном управлении имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ob}[i+1] &= F_{ob} \vec{x}_{ob}[i] + H_{ob} \vec{u}[i]; \\ \vec{y}[i] &= C_{ob} \vec{x}[i]. \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

Модальный синтез формирует обратную связь, рассматривая матрицу-строку обратной связи  $L_{su}$ , так что управление имеет вид:

$$u[i] = -L_{su} \vec{x}_{ob}[i] + y^{sp}, \quad (4.11.4)$$

где  $y^{sp}$  – уставка. Часто требуется, чтобы выход  $y[i]$  как можно точнее следовал за уставкой.

На рис. 4.80 изображена полученная замкнутая система объекта, описываемого уравнениями (4.11.3), с управлением, формируемым согласно уравнению (4.11.4).

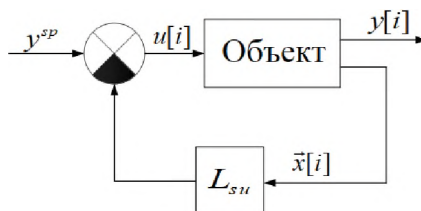


Рис. 4.80. Замкнутая дискретная статическая система

Для обеспечения единичной статики введем последовательно с сигналом  $y^{sp}$  масштабный коэффициент  $L_{sp}$ , как это показано на рис. 4.81.

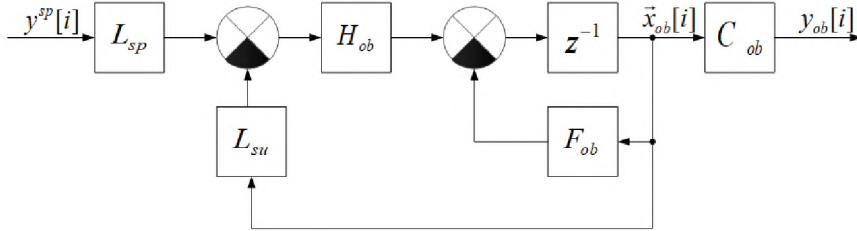


Рис. 4.81. Замкнутая дискретная статическая система с единичной статикой

Запишем уравнение замкнутой системы (рис. 4.81):

$$\vec{x}_{ob}[i+1] = F_{cl}\vec{x}_{ob}[i] + H_{ob}L_{sp}y^{sp}, \quad (4.11.5)$$

где

$$F_{cl} = F_{ob} - H_{ob}L_{su}. \quad (4.11.6)$$

Матрица  $F_{cl}$  – это матрица динамики замкнутой системы, имеющая желаемые собственные числа. Если  $y^{sp} = \text{const}$  – неизменяющийся во времени сигнал, то с течением времени вектор состояния  $\vec{x}_{ob}[i]$  перестанет изменяться и

$$\vec{x}_{ob}[i] = \vec{x}_{ob}[i+1] = \vec{x}_{ob}^{уст}. \quad (4.11.7)$$

Найдем связь между  $y^{sp}$  и  $y^{уст}$ , для этого обратимся к (4.11.5) в установившемся режиме (4.11.7):

$$\vec{x}_{ob}^{уст} - F_{cl}\vec{x}_{ob}^{уст} = H_{ob}L_{sp}y^{sp};$$

$$(E - F_{cl})\vec{x}_{ob}^{уст} = H_{ob}L_{sp}y^{sp};$$

$$\vec{x}_{ob}^{уст} = (E - F_{cl})^{-1}H_{ob}L_{sp}y^{sp}.$$

Домножим справа левую и правую части уравнения на  $C_{ob}$ :

$$C_{ob}\vec{x}_{ob}^{уст} = C_{ob}(E - F_{cl})^{-1}H_{ob}L_{sp}y^{sp};$$

$$y^{уст} = C_{ob}(E - F_{cl})^{-1}H_{ob}L_{sp}y^{sp}.$$

Так как в установившемся режиме  $y^{уст}$  будет стремиться к  $y^{sp}$ , потребуем чтобы  $y^{уст} = y^{sp}$ , и тогда

$$L_{sp} = \frac{1}{C_{ob}(E - F_{cl})^{-1}H_{ob}}. \quad (4.11.8)$$

Эта формула корректна, когда  $y$  и  $y^{sp}$  – скаляры. Полученная таким образом величина  $L_{sp}$  обеспечивает в замкнутой системе единичную статику.

