

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT AVTOMOBIL YO'LLARINI LOYIHALASH,
QURISH VA EKSPLUATATSIYASI INSTITUTI

T. RASHIDOV, SH. SHOZIYOTOV,
Q. MO'MINOV, H. JUMAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Darslik

TOSHKENT
«VNESHINVESTPROM»
2020

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT AVTOMOBIL YO'LLARINI LOYIHALASH,
QURISH VA EKSPLOATATSIYASI INSTITUTI

T. RASHIDOV, SH. SHOZIYOTOV,
Q. MO'MINOV, H. JUMAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Darslik

TOSHKENT
«VNESHINVESTPROM»
2020

UO`K 531.875
KBK 851.458.1

Nazariy mexanika /matn/, Toshkent
«VNESHINVESTPROM» nashriyoti, 2020-yil- 584 bet

Taqrizchilar:

Sh. Alimuxamedov - TAYLQEI "Amaliy mexanika" kafedrası professorı, texnika fanları doktori,

A. Ahmedov - UzMU "Mexanika va matematik modellashirish" kafedrası mudiri, fizika-matematika fanları doktori,

Darslikda statika, kinematika, dinamika, analitik mexanika elementlari va kichik tebranishlar nazariyasi bayon etilgan. Kitobda yassi fermalami hisoblash, o'zgaruvchan massali jismlar mexanikasi, ustuvor muvozanat va harakat nazariyasi ham keltirilgan.

Ushbu darslik 5313100-Avtomobil transporti, yo'l qurilish ma- shina va jixozlarining ekspluatatsiyasi ta'lim yo'nalishlari bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

Darslikdan muxandislik sohalarining boshqa yo'nalishlari bakalavriat talabalari ham foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-4236-4-0 C «VNESHINVESTPROM», 2020

*Akademik M.T. O'rozboyevning
yorqin xotirasiga bag'ishlanadi*

BIRINCHI NASHRIGA SO'Z BOSHI

O'zbek tilida nazariy mexanikadan darslik ilk bor O'zFA akademigi M. T. O'rozboev tomonidan yozilgan va oxirgi nashri 1966 yilda chop etilgan. O'tgan davr ichida nazariy mexanikaning qo'llanish sohalari yanada kengaydi. Shu muno-sabat bilan o'zbek tilida hozirgi zamon talablariga javob beradigan va yangi o'quv dasturlariga mos keladigan darslik yozish ehtiyoji tug'ildi.

Ushbu kitobga mualliflarning oliy uquv yurtlarida o'qigan ma'ruzalari asos qilib olindi.

Mualliflar kitob ko'lyozmasini sinchiklab o'qib chiqib, bergan foydali masla-hatlari uchun fizika-matematika fanlari doktori, professor A. F. Azizov, texnika fanlari doktorlari, professorlar T. Mavlonov, T. Sh. Shirinqulovlarga hamda qo'lyozmani bosmaga tayyorlash jarayonida jonkuyarlik ko'rsatgan maxsus redaktor E. V. Ergashev va nashriyot redaktori A. Ahmedovga chuqur minnatdorchilik bildiradilar.

IKKINCHI NASHRIGA SO'Z BOSHI

Ushbu "Nazariy mexanika" darsligi avvalgi nashridan qayta ishlanganligi, yangi masala va topshiriqlar qo'shilgani bilan farq qi-ladi.

Darslikning birinchi nashri "Nazariy mexanika asoslari" nomi bilan 1990 yilda kirill alifbosida nashr qilingan edi.

Birinchi nashrning elektron varianti saqlanmaganligi, lotin alifbosidagi darslikka bolgan ehtiyoj, hamda salkam 30 yil orasida nazariy mexanika fanini o'qitish dasturlaridagi o'zgarishlar ikkinchi nashrni tayyorlashga undadi.

Talabalarga qulaylik yaratish maqsadida kitob nazariy mexanika amaliy mashg'ulotlarida mustaqil ishlashga beriladigan hisob-grafik ishlari bilan to'l-dirildi.

Keyingi yillarda internet tarmog'ida I. V. Meshcherskiy rahbarligida yaratilgan "Nazariy mexanikadan masalalar to'plami", A. A. Yablonskiy tahriridagi "Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to'plami" yechimlari paydo bo'lgani va bir qancha o'zbek tilida masala to'plamlari

tarjimalari yaratilganligi hamda ko'plab masalalar yechish uchun uslubiy qo'llanma va ko'rsatmalar yaratilganligi talabalarga mustaqil masala yechishga qulaylik muhitini yuzaga keltirdi. Shunga asosan, avvalgi nashrdagi ba'zi masalalar olib tashlanib, mustaqil yechish uchun masalalar bilan to'ldirildi.

Mualliflar ushbu nashrni tayyorlashda jonkuyarlik bilan maslahatlarini ayamagan TAYLQEI rektori, professor O.A. Risqulovga, professorlar F. X. Xojmetovga, Sh. Alimuxamedovga, A. Ishonxo'jaevga, "Amaliy mexanika" kafedrası mudiri dostent A.Gapırovga, dostent A. Qodirovga, ass. K. Rustamovga, Toshkent davlat texnika universiteti professori K. A. Karimovga, UzMU professori A. Axmedovga, Namangan muxandislik qurilish instituti professori Sh. Yuldoshevga, Toshkent temir yo' l muxandislari instituti professori A. Abdusattorovga, SamDU professori H. Xudoynazarovga, UzFA Mexanika va inshootlar zilzilabardoshligi ilmiy tekshirish instituti katta ilmiy xodimi N.Nishonovga chuqur minnatdorchilik bildiradilar.

KIRISH

Harakatning turlaridan biri mexanik harakatdir. Vaqt o'tishi bilan moddiy ji-smlarning birbiriga nisbatan ko'chishiga *mexanik harakat* deyiladi.

Moddiy jismlarning o'zaro ta'siri va mexanik harakati o'rganiladigan bir qator fanlar mexanika nomi bilan bog'liq. Mashina va mexanizmlar harakati hamda mus-tahkamligi o'rganiladigan amaliy mexanika, suyuqliklar harakati o'rganiladigan gidromexanika, gazsimon jismlarning harakati o'rganiladigan aerodinamika, tex-nika fanlaridan materiallar qarshiligi (qurilish mexanikasi, mashina detallari) ham mexanikaga taalluqlidir.

Nazariy mexanika mexanik harakatning umumiy qonunlari va moddiy jismlar-ning o'zaro ta'siri haqidagi fandır.

Moddiy jismlar o'zaro ta'sirining miqdoriy o'lchoviga *kuch* deyiladi. Nazariy mexanikada, asosan, planetalarning o'zaro tortilish kuchi, muhitning (tuproq, havo yoki suv) qarshilik kuchi, suyuqlik yoki gazning bosimi, jismlarning bir-biriga te-gib turadigan sirtida hosil bo'ladigan kuchlar kabi mexanik tabiatga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi harakatlar o'rganilar edi. Hozir yadro energetikasi, kosmonavti-ka va elektronikaning rivojlanishi natijasida, mexanikada turlicha fizik tabiatga ega bo'lgan elektromagnit, issiqlik, yorug'lik va ximiyaviy xususiyatlarga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi sistemalarning harakatini o'rganishga oid masalalar qo'yilmoq-da. Masalan, elektr dvigateli yakorining harakatini o'rganishda unga elektr maydo-ning ta'sir kuchini e'tiborga olish kerak; tovushdan tez uchuvchi samolyotlarning harakati tekshirilayotganda, aerodinamik kuchlardan tashqari, havo bilai samolyot qismlari orasida issiqlik almashishi natijasida hosil bo'ladigan gazlar molekulari-ning dissostiastiya kuchlarini ham hisobga olish kerak; yer sun'iy yo'ldoshlarining harakati o'rganilayotganda Yerning tortish kuchi va aerodinamik kuchlardan tash-qari, yer magnit maydonining ta'sir kuchi va yo'ldosh bilan kosmosdagi zaryad-langani zarralarning o'zaro ta'sir kuchlarini hisobga olish kerak; reaktiv dvigatel-ning tortish kuchini hisoblashda yonish jarayonida vujudga keladigan ximiyaviy va termodinamik hodisalarni e'tiborga olish kerak. Mexanikada mazkur kuchlarning miqdoriy o'zgarishiri e'tiborga olib, ularning fizik tabiati o'rganilmaydi.

Hozirgi zamon mexanikasi fizika, matematika, astronomiya, ximiya, biologiya kabi fanlar bilan bog'langan holda rivojlanmoqda. Shuningdek, texnikaning barcha sohaları, ayniqsa, mashinasozlik, asbobsozlik, qurilish, avtomatika, kibernetika va kosmonavtikaning rivojlanishida nazariy mexanika alohida o'rinni egallaydi.

Jismning barcha xossalari hisobga olgan holda sodir bo'ladigan mexanik ho-disalarni nazariy va amaliy jihatdan tekshirish ancha murakkabdir. Shu sababli ma-salaniig qanday qo'yilishiga qarab, mexanikada jismning ayrim xususiyatlari e'tiborga olinmaydi. Masalan, jismning deformatsiyalanishini e'tiborga olmay, *absolyut qattiq jism* tushunchasi kiritiladi. Xuddi shuningdek, moddiy nuqta, ideal su-yuqlik kabi tushunchalar ham soddalashtirilgan modelga taalluqlidir. Mexanikada bunday abstrakt usuldan keng foydalaniladi.

Hozirgi zamon texnikasi ko'pgina muammolarni maydonga tashladi. Suvda katta (100 m/s va undan katta) tezlikda harakat qiladigan jismlarga qarshilik kuchini kamaytirish; temperaturalar ta'siridagi materiallar xususiyatini aniqlash; zilzilaga bardosh beradigan inshootlar qurish, Yerning sun'iy yo'ldoshlarini, planetalararo kosmik kemalarni uchirish ana shular jumlasidandir.

Biz o'rganadigan nazariy mexanika Galiley - N'yuton qonunlariga asoslangan bo'lib, odatda, *klassik mexanika* deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog'liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas miqdor deb qaraladi.

XIX asrning oxiri va XX asrning boshida fizikada o'tkazilgan tadqiqotlar klassik mexanika qonunlarini yorug'lik tezligi (300000 km/s) ga yaqin tezlik bilan harakatlanuvchi mikrozzarralar va jismlar uchun qo'llash mumkin emasligini ko'rsatdi. XX asr boshida A. Eynshteynning (1879-1955) nisbiylik nazariyasiga asoslangan relyativistik mexanika bunyodga keldi. Nisbiylik nazariyasi yordamida fazo bilan vaqt hamda massa bilan energiya orasidagi qonuniy bog'lanishlar oydinlashtirildi va klassik mexanika qonunlari o'rinli bo'ladigan chegara aniqlandi. Hozirgi zamon texnikasida ko'pchilik hollarda uchraydigan tezliklar yorug'lik tezligidan ancha kichik bo'lgani uchun klassik mexanika qonunlaridan hayotda uchraydigan real masalalarni hal qilishda samarali foydalanish mumkin.

Mexanika tarixiga oid qisqacha tarixiy ma'lumotlarni keltiramiz. Mexanikaga doir dastlabki ilmiy asarlarni qadimgi yunon olimlari

yoʻzganlar. Jumladan, eramizdan ilgari 287–212 yillarda yashagan Arximed jismlarning muvozanati va ogʻirlik markazini aniqlash, shuningdek, suvda suzadigan jismlarning muvozanatiga oid nazariyalarni ishlab chiqqan.

Mexanikaning rivojlanishida Sharq olimlari olib borgan ilmiy ishlar alohida oʻrinni egallaydi. Abu Rayxon Beruniy (973–1048), Abu Ali ibn Sino (980–1037), Ulugʻbek Muhammad Taragʻay (1394–1449) kabi mutafakkirlar ana shular jumlasidandir. Ular matematika, tibbiyot va astronomiya boʻyicha qator ilmiy ishlarning mualliflari boʻlishlari bilan birga mexanikaga ham munosib xissalarini qoʻshganlar. Beruniy va Ibn Sino asarlarida umuman harakat toʻgʻrisida hamda planetalarning harakati haqida ajoyib fikrlar bayon etilgan. Ibn Sino taʼrifiga koʻra, jism holatining oʻzgarib borishi harakatni ifodalaydi; jismlarning fazodagi harakati (mexanik harakat) esa bu harakatning xususiy holdir. Ulugʻbek planetalar harakatini katta aniqlikda hisoblay olgan.

Mexanikaning rivojlanishida polyak astronomi N.Kopernik (1473–1543) tomonidan kashf qilingan geliostentrik sistema alohida ahamiyatga ega. Kopernik kashfiyotiga koʻra Yer ham, boshqa sayyoralardek, Quyosh atrofida va oʻz oʻqi atrofida aylanadi, degan fikrlar ilgari surilgan.

Italiyalik olim Galileo Galiley (1564–1642) inerstiya qonunini kashf etgan. Bundan tashqari, Galiley oʻzi oʻtkazgan tajribalar asosida jismning ogʻma tekislik-dagi harakati, gorizontga maʼlum burchak ostida otilgan jismning harakati, erkin tushish haqidagi qonunlarni kashf qilgan.

Mexanikaning asosiy qonunlarini mashhur ingliz olimi Isaak Nyuton (1643–1727) yilda kashf qilgan. Nyutonning butun olam tortilish qonuni mexanikada alohida oʻrin egallaydi. Nyuton qonunlari hozirgi kunda ham oʻz ahamiyatini yoʻqotmagan.

Rus akademigi L. Eylerning (1707–1783) mexanikaga oid kashfiyotlari 1736 yili bosmadan chiqqan ikki tomlik «Analitik mexanika» kitobida bayon qilingan.

Franstuz olimi J. Dalambening (1717–1783) 1743 yilda nashr qilingan «Di-namika boʻyicha traktat» asarida bogʻlanishdagi mexanik sistemalar harakati haqi-dagi masalalarni uning nomi bilan ataluvchi prinstitp asosida echish metodikasi koʻrsatilgan.

Franstuz olimi J.L. Lagranjning (1736–1813) «Analitik mexanika»

asari (1788) nazariy mexanika taraqqiyotida alohida o'rin egallaydi. Bu asarda mexanika masalalariga mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi-ni qo'llash bayon etilgan.

M. V. Lomonosov (1711–1765) fizika-matematika fanlari, jum-ladan, mexanika fanida olib borgan ajoyib tadqiqotlari bilan mashhur-dir. Lomonosov materiya bo'lmasa, harakat ham bo'lmasligini ta'ki-dlab, materiya va harakatning saqlanish qonunini kashf etgan.

Mexanika fanining rivojlanishiga katta hissa qo'shgan rus olimlari-dan N. E. Jukovskiy (1847–1921) aerodinamaning rivojlanishida muhim ahamiyatga ega bo'lgan qator asarlarning muallifi; K. E. Siolkovskiy (1857–1935) raketa nazariyasi va suyuq yonilg'ida ishlaydigan raketa dvigateli nazariyasiga asos sol-gan; I. V. Meshcherskiy (1859–1935) asarlari o'zgaruvchan massali jismlarning harakati, reaktiv texnika va osmon mexanikasining qator muammolarini hal qilish-da ilmiy asos bo'ldi; S. P. Korolev (1906–1966) rahbarligida ballistik va geofizik raketalar, Yerning sun'iy yo'ldoshlari, «Vostok», «Vosxod» kosmik kemalari yara-tilgan; M. V. Keldishning (1911–1978) aerogidrodinamika, tebranishlar nazari-yasi va kosmonavtika sohalaridagi tadqiqotlari alohida ahamiyatga ega; A. A. Il-yushin (1911–1998) elastiklik va plastiklik nazariyasi, aerogidrodinamika, po-limerlar mexanikasi va uzoq muddatli mustahkamlik nazariyasiga oid ilmiy ishlari bilan mashhurdir; A.Yu. Ishlinskiy (1913–2003) deformastiyalanuvchi muhit mexanikasi va giroskopik asboblarga to'g'risida bir necha nazariya yaratdi.

Mexanika fanining rivojlanishiga ulkan hissa qo'shgan o'zbek olimlaridan M. T. O'rozboev (1906–1971) ip mexanikasi va inshootlarning seysmik mustahkam-ligi nazariyasiga oid qator ilmiy ishlarning muallifidir; X.A. Rahmatullin (1909–1988) inshootlar zaminini hisoblashda va ularni loyihalashda, kema zirhi mustah-kamligini aniqlashda qo'llaniladigan «Rahmatullin to'lqinlari» nomini olgan to'l-qinlar nazariyasini kashf qildi; V. Q. Kobulovning (1921–2010) tutash muhitlar mexanikasi masalalarini algoritmlash, avtomatik boshqarish sistemalarini yaratish sohasidagi ilmiy ishlari muhim amaliy ahamiyatga ega; T.R. Rashidov (1934) yer osti va usti konstrukstiyalari va inshootlarining seysmik mustahkamligi hamda seysmodinamikasiga doir ilmiy ishlar olib borgan. Toshkent hududining seysmik mikrohududlashtirilgan xaritasini tuzishda, Toshkent metropoliteni zilzilabardosh-ligini aniqlash va qurilishga tatbiq

qilishda faol qatnashgan.