## § 4.12. Применение теории импульсных систем к построению алгоритма ДПФ

### 4.12.1. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Если функция  $x(t)$  абсолютна интегрируема, то есть,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \leq M,$$

где  $M$  – конечная величина, то существует прямое преобразование Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.12.1)$$

и обратное преобразование Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.12.2)$$

При работе с периодическими функциями используется ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_n t}, \quad (4.12.3)$$

где

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_{\pi} t} dt, \quad (4.12.4)$$

$T$  – период функции  $x(t)$ ,  $\omega_{\pi} = \frac{2\pi}{T}$  – частота первой гармоники,  $k$  – номер гармоники.

Для решетчатых функций по определению  $x(iT_0) = x[i]$ , как было показано в основной части этой главы, вся информация о спектральных характеристиках лежит в диапазоне  $-\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2}$  или  $0 < \omega < \omega_0$ , и тогда от формул (4.12.3) и (4.12.4), учитывая, что  $\omega_{\pi} = \frac{2\pi}{T}$ , можно перейти к следующим выражениям:

$$x[i] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} T_0 i},$$

$$C_k = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] e^{-jk \frac{2\pi}{T} T_0 i} \cdot T_0,$$

или, с учетом  $T = NT_0$ , где  $N$  – количество точек на интервале  $t = [0, T]$ ,

$$x[i] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} ki}, \quad (4.12.5)$$

$$C_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] e^{-j \frac{2\pi}{N} ki}, \quad (4.12.6)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Пара преобразований (4.12.5) и (4.12.6) называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). Коэффициенты ДПФ  $C_k$  играют большую роль при анализе процессов, протекающих в САУ: при выявлении скрытых периодичностей в сигналах систем, включающих объекты с упругими и жидкостными колебаниями, процессы, возникающие в прокатке с учетом эксцентриситета валков, и т. д.

#### ПРИМЕР 4.12.1

Найти коэффициенты ДПФ  $C_k$  для сигнала, содержащего постоянную составляющую  $x[i] = x_0 = \text{const}$ .

Найдем  $C_0$  ( $k = 0$ ):

$$C_0 = \frac{2x_0}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 0})^i = \frac{2x_0}{N} \sum_{i=0}^{N-1} 1^i = \frac{2x_0}{N} N = 2x_0.$$

Для остальных коэффициентов  $C_k$  ( $k \neq 0$ ):

$$C_k = \frac{2x_0}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^i.$$

$e^{-j2\pi}$  – это один оборот вектора единичной длины по часовой стрелке;  $e^{-j2\pi k}$  – это  $k$  оборотов вектора единичной длины против часовой стрелки. Если разделить полученный угол поворота на  $N$  частей, то получим векторы  $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , представленные на рис. 4.82.

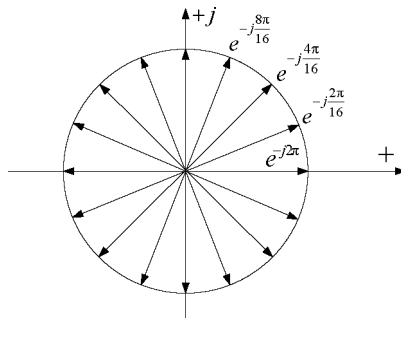


Рис. 4.82. К обоснованию  $C_k = 0$  при  $k \neq 0$  для сигнала с постоянной составляющей ( $N = 16$ )

Сложив эти векторы  $N$  раз, в сумме получим ноль, так как каждая пара векторов противоположно направлена. Следовательно сигнал с постоянной составляющей при ДПФ имеет только коэффициент  $C_0 = 2x_0$ .

**ПРИМЕР 4.12.2**

Найти коэффициенты ДПФ  $C_k$  гармонического для сигнала  $x(t) = A \cos(\omega_l t + \varphi)$ , где  $\omega_l = l \cdot \omega_{\text{п}}$ ,  $\omega_{\text{п}} = \frac{2\pi}{NT_0}$ .