Hozirgi davrda mexanikaning ko'pgina masalalari elektron hisoblash mashinalaridan foydalanib hal etilmoqda. Mexanika sohasiga oid ilmiy tekshirishlar O'zbekiston Fanlar Akademiyasining ilmiy tekshirish institutlarida hamda oliy o'quv yurtlarida olib borilmoqda.

Nazariy mexanika fani statika, kinematika va dinamikadan iborat uch qismga bo'linadi

Statikada jismlarning muvozanati, ularga qo'yilgan kuchlarni sodd holga keltirish kabi masalalar bilan shug'ullaniladi.

Kinematikada jismlarning harakati geometrik nuqtai nazardan, ya'ni harakatni vujudga keltiruvchi sababga bog'lamay o'rganiladi.

Dinamikada moddiy jismlarning harakati unga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq ravishda tekshiriladi.

Ushbu darslikda barcha kattaliklar SI birliklar sistemasida berilgan.

I QISM. QATTIQ JISM STATIKASI

I-BOB. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

Tayanch soʻzlar. Statika, moddiy nuqta, kuch, absolyut qattiq jism, aksioma, muvozanat, erkin jism, erksiz jism, bogʻlanish, boglanish reaksiya kuchlari.

1.1- §. Statikaning asosiy tushunchalari

Qadimgi yunon olimi Arximed statikaning asoschilaridan biri hisoblanadi. U parallel kuchlar taʼsiridagi richagning muvozanati, jismlarning ogʻirlik markazini aniqlash nazariyasini yaratish bilan birga gidrostatikaga ham asos solgan. Geometrik statikaning rivojlanishiga fransuz olimlari P. Varinon (1654–1722) va L. Puanso (1777–1859) katta hissa qoʻshdilar.

Analitik statikaning asoschisi J. Lagranj hisoblanadi. Statikaning aksiomatik metodlarini rivojlantirishga rus olimlari N. E. Jukovskiy va S. A. Chapligninlar katta hissa qoʻshdilar.

Statikaning asosiy tushunchalaridan biri qattiq jismdir. Kuchlar taʼsirida boʻl-gan jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa oʻzgarmasa, bunday jismga *absolyut qattiq jism* deyiladi. Boshqacha aytganda, absolyut qattiq jismning geometrik shakli oʻzgarmaydi (deformastiyalanmaydi). Kelgusida qattiq jism (yoki jism) deganda absolyut qattiq jism tushuniladi.

Nazariy mexanikada oʻlchamlari eʼtiborga olinmaydigan darajada kichik boʻl-gan jismga *moddiy nuqta* deyiladi. Berilgan jismni tasvirlovchi moddiy nuqta geometrik nuqtadan farqli ravishda berilgan jismning massasiga teng massaga hamda boshqa jismlarga oʻzaro taʼsir etish xususiyatiga ega boʻladi.

Har qanday jismni moddiy nuqtalar toʻplamidan tashkil topgan deb qarash mumkin. Mazkur nuqtalar orasidagi bogʻlanish jismning xususiyatlariga bogʻliq boʻladi.

Kuchning jismga taʼsiri kuch qoʻyilgan nuqta, uning yoʻnalishi va miqdori bilan aniqlanadi.

Kuchning yoʻnalishi deganda tinch holatda turgan erkin



1.1-tasv.

jismning mazkur kuch ta'siridan olgan harakat yo'nalishi tushuniladi. *Kuchning miqdorini* (modulini) aniqlash uchun uni kuch birligi sifatida qabul qilingan biror kattalik bilan solishtiriladi.

Kuch-vektor kattalik bo'lib, uni chizmada uzunligi ma'lum masshtabda kuch miqdoriga teng, yo'nalishi kuch yo'nalishi bilan bir xil vektor kesma tarzida tasvirlanadi.

Jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin (1.1-rasm). Kuch vektori yo'naltirilgan BC to'g'ri chiziqqa *kuchning ta'sir chizig'i* deyiladi. Jismga bir nechta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsa, bunday kuchlar to'plamiga *kuchlar sistemasi* deyiladi va $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ belgilanadi.

Ta'sir etayotgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasini boshqa biror $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ kuchlar sistemasi bilan almashtirishda jism holati o'zgarmasa, bunday kuchlar sistemasiga *ekvivalent kuchlar sistemasi* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$$

Agar kuchlar sistemasi bitta kuchga ekvivalent, ya'ni

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx \vec{R}$$

bo'lsa, bunday kuchga berilgan kuchlar sistemasining *teng ta'sir etuvchisi* deyiladi.

Kuchlar sistemasi ta'siridagi jism tinch holatda qolsa yoki inertsion harakatda bo'lsa (masalan, jismning barcha nuqtalari o'zgarmasa va bir xil tezlik bilan harakatlansa), jismning bunday holati *muvozanat holat* deyiladi. Kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanat holatida bo'lsa, bunday kuchlar sistemasiga *muvoza-natlashgan kuchlar sistemasi* yoki *bolga ekvivalent sistema* deyiladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx 0$$

Statika bo'limida jismning muvozanati deganda uning tinch holati tushuniladi.

1.2- §. Statika aksiomalari

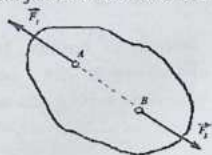
Statikada jismga (yoki jismlarga) qo'yilgan kuchlar haqidagi umumiy qonunlar

tajriba va kuzatishlar yordamida aniqlangan quyidagi aksiomalar tarzida beriladi.

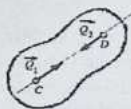
1-aksioma. *Absolyut qattiq jismga qo'yilgan ikkita kuch muvozanatlashishi uchun bu kuchlar miqdor jihatdan teng, yo'nalishi esa kuchlar qo'yilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi zarur va etarlidir.*

1.2-rasmda $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in 0$ va $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \in 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi ikkita kuchlar sistemasi tasvirlangan. Bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'ladi.

1-aksioma eng sodda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini ifodalaydi, chunki tajribalarning ko'rsatishicha bitta kuch ta'siridan erkin jism muvozanatda bo'la olmaydi.



1.2-rasm.



1.3-rasm.

2-aksioma. *Berilgan kuchlar sistemasining absolyut qattiq jismga ta'sirini o'zgartirmay, bu kuchlar sistemasi qatoriga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini qo'shish yoki undan ayirish mumkin.*

Bu aksiomaga ko'ra, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasiga $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \in 0$ sistemani qo'shsak,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Natija. *Kuchni uning ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'-chirish bilan kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.*

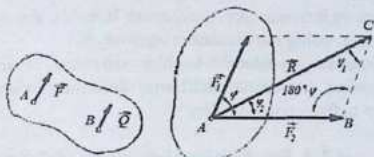
Isbot. Jismning A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuchning ta'sir chizig'ida ixtiyoriy B nuqtani olib, shu nuqtaga miqdorlari $F = F_1 = F_2$ bo'lgan va shu chiziqda yotuv-chi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in 0$ sistemani qo'yamiz (1.3-rasm). U holda 2-aksiomaga asosan

$$\vec{F} \in (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$$

1-aksiomaga asosan $(\vec{F}, \vec{F}_2) \in 0$ bo'lganidan uni tashlab yuborsak, A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch o'rniga shu kuchning ta'sir chizig'idagi B

nuqtada yotuvchi $\vec{F}_1 = \vec{F}$ kuchni olamiz.

Bu natijaga ko'ra ikkita \vec{F} va \vec{Q} kuchlar o'zaro ekvivalent bo'lishi uchun $\vec{F} = \vec{Q}$ shart etarli bo'lmay, bu shartdan tashqari mazkur kuchlarning ta'sir chiziqlari ham ustma-ust tushishi kerak. 1.4-rasmda o'zaro teng, lekin ekvivalent bo'lmagan kuchlar ko'rsatilgan.



1.4-rasm.

1.5-rasm.

3 - aksioma (parallelogramm aksiomasi). Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan, bir to'g'ri chiziqda yotmagan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi miqdor va yo'nalish jihatidan shu kuchlarga qurilgan parallelogrammning kuchlar qo'yilgan nuq-tadan o'tuvchi diagonali bilan ifodalanadi.

Jismning biror A nuqtasiga bir-biri bilan φ burchak tashkil etuvchi \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar qo'yilgan bo'lsin (1.5-rasm). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisini \vec{R} bilan belgilasak, aksiomaga ko'ra

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.1)$$

ABC uchburchakdan kosinuslar teoremasiga asosan teng ta'sir etuvchining modulini aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi)}$$

yoki

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi} \quad (1.2)$$

\vec{R} ning \vec{F}_1 va \vec{F}_2 bilan tashkil qilgan burchaklari φ_1 va φ_2 ni aniqlash uchun sinuslar teoremasidan foydalanamiz (1.5-rasm).

4-aksioma (Nyutonning uchinchi qonuni.) Ikki jism bir-biriga miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sir etadi.

Masalan, Quyoshning Yerni tortuvchi kuchini \vec{F} bilan

belgilasak, Yerning Qu-yoshni tortuvchi kuchi - \vec{F} ga teng bo'ladi, ya'ni ular miqdor jihatdan bir-biriga teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan.

5-aksioma (qotish printipi). *Agar deformastiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.*

Masalan, egiluvchan sim muvozanat holatida absolyut qattiq sterjenga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.

5-aksiomadan foydalanib, kuchlar sistemasi ta'siridagi absolyut qattiq jismning muvozanat shartlarini deformastiyalanadigan jismlar uchun ham tadbiiq etish mumkin.

1.3-§. Bog'lanish va bog'lanish reakstiyalari

Berilgan jismning ko'chishi boshqa jismlar bilan cheklangan bo'lsa, u *bog'lanishdagi jism* deyiladi. Berilgan jismning ko'chishini cheklovchi jismga *bog'lanish* deyiladi. Mashina yoki mexanizm qismlarining harakati oldindan cheklangan bo'ladi. Masalan, ichki yonuv dvigateli stilindri ichida harakatlanayotgan porshen to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qiladi. Bunda porshen bog'lanishdagi jism-dir. Stilindr va shatun esa bog'lanish vazifasini bajaradi.

Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'siriga bog'lanish reakstiya kuchi deyiladi. Bog'lanishdagi jismlarning harakati qaysi yo'nalishda cheklangan bo'lsa, bog'lanish reakstiya kuchi shu yo'nalishga teskari yo'naladi.

Harakati bog'lanishlar bilan cheklanmagan jism *erkin jism* deyiladi. Masalan,

havoda uchayotgan samolyotni erkin jism deb qarash mumkin.

Statikada erkin jismning muvozanat shartlari chiqariladi. Bu shartlarni bog'lanishdagi jismga tadbiiq etish uchun bog'lanishlar aksiomasidan foydalaniladi.

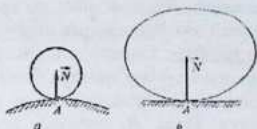
Bog'lanishlar aksiomasi (*bog'lanishdan bo'shatish printipi*). *Bog'lanish-larning berilgan jismga ta'sirini reakstiya kuchi bilan almashtirib, har qanday bog'lanishdagi jismni erkin jism deb qarash mumkin.*

Bog'lanishdagi jismlarning bir-biriga tegib turgan qismidagi ishqalanish ku-chini hisobga olmay, bog'lanishlarni quyidagi uchta

gruppaga ajratish mumkin.

I. Silliq sirt vositasida bog'lanishlar

a) Jism silliq sirtga A nuqtada tayanadi (1.6- rasm, a). Silliq sirt jismning shu

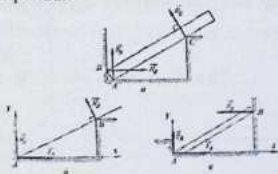


1.6-rasm.

sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha harakatini cheklaydi. Shu sababli silliq sirt-ning reakstiya kuchi N sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'naladi. Bu kuchga *normal reakstiya kuchi* deyiladi. Xususan, *silliq tekislikning reakstiya kuchi* te-kislikka perpendikulyar yo'naladi (1.6-rasm, \bar{o})

b) Balka A nuqtada polga, B nuqtada vertikal devorga va C nuqtada ikki yoqli burchak qirrasiga tayanadi (1.7-rasm, a). Polning va vertikal devorning N_A , N_B re-akstiya kuchlari A va B nuqtalarda mos ravishda pol va devorga o'tkazilgan per-pendikulyar bo'yicha yo'naladi. Ikki yoqli burchakdan tashkil topgan qirraning reakstiya kuchi N_C esa C nuqtada balkaga o'tkazilgan perpendikulyar bo'yicha yo'naladi.

Agar balkaning ko'ndalang o'lchamlari hisobga olinmasa, uni bitta A nuqtaga tayangan deb qarash mumkin (1.7-rasm, \bar{o}). Bu holda reakstiya kuchi A nuqtadan o'tadi, lekin qaysi tomonga yo'nalgani ma'lum emas. Masala echishda bunday re-akstiya kuchini tanlab olingan koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuv-chilarga ajratib, ularni jism muvozanati uchun tuzilgan statika tenglamalaridan aniqlanadi.



1.7-rasm

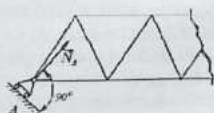
A to'siqning reakstiya kuchi ham tashkil etuvchilarga ajratilib, shunga o'xshash aniqlanadi (1.7-rasm, ϵ).

v) Jism qo'zg'almas tekislikka g'altaklar vositasida tayanib tursa (1.8-rasm), A nuqtadagi reakstiya kuchi N_A shu tekislikka perpendikulyar yo'naladi. Shunday qib, qo'zg'aluvchi tayanchning reakstiya kuchi tayanch tekishgiga perpendikul-yar yo'naladi.

II. **Sharnirli bog'lanishlar.** Umumiy o'q yoki nuqta atrofida aylana oladigan ikkita jism orasidagi bog'lanishga *sharnir* deyiladi.

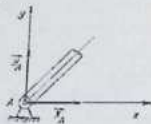
g) Sthndrik sharnir. Qo'zg'almas asosga o'matilgan stihndrik shamirning reakstiya kuchi R_A aylanish o'qiga perpendikulyar ravishda yo'naladi. Masala echishda bunday reakstiya kuchini aylanish o'qiga perpendikulyar tekislikda yotuvchi x va y o'qlarga parallel yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratib, jismning muvozanat shartidan topiladi (1.9-rasm).

d) Sferik sharnir. AO sterjen O nuqtada sferik sharnir vositasida bog'langan bo'lsa, bu sterjen O nuqtadan o'tuvchi har qanday o'q atrofida faqat aylana oladi (1.10-rasm). Sferik shamirning R_O reakstiya kuchi O nuqtadan o'tadi, lekin qaysi tomonga yo'nalishini oldindan aytib bo'lmaydi. Sferik shamirning reakstiya kuchi-ni tanlab olingan koordinata o'qlariga parallel yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratib, ularni jismning muvozanat shartlaridan aniqlash mumkin.

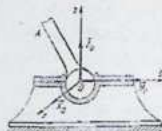


1.8-rasm.

e) Vaznsiz sterjen vositasida sharnirli bog'lanish. Jism uchlari sharnirli biriktirilgan ingichka (vaznsiz deb qaraladigan) sterjenlar vositasida bog'langan bo'lsin (1.11-rasm). O'z og'irligi hisobga olinmaydigan, uchlari boshqa nuqtalariga hech qanday kuch qo'yilmagan sterjenlarga vaznsiz sterjenlar deyiladi. 1-aksioma-ga ko'ra, sterjenlarning hap biri muvozanatda bo'lishi uchun unga qo'yilgan kuch-

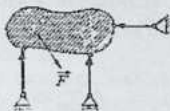


1.9-rasm.

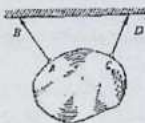


1.10-rasm.

lar miqdor jihatdan teng, sterjen bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi kerak. Binobarin, bunday sterjenlar faqat siqiladi yoki cho'ziladi hamda reakstiya kuchlari 1.11- rasmdagidek sterjenlar bo'ylab yo'naladi.



1.11-rasm.



1.12-rasm.

III. Ip, zanjir va qayishlar vositasidagi bog'lanishlar.

j) Jism AB , CD iplar vositasida osilgan bo'lsin (1.12-rasm).

Iplarda hosil bo'ladigan reakstiya kuchlariga *taranglik kuchlari* deyiladi va ular ip bo'ylab yo'naladi.

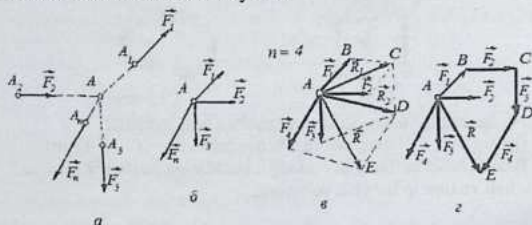
Nazorat savollari:

1. Kuch deb nimaga aytiladi?
2. Absolyut qattiq jism tushunchasi nimadan iborat?
3. Statikaning asosiy aksiomalarini aytib bering?
4. Kuch vektorini o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish mumkinmi?
5. Sirpanuvchi vektorlar deb qanday vektorga aytiladi?
6. Erkin, erksiz jismlarga misollar keltiring?
7. Bog'lanish deb nimaga aytiladi?
8. Silliqlik gorizontall tekislikdan iborat bog'lanishning reaktsiyasi qanday yo'naladi?
9. Egiluvchan bog'lanishlarning (arqon, tros, ip kabilar) reaktsiyalari qanday yo'naladi?
10. Tsilindrik sharnirdan iborat qo'zg'almas va qo'zg'aluvchan bog'lanish-larning reaktsiyalari qanday yo'naladi?
11. Sferik sharnirdan iborat bog'lanishlarning reaktsiyalari qanday yo'naladi?
12. Bog'lanishlar aksiomasi nimadan iborat?