Таким образом,  $\omega_l = l \frac{2\pi}{NT_0}$ . Запишем уравнение для гармонического сигнала  $x[i]$ :

$$x[i] = A \cos(\omega_l \cdot iT_0 + \varphi) = \frac{A}{2} (e^{j(\frac{2\pi}{N}il + \varphi)} + e^{-j(\frac{2\pi}{N}il + \varphi)}). \quad (4.12.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{A}{2} (e^{j(\frac{2\pi}{N}il + \varphi)} + e^{-j(\frac{2\pi}{N}il + \varphi)}) \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} = \\ &= \frac{A}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left( e^{j(\frac{2\pi}{N}i(l-k) + \varphi)} + e^{-j(\frac{2\pi}{N}i(l+k) + \varphi)} \right). \end{aligned}$$

При  $k \neq l$  имеем две частоты:  $l - k = l_1 \neq 0$  и  $l + k = l_2$ .

При  $k \neq N - l$  имеем частоты:  $l - k \neq l - N + l = 2l - N$  и  $l + k \neq l + N - l = N$ .

Значит, суммы  $\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N}il_1 + \varphi)}$  и  $\sum_{i=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N}il_2 + \varphi)}$  можно представить геометрически в виде суммы векторов с центром в начале координат, концы которых равномерно распределены по окружности единичного радиуса (рис. 4.83).

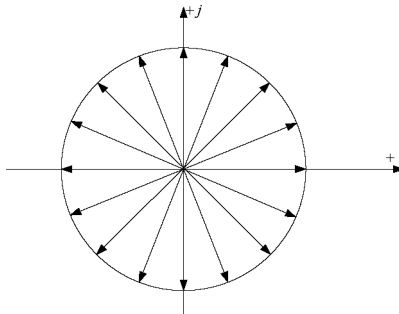


Рис. 4.83. К обоснованию  $C_k = 0$  при  $k \neq l$  и  $k \neq N - l$

Таким образом, если  $x$  – гармонический сигнал с частотой  $l \cdot \omega_n$ , то при  $k \neq l$  и  $k \neq N-l$   $C_k = 0$ . При этом учет  $\varphi$  не изменяет результаты.

Рассмотрим случай, когда  $k = l$ . В этом случае имеем:  $l - k = 0$  и

$$\sum_{j=0}^{N-1} (e^0)^j = \sum_{j=0}^{N-1} (1)^j = N;$$

$$C_l = \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (e^0)^j \cdot e^{-j\varphi} = A \cdot e^{-j\varphi};$$

$$C_{N-l} = \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N}i(l-k)+\varphi)} = \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-j\varphi} = A \cdot e^{-j\varphi}.$$

Таким образом, присутствие гармонической составляющей в сигнале  $x$  приводит к появлению двух комплексно сопряженных коэффициентов  $C_l$  и  $C_{N-l}$  с модулем, равным амплитуде гармонической составляющей.

#### 4.12.2. Понятие о ДПФ на скользящем интервале времени

Пусть имеется некоторая функция  $x$  дискретного аргумента  $\gamma$  (рис. 4.84).

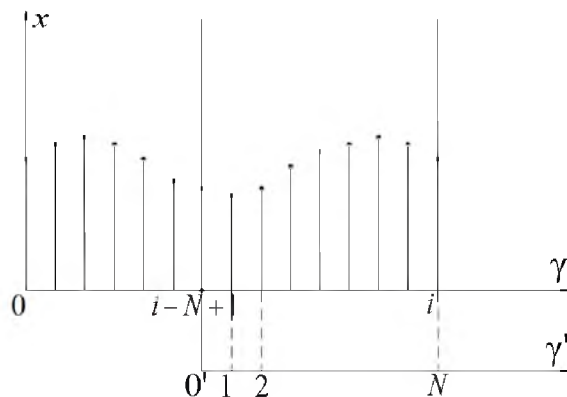


Рис. 4.84. Дискретный сигнал со скользящим окном

На оси  $O\gamma$  выделяем отрезок наблюдения  $[i - N + 1, i]$ , состоящий из  $N$  точек.

На этом отрезке введем систему ортогональных функций, индексированных числом  $\gamma \in [i - (N - 1), i]$  и определенных в точках, которые задаются параметром  $k = 0, \dots, N - 1$ :  $e^{j \frac{2\pi}{N} k (\gamma - (i - (N - 1)))}$ ,  $\gamma \in [i - (N - 1), i]$ .

Функции  $f(t)$  и  $g(t)$  называются ортогональными на промежутке  $[a; b]$ , если  $\int_a^b f^*(t)g(t)dt = 0$ , где  $f^*(t)$  – функция, комплексно сопряженная  $f(t)$ .

Например, функции  $e^{jkt}$  и  $e^{jnt}$  при  $n \neq k$  ортогональны на промежутке  $[0; 2\pi]$ .

В этой системе ортогональных функций функция  $x$  может быть представлена в виде:

$$x[\gamma] = \frac{1}{2} \sum_{K=0}^{N-1} C_K[i] e^{j \frac{2\pi}{N} k (\gamma - (i - (N - 1)))}, \quad (4.12.8)$$

где

$$C_k[i] = \frac{2}{N} \sum_{\gamma=i-N+1}^i x[\gamma] e^{\underbrace{j \frac{2\pi}{N} k (\gamma - (i - (N - 1)))}_l}.$$

Заменяем  $\gamma$  на  $l$  так, что  $\gamma - i + N - 1 = l$ . Тогда изменятся пределы суммирования:

если  $\gamma = i - (N - 1)$ , то  $l = 0$ ;

если  $\gamma = i$ , то  $l = N - 1$ .

Теперь

$$C_k[i] = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l + i - (N - 1)] e^{-j \frac{2\pi}{N} kl}. \quad (4.12.9)$$

Введем подвижную систему координат  $x_0' \gamma'$  (4.84), где  $\gamma' = \gamma - (i - N + 1)$  ( $\gamma = \gamma' + i - N + 1$ ). С учетом этого перепишем уравнения (4.12.8) и (4.12.9):

$$x[\gamma'] = \frac{1}{2} \sum_{K=0}^{N-1} C_K[i] e^{j \frac{2\pi}{N} k \gamma'},$$

$$C_k[i] = \frac{2}{N} \sum_{\gamma'=0}^{N-1} x[\gamma'] e^{-j \frac{2\pi}{N} k \gamma'},$$

то есть получили обычное ДПФ ((4.12.5), (4.12.6)).

Совокупность коэффициентов  $C_k[i]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  называется скользящим спектром сигнала  $x$ , или прямым ДПФ на скользящем интервале времени.

### 4.12.3. Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов ДПФ в реальном масштабе времени

В соответствии с (4.12.9) выпишем выражение для скользящего спектра сигнала  $x$  в предыдущем окне, начинающемся с момента  $i - 1$ .

$$C_k[i - 1] = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l + i - N] e^{-j \frac{2\pi}{N} kl}.$$

Введем переменную  $q$  так, чтобы  $l + i - N + 1 = q + i - N$ , то есть

$$q = l + 1, \quad l = q - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_k[i] &= \frac{2}{N} \sum_{q=1}^N x[q + i - N] e^{-j \frac{2\pi}{N} kq} \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} k}; \\ C_k[i] &= e^{j \frac{2\pi}{N} k} \cdot \left( \frac{2}{N} \sum_{q=1}^N x[q + i - N] e^{-j \frac{2\pi}{N} kq} + \frac{2}{N} x[i - N] - \frac{2}{N} x[i - N] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{N} e^{-j 2\pi k} \right) = e^{j \frac{2\pi}{N} k} (C_k[i - 1] + \frac{2}{N} (x[i] - x[i - N])). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем рекуррентную формулу:

$$C_k[i] - e^{j \frac{2\pi}{N} k} \cdot C_k[i - 1] = \frac{2}{N} (x[i] - x[i - N]) e^{j \frac{2\pi}{N} k}. \quad (4.12.10)$$

Перейдем к  $z$ -преобразованиям при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} C_k(z) - e^{j \frac{2\pi}{N} k} \cdot z^{-1} C_k(z) &= \frac{2}{N} (x(z) - z^{-N} x(z)) e^{j \frac{2\pi}{N} k}; \\ (1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k} \cdot z^{-1}) C_k(z) &= \frac{2}{N} (1 - z^{-N}) \cdot x(z) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} k}. \end{aligned}$$

В результате получаем дискретную передаточную функцию, связывающую  $z$ -изображение входного сигнала и коэффициентов ДПФ:

$$W_k(z) = \frac{2}{N} \frac{(1 - z^{-N}) e^{j \frac{2\pi}{N} k}}{(1 - z^{-1}) e^{j \frac{2\pi}{N} k}}. \quad (4.12.11)$$

Алгоритмическая схема в комплексном виде этой передаточной функции представлена на рис. 4.85.