2-BOB. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

Tayanch soʻzlar: muvozanat, kesishuvchi kuchlar, teng taʼsir etuvchi, kuchning proektsiyasi.

Taʼsir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasiga *kesishuvchi kuchlar sistemasi* deyiladi.



2.1-rasm

Kuchlarni ularning taʼsir chiziqlari boʻylab koʻchirish mumkin boʻlgani tufayli ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kesishuvchi kuchlar sistemasi, (2.1-rasm, a), kuchlarning taʼsir chiziqlari kesishgan A nuqtaga qoʻyilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent boʻladi (2.1-rasm, b).

2.1- §. Kesishuvchi kuchlarni geometrik qoʻshish.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ kuchlar bir nuqtaga qoʻyilgan. Bu kuchlarni qoʻshish uchun parallelogramm qoidasidan ketma-ket foydalanish mumkin. (2.1-rasm, a).

\vec{F}_1, \vec{F}_2 kuchlarni qoʻshib, \vec{R}_1 kuchni aniqlaymiz:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

\vec{R}_1 ni \vec{F}_3 kuch bilan qoʻshib, \vec{R}_2 ni hosil qilamiz. Nihoyat, \vec{R}_2 bilan \vec{F}_4 kuch vektorlari asosida parallelogramm qurib, berilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ kuchlar sistemasining teng taʼsir etuvchisi \vec{R} uchun quyidagi formulani olamiz:

$$\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

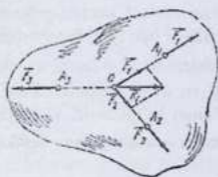
Bunda teng taʼsir etuvchi \vec{R} ning taʼsir chizigʻi A nuqtadan oʻtadi. Kesishuvchi kuchlarni qoʻshish uchun har gal parallelogramm

yasash o'rniga birinchi kuchning uchiga ikkinchi kuchni o'ziga parallel ravishda keltiramiz; so'ngra ikkinchi kuchning uchiga uchinchi kuchni o'ziga parallel ravishda keltiramiz va hokazo (2.1-rasm, e). A nuqtani to'rtinchi kuchning uchi bilan tutashtirib, teng ta'sir etuvchi \vec{R} ni aniqlaymiz. Teng ta'sir etuvchini bu usulda aniqlashga ko'pburchak qoidasi deyiladi. $ABCDE$ siniq chiziqqa kuch ko'pburchagi deyiladi.

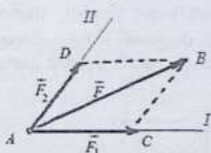
Xuddi shuningdek, agar berilgan kesishuvchi kuchlar sistemasi n ta kuchlardan iborat bo'lsa, ularning teng ta'sir etuvchisi

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \quad (2.1)$$

formuladan aniqlanadi. Shunday qilib, kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisi tashkil etuvchi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng va shu kuchlar ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi.



2.2- rasmi.



2.3- rasmi.

2.2-§. Uch kuchning muvozanati haqidagi teorema

Teorema. Bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch mu-vozanatlansa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

Isbot. Muvozanatdagi jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ kuchlar sistemasi qo'yilgan bo'lsin. Kuchlardan ikkitasini, masalan, \vec{F}_1 va \vec{F}_2 ni ularning ta'sir chiziqlari kesishadigan O nuqtaga keltirib, parallelogramm qoidasi asosida qo'shamiz:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

U holda $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ kuchlar sistemasi o'rniga unga ekvivalent ikkita kuchdan iborat sistemaga ega bo'lamiz:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}_1, \vec{F}_3) \sim 0.$$

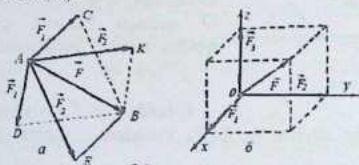
1- aksiomaga asosan, \vec{R}_1 va \vec{F}_3 kuchlarning miqdorlari teng, yo'nalishi esa bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgandagina ular muvozanatlashadi. Binobarin, \vec{F}_3 kuchning ta'sir chizig'i ham O nuqtadan o'tadi.

2.3-§. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish

Quyidagi uchta holni ko'ramiz: 1) \vec{F} kuchni shu kuch bilan bir tekislikda yotuvchi berilgan ikkita yo'nalish bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish. Buning uchun kuchning B uchidan berilgan I va II to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan va ular bilan C va D nuqtalarda kesishadigan BC , BD kesmalarni o'tkazamiz (2.3-rasm). $\vec{AC} = \vec{F}_1$ va $\vec{AD} = \vec{F}_2$ vektorlar \vec{F} kuchning izlanayotgan tashkil etuvchilarini ifodalaydi.

2) \vec{F} kuchni shu kuch bilan bir tekislikda yotuvchi va son qiymatlari berilgan ikkita tashkil etuvchiga ajratish. \vec{F} kuchning boshi A va uchidagi B nuqtalarni markaz qilib, radiusi berilgan masshtabda tanlab olingan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 ga teng yoylarni chizamiz (2.4-rasm, a). Bu yoylar C va D nuqtalarda kesishadi. ACB va ADB uchburchaklarni diagonali AB ga teng parallelogrammlar bilan to'ldiramiz. U holda AC va AE yoki AD va AK vektorlari \vec{F} kuchning izlanayotgan tashkil etuvchilarini ifodalaydi.

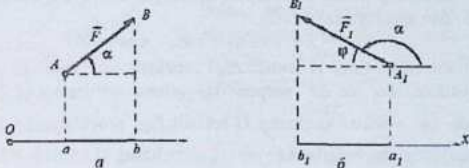
3) \vec{F} kuchni bir-biriga perpendikulyar uchta koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tashkil etuvchilarga ajratish. Buning uchun parallelepiped qoidasidan foydalanib, diagonali \vec{F} kuchga teng, qirralari berilgan yo'nalishlarga mos keluvchi parallelepiped qurish kifoyadir (2.4-rasm, b).



2.4-rasm.

2.4-§. Kuchning tekislikdagi va o'qdagi proektsiyasi

Kuch bilan o'q bir tekislikda yotgan holda \vec{F} kuchning Ox o'qdagi proektsiyasini aniqlash uchun kuchning boshi A va uchidagi B nuqtalardan berilgan o'qqa perpen-dikulyar (Aa) va (Bb) chiziqlarni o'tkazamiz (2.5-rasm). U holda mos ishora bilan olingan ab kesma \vec{F} kuchning Ox o'qdagi proektsiyasini ifodalaydi. Agar a nuqtadan b nuqtaga ko'chish Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, musbat ishora, unga teskari yo'nalsa, manfiy ishora olinadi.



2.5-rasm

\vec{F} kuchning Ox o'qdagi proektsiyasi F_x yoki X bilan belgilanadi:

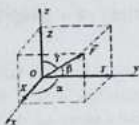
$$F_x = X = F \cos \alpha \quad (2.2)$$

2.5-rasm, δ dagi \vec{F}_1 kuchning x o'qdagi proektsiyasi ham shu tarzda aniqlanadi: $X_1 = F_1 \cos \alpha$ yoki $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ bo'lgani uchun

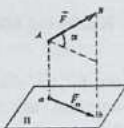
$$X_1 = F_1 \cos \alpha = -F_1 \cos \varphi$$

Shunday qilib, kuchning biror o'qdagi proektsiyasi skalyar miqdor bo'lib, kuch moduli bilan kuchning shu o'q musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagi kosi-nusiga ko'paytmasiga teng. Bu ta'rifga ko'ra $\alpha = \pi/2$ yoki $\alpha = 3\pi/2$ da $X = 0$; $\alpha = \pi$ da $X = -F$ bo'ladi.

\vec{F} kuchning $Oxyz$ koordinata o'qlari sistemasi bilan tashkil qilgan burchaklarini α, β, γ bilan belgilaylik (2.6-rasm). U holda diagonali F ga teng bo'lgan parallelepiped (mos ishora bilan olingan) tomonlarining uzunligi (2.2) ga asosan \vec{F}



2.6-rasm



2.7-rasm

kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini ifodalaydi:

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma \quad (2.3)$$

Kuchning moduli parallelepipedning diagonaliga teng:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2.4)$$

\vec{F} kuchning yo'nalishini topish uchun yo'naltiruvchi kosinuslarni (2.3) dan aniqlaymiz:

$$\cos \alpha = X/F, \quad \cos \beta = Y/F, \quad \cos \gamma = Z/F \quad (2.5)$$

\vec{F} kuchning biror Π tekislikdagi proekstiyasini aniqlash uchun shu tekislikka Aa va Bb perpendikulyarlarni tushiramiz (2.7-rasm); u holda \vec{ab} vektor \vec{F} kuchning Π tekislikdagi proekstiyasini ifodalaydi va quyidagicha belgilanadi: $\vec{ab} = \vec{F}_{\Pi}$. Kuchning Π tekislik bilan tashkil qilgan burchagini α bilan belgilasak, kuchning tekislikdagi proekstiyasining moduli $F_{\Pi} = F \cos \alpha$ formula yordamida aniqlanadi.

2.5 - §. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda aniqlash

Kuchni uning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari va qo'yilgan nuqtasining ko-ordinatalari orqali topish usuliga *analitik usulda aniqlash* deyiladi.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi (2.1) ga ko'ra shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng. (2.1) ni koordinata o'qlariga proekstiyalab, teng ta'sir etuvchining koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini aniqlaymiz:

$$R_x = \sum_{v=1}^n X_v, \quad R_y = \sum_{v=1}^n Y_v, \quad R_z = \sum_{v=1}^n Z_v$$

bunda X_v, Y_v, Z_v bilan \vec{F}_v kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari belgilangan.

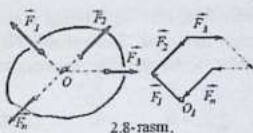
Teng ta'sir etuvchining moduli (2.4) ga ko'ra quyidagicha aniqlanadi.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{v=1}^n X_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Y_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Z_v\right)^2} \quad (2.6)$$

yo'nalishi esa (2.5) ga asosan topiladi:

$$\cos \alpha = R_x/R, \quad \cos \beta = R_y/R, \quad \cos \gamma = R_z/R$$

2.6 - §. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanati



2.8-rasm.

Agar kesishuvchi ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \vec{R} nol-ga teng bo'lsa, u holda bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi, aksincha, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lsa, teng ta'sir etuvchi nolga teng

bo'ladi: $\vec{R} = 0$. Bu holda (2.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v = 0 \quad (2.7)$$

Binobarin, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun

mazkur kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

(2.7) tenglamaning geometrik ma'nosi quyidagicha: jismga ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sir etsin. (2.8- rasm). Bu kuchlar uchun kuch ko'pburchagi yasalsa, u yopiq bo'ladi, ya'ni mazkur ko'pburchakda bi-rinchi kuchning boshi bilan oxirgi kuchning uchi ustma-ust tushadi. Kuch ko'pburchagi yopiq bo'lsa, $\vec{R} = 0$ bo'ladi. Demak, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun bu kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lishi zarur va etarlidir.

Teng ta'sir etuvchi kuch $\vec{R} = 0$ bo'lsa, (2.6) ni e'tiborga olsak,

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0$$

yoki

$$\begin{aligned} R_x = \sum_{v=1}^n X_v = 0, \quad R_y = \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \\ R_z = \sum_{v=1}^n Z_v = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bu tengliklar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analitik ifodasidir. Demak, kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning har bir koordinata o'qlaridagi proekstiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Yozuvni qisqartirish maqsadida (2.8) ni kelgusida

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0 \quad (2.9)$$

ko'rinishda yozamiz.

Kesishuvchi kuchlar bir tekislikda, masalan, Oxy tekisligida yotsa, (2.9) ning uchinchi tenglamasi ayniyatga aylanadi. Shu sababli Oxy tekisligida yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari quyidagicha bo'ladi:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0 \quad (2.10)$$

Statikada jismning muvozanatiga oid masalalar quyidagi tartibda echiladi:

1. Muvozanati tekshirilayotgan jism aniqlanadi.
2. Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi.
3. Jismga ta'sir etayotgan berilgan kuchlar ko'rsatiladi va bog'lanishlarni reakstiya kuchlari bilan almashtiriladi.
4. Ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab, ularga mos muvozanat tenglamalari tuziladi.
5. Tenglamalarni echib noma'lum kuchlar aniqlanadi, topilgan reaksti-

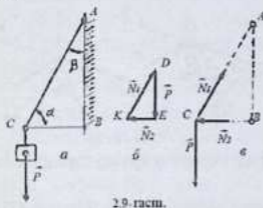
ya kuchi ishorasining musbat bo'lishi tanlab olingan yo'nalishning to'g'ri ekanligini, manfiy bo'lishi reakstiyaning tanlab olingan yo'nalishga teskari yo'nalganligini ko'rsatadi.

2.1-masala. AC va BC sterjenlar o'zaro va vertikal devor bilan sharnirlar vositasida biriktirilgan (2.9-rasm, a). C sharnirga og'irligi $P = 1000$ N bo'l-gan yuk osilgan. Agar sterjenlar orasidagi burchak $\alpha = 60^\circ$ va AC sterjen bilan devor orasidagi burchak $\beta = 30^\circ$ bo'lsa, sterjenlarning og'irligini hi-sobga olmay ularda hosil bo'ladigan zo'riqishlar aniqlansin.

Izoh. Sterjen bo'ylab yo'nalgan cho'zuvchi yoki siquvchi kuch sterjen-dagi zo'riqish deb ataladi. Cho'zuvchi kuchdan farq qilish uchun siquvchi kuchni manfiy son bilan ifo-dalaymiz. Sterjendagi

zo'riqish miqdor jihatidan shu sterjenning reakstiya kuchi N ga teng bo'ladi.

Yechish. C sharnini moddiy nuqta deb qarab uning muvozanatini tekshiramiz. C nuqtaga $P = 1000$ N bo'lgan vertikal pastga yo'nalgan og'irlik kuchi qo'yilgan. AC va BC sterjenlarning reakstiya kuchlari shu sterjenlar bo'y-lab yo'nalgan bo'lib, ularni mos ra-vishda \vec{N}_1 va \vec{N}_2 bilan belgilaymiz. Na-tijada $\vec{P}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ kuchlar C nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini tash-kil etadi. \vec{N}_1 va \vec{N}_2 ni aniqlash uchun kesishuv-chi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik shartidan foydalana-miz.



2.9-rasm.

(2.7) ga ko'ra ($\vec{P}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$) kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi C nuqta muvozanatda bo'lishi uchun ularning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak:

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$$

ya'ni $\vec{P}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ kuchlarga qurilgan kuch uchburchagi yopiq

bo'lishi kerak. Kuch ko'p burchagini chizish uchun biror masshtabda ixtiyoriy D nuqtada

\vec{P} kuchni o'ziga parallel ravishda o'tkazamiz (2.9-rasm, b). \vec{P} kuchning boshi D va uchidagi E nuqtalardan AC va BC sterjenlarga parallel chiziq-lar o'tkaza-miz. Bu chiziq-larning kesishgan nuqtasini K bilan belgilasak, hosil bo'lgan DEK uchburchak izlanayotgan yopiq kuch uchburchagini ifodalaydi. Bunda KD va KE vektorlar mos ravishda \vec{N}_1 va \vec{N}_2 reakstiya kuchlarini ifodalaydi. DEK uchburchakning KD va KE tomonlarini berilgan masshtab birligida o'l-chab, \vec{N}_1 va \vec{N}_2 kuch-larning modullarini aniqlaymiz.

\vec{N}_1 va \vec{N}_2 larni DEK uchburchakdan trigonometrik yo'l bilan ham aniq-lash mumkin. Yasashga ko'ra $AB \parallel DE$, $AS \parallel DK$ va $BC \parallel EK$ bo'lganidan $\angle KDE = \beta = 30^\circ$ va $\angle EKD = \alpha = 60^\circ$, binobarin, $\triangle DEK$ to'g'ri burchakli uchburchakdan

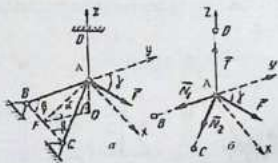
$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1000}{\sqrt{3}/2} = 1154 \text{ N}, N_2 = P \operatorname{ctg} \alpha = 1000 \sqrt{3} / 3 = 577 \text{ N}.$$

munosabatlarni olamiz.

\bar{N}_1 va \bar{N}_2 lar AC va CB sterjenlarning C sharnirga ta'sir kuchini, ya'ni mazkur sterjenlarning reakstiya kuchlarini ifodalaydi. Sterjenlardagi zo'riqishni topish uchun sterjenlarning siqilishi yoki cho'zilishini aniqlaymiz. Agar reakstiya kuchi C sharnirdan sterjen bo'ylab yo'nalsa, sterjen cho'ziladi; reakstiya kuchi C sharnirga yo'nalsa, sterjen siqiladi. Buni nazarda tutib, topilgan kuchlarni C sharnirga qo'ysak (2.9-rasm, σ), AC sterjen cho'zilishi va BC sterjen siqilishini ko'ramiz. Shu sa-babli $S_1 = N_1 = 1154$ H, $S_2 = -N_2 = -577$ H.