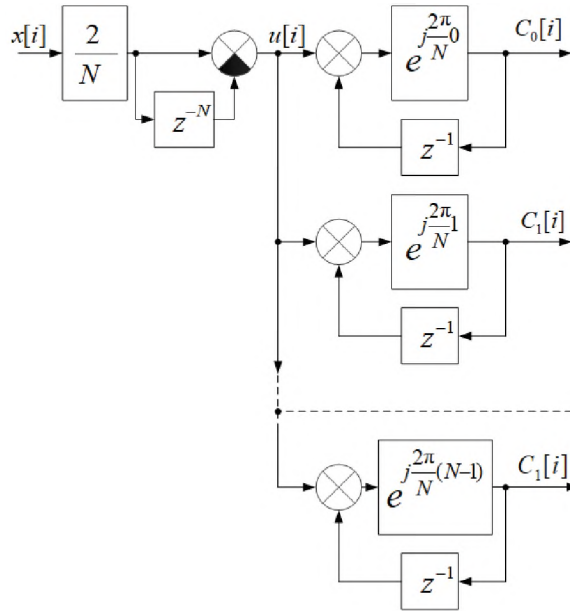


Рис. 4.85. Вычисление скользящего спектра в комплексном виде

Если  $x[i]$  – действительная функция времени, то  $C_k[i] = C_{N-k}^*[i]$ . Действительно,

$$\begin{aligned} C_{N-k}[i] &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l+i-N+1] e^{-j \frac{2\pi}{N} l(N-k)} = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l+i-N+1] e^{j \frac{2\pi}{N} k l} = C_k^*[i]. \end{aligned}$$

## 4.12.4. Реализация рекуррентного алгоритма

Запишем  $W_k(z)$  в виде:

$$W_k(z) = \frac{2}{N}(1 - z^{-N}) \cdot V_k(z),$$

где

$$V_k(z) = \frac{e^{j\alpha_k}}{1 - z^{-1}e^{j\alpha_k}}, \quad \alpha_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\begin{aligned} V_k(z) &= \frac{1}{e^{-j\alpha_k} - z^{-1}} = \frac{1}{\cos \alpha_k - j \sin \alpha_k - z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{(\cos \alpha_k - z^{-1}) - j \sin \alpha_k} = \frac{\cos \alpha_k + j \sin \alpha_k - z^{-1}}{(\cos \alpha_k - z^{-1})^2 + \sin^2 \alpha_k} = \\ &= \frac{\cos \alpha_k + j \sin \alpha_k - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \alpha_k + z^{-2}}. \end{aligned} \quad (4.12.12)$$

Полюсы:  $z_{1,2} = \cos \alpha_k \pm \sqrt{\cos^2 \alpha_k - 1} = \cos \alpha_k \pm j \sin \alpha_k$  лежат на единичной окружности ( $|z_1| = |z_2| = 1$ ). Найдем вещественную и мнимую части комплексной функции  $V_k(z)$ , которая является основным множителем передаточной функции, позволяющей получить образ спектра  $C_k(z)$ .

$$\begin{aligned} Re\{V_K(Z)\} &= \frac{\cos \alpha_K - Z^{-1}}{1 - 2Z^{-1} \cos \alpha_K + Z^{-2}}; \\ Im\{V_K(Z)\} &= \frac{\sin \alpha_K}{1 - 2Z^{-1} \cos \alpha_K + Z^{-2}}. \end{aligned} \quad (4.12.13)$$

На рис. 4.86 представлен основной фрагмент алгоритмической схемы для вычисления  $C_k[i]$ .