2.2- masala. A, B, C nuqtalarda sharnirli biriktirilgan AB va AC vaznsiz sterjenlar AD ip vositasida ushlab turiladi. A nuqtaga gorizontaal tekislikda yotuvchi va yz tekisligi bilan $\gamma = 60^\circ$ burchak tashkil etuvchi $F = 20$ kN kuch ta'sir etadi. Agar $\angle ABC = \angle ACB = \beta = 45^\circ$,

$\angle AEO = \alpha = 30^\circ$ bo'lsa, sterjenlardagi zo'riqish va ipning taranglik kuchi aniqlansin (2.10 -rasm, a).



2.10- rasmi.

Yechish. A nuqtaning muvozanatini tekshiramiz. A nuqta AD ip hamda AB va AC vaznsiz sterjenlar vositasida ushlab turiladi. Koordinatalar boshini A nuqtada olib, z o'qni vertikal yuqoriga yo'naltiramiz, xy tekisligi uchun \vec{F} kuch yotgan gorizontaal tekislikni olamiz. A nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarni ko'rsatamiz (2.10-rasm, σ). A nuqtaga gorizontaal tekislikda yotuvchi berilgan \vec{F} kuch qo'yilgan. Bog'lanishdan bo'shatish aksiomasiga ko'ra AD ip-ning A nuqtaga ta'siri taranglik kuchi \vec{T} hamda AB va AC sterjenlarning ta'sirini \bar{N}_1 va \bar{N}_2 reakstiya kuchlari bilan almashtirish mumkin. AB va AC sterjenlarni cho'ziladi deb qarab, \bar{N}_1 va \bar{N}_2 larni A nuqtada mos ravishda AB va AC bo'ylab yo'naltiramiz. Agar masalani echganda ular manfiy ishorali bo'lsa, ularga mos sterjen siqiladi. A nuqtaga \vec{F} , \vec{T} , \bar{N}_1 va \bar{N}_2 kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sir etadi. A nuqta uchun muvozanat tenglamalarini tuza-miz:

$$\sum X_v = 0; \quad F \sin \gamma - N_1 \cos \beta + N_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; \quad F \cos \gamma - N_1 \sin \beta \cos \alpha - N_2 \sin \beta \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Z_v = 0; \quad - N_1 \sin \beta \sin \alpha - N_2 \sin \beta \sin \alpha + T = 0.$$

Bu tenglamalar sistemasini echib, noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$N_1 = \frac{F}{2} \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \beta \cos \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} \right) = 20,41 \text{ kN},$$

$$N_2 = N_1 - F \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} = -4,09 \text{ kN},$$

$$T = F \cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5,77 \text{ kN}.$$

N_2 ning manfiy ishorali bo'lishi AC sterjen biz faraz qilgandek cho'zilmay, balki aslida siqilishini ko'rsatadi.

Nazorat savollari:

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat sharti.
2. Tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat sharti.
3. Statik noaniq masalalar deb qanday masalalarga aytiladi?
4. Statik noaniq masalalar qanday yo'l bilan echiladi?
5. Kesishuvchi kuchlar sistemasi deb, qanday kuchlarga aytiladi?
6. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
7. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining moduli qanday aniqlanadi?
8. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi qaysi nuqtaga qo'yiladi?

3-BOB. TEKISLIKDAGI PARALLEL KUCHLAR VA JUFTLAR NAZARIYASI

Tayanch soʻzlar: kuchning elkasi, teng taʼsir etuvchi kuchning momenti, kuch momenti, juft kuchlar, juftlarning elkasi, juftlarning momenti, ekvivalent juftlar, juftlarni qoʻshish.

3.1-§. Ikkita parallel kuchni qoʻshish

Taʼsir chiziqlari oʻzaro parallel boʻlgan kuchlar sistemasiga *parallel kuchlar sistemasi* deyiladi.

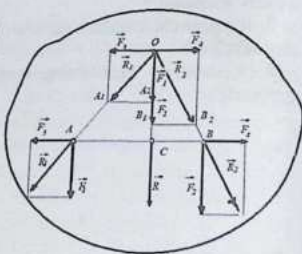
Jismning A va B nuqtalariga qoʻyilgan va bir tomonga yoʻnalgan parallel \vec{F}_1, \vec{F}_2 kuchlar berilgan boʻlsin (3.1-rasm). Bu kuchlarning teng taʼsir etuvchisini topish uchun A va B nuqtalarga taʼsir chiziqlari AB da yoʻtuvchi miqdor jihatidan teng, AB boʻylab qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan (\vec{F}_3, \vec{F}_4) sistemani qoʻyamiz. A va B nuqtalarga qoʻyilgan kuchlarni parallelogramm qoidasi-ga asosan qoʻshib,

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 \text{ va } \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$$

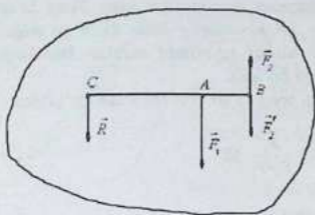
kuchlarni olamiz. \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlarning taʼsir chiziqlari O nuqtada kesishadi. O nuqtaga \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlarni koʻchirib, \vec{R}_1 ni \vec{F}_1, \vec{F}_3 kuchlarga, \vec{R}_2 ni \vec{F}_2, \vec{F}_4 kuchlarga ajratamiz. O nuqtaga qoʻyilgan (\vec{F}_3, \vec{F}_4) oʻzaro boʻlgani uchun A va B nuqtalarga qoʻyilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar oʻrniga O nuqtaga qoʻyilgan, OC boʻylab yoʻnalgan \vec{F}_3 va \vec{F}_4 kuchlarni olamiz. Bu kuchlarning teng taʼsir etuvchisi ularning algebraik yigʻindisiga teng:

$$R = F_1 + F_2 \quad (3.1)$$

\vec{R} ni taʼsir chizigʻi boʻylab C nuqtaga koʻchiramiz. Rasmdan OAC va OA_1A_2 hamda OCB va OB_1B_2 uchburchaklar oʻxshashligidan quyidagi



3.1-rasm.



3.2- rasm.

$$\frac{AC}{F_1} = \frac{OC}{F_1}, \frac{CB}{F_4} = \frac{OC}{F_2}$$

proporstiyalarni tuzamiz: Bunda $F_3 = F_4$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{AC} \quad (3.2)$$

hosil bo'ladi. Propors-tiyaning xossasiga ko'ra,

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 + F_2}{CB + AC} = \frac{R}{AB} \quad (3.3)$$

(3.1) va (3.3) dan quyidagi natija kelib chiqadi: *bir tomonga yo'nalgan ikki parallel kuchning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarning algebraik yig'indisiga teng va shu kuchlar bilan bir tomonga yo'naladi. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i esa kuchlar qo'yilgan nuqtalar orasi-dagi masofani ichki ravishda shu kuchlarga teskari proporsional bo'laklarga bo'ladi.*

Miqdolari teng bo'lmagan, parallel va bir-biriga teskari yo'nalgan ikkita kuch-ni qo'shish uchun (3.1) va (3.2) formulalardan foydalanib, \vec{F}_1 kuchni shu kuch bi-lan bir xil yo'nalgan \vec{F}_2' va \vec{R} kuchlarga ajratamiz. Bunda \vec{F}_2' kuchni B nuqtaga qo'yilgan va $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$ deb qaraymiz (3.2- rasm). $(\vec{F}_1, \vec{F}_2') \in (\vec{R}, \vec{F}_2', \vec{F}_2)$ hosil bo'l-di. Bunda $(\vec{F}_2', \vec{F}_2) \in 0$ bo'lgani uchun 2-aksiomaga ko'ra ularni tashlab yuborish mumkin. Binobarin, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2') \in \vec{R}$. (3.1) va (3.2) ga asosan teng ta'sir etuvchi kuch \vec{R} quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$R + F_2' = F_1 \quad \frac{R}{AB} = \frac{F_2}{AC} \quad (3.4)$$

yoki $F_2' = F_2$ bo'lganidan

$$R = F_1 - F_2 \quad (3.5)$$

(3.5) ni (3.4) ning ikkinchi formulasiga qo'yib soddalashtirsak,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} \quad (3.6)$$

munosabatni olamiz.

(3.5) va (3.6) dan ko'ramizki, *miqdolari teng bo'lmagan va bir-biriga teskari yo'nalgan ikkita parallel kuchlarning teng ta'sir*

etuvchisi miqdor ji-hatidan ularning ayir-masiga teng. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i esa AB kesmaning katta kuch qo'yilgan davomida yotib, shu kesmani tashqi ra-vishda mazkur kuchlarga teskari proporsional bo'laklarga bo'ladi.

(3.4) va (3.5) dan foydalanib, teng ta'sir etuvchi kuch qo'yilgan C nuq-tani topamiz:

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB \quad (3.7)$$

3.2-§. Juft kuch haqida tushuncha

Bir-biriga teskari yo'nalgan, miqdor jihatidan teng parallel kuchlar sistemasi *juft kuch* (qisqacha *juft*) deb ataladi. Juft kuch (\vec{F}_1, \vec{F}_2) bilan belgilanadi (3.3-rasm). Juft tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir chiziq-lari orasidagi eng qisqa masofaga *juft-ning elkasi* deyiladi va u h bilan belgilanadi. Juft yotgan tekislikka *juftning tekisligi* deyiladi.

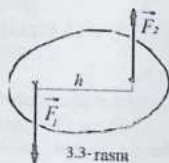
Modullari teng bo'lmagan ($F_1 > F_2$) ikkita bir-biriga teskari yo'nalgan parallel kuchlarni qo'shishda \vec{F}_2 kuch moduli \vec{F}_1 kuchning moduliga yaqinlasha boradi deb qarasaq, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) kuchlar sistemasi limit holatida juft kuchni tashkil etadi hamda (3.5) va (3.7) ga asosan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga intiladi; teng ta'sir etuvchi qo'yilgan nuqta esa, kuchlarning ta'sir chizig'idan cheksiz-likka uzoqlasha boradi. Bundan ko'ramizki, juft kuch uchun teng ta'sir etuvchi kuch tushunchasi ma'noga ega emas.

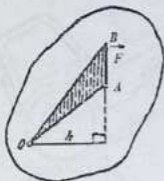
Shunday qilib, juft kuchni bitta kuch bilan almashtirib bo'lmaydi.

3.3- §. Kuch momentining algebraik qiymati

Jismning qo'zg'almas nuqta (yoki o'q) atrofidagi aylanma harakatini aniq-lash kuchning momenti tushunchasiga bog'liq. Shaki tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylana oladigan jismga shu tekislikda yotuvchi \vec{F} kuch ta'sir etsin. O'qning shaki tekisligi bilan kesishgan nuqtasini O bilan belgilaylik (3.4- ra-sm).

O nuqtadan \vec{F} kuchning ta'sir chizig'iga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarning uzunligi h berilgan kuchning O nuqtaga nisbatan *elkasi* deyila-di. Kuch





3.4- rasml.

momenti hisoblanadigan nuqtaga *moment markazi* deyiladi.

\vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb, mos ishora bilan olingan kuch moduli F ni kuch elkasi h ga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi. Kuch momentining algebraik qiymati $M_o(\vec{F})$ bilan belgilanadi va u quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h \quad (3.8)$$

Agar \vec{F} kuch jismni 3.4- rasmdagidek O nuqta atrofida soat strelkasi hara-katiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, kuch momenti musbat, aks hol-da manfiy hisoblanadi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti quyidagi xossalarga ega:

1. Kuchning miqdori va yo'nalishini o'zgartirmay ta'sir chizig'i bo'ylab istalgan nuqtaga ko'chirilsa, kuch momenti o'zgarmaydi (chunki kuch elkasi o'z-garmay qoladi).

2. Agar kuchning ta'sir chizig'i moment markazi-dan o'tsa, uning shu nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi (chunki kuch elkasi nolga teng bo'ladi).

3.4- rasmdan ko'ramizki, kuchning nuqtaga nisbatan momentining absolyut qiymati (3.8) ga asosan kuchning boshi va uchini moment markazi bilan tutash-tirishdan hosil bo'lgan AOB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng.

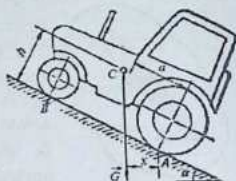
$$|M_o(\vec{F})| = 2S_{\Delta AOB} \quad (3.9)$$

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti tushuncha-sidan foydalanib, ikkita parallel kuchning teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan nuqtani quyidagicha talqin qilish mumkin. (3.2) proporstiyani $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot CB$ yoki $|M_c(\vec{F}_1)| = |M_c(\vec{F}_2)|$ ko'rinishda yoza olamiz. Kuch momentining ishorasini hisobga olsak, oxirgi tenglik quyidagicha yoziladi:

$$|M_c(\vec{F}_1)| + |M_c(\vec{F}_2)| = 0$$

Shunday qilib, ikkita parallel kuchning teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan nuqta shu nuqtaga nisbatan mazkur kuchlar momentlarining yig'indisi nolga tenglik shartidan aniqlanadi:

3.1-masala. Agar traktor og'irlik markazining koordinatalari $h=731\text{mm}$, $a=813\text{mm}$ bo'lsa, traktor A nuqta atrofida ag'darilib ketmaydigan bo'ylama ustuvor-ligini qanoatlantiruvchi α burchak aniq-lansin (3.5-rasm).



3.5-rasm.

Yechish. Traktor A nuqta atrofida ag'darilishi oldida uning og'irlik kuchi \vec{G} ning A nuqtaga nisbatan momenti

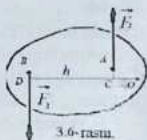
hamda B nuq-tadagi reakstiya kuchi nolga teng bo'ladi:

$$M_A(\vec{G}) = Gx \quad (1); R_B=0$$

Bunda x bilan G kuchning A nuqtaga nisbatan elkasi belgilangan. 3.5- rasmdan x uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$x = a \cos \alpha - h \sin \alpha \quad (2)$$

(1) da $G \neq 0$ bo'lgani uchun $x=0$ yoki $a \cos \alpha - h \sin \alpha = 0$. Bundan $\operatorname{tg} \alpha = a/h = 813/731 = 1,14$ amda $\alpha = 48^\circ$ bo'lishini aniqlaymiz. Shunday ilib, $\alpha < 48^\circ$ bo'l-sa, traktor A nuqta atrofida ag'darihb ketmaydi.



3.6-rasm.

3.4- §. Juft kuchning momenti

Juftning momenti deb, mos ishora bilan olingan juft tashkil etuvchilaridan birining miqdorini juft elkasiga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi. Juft momenti M bilan belgilanadi:

$$M = +F_1 h = +F_2 \cdot h.$$

Juft jismni soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, uning momenti musbat, soat strelkasi harakati bo'yicha aylantirishga intilsa, manfiy ishora bilan olinadi.

Teorema. *Juft tashkil etuvchi kuchlarning juft tekisligidagi ixtiyoriy nuqta-ga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi juft momentiga teng.*

Isbot. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft tekishgida ixtiyoriy O nuqtani olib, undan juft tuzuv-chi kuchlarning ta'sir chiziqlariga perpendikulyar OD chiziqni o'tkazamiz (3.6-rasm). $CD=h$, $F_1=F_2$ ekanligini e'tiborga olib quyidagi tenglikni yozish mum-kin:

$$M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot OC + F_2 \cdot OD = -F_1 \cdot OC + F_1(h+OC) = F_1 h = M.$$

Moment markazi uchun A yoki B nuqtani olsak,

$$M = M_a(\vec{F}_1) = M_a(\vec{F}_2) \quad (3.10)$$

ya'ni juft momenti, juft tashkil etuvchi kuchlardan birining ikkinchisi qo'yilgan nuqtaga nisbatan momentiga tengligi kelib chiqadi.

3.5- §. Ekvivalent juftlar haqidagi teorema

Juftning asosiy xossalari ifodalaydigan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. *Bir tekislikda yotuvchi, momentlari teng va aylanish yo'nalish-lari bir xil bo'lgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'ladi.*

Isbot. Bir tekislikda yotuvchi (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) juft kuchlarning moment-lari teng:

$$F_1 h_1 = Q_1 h_2 \quad (3.11)$$

va aylanish yo'nalishlari bir xil bo'lsin (3.7- rasm).

\vec{F}_1 kuchni ta'sir chiziqlari AB va AD da yotuvchi \vec{F}_3 va \vec{F}_4 tashkil etuvchi-larga, \vec{F}_2 kuchni ta'sir chiziqlari BC va AB da yotuvchi \vec{F}_5 va \vec{F}_6 tashkil etuv-chilarga ajratamiz. Natijada

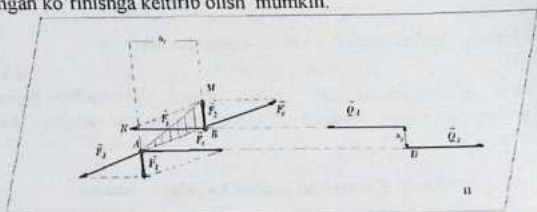
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \approx (\vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6)$$

hosil bo'ladi. Yasalishiga ko'ra, $(\vec{F}_3, \vec{F}_6) \approx 0$ bo'lgani uchun

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \approx (\vec{F}_4, \vec{F}_5) \quad (3.12)$$

Endi $F_5 = Q_1$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juftning momenti (\vec{F}_4, \vec{F}_5) juftning momentiga tengligini isbotlaymiz. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juftning momenti $F_2 h_1$ ga yoki rasmda shtrixlangan ABM uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng; (\vec{F}_4, \vec{F}_5) juftning momenti esa $F_5 h_2$ yoki ABN uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng. Bu uchburchaklarning umumiy AB asosga ega va balandliklari teng bo'lganidan ularning yuzalari o'zaro teng. Binobarin, $F_2 h_1 = F_5 h_2$. Bu tenglikni (3.11) bilan solishtirsak, $F_2 h_2 = Q_1 h_2$ yoki $F_2 = Q_1$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \approx (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$. (3.12) ga asosan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \approx (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$.