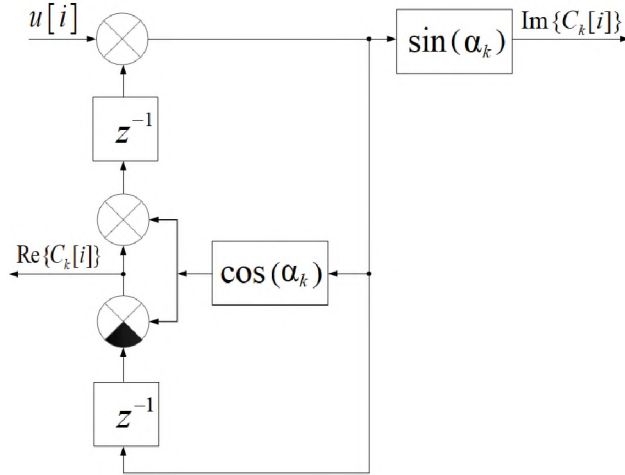


Рис. 4.86. Фрагмент схемы для знаменателя  $V_k(z)$

Проанализируем принцип работы этого алгоритма. Прежде всего найдем полюсы передаточной функции базового фрагмента (уравнение (4.12.12)). Характеристическое уравнение этой передаточной функции имеет вид:

$$z^2 - 2 \cos \alpha_k + 1 = 0. \quad (4.12.14)$$

Корни этого уравнения, то есть полюсы передаточной функции  $V_k(z)$ , лежат на единичной окружности плоскости  $z$ , как это показано на рис. 4.87.

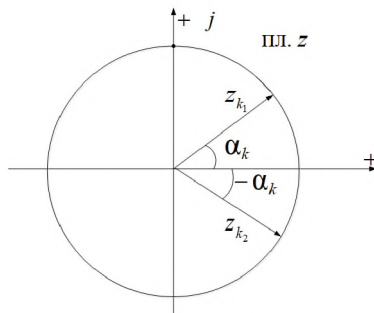


Рис. 4.87. Полюсы модуля  $V_k(z)$

На рис. 4.88 представлена итоговая алгоритмическая схема ДПФ. Всего на этой схеме содержатся модули  $V_k(z)$  для  $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ , что дает информацию о полном спектре входного сигнала в диапазоне частот от 0 до  $\frac{\omega_0}{2}$ .