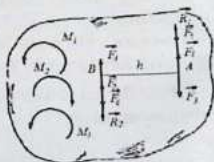
Juflarning tashkil etuvchilari parallel bo'lgan holni ham isbot qilingan ko'rinishga keltirib olish mumkin.



3.7. rasmi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

- 1) juftni o'z tekisligida ixtiyoriy ravishda ko'chirsak, juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi;
- 2) juftning momenti va aylanish yo'nalishini o'zgartirmay uning tashkil etuvchilari va elkasi o'zgartirilsa, juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi.



3.8. rasmi.

3.6-§. Bir tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shish. Tekislikdagi juft-larning muvozanat shartlari

Teorema. Bir tekislikda yotuvchi juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot. Jismga bir tekislikda yotuvchi va momentlari M_1, M_2, M_3 ga teng juftlar ta'sir etsin. Shartli ravishda juft kuchlarni yoysimon strelkalar bilan tasvirlash mumkin (3.8- rasmi). Ekvivalent juftlar to'g'risidagi teoreмага asosan, berilgan uchta juftni momentlarini o'zgartirmay umumiy h elkaga ega bo'lgan, tashkil etuvchilari A va B nuqtalarga qo'yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{F}_3, \vec{F}_4), (\vec{F}_5, \vec{F}_6)$ uchta juftlar sistemasiga keltiramiz. Bunda $F_1 h = M_1, F_3 h = M_2, F_5 h = M_3$. A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni alohida-alohida qo'shib, A nuqtada \vec{R}_1 va B nuqtada \vec{R}_2 kuchlarni olamiz. Bunda $R_1 = F_1 + F_3 + F_5, R_2 = F_2 + F_4 + F_6$. Natijada

berilgan juftlar sistemasi *teng ta'sir etuvchi juft* deb ataladigan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juftga keltiri-ladi va uning momenti

$$M = R_1 h = F_1 h - F_2 h + F_3 h = M_1 + M_2 + M_3$$

formuladan aniqlanadi.

Uchta juft uchun teorema isbotlandi. Xuddi shuningdek, bir tekislikda yo-tuvchi va momentlari M_1, M_2, \dots, M_n ga teng bo'lgan n ta juftlar sistemasini qo'-shish natijasida bitta teng ta'sir etuvchi juftni olish mumkin hamda bu juftning momenti

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{v=1}^n M_v \quad (3.15)$$

Isbotlangan teoremadan ko'ramizki, *tekislikdagi juftlar sistema muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir:*

$$\sum_{v=1}^n M_v = 0 \quad (3.16)$$

3.2- masala. Muvozanatlashgan uchta juft bir tekislikda yotadi. Bu juftlarni tashkil etuvchi kuchlarning miqdori mos ravishda 2 N, 3 N va 5 N; elkalari 3 m, x m va 6 m; birinchi va uchin-chi juftlarning momenti musbat, ikkinchi juftning momenti manfiy qiymatga ega. Uchinchi juft elkasi x topilsin.

Yechish. Juftlarning momentlari quyidagiga teng:

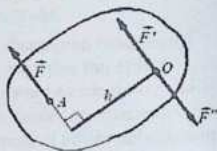
$M_1 = 2 \cdot 3 = 6$ Nm; $M_2 = 3x$ Nm; $M_3 = 5 \cdot 6 = 30$ Nm. Juft kuchlar muvozanatda bo'lgani uchun $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ yoki $6 - 3x + 30 = 0$. Bundan $x = 12$ m kelib chiqadi.

Nazorat savollari:

1. Ikkita parallel kuchni qo'shish.
2. Juft kuch haqida tushuncha
3. Kuch momentining algebraik qiymati
4. Juft kuchning momenti
5. Ekvivalent juftlar haqidagi teorema
6. Bir tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shish.
7. Tekislikdagi juftlarning muvozanat shartlari

4-BOB. TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASI

Tayanch soʻzlar. kuchlar sistema-sining muvozanati, kuchni oʻziga parallel koʻchirish, muvozanat shartlari, teng taʼsir etuvchi kuchning momenti haqidagi teorema ishqalanish, sirpanib ishqalanish, ishqalanish koeffitsienti, ishqalanish burchagi, ishqalanish konusi, dumalab ishqalanish.



4.1- rasm.

4.1- §. Kuchni oʻziga parallel koʻchirishga oid lemma

Agar jismga taʼsir etuvchi kuchlar bir tekislikda yotsa, unga tekislikdagi kuchlar sistemasi deyiladi.

Kuchning jismga taʼsirini oʻzgartirmay, uni oʻziga parallel ravishda bir nuqtadan keltirish markazi deb ataladigan ikkinchi nuqtaga koʻchirish masalasi 1804 yilda franstuz olimi L.Puanso tomonidan isbotlangan quyidagi lemma bilan ifodalangani:

Lemma. Jismning biror nuqtasiga qoʻyilgan kuch, jismda olingan ixtiyoriy keltirish markaziga qoʻyilgan xuddi shunday kuchga va momenti berilgan kuch-ning keltirish markaziga nisbatan momentiga teng juftga ekvivalent boʻladi.

Isbot. Jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qoʻyilgan boʻlsin (4.1- rasm). Jismning ixtiyoriy O nuqtasiga taʼsir chizigʻi \vec{F} ga parallel (\vec{F}, \vec{F}') sistemani qoʻyamiz. Bu nollik sistemaning tashkil etuvchilari $|\vec{F}| = |\vec{F}'|$ boʻlsin. Natijada $\vec{F} \in (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$, lekin $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ kuchlar sistemasi O nuqtaga qoʻyilgan \vec{F} kuchga va (\vec{F}, \vec{F}'') juftga ekvivalent boʻladi. (\vec{F}, \vec{F}'') juftning momenti \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan momentiga tengligi maʼlum:

$$M = M_o(\vec{F}),$$

Shunday qilib, A nuqtaga qoʻyilgan \vec{F} kuch, keltirish markazi O ga qoʻyilgan $\vec{F} = \vec{F}$ kuchga va momenti $M = M_o(\vec{F})$ boʻlgan (\vec{F}, \vec{F}'')

juftga ekvi-valent bo'lishi isbotlandi.

Kuchni o'ziga parallel ravishda ko'chirishda hosil bo'lgan juftga qo'shilgan juft deyiladi.

4.2-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$)

kuchlar ta'sir etsin (4.2-rasm; aniqlik uchun $n=3$ holini ko'ramiz). Puanso lem-masiga ko'ra, kuchlarni O markazga keltirish natijasida berilgan kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1^* = \vec{F}_1, \vec{F}_2^* = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n^* = \vec{F}_n$ kuchlar sistemasi va momentlari

$$M_1 = M_o(\vec{F}_1), M_2 = M_o(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_o(\vec{F}_n) \quad (4.1)$$

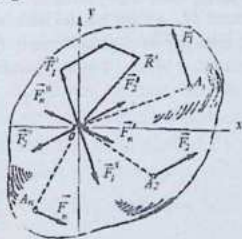
bo'lgan qo'shilgan juftlar sistemasi $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^*), (\vec{F}_2, \vec{F}_2^*), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n^*)$ ga ekviva-lent bo'ladi.

O markazga qo'yilgan $\vec{F}_1^*, \vec{F}_2^*, \dots, \vec{F}_n^*$ kuchlarni geometrik qo'shib, kuchlar sis-temasining bosh vektori deb ataladigan bitta

$$\vec{R}^* = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^* = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \quad (4.2)$$

kuchni olamiz. Binobarin, kuchlar sistemasining bosh vektor berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Bir tekislikda yotuvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^*), (\vec{F}_2, \vec{F}_2^*), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n^*)$ juftlarni qo'shib, momenti M_o ga teng bitta juftni olamiz. Bu juftning moment (3.15) ga asosan mazkur juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng:



4.2- rasm.

$$M_o = \sum_{v=1}^n M_v \quad \text{yoki (4.1) ga asosan}$$

$$M_o = \sum_{v=1}^n M_o(\vec{F}_v) \quad (4.3)$$

M_o ga tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti deyiladi. Demak, tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti markazga nisbatan bosh moment tashkil etuvchi kuchlarning sh

markazga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: tekislikdagi kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bu kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor \vec{R}' ga teng bitta kuch hamda momenti bosh moment M_O ga teng bitta juftga ekvivalent bo'ladi.

Bu usulga tekislikdagi kuchlar sistemasini Puanso usuli bilan berilgan markazga keltirish deyiladi.

Umumiy holda tekislikdagi kuchlar sistemasi faqat \vec{R}' ga ekvivalent bo'l-magani tufayli, \vec{R}' teng ta'sir etuvchini ifodalamaydi. Bosh vektor berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lib, keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi. Keltirish markazini o'zgartirish natijasida kuch elkasi, demak bosh moment o'zgaradi.

Bosh vektor \vec{R}' ning miqdor va yo'nalishini analitik usulda aniqlash uchun keltirish markazida, kuchlar yotgan tekislikda Ox va Oy o'qlarni o'tkazamiz (4.2-rasm). \vec{F}_v kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini X_v , Y_v ; \vec{R}' ning proekstiyalarini R'_x va R'_y bilan belgilaymiz. U holda (4.2) ni koordinata o'qlari-ga proekstiyalab R'_x va R'_y ni aniqlaymiz:

$$R'_x = \sum_{v=1}^n X_v, \quad R'_y = \sum_{v=1}^n Y_v.$$

Bosh vektorning moduli va yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{v=1}^n X_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Y_v\right)^2} \quad (4.4)$$

$$\cos\alpha = R'_x / R', \quad \cos\beta = R'_y / R', \quad (4.5)$$

Agar bosh vektor $\vec{R}'=0$ ya'ni berilgan kuchlarga qurilgan kuch ko'pburcha-gi yopiq hamda bosh moment $M_O = 0$ bo'lsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi momenti M_O ga teng bitta juft kuchga keltiriladi. Bu holda keltirish markazini o'zgartirgan bilan bosh moment o'zgarmaydi.

4.3-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchiga keltirish. Varinon teoremasi

Jismga bir tekislikda yotuvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sir etsin.

Bu kuchlar sistemasini ixtiyoriy O markazga keltirib, O nuqtaga qo'yilgan $\vec{R}' = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v$ bosh vektorga teng bitta kuchni va momenti $M_O = \sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v)$ ga teng bitta juft kuchni olamiz. Quyidagi ikki holni ko'ramiz:

1. Tanlab olingan keltirish markazi O nuqta uchun bosh moment $M_O = 0$ bo'lsin. Bu holda tekislikdagi kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan bitta \vec{R}' kuchga ekvivalent bo'ladi, ya'ni ko'rilayotgan holda bosh vektor teng ta'sir etuvchi kuchni ifodalaydi: $\vec{R}' = \vec{R}$ hamda $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx \vec{R}$.

Shunday qilib, berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi ta'sir chizig'i O nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchi kuch \vec{R} ga keltiriladi:

$$\vec{R} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v$$

2. Umumiy holda tekislikdagi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini aniqlash uchun momenti M_O ga teng juftning tashkil etuvchilaridan biri $(-\vec{R})$ ni shunday tanlaymizki, u miqdor jihatdan \vec{R} ga teng va yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'lsin. Natijada 4.3-rasmda tasvirlangan $(\vec{R}, -\vec{R})$ juft kuchni olamiz. Bu juftning momenti

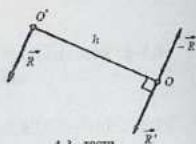
$$M_O = R \cdot h$$

formula bilan aniqlangani uchun uning elkasi

$$h = M_O / R = M_O / R' \quad (4.6)$$

tenglikdan topiladi. Shunday qilib, tekislikdagi berilgan kuchlar sistemasi \vec{R}' kuchga va aylanishi M_O ga mos $(\vec{R}', -\vec{R})$ juftga ekvivalent bo'ladi, lekin $(\vec{R}', -\vec{R}) \approx 0$ bo'lgani uchun berilgan kuchlar sistemasi nuqtadan OO' masofada yo'tuvchi O' nuqtaga qo'yilgan bitta \vec{R} kuchga ekvivalent bo'ladi. Bino-barin, $\vec{R}' \neq 0$, $M_O \neq 0$ bo'lgan holda tekislikdagi kuchlar sistemasi \vec{R} teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.

Varinon teoremasi. Tekislikdagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, tashkil etuvchi kuchlardan mazkur nuqtaga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni



4.3- rasm.

$$M_O(\vec{R}) = \sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v) \quad (4.7)$$

Isbot. 4.3-rasmdan ko'ramizki, \vec{R} teng ta'sir etuvchining O nuqtaga nisbatan momenti $M_O(\vec{R}) = R \cdot h$ ni e'tiborga olsak, $M_O(\vec{R}) = M_O$. O'z navbatida (4.3) ga ko'ra M_O bosh moment quyidagicha aniqlanadi:

$M_O = \sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v)$ Oxirgi ikkita tengliklarni solishtirib, (4.7) o'rinli bo'lishini ko'ramiz.

4.4-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Yuqorida ko'rganimizdek, tekislikdagi kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish natijasida bunday kuchlar sistemasi $\vec{R}' \neq 0$ bo'lsa, teng ta'sir etuvchi kuchga; $\vec{R}' = 0, M_O \neq 0$ bo'lsa, bitta juftga ekvivalent bo'ladi. Lekin tekislikdagi kuchlar sistemasini shu tekislikdagi ixtiyoriy O nuqtaga keltirish natijasida bir vaqtning o'zida bosh vektor \vec{R}' ham, bosh moment M_O ham nolga teng bo'lishi mumkin, ya'ni

$$\vec{R}' = 0, M_O = 0 \quad (4.8)$$

yoki

$$\sum_{v=1}^n \vec{F}_v = 0, \sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v) = 0 \quad (4.8')$$

(4.8) yoki (4.8') tenglamalar tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining zarur va etarli shartini ifodalaydi. Haqiqatan ham (4.8) dagi shartning birortasi bajarilmasa, masalan, $\vec{R}' \neq 0$ bo'lsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchi-ga keltiriladi yoki $M_O \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi juftga keltiriladi. Natijada har ikkala holda ham kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi. (4.8) ning etariligi shundan iboratki, $\vec{R}' = 0$ bo'lsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi momenti M_O ga teng juftga keltiriladi, lekin $M_O = 0$ bo'lgani uchun bu kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

(4.4) ni e'tiborga olsak, (4.8) yoki (4.8') o'miga tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanati shartlarining analitik ifodasi uchun quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v) = 0 \quad (4.9)$$

Demak, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuch-larning shu tekislikda yotuvchi ikkita koordinata o'qlariga proektsiyalarining yig'indilari alohida-alohida nolga teng va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarli.

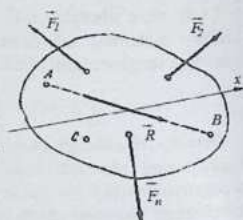
Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining yana quyidagi shartlarini kel-tiramiz.

1. Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy ikki nuqtaning har biriga nisba-tan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng va mazkur nuqtalar-dan o'tuvchi tog'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qdagi proektsiyalariniig yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarli.

$$\sum_{v=1}^n M_A(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum_{v=1}^n M_B(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum_{v=1}^n X_v = 0. \quad (4.10)$$

Kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu shartlarning bajarilishi za-rurligi bevosita (4.8) dan kelib chiqadi. Chunki (4.10) dan birortasi bajarilmasa yo-ki $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$) yoki $\vec{R} \neq 0$ bo'lib, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi. (4.10) dagi shartlar sistema muvozanatda bo'lishi uchun etarli ekanligini isbotlaymiz. (4.10) dagi shartlardan birinchi tenglikning bajarilishi A nuqtaga nisbatan bosh momentning nolga tengligini ifodalaydi: $M_A = 0$. Bu holda tekis-likdagi kuchlar sistemasi A nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi mumkin (4.4-rasm). (4.10) ning ikkinchisi va Varinon teoremasiga asosan $M_B(\vec{R}) = \sum M_B(\vec{F}_v) = 0$ tenglik bajariladi. Bino-barin, $\vec{R} = 0$ yoki $\vec{R} \neq 0$ bo'lib, \vec{R} ning ta'sir chizig'i B nuqtadan ham o'tadi; ya'ni uning ta'sir chizig'i AB da yotadi. (4.10) ning shartiga ko'ra, $\sum_{v=1}^n X_v = R_x = 0$. x o'q AB ga perpendikulyar bo'lmagani uchun oxirgi tenglik faqat $\vec{R} = 0$ bo'lgandagina baja-riladi, ya'ni kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

2. Tekislikda yotuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtaning har biriga nisbatan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir:



4.4- rasm.

$$\sum M_a(\vec{F}_1) = 0, \quad \sum M_a(\vec{F}_2) = 0,$$

$$\sum M_c(\vec{F}_i) = 0 \quad (4.11)$$

Bu shartlarning zarurligi xuddi oldingi holdagidek isbotlanadi. (4.11) shartlar sistema muvozanatda bo'lishi uchun etarli ekanligi teskarisini faraz qilish bilan isbotlanadi. (4.11) shartlar bajarilishiga qaramay, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmasligi uchun berilgan sistema bir vaqtning o'zida A, B, C nuqtalardan o'tuv-chi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi kerak (4.4-rasm). Buning bo'lishi mumkin emas, chunki A, B, C nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Binobarin, (4.11) shartlar bajarilsa, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

4.5- §. Tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari

Bir tekislikda yotuvchi ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) parallel kuchlar sistemasi berilgan bo'l-sin. Oy o'qni kuchlarning ta'sir chizig'iga parallel yo'naltiramiz (4.5-rasm). Bar-cha kuchlar Ox o'qqa perpendikulyar bo'lgani uchun har birining Ox o'qdagi pro-ekstiyasi nolga teng bo'ladi. Natijada (4.9) ning birinchi tenglamasi ayniyatga aylanadi va tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari quyidagicha yo-ziladi:

$$\sum y_i = 0, \quad \sum M_o(\vec{F}_i) = 0 \quad (4.12)$$

(4.12) dan ko'ramizki, tekislikdagi parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun tashkil etuvchi kuchlarning algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

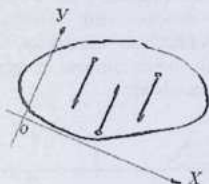
Agar bu kuchlar sistemasi uchun (4.10) yoki (4.11) ni tatbiq etsak, (4.12) o'r-niga quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0 \qquad \sum M_B(\vec{F}_v) = 0$$

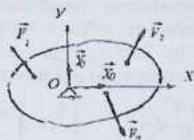
4.6-§. Richagning muvozanati

O nuqtadan Oxy tekislikka perpendikulyar o'tgan o'q atrofida shu tekislikda yotuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sirida aylana oladigan qattiq jismga *richag* deyiladi (4.6-rasm).

Berilgan kuchlar qatoriga O nuqta bog'lanish reaksiya kuchlari X_0 va Y_0 larni qo'shamiz. U holda (4.9) tenglamalar quyidagicha yoziladi:



4.5-rasm.



4.6-rasm.

$$X_0 + \sum_{v=1}^n X_v = 0, \quad Y_0 + \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v) = 0 \quad (4.13)$$

(4.13) ning birinchi ikkita tenglamasidan O nuqtaning reaksiyasi X_0 va Y_0 aniqlanadi:

$$X_0 = -\sum_{v=1}^n X_v, \quad Y_0 = -\sum_{v=1}^n Y_v$$

(4.13) ning uchinchi tenglamasida, ya'ni

$$\sum_{v=1}^n M_O(\vec{F}_v) = 0$$

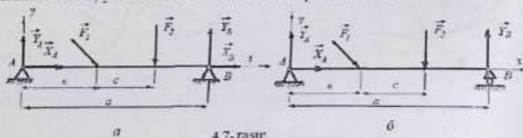
da O nuqtaning reaksiya kuchlari qatnashmaydi. Shu sababli bu tenglama *richagning muvozanat shartini* ifodalaydi. Bu tenglamadan ko'ramizki, *richag muvozanatda bo'lishi uchun unga qo'yilgan barcha kuchlarning tayanch nuqtasiga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.*

4.7-§. Statik aniq va statik noaniq masalalar

Berilgan masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari soniga teng bo'lsa,

sa, bunday masalaga *statik aniq masala*, aksincha noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan ortiq bo'lsa, *statik noaniq masala* deyiladi.

Ikkala uchi qo'zg'almas silindrik shamirli tayanchga birlashtirilgan AB balkaga \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar ta'sir etsin (4.7- rasm, a). O'lchovlar rasmda ko'rsatilgan. Balka-ga ta'sir etuvchi berilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar qatoriga A va B tayanchlar reaksiya kuchlarining tashkil etuvchilari $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ ni qo'shib, uni erkin jism deb qaraymiz. Bu kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasini tashkil etadi. Binobarin, balka uchun uchta muvozanat tenglamasini tuzish mumkin. Bu muvozanat tenglamalari-da to'rtta noma'lum reaksiya kuchlari qatnashadi. Shu sababli bu uchta tenglamalar vositasida noma'lumlarni aniqlash mumkin emas, ya'ni masala statik noaniq masaladir.



Bu masala statik aniq bo'lishi uchun tayanchlardan birini (masalan, B tayanch-ni) qo'zg'aluvchan shamirli tayanch bilan almashtirish mumkin (4.7-rasm, b). U xolda B nuqtada vertikal yuqoriga yo'nalgan bitta \vec{Y}_B kuchga ega bo'lamiz, hamda noma'lumlar va tenglamalar soni o'zaro teng bo'ladi. Endi u statik aniq masalaga aylandi; noma'lumlarni muvozanat tenglamalari asosida topish mumkin.

4.8-§. Taqsimlangan kuchlar

Texnikada turli inshootlarning muvozanatini aniqlashda ularning ayrim nuqta-lariga qo'yilgan kuchlar bilan birga hajm, sirt yoki chiziq kesmalari bo'yicha ma'lum qonun asosida taqsimlangan kuchlarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Bunday kuchlar hajm, sirt yoki chiziq birligiga to'g'ri keladigan kattalik – taqsimlangan kuchlarning inten-

sivligi bilan xarakterlanadi.

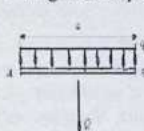
Jismlarga, asosan, parallel yoki bir nuqtada kesishuvchi taqsimlangan kuchlar ta'sir etadi. Masalan, jism zarralarining og'irlik kuchi hajm bo'yicha, suvning to'g'on sirtiga bosim kuchi sirt bo'yicha taqsimlangan parallel kuchlarni ifodalaydi. Bir tekislikda joylashgan berilgan chiziq bo'yicha taqsimlangan kuchlarning ayrim turlari ustida batafsil to'xtalamiz. Bunday kuchlarning intensivligi N/m da o'lchanadi.

1. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (4.8-rasm). Bunday kuchlarning intensivligi q o'zgarmas katta-lik bo'ladi. AB kesma bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlarni AB ning o'rtasiga qo'yilgan

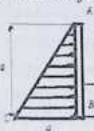
$$Q = aq \quad (4.14)$$

teng ta'sir etuvchi kuch bilan almashtirish mumkin.

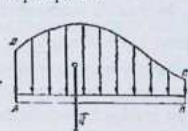
2 To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha chiziqli qonun



4.8- rasm.



4.9- rasm.

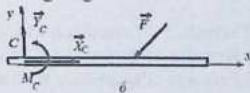
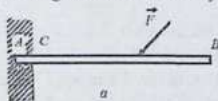


4.10-rasm.

bo'yicha taqsimlangan kuchlar (4.9-rasm). Uzunligi a ga teng AB sterjenga chiziqli qonun bo'yicha taqsimlangan kuchlar ta'sir etsin. Bunday kuchlarga misol tariqasida suv bosim kuchining to'g'on balandligi bo'yicha taqsimlanishini olish mumkin. Bunday kuchlarning intensivligi q o'zgaruvchan bo'lib, noldan to maksimal qiymati q_{max} gacha o'zgaradi. Ko'rilayotgan holda taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ABC uchburchakning BC tomonidan $a/3$ masofaga qo'yilgan hamda

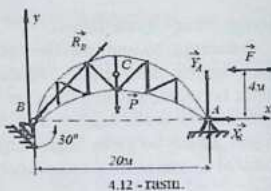
$$Q = aq_{max} \cdot 2 \quad (4.15)$$

3. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha ixtiyoriy qonun asosida taqsimlangan kuchlar. Bunday kuchlarning teng ta'sir etuv-



4.11- rasm.

chisi Q miqdor jihatdan mos masshtabda o'lchangan $ABCD$ shakl yuzasiga teng bo'ladi hamda berilgan yuzaning og'irlik markaziga qo'yiladi (4.10-rasm). Bu holga metro va boshqa er osti inshootlariga tuproqning ta'sir kuchi misol bo'ladi



4. Devorga qisib mahkamlangan balkaga ta'sir etuvchi taqsimlangan kuchlar. AB balkaning AC qismi devorga qisib mahkamlangan bo'lsin (4.11-rasm). Bino balkonlarining asosi devorga xuddi shunday birlashtiriladi. Agar balkaning AC qismini bog'lanishdan bo'shatib, devorning unga ta'sirini taqsimlangan kuchlar bilan almashtirsak, bu kuchlarni C nuqtaga keltirish natijasida taqsimlangan kuchlarning bosh vektoriga teng \vec{R}_C kuchni va momenti taqsimlangan kuchlarning bosh momenti M_C ga teng juftni olamiz. M_C reaksiya juftining momenti deyiladi. \vec{R}_C ning yo'nalishi aniq bo'lmagani uchun uni xuddi qo'zg'almas sharnir eaksiyasi kabi x va y o'qlarning musbat yo'nalishi bo'yicha o'nalgan tashkil etuvchilardan iborat deb qaraymiz. Shunday qilib, devorga qisib mahkamlangan balkaning devorga qisilgan qismi-dagi reaksiya kuchi, sharnirli bog'lanishdan farqli o'laroq, noma'lum \vec{R}_C reak-tsiya kuchidan tashqari momenti noma'lum reaksiya juftining momentiga teng juftga ekvivalent bo'ladi. X_C , Y_C va M_C lar balkaning muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi.

4.1-masala. Arka shaklidagi fermaning A nuqtasi qo'zg'almas sharnirli ta-yanchda va B nuqtasi gorizont bilan 30° burchak tashkil qilgan silliq tekis-

likdagi qo'zg'aluvchan sharnirli tayanch-da turadi. Oraliq $AB = 20$ m. Fermaning og'irligi $P = 100$ kN. Shamol bosimining teng ta'sir etuvchisi $F = 20$ kN bo'lib, uning ta'sir chizig'i AB ga parallel holda undan 4 m balandlikdan o'tadi. Tayanch reaksiya-lari topilsin (4.12-rasm)

Yechish. 1. Fermaning muvozanatini tekshiramiz.

2. Koordinata o'qlarini 4.12-rasmdagidek tanlab olamiz.

3. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlarni ko'rsatamiz. Fermaga C nuqtaga qo'yilgan $P = 100$ kN va AB ga parallel $F = 20$ kN kuchlar ta'sir

etadi. B nuqtadagi qo'zg'a-luvchan tayanch reakstiya kuchi tayanch tekisligiga perpendikulyar yo'naladi; qo'zg'almas sharnirli A tayanchning reakstiya kuchini \bar{X}_A va \bar{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz.

4. Fermaga ta'sir etuvchi $\bar{P}, \bar{F}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$ kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasi-ni tashkil etadi. 4.12-rasmdan foydalanib, muvozanat tenglamalari (4.9) ni tuzamiz:

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0; \quad R_B \cos 60^\circ + X_A - F = 0,$$

$$\sum_{v=1}^n Y_v = 0; \quad R_B \cos 30^\circ + Y_A - P = 0, \quad \sum_{v=1}^n M_B(\bar{F}_v) = 0; \quad -P \cdot 10 + Y_A \cdot 20 + F \cdot 4 = 0.$$

Bu tenglamalardan noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$R_B = 62,36 \text{ kN}, \quad X_A = -11,18 \text{ kN}, \quad Y_A = 46 \text{ kN}.$$

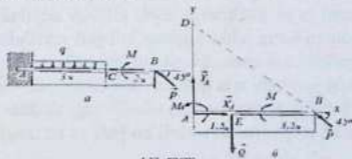
4.2-masala. AB balka A nuqtada devorga qisib mahkamlangan (4.13- rasm, a). Agar $P = 4 \text{ kN}$, $M = 2 \text{ kNm}$, $q = 1,5 \text{ kN/m}$ bo'lsa, A tayanchdagi reastiya kuchlari aniqlansin.

Yechish. Birinchi usul. 1. AB balkaning muvozanatini tekshiramiz. Balka A nuqtada devorga qisib mahkamlangan.

2. Koordinata o'qlarini 4.13-rasm, b dagidek tanlab olamiz.

3. AB balkaga ta'sir etuvchi kuchlarni ko'rsatamiz. Balkaga B nuqtaga ko'yil-gan $P = 4 \text{ kN}$ kuch, momenti $M = 2 \text{ kNm}$ juft kuch ta'sir etadi. AC oraliqdagi tekis taqsimlangan kuchlarni AC ning o'rtasidagi E nuqtaga qo'yilgan $Q = q \cdot AC = 4,5 \text{ kN}$ vertikal pastga yo'nalgan kuch bilan almashtiramiz. A nuqtadagi bog'lanish shu nuqta ko'chishi-ni cheklashi bilan birga balkaning vertikal tekislikda mazkur nuqta atrofida aylanishiga ham to'sqinlik qiladi. Shu sababli balka qisilgan joydagi bog'lanishni \bar{X}_A, \bar{Y}_A reakstiya kuchlari va momenti M_A ga teng reakstiya juft momenti bilan almashtiramiz (4.13-rasm, b).

4. AB balkaga ta'sir etayotgan kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasini tashkil etadi. 4.13-rasm, b dan foydalanib, muvozanat tenglamalari (4.9) ni tuzamiz:



4.13- rasm.

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0; \quad -P \cos 45^\circ + X_A = 0,$$

$$\sum_{v=1}^n Y_v = 0; \quad P \cos 45^\circ + Y_A - Q = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; \quad M_A - AE \cdot Q - M + P \cdot AB \cos 45^\circ = 0$$

Bu tenglamalardan X_A , Y_A , M_A noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$X_A = 2,83 \text{ kN}, \quad Y_A = 1,7 \text{ kN}, \quad M_A = -5,4 \text{ kNm}$$

Ikkinchi usul. Bu usulda ham masalaning boshi xuddi birinchi usuldagi-dek echiladi. \vec{P} va \vec{Y}_A kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishgan nuqtani D bilan belgilaymiz (4.13-rasm, δ) hamda $CA + CB = 5\text{m}$ ekanligini nazarda tutib, AB balka uchun (4.11) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; \quad M_A - AE \cdot Q - M + P \cdot AB \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_v) = 0; \quad -M + EBQ - ABY_A + M_A = 0;$$

$$\sum M_D(\vec{F}_v) = 0; \quad M_A + ADX_A - AE \cdot Q - M = 0.$$

Bu tenglamalardan M_A , X_A , Y_A noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$X_A = 2,83 \text{ kN}, \quad Y_A = 1,7 \text{ kN}, \quad M_A = -5,4 \text{ kNm}.$$

Tekislikdagi kuchlarga doir namunaviy masala va hisob grafik shlari variant-lari darslik so'ngida I-ilovaning I-topshirig'ida berilgan.

4.9- §. Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanati

Bir tekislikda yotuvchi, bir-biri bilan bog'langan bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini aniqlash uchun sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni ikki gruppaga: tashqi va ichki kuchlarga ajratamiz. Sistema tarkibiga kir-maydigan jismlarning berilgan sistemaga ta'sir kuchlari (masalan, og'irlik kuchi, tashqi bog'lanish reakstiya kuchlari) *tashqi kuchlar* deyiladi. Sistema tarkibiga kiruvchi jismlarning bir-biriga o'zaro ta'sir kuchlariga *ichki kuchlar* deyiladi. Nyutonning uchinchi qonuniga ko'ra ichki kuchlar juft-juft ravishda miqdor jihatdan teng, yo'nalishi esa qarama - qarshi bo'ladi.

Bir tekislikda yotuvchi n ta jismdan tashkil topgan sistema muvozanatda bo'lsa, bunday sistema uchun tekislikdagi kuchlar sistemasining uchta muvozanat tenglamalari o'rinli bo'ladi va bu tenglamalarda ich-

ki kuchlar qatnashmaydi. Lekin barcha noma'lumlarni aniqlash uchun bu shartlar etarli bo'lmaydi. Bunday masalani echish uchun $n - 1$ ta jismni alohida ajratib olib, ularning har biri uchun uchtadan muvozanat tenglamalarini tuzish mumkin. Natijada $3 + 3(n - 1) = 3n$ ta muvozanat tenglamalarini olamiz. Sistemadan ajratib olingan biror jismning muvozanati tekshirilayotganda bu jismga sistemani tashkil etuvchi boshqa jismlarning ta'siri kuchlar bilan almashtiriladi. Bu kuchlar sistema uchun ichki kuchlar hisoblanadi, ammo ajratib olingan jism uchun tashqi kuchlar qatoriga kiradi.

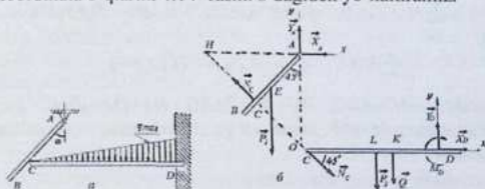
Bunday masalalarni yana quyidagi usulda echish mumkin. n ta jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini aniqlash maqsadida har bir jismni xuddi yuqoridagidek ajratib olamiz va ular uchun uchtadan muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Natijada yana $3n$ ta muvozanat tenglamalarini olamiz.