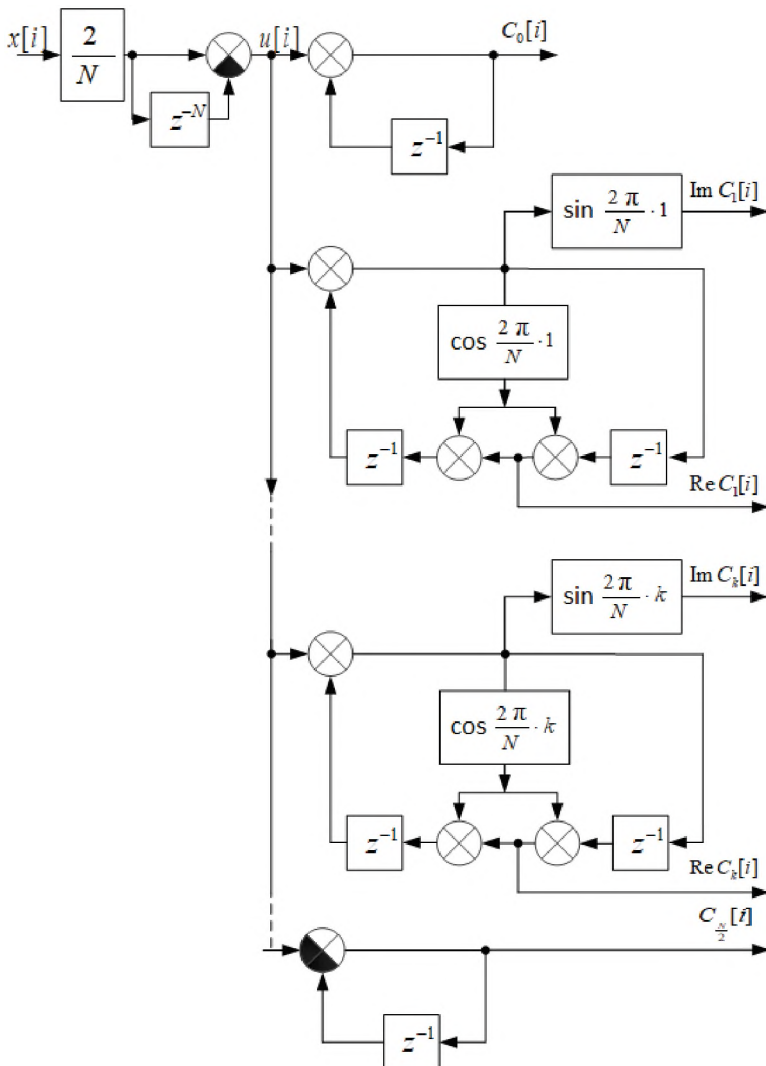


Рис. 4.88. Итоговая схема ДПФ

Если при нулевых начальных условиях на вход ДПФ начинает поступать гармонический сигнал с частотой  $\omega_k = k\omega_{\text{п}}$ , то он сразу появляется в точке  $u[i]$  и держится целое число периодов, равное  $k$ . После этого на выход звена  $Z^{-N}$  приходит задержанный входной сигнал и  $u[i]$  исчезает. Пока в  $u[i]$  присутствовал гармонический сигнал частоты  $\omega_k$ , на выходе модуля  $V_k$  линейно возрастал модуль  $C_k$ , и к моменту обнуления этого сигнала в координате  $u[i]$  модуль  $C_k$  достиг величины амплитуды гармонического сигнала в  $x[i]$ .

**§ 4.13. Основные соотношения между спектральными характеристиками непрерывных и дискретных сигналов**

**4.13.1. Исходные выражения**

Для абсолютно интегрируемой функции  $x(t)$ :  
 – преобразование Фурье:

$$\left. \begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\}; \quad (4.13.1)$$

– корреляционная функция:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) d\tau; \quad (4.13.2)$$

– дисперсия:

$$\sigma^2 = R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt; \quad (4.13.3)$$

– спектральная плотность:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (4.13.4)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad (4.13.5)$$

– ДПФ:

$$C_k = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}; \quad (4.13.6)$$

$$x[l] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kl}. \quad (4.13.7)$$

#### 4.13.2. Связи (соотношения)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (4.13.8)$$

$$X_T(j\omega) = \int_0^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.13.9)$$

$$R_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt. \quad (4.13.10)$$

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= \int_0^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} \int_0^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt d\tau = \\ &= \frac{1}{T} X_T^*(j\omega) X_T(j\omega). \end{aligned}$$

Спектральная плотность:

$$S_T(\omega) = |X_T(j\omega)|^2; \quad (4.13.11)$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega). \quad (4.13.12)$$

Введем  $\omega_{\pi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{NT_0}$ ;  $\omega_k = k \cdot \omega_{\pi} = \frac{2\pi k}{NT_0}$ , где  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} X_T(\omega_k) &= \int_0^T x_T(t) e^{-j\omega_k t} dt = \int_0^T x_T(t) e^{-j \frac{2\pi}{NT_0} kt} dt \approx \\ &\approx T_0 \sum_{i=0}^{N-1} x_T[i] e^{-j \frac{2\pi}{NT_0} ki T_0} = T_0 \sum_{i=0}^{N-1} x_T[i] e^{-j \frac{2\pi}{N} ki}. \end{aligned}$$

Так как

$$C_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_T[i] e^{-j \frac{2\pi}{N} ki} = \frac{2}{NT_0} \cdot \underbrace{T_0 \sum_{i=0}^{N-1} x_T[i] e^{-j \frac{2\pi}{N} ki}}_{X_T(\omega_k)},$$

то

$$X_T(j\omega_k) \approx \frac{T}{2} C_k \quad (4.13.13)$$

и

$$S_T(\omega_k) = \frac{T}{4} |C_k|^2. \quad (4.13.14)$$

Из (4.13.3) и (4.13.5)

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt; \quad (4.13.15)$$

$$\sigma_T^2 = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega) d\omega; \quad (4.13.16)$$

Из (4.13.16)

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{NT_0} \sum_{i=0}^{N-1} x^2[i] \cdot T_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x^2[i].$$

С учетом (4.12.5) имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_T^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} k i} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C_k C_m e^{j \frac{2\pi}{N} (l+m)i} = \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C_k C_m \sum_{i=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (l+m)i}.\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (l+m)i} = \begin{cases} N, & \text{если } l = m = 0 \text{ или } l + m = N \\ & \text{(сумма } N \text{ единиц), т. е. } m = N - l; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4.13.17)$$