Sistemani tashkil etuvchi jismlar o'zaro erkin, tayanch, sharnir yoki egiluvchan va cho'zilmaydigan ip (vaznsiz sterjen) vositasida bog'langan bo'lishi mumkin.

4.3 - masala. Og'irligi $P_1 = 180\text{H}$ bo'lgan bir jinsli AB sterjen A sharnir bilan shipga mahkamlangan bo'lib, u og'irligi $P_2 = 108\text{H}$ bo'lgan bir jinsli CD sterjen-ning C uchiga erkin tiralib turadi (4.14-rasm, *a*). AB sterjen vertikal bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak tashkil etadi hamda $AC/AB = 2/3$. Uzunligi $1,5\text{ m}$ ga teng CD sterjen D uchi bilan devorga qisib mahkamlagan. CD sterjenga chiziqli uchburchak qonuni bo'yicha taqsimlangan kuchlar qo'yilgan va bu kuchlarning maksimal intensivligi $q_{\text{max}} = 120\text{H/m}$ A va D nuqtaning reaksiya kuchlar hamda sterjenlarning bir-biriga ko'rsatadigan bosim kuchi aniqlansin.

Yechish. 1. AB va CD sterjendan tashkil topgan sistemaning muvozanatini tekshiramiz.

2. Koordinata o'qlarini 4.14- rasm. *b* dagidek yo'naltiramiz.



4.14- rasm.

3. Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni ko'rsatamiz. AB va CD sterjenlarga ularning o'rtasiga qo'yilgan $P_1=180H$ va $P_2=108H$ og'irlik kuchlari ta'sir etadi. CD sterjenga ta'sir etuvchi chiziqli qonun bo'yicha taqsimlangan kuchlarni D nuqtadan $DK=CD/3$ masofada qo'yilgan, (4.15) ga asosan topiladigan vertikal pastga yo'nalgan kuch bilan almashtiramiz.

$$Q=CD \cdot q_{\max} / 2$$

A sharnirning reakstiya kuchini \bar{x}_A, \bar{y}_A tashkil etuvchilardan iborat deb qaraymiz. Sterjen qisilgan D nuqtadagi bog'lanishni \bar{x}_D, \bar{y}_D reakstiya kuchlari va M_D moment bilan almashtiramiz.

Shunday qilib, sistemaga bir tekislikda joylashgan $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}, \bar{x}_D, \bar{y}_D$ kuchlar va M_D moment ta'sir etadi. Bunday sistema uchun uchta muvozanat tenglamalarini tuzsak, unda beshta noma'lum reakstiya kuchlari qatnashadi. Shu sababli sistemani ikkita jismga ajratib, ularning hap biri uchun alohida muvozanat tenglamalarini tuzish qulay bo'ladi (4.14-rasm, δ). AB sterjen C nuqtada erkin tayangani uchun CD sterjenning unga ta'sirini C nuqtada AB ga perpendikulyar yuqoriga yo'nalgan \bar{N}_C reakstiya kuchi bilan almashtiramiz. Xuddi shuningdek, AB sterjenning CD sterjenga ta'sirini C nuqtada AB ga perpendikulyar ravishda (yoki CD ga 45° burchak ostida) pastga yo'nalgan \bar{N}_C reakstiya kuchi bilan almashtiramiz. \bar{N}_C kuch sistema uchun ichki kuchni, AB va CD sterjen uchun tashqi kuchni ifodalaydi.

4. AB sterjenga ta'sir etuvchi $\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{P}_1, \bar{N}_C$ kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasini tashkil etadi. \bar{N}_C va \bar{x}_A ning kesishgan nuqtasini H bilan; \bar{N}_C va \bar{y}_A ning kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz va 4.14-rasm, b dan foydalanib (4.11) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum M_A(\bar{F}_c) = 0; P_1 AE \cos 45^\circ - N_C \cdot AC = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_H(\bar{F}_c) = 0; -P_1(HC + AC - AE) \cos 45^\circ + HA Y_A = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_O(\bar{F}_c) = 0; P_1 \cdot AE \cos 45^\circ - OAX_A = 0 \quad (3)$$

Bunda $AE=AB/2$, $HC=AC=2AB/3$, $HA=OA=\sqrt{2} AC=2\sqrt{2} AB/3$ ekanligini nazarda tutib, ularni AB ga qisqartiramiz va noma'lumlarni aniqlaymiz.

$$N_C = 95,46N, Y_A = 112,5N, X_A = 67,5N.$$

(4.11) tenglamalarni AB sterjen uchun qo'llashning afzalligi shundan iboratki, AB sterjen uchun tuzilgan tenglamalarda faqat bittadan noma'lumlar qatnashadi.

CD sterjenga ta'sir etuvchi $\bar{X}_D, \bar{Y}_D, \bar{P}_2, \bar{Q}, \bar{N}_C$ kuchlar va M_D moment, tekislik-dagi kuchlar sistemasini tashkil etadi. 4.14-rasm, \bar{o} dan foydalanib, CD sterjen-ning muvozanat tenglamalarini (4.9) ko'rinishida yozamiz.

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0; \quad -N_C \cos 45^\circ + X_D = 0,$$

$$\sum_{v=1}^n Y_v = 0; \quad -N_C \cos 45^\circ + Y_D - Q - P_2 = 0,$$

$$\sum M_o(\bar{F}_v) = 0; \quad -M_D + DK \cdot Q + N_C \cdot CD \cos 45^\circ + P_2 \cdot DL = 0$$

Bu tenglamalarda $DK = CD/3$, $DL = CD/2$ ekanligini nazarda tutib, noma'lum-

lumlarni aniqlaymiz:

$$X_D = 67,5 \text{ N}, \quad Y_D = 265,5 \text{ N}, \quad M_D = 227,25 \text{ N}.$$

AB va CD sterjenlarning bir-biriga ko'rsatadigan bosim kuchi \bar{R}_C miqdor jiha-tidan shu nuqtada hosil bo'ladigan sistemaning ichki reakstiya kuchi \bar{N}_C ga teng, ya'ni $R_C = N_C = 95,46 \text{ N}$ yo'nalishi esa unga qarama-qarshidir.

4.10-§. Ishqalanish. Sirpanishdagi ishqalanish

1.3- § da bog'lanishdagi jismlar absolyut qattiq jismdan iborat va ularning bir-biriga tegib turgan sirti ideal silliq hamda bog'lanish reakstiya kuchlari faqat normal tashkil etuvchidan iborat deb faraz qilingan edi. Lekin har qanday jism oz bo'lsada, deformatsiyalanadi va ularning sirti absolyut silliq bo'lmaydi. Shu sababli real bog'lanishlarning reakstiya kuchi jismlar tegib turgan yuzada normal reakstiya kuchiga perpendikulyar yo'nalgan yana bitta tashkil etuvchiga ega bo'ladi. Reakstiya kuchining bu tashkil etuvchisiga *ishqalanish kuchi* deyiladi.

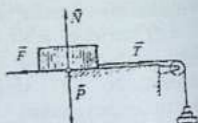
Texnikada ishqalanish kuchini hisobga olish muhim ahamiyatga ega. Masa-lan, tramvay yoki avtomobilning etakchi g'ildiragi relsga yoki yo'lga ishqalan-gani tufayli ular harakatlanadi. Tasmali va frikstion uzatmalarda, tormozlarda ishqalanishdan keng foydalaniladi.

Bir jismning ikkinchi jism ustida sirpanishi natijasida hosil

bo'ladigan ish-qalanishga *sirpanishdagi ishqalanish* deyiladi.

Og'irligi P ga teng jism gorizontal sirtga qo'yilgan bo'lsin (4.15-rasm).

Ji-smni blok orqali o'tkazilgan ipga bog'laymiz. Agar sirt ideal silliq bo'lsa, jism og'irlik kuchi \vec{P} va sirtning normal reakstiya kuchi \vec{N} ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Bu kuchlar vertikal kuchlardan iborat bo'lgani uchun ipning ikkinchi uchiga juda kichik tosh qo'ysak, jism harakatlanishi kerak. Lekin ipning ikkinchi uchiga ma'lum miqdorda tosh qo'ymaguncha jism harakatlanmaydi. Chunki go-rizontal sirt bilan jismning yuzasi absolyut silliq bo'lmagani tufayli ipning tortilish kuchi \vec{T} ga miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama qarshi bo'lgan \vec{F} ish-qalanish kuchi hosil bo'ladi. \vec{F} kuch *sirpanishdagi ishqalanish kuchi* deyiladi.



4.15-rasm.

Agar ipning ikkinchi uchiga tosh qo'ya borsak, unga mos ravishda \vec{T} kuch, sirpanishdagi ishqalanish kuchi \vec{F} ortadi va jism xarakatlanishi oldida ishqalanish kuchi maksimal qiymatga erishadi. Shunday qilib, sirpanishdagi ishqalanish kuchi \vec{F} nisbiy muvozanat holatida noldan to maksimal miqdorgacha o'zgaradi:

$$0 \leq F \leq F_{\max} \quad (4.16)$$

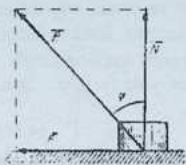
Jismning tinch holatida hosil bo'ladigan ishqalanish kuchiga *statik ishqalanish kuchi* deyiladi. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi jismlarning bir-biriga tegib turgan yuzasi orqali o'tuvchi urinma tekislikda yotadi. Shunday qilib, g'adir-bu-dir sirtning to'liq reakstiya kuchi miqdor va yo'nalish jihatdan normal reakstiya kuchi va ishqalanish kuchlariga qurilgan to'g'ri to'rtburchakning diagonal bilan ifodalanadi (4.16-rasm):

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$$

Tajribalarning ko'rsatishicha, sirpanishdagi ishqalanish quyidagi Amonton-Kulon qonuni bilan ifodalanadi.

Tinch holatdagi maksimal ishqalanish kuchi jismning tayanch tekisligiga ko'rsatadigan normal bosimiga proporsionaldir.

$$F_{\max} = fN \quad (4.17)$$



4.16- rasm.

Bu tenglikdagi f sirpanishdagi ishqalanish koeffitsientini ifodalaydi hamda ishqalanuvchi jismlarning materialiga va holatiga (namlik, temperatura, jismlar sirtlarining ishqalanishiga) bog'liq bo'ladi. Bir jism ikkinchisi ustida harakatlanganda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi ham normal bosimga proporsional bo'ladi: $F_{\max} = f' N$.

Bunda f' -jism harakatlangandagi ishqalanish koeffitsienti bo'lib, u jismning tinch holatidagi ishqalanish koeffitsientidan kichik bo'ladi: $f' < f$

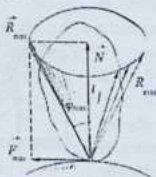
Agar biror sirtga tayanib turgan jism sirpanish oldida (muvozanat chegarasida) bo'lsa, ishqalanish kuchi maksimal qiymatga erishadi (4.17-rasm) hamda

$$\vec{R}_{\max} = \vec{N} + \vec{F}_{\max} \quad (4.18)$$

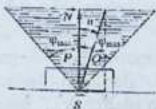
Maksimal to'liq reaksiya kuchi \vec{R}_{\max} ning normal reaksiya kuchi \vec{N} bilan tashkil qilgan burchagi φ_{\max} ishqalanish burchagi deyiladi. 4.17-rasm va (4.17) ga asosan

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = F_{\max} / N = f \quad (4.19)$$

Jismni siljituvchi aktiv kuchlar turli yo'nalishda ta'sir etishi mumkin. Turli yo'nalishdagi siljituvchi kuchlarga mos bo'lgan barcha \vec{R}_{\max} to'liq reaksiya



4.17- rasm.



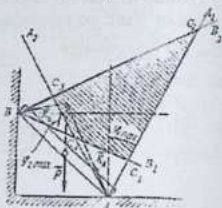
4.18- rasm.

kuchlarining geometrik o'rmi konus sirtidan iborat bo'ladi. Bu konus ishqalanish konusi deb ataladi. Gorizontalka tinch holda yotuvchi jismga tekislikka o'tkazilgan normal bilan α burchak tashkil etuvchi \vec{Q} kuch ta'sir etsin (4.18-rasm). \vec{Q} kuchni normal reaksiya

kuchi bilan muvozanatlashuvchi $N = P - Q \cos \alpha$ va jismni silji-tishga intiluvchi $S = Q \sin \alpha$ ikkita tashkil etuvchiga ajratamiz. Jismni siljitish uchun \bar{S} kuchning moduli, maksimal ishqalanish kuchi $F_{\max} = fN = fQ \cos \alpha$ dan katta bo'lishi kerak: $Q \sin \alpha \geq fQ \cos \alpha$ yoki $f = \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \alpha$. Bundan

$$\alpha \geq \varphi_{\max} \quad (4.20)$$

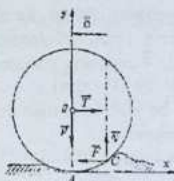
natijani olamiz. (4.20) tengsizlikdan ko'ramizki, agar \bar{Q} kuch tekislikka o'tkazilgan normalga φ_{\max} burchakdan kichik burchak ostida ta'sir etsa, u holda bu kuch har qancha katta bo'lishiga qaramay jism tinch holatda qoladi. Vertikalga φ_{\max} burchak ostida o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan (4.18- rasmda shtrix-langani) sohaga ishqalanish sohasi deyiladi. Ishqalanish sohasi quyidagi xusu-siyatga ega: ta'sir chizig'i ishqalanish sohasi ichida yotuvchi \bar{Q} kuch har qancha katta bo'lsa ham tekislikka tayanib turgan jismni harakatga keltira olmaydi. Agar jism turli yo'nalishda harakatlana olsa, ishqalanish sohasi uchidagi burchagi $2\varphi_{\max}$ ga teng ishqalanish konusi bilan chegaralanadi. Bu holda ishqalanish konusi uchidan o'tuvchi va bu konus ichida yotuvchi har qanday kuch jismni harakatga keltira olmaydi. Masalan, ikkita tekislikka tayangan va og'irligi \bar{P} ga teng AB brusga ta'sir etuvchi kuchlarning muvozanatini qaraylik (4.19- rasm). Brus muvozanat holatida bo'lganda A va B nuqtalarning reaksiya kuchlari \bar{R}_1 va \bar{R}_2 lar mos ishqalanish konuslari ichida yotadi. A va B nuqtalarga tekisliklarning normalariga $\varphi_{1\max}$ va $\varphi_{2\max}$ burchaklar ostida AA_1 , AA_2 hamda BB_1 , BB_2 chiziqlarni o'tkazib, ishqalanish konuslarining chegaralarini olamiz. Bu chiziqlar bilan chegaralangan $C_1C_2C_3C_4$ to'rtburchak ishqalanish sohasini ifodalaydi.



4.19- rasm.

4.11-§. Dumalashdagi ishqalanish

Jismlarning dumalashdagi ishqalanishini absolyut qattiq jism doirasida izoh-lab bo'lmaydi. Shu sababli bu haqida qisqa



4.20- rasm.

ma'lumotlarigina keltiramiz.

Og'irligi P va radiusi R ga teng silindrga gorizontal tekislikda yotgan bo'lsin (4.20-rasm). Silindrga gorizontal T kuch qo'yilgan. Silindr va tekislikning de-formastiyalanishi natijasida ishqalanish bitta nuqtada hosil bo'lmay, ikki jism-ning bir-biriga tegib turgan ezilgan yuzasida hosil bo'ladi va N normal reaktsiya kuchi hamda F ishqalanish

kuchi O nuqtadan o'tuvchi vertikaldan δ masofada yotuvchi C nuqtaga qo'yiladi.

(4.9) dan foydalanib, silindrning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_v = 0; \quad T - F = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; \quad N - P = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; \quad N \cdot \delta - T \cdot R = 0.$$

Bundan

$$F = T, \quad N = P, \quad N \cdot \delta = T \cdot R \quad (4.21)$$

munosabatlarni olamiz. Shunday qilib, silindr dumalashi oldida unga momentlari teng va aylanish yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgan (\vec{T}, \vec{F}) va (\vec{P}, \vec{N}) juftlar ta'sir etadi. Silindrning dumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi (\vec{P}, \vec{N}) juftga *dumalashdagi ishqalanish jufti*, bu juftning momen-tiga *dumalashdagi ishqalanish momenti* deyiladi. Tajribalarning ko'rsatishicha, dumalashdagi ishqalanish momentining maksimal qiymati normal bosimga proporsional bo'ladi:

$$M_{\max} = \delta N$$

bunda δ - *dumalashdagi ishqalanish koeffitsienti* bo'lib, uzunlik birligida o'l-chanadi.

(4.21)ning uchinchisidan

$$T = \frac{\delta}{R} N \quad (4.22)$$

Bu formuladagi $\frac{\delta}{R}$ kattalik ko'pchilik materiallar uchun sirpanishdagi ishqalanish koeffitsienti f dan ancha kichik bo'ladi. Shuning uchun bunday jismlarni sirpantirishdan ko'ra dumalatish uchun kam kuch sarflanadi.