С учетом того, что  $C_{N-l} = C_l^*$ , получаем:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} |C_l|^2 = \frac{1}{4} (C_0^2 + C_{\frac{N}{2}}^2) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} |C_l|^2. \quad (4.13.18)$$

Из (4.13.16) в дискретной системе:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} S_T(\omega) d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \omega_\pi \sum_{k=0}^{N-1} S_T(\omega_k), \quad (4.13.19)$$

где  $\omega_\pi = \frac{2\pi}{NT_0}$ ;  $\omega_k = k \cdot \omega_\pi = \frac{2\pi k}{NT_0}$ .

Поэтому

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} S_T(\omega_k).$$

С учетом (4.13.14)

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T}{4} |C_k|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2.$$



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. Москва : Наука, 1976. 424 с.
2. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. Москва : Наука, 1982. 304 с.
3. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость / А. А. Воронов. Москва : Наука, 1979. 335с.
4. Денисенко В. В. ПИД-регуляторы: вопросы реализации / В. В. Денисенко // Современные технологии автоматизации. 2007. № 4. С. 86–97.
5. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, С. Клоуз. Москва : Наука, 1970. 620 с.
6. Ерофеев А. А. Теория автоматического управления : учебник для вузов / А. А. Ерофеев. Санкт-Петербург : Политехника, 1998. 295 с.
7. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. Москва : Мир, 1977. 650 с.
8. Красовский А. А. Основы автоматики и технической кибернетики / А. А. Красовский, Г. С. Поспелов. Москва : Госэнергоиздат, 1962. 600 с.
9. Оботнин А. Н. Алгоритмы определения скользящего спектра / А. Н. Оботнин // Автометрия. 1975. № 1. С. 30–36.

10. Острём К. Системы управления с ЭВМ / К. Острём, Б. Виттенмарк ; пер. с англ. Москва : Мир, 1987. 480 с.
11. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е. П. Попов. Москва : Наука, 1978. 256 с.
12. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В. А. Бесекеерского. 5-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1978. 510 с.
13. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В. В. Григорьев, В. Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков. Санкт-Петербург : Машиностроение, Ленингр. отделение, 1983. 245 с.
14. Современная теория управления / под ред. К. Т. Леондеса. Москва : Наука, 1970. 512 с.
15. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов. / С. М. Тарг. Москва : Высшая школа, 1986. 416 с.
16. Теория автоматического управления. Часть I / под ред. А. А. Воронова. Москва : Высшая школа, 1977. 303 с.
17. Теория автоматического управления. Часть II / под ред. А. А. Воронова. Москва : Высшая школа, 1977. 288 с.
18. Теория автоматического управления. Часть I / под ред. А. В. Нетушила. Москва : Высшая школа, 1968. 424 с.
19. Теория автоматического управления. Часть II / под ред. А. В. Нетушила. Москва : Высшая школа, 1972. 432 с.
20. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления / Ю. Т. Ту ; пер. с англ. Москва : Машиностроение, 1964. 703 с.
21. Ту Ю. Т. Современная теория управления / Ю. Т. Ту ; пер. с англ. Москва : Машиностроение, 1965. 704 с.
22. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В. И. Уткин. Москва : Наука, 1974. 272 с.

23. Циплаков А. П. Задачник по теории автоматического регулирования / А. П. Циплаков. Москва: Машиностроение, 1977. 592 с.
24. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем / Я. З. Цыпкин. Москва: Наука, 1977. 560 с.
25. Юрлова А. А. Исследование и синтез системы управления стендом «Шар на плате»: лабораторный практикум / А. А. Юрлова, И. А. Ровайн, Е. Э. Страшинин. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. 107 с.

*Учебное издание*

**Страшинин** Евгений Эрастович  
**Заколяпин** Антон Дмитриевич  
**Трофимов** Сергей Павлович  
**Юрлова** Алиса Алексеевна

## ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Редактор А. А. Трофимова  
Верстка в *LaTeX* А. А. Юрловой

Подписано в печать 22.11.2019. Формат 70×100 1/16.  
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 36,8.  
Уч.-изд. л. 24,0. Тираж 50 экз. Заказ 329.

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13  
Факс: 8 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>