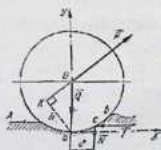
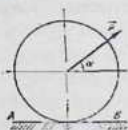
4.4-masala. Og'irligi $Q = 1085$ kN, diametri $d = 1$ m bo'lgan

g'ildirakning gorizont tekislikda tekis dumalashi uchun kerak bo'lgan \vec{P} kuch, shuningdek tekislikning reaksiya kuchi aniqlansin; dumalashdagi ishqalanish koeffitsienti $\delta=0,2sm$. \vec{P} kuchning gorizont tekislik bilan hosil qilgan burchagi esa $\alpha = 30^\circ$ (4.21- rasm).

Yechish. 1. G'ildirakning gorizont tekislik bo'ylab tekis dumalashida ta'sir etuvchi kuchlarning muvozanatini tekshiramiz.

2. Koordinatalar boshini a nuqtada olib, koordinata o'qlarini 4.21-rasmda-gidek yo'naltiramiz.

3. G'ildirakka uning og'irlik markaziga qo'yilgan og'irlik kuchi \vec{Q} va aktiv kuch \vec{P} ta'sir etadi (shakl aniqroq va yaqqol bo'lishi uchun g'ildirakning tekis-



4.21-rasm.

likka botishi, ya'ni gorizont tekislikning deformastiyasi shaklda kattaroq qilib ko'rsatilgan). Bundan tashqari, g'ildirakka gorizont va vertikal reaksiya kuchlari \vec{N} va \vec{T} ta'sir etadi, ularning ta'sir nuqtasi Oa o'qdan δ masofada bo'ladi.

4. G'ildirakka ta'sir etuvchi \vec{Q} , \vec{P} , \vec{N} , \vec{T} kuchlar tekislikdagi kuchlar sistemasini tashkil etadi. 4.21- rasmdan foydalanib kuchlarning muvozanat tenglamasini (4.9) ko'rinishida tuzamiz:

$$\sum X_v = 0; \quad P \cos \alpha - T = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; \quad -Q + P \sin \alpha + N = 0$$

$$\sum M_a(\vec{F}_v) = 0; \quad N \cdot \delta - P \cdot h = 0.$$

3- tenglamada \vec{T} kuchning momenti qatnashmaydi, chunki a va b nuqta gorizontallari orasidagi masofa juda kichik bo'lgani uchun uni e'tiborga olmadik.

aOK uchburchakdan \vec{P} kuchning elkasi aniqlanadi: $h = r \cos \alpha$, bunda r bilan g'ildirakning radiusi belgilangan. h ning qiymatini (3) ga qo'yib, N ni aniqlaymiz:

$$N = \frac{r}{\delta} P \cos \alpha$$

N ning bu qiymatini (2) ga qo'ysak,

$$-Q + P \sin \alpha + \frac{r}{\delta} P \cos \alpha = 0$$

yoki

$$P \left(\sin \alpha + \frac{r}{\delta} \cos \alpha \right) = Q$$

Bundan

$$P = \frac{Q}{\left(\sin \alpha + \frac{r}{\delta} \cos \alpha \right)} = 5 \text{ kN.}$$

- (1) dan ishqalanish kuchi T ni aniqlaymiz: $T = P \cos \alpha = 4,33 \text{ kN.}$
(4) yordami-da normal reaksiya kuchi topiladi: $N = 1082,5 \text{ kN.}$

Nazorat Savollari:

1. Kuchni o'ziga parallel ko'chirish haqidagi lemma.
2. Kuchlar sistemasini bir markazga keltirish.
3. Bosh vektor va bosh momentni aniqlash.
4. Kuchlar sistemasining muvozanatlik shartlari.
5. Ishqalanish kuchining paydo bo'lish sababi nima?
6. Sirpanib ishqalanish qonunini formulasini yozib bering?
7. Sirpanib ishqalanish koeffitsienti nimalarga bog'liq o'zgaradi?
8. Sirpanib ishqalanish burchagi nima?
9. Dumalab ishqalanish koeffitsienti nima?
10. Dumalab ishqalanish koeffitsienti nimaga bog'liq o'zgaradi?

5-BOB. FERMALARNI HISOBLASH USULLARI

Tayanch soʻzlar: ferma, tugun, sterjen, shamir, kesish usuli, Ritter usuli

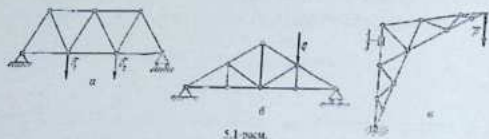
5.1-§. Ferma haqida tushuncha

Shamirlar vositasida geometrik oʻzgarmas qilib tutashtirilgan sterjenlardan hosil boʻlgan konstruktiviy *ferma* deb ataladi. Sterjenlarning uchlarini tutashti-ruvchi nuqta *tugun* deyiladi.

Fermalar qanday inshootda qoʻllanishiga qarab turlicha nom bilan ataladi. Masalan, koʻprik qurilishida foydalaniladigan *koʻprik fermalari* (5.1-rasm, a), inshootlarning tomini ushlab turadigan *stropila fermalari* (5.1-rasm, b), koʻta-rish qurilmalarida foydalaniladigan *kran fermalari* (5.1-rasm, c) va h. k.

Odatda, koʻprik va stropila fermalari bir tomondan qoʻzgʻalmas, ikkinchi tomondan qoʻzgʻaluvchi tayanchlarga oʻrnatiladi. Kran fermalari tayanch pod-shipnikka (podpyatnikka) tayanishi va stilindrik shamir vositasida ushlab turi-lishi mumkin.

Sterjenlari bir tekislikda yotuvchi ferma *yassi ferma* deyiladi. Yassi fermalarni hisoblashda ularga qoʻyilgan aktiv kuchlar taʼsirida tayanch reaksiyalari hamda sterjenlarda hosil boʻladigan ichki kuchlarni (zoʻriqishni) aniqlash asosiy masala hisoblanadi. Bu masalani echishda:



5.1-rasm.

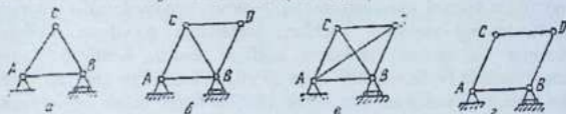
- 1) ferma sterjenlari absolyut qattiq, toʻgʻri chiziqli deb qaralib, ularning ogʻirligi eʼtiborga olinmaydi;
- 2) shamirlardagi ishqalanish hisobga olinmaydi;
- 3) yassi fermaga taʼsir etuvchi kuchlar uning tekisligida yotadi va faqat tu-gunlarga qoʻyiladi deb faraz qilinadi.

U holda ferma sterjenlariga faqat boʻylama (choʻzuvchi yoki siquvchi) kuchlar taʼsir etadi (1.3- §).

Real fermalarning sterjenlari sharnirlar yordamida emas, balki payvandlab yoki parchin mixlar vositasida biriktiriladi. Shu sababli ferma sterjenlariga bo'ylama kuchlardan tashqari eguvchi kuchlar xam ta'sir etadi. Tadqiqotlarga ko'ra egilishda hosil bo'ladigan zo'riqish uncha katta bo'lmay, birinchi yaqinlashishda uni e'tiborga olmaslik mumkin.

Shunday qilib, yuqorida qabul qilingan soddalashtirishlar natijasida ferma sterjenlaridagi zo'riqishlar birinchi yaqinlashishda aniqlanadi. Sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlashga o'tishdan oldin ferma strukturasi bilan tanishamiz.

n ta tu-gundan tashkil topgan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi (ya'ni sterjenlari bir-biriga nisbatan ko'cha olmasligi) uchun bunday ferma kamida nechta sterjendan tashkil topishini ko'rib chiqamiz. Birinchi uchta tugunni geometrik o'zgarmas qilib tutashirish uchun uchta sterjen olish kerak (5.2- rasm,



5.2-rasm.

a). Bunday uchburchakli ABC fermaga yana bitta D tugun qo'shilishi natijasida hosil bo'lgan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi uchun D tugunni mazkur uchburchakli fermaga kamida ikkita sterjen vositasida biriktirish kerak (5.2- rasm, b). Xuddi shu tarzda ABC uchburchakli fermaga qolgan $n-3$ ta tugun-larning xar birini ikkitadan sterjenlar vositasida biriktirish natijasida n ta tu-gundan tashkil topgan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi uchun u kamida

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3 \quad (5.1)$$

ta sterjendan tashkil topishiga ishonch hosil qilamiz.

(5.1) shartni qanoatlantiradigan ferma *ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan yassi ferma* deyiladi (5.1- rasm). Agar $N > 2n - 3$ bo'lsa, bunday ferma *ortiqcha sterjenga ega bo'lgan yassi ferma* deyiladi (5.2-rasm, a). Agar $N < 2n - 3$ bo'lsa, bunday konstruktsiya geometrik o'zgaruvchan bo'ladi va fermanni ifodalamay-di (5.2-rasm, e) n ta tu-gundan tashkil topgan ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan ferma har bir tugunini bog'lanishdan bo'shatib, bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi nuqta deb qarasaq, bu

nuqtalarning har biri uchun ikkitadan muvozanat teng-lamaları oʻrinli boʻladi. Natijada ferma uchun $2n$ ta muvozanat tenglamalarini olamiz. Bu tenglamalarga ta-yanch nuqtalaridagi uchta nomaʼlum reaksiya kuchlari ham kiradi.

Binobarin, $2n$ ta muvozanat tenglamalaridan $2n-3$ ta sterjendagi zoʻri-qishlar va tayanch nuqtalaridagi uchta nomaʼlum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Shu sababli ortiqcha sterjenga ega boʻlmagan ferma *statik aniq ferma*, ortiqcha sterjenga ega boʻlgan ferma esa *statik noaniq ferma* deb ham ataladi.

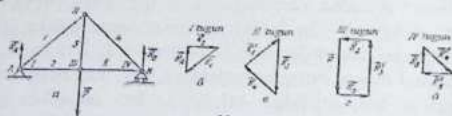
5.2- §. Ferma sterjenlaridagi zoʻriqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash (Grafoanalitik usul)

Yuqorida koʻrganimizdek, tugun kesish usulining mohiyati shundan ibo-ratki, ferma tugunlarini fikran ketma-ket kesa boramiz va tugunga qoʻyilgan kuchlar muvozanatini tekshiramiz; bunday kuchlar qatoriga sterjenlarning reaksiya kuchlari, tugunlarga qoʻyilgan berilgan kuchlar va tayanch reaksiya kuchlari kiradi. Kesilgan tugun muvozanatda boʻlishi uchun unga qoʻyilgan kuchlarga qurilgan kuch toʻpburchagi yopiq boʻlishi kerak. Har bir tugun uchun yopiq kuch toʻpburchagini yasab, ferma sterjenlaridagi reaksiya kuch-larini *grafik* usulda aniqlash mumkin.

Tugun kesish usulida masalani *analitik* echish uchun har bir tu-gunga qoʻyilgan kuchlarning muvozanat shartlarini (2.10) koʻrinishi-da tuzib, bu tengla-malardan nomaʼlum kuchlarni aniqlash mumkin.

Misol tariqasida 5.3-rasm, *a* da tasvirlangan ferma sterjenlaridagi zoʻri-qishlarni tugunni kesish usulidan foydalanib topamiz. Ferma *A* nuqtada shamirli qoʻzgʻalmas tayanchga, *B* nuqtada shamirli qoʻzgʻaluvchan tayanchga oʻma-tilgan. Fermaga III tugunga qoʻyilgan vertikal pastga yoʻnalgan \vec{P} kuch taʼsir etadi.

Masala echishni tayanch reaksiya kuchlarini aniqlashdan boshlaymiz. Fer-maga uning oʻrtasiga qoʻyilgan bitta vertikal pastga yoʻnalgan kuch taʼsir eta-



5.3-rasm.

di. Shu sababli A va B nuqtalarning reaksiya kuchi vertikal yuqoriga yoʻnaladi va oʻzaro teng boʻladi:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

Sterjenlardagi zoʻriqishni aniqlashdan avval berilgan ferma statik aniq ferma ekanligini tekshirib koʻramiz. Berilgan ferma tugunlar soni $n = 4$, sterjenlar soni $N = 5$. Bularni (5.1) ga qoʻysak, $5 = 2 \cdot 4 - 3$, yaʼni berilgan ferma statik aniq fermadir.

Tugunlarni rim raqamlari, sterjenlarni arab raqamlari bilan nomlaymiz.

Kesishni shunday tugundan boshlash kerakki, bu tugunda zoʻriqishi aniq-lanadigan sterjenlar ikkitadan ortiq boʻlmasin, chunki bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan foydalanib faqat ikkita nomaʼlum kattalikni aniqlash mumkin. Shu sababli koʻrilayotgan ferma kesishni I yoki II tugundan boshlash kerak. I tugunni kesamiz. Bu tugunga maʼlum \vec{R}_A kuch xamda 1 va 2 sterjenlarning reaksiya kuchlari \vec{R}_1 va \vec{R}_2 qoʻyilgan. Bu kuchlarning taʼsir chiziqlari maʼlum (ular tegishli sterjen boʻylab yoʻnalgan) boʻlib, ularning miqdorini aniqlash kerak. Buning uchun \vec{R}_1 , \vec{R}_2 va \vec{R}_A kuchlardan tashkil topgan kuch uchburchagini tuzamiz: ixtiyoriy nuqtadan \vec{R}_A kuch vektorini, bu kuchning boshi va uchidan esa 1 va 2 sterjenlarga parallel chiziqlar oʻtkazamiz; bu chiziqlarning kesishgan nuqtasi kuch uchburchagining uchinchi uchini ifodalaydi, uning 1 va 2 sterjenlarga parallel boʻlgan tomonlari mos ravishda \vec{R}_1 va \vec{R}_2 ning miqdoriga teng boʻladi (5.3-rasm, δ).

Nomaʼlumlarni (2.10) koʻrinishidagi tenglamalarni tuzib ham aniqlash mumkin.

II tugunni kesamiz. Bu tugunga 1, 3 va 4 sterjenlarning reaksiya kuchlari qoʻyilgan. Bunda II tugunga qoʻyilgan 1 sterjenning reaksiya kuchi \vec{R}_1' miqdor jihatdan \vec{R}_1 ga teng va unga qarama-qarshi yoʻnalganligini eʼtiborga olish kerak. Shu sababli $\vec{R}_1' = -\vec{R}_1$ yaʼni ikkita tugunni tutashiruvchi har bir sterjenning uchlariga qoʻyilgan reaksiya kuchlari miqdor jihatdan teng, yoʻnalishi qarama-qarshidir. II tugun uchun kuch uchburchagini yasashda ixtiyoriy nuqtadan \vec{R}_1' vektorini, uning boshi va uchidan esa 3 va 4 sterjenlarga parallel

chiziq-lar o'tkazamiz (5.3-rasm, e). Hosil qilingan yopiq kuch uch-burchagining 3 va 4 sterjenlarga parallel bo'lgan tomonlari mos rav-ishda \vec{R}_1 va \vec{R}_2 reakstiya kuchlarining miqdoriga teng bo'ladi.

Noma'lumlarni (2.10) ko'rinishidagi tenglamalarni tuzib ham aniqlash mumkinligini ta'kidlab o'tamiz.

Shunday qilib berilgan fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlanadi (5.3-rasm, z, o).

5.3-§. Ritter usuli

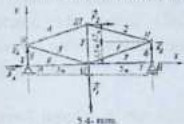
Agar yassi fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, tugunlarni ajratish usulidan foydalanish qulay hisoblanadi. Lekin ferma-ning ayrim sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash lozim bo'lsa, yoki olingan na-tijalar to'g'riligini tezda aniqlash kerak bo'lsa, u holda Ritter (1826–1906) to-monidan kashf qilingan va uning nomi bilan ataladigan analitik usuldan foyda-lanish maqsadga muvofiqdir. Bu usulda ham dastlab fermaning tayanch reak-stiyalari aniqlanadi.

Ritter usulining mohiyati shundan iboratki, fermani biror $a-a$ kontur bilan fikran qirqib ikki qismga ajratiladi va ajratilgan biror qismining muvozanati tek-shiriladi. Tekislikda joylashgan kuchlar sis-temasining muvozanat tenglamalari vositasida uchta noma'lum kattali-kni aniqlash mumkin. Shu sababli fermani shunday kontur bilan kes-ish kerakki, reakstiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlar soni uchta-dan oshmasligi hamda bir nuqtada kesishadigan sterjenlar soni ikkita-dan oshmasligi shart. Fermaning kesilgan bir qismini fikran tashlab yuborib, uning fermani ikkinchi qismiga ko'rsatadigan ta'sirini ster-jenlar bo'ylab tashlab yuborilgan tomonga yo'nalgan kuchlar bilan al-mashtiramiz, ya'ni barcha kesilgan sterjenlarni cho'ziladi deb faraz qilamiz. Masala echilganda birorta sterjenning reakstiya kuchi manfiy ishorali chiqsa, uning yo'nalishi qabul qilingan yo'nalishga qarama-qarshi bo'lib, mazkur sterjen aslida siqiladi. Fermaning ajratilgan qis-mi uchun tekislikdagi kuchlarning muvozanat tenglamalari tuzilib, sterjenlarning noma'lum reakstiya kuchlari aniqlanadi. Tenglamalar tuzishda shunga harakat qilish kerakki, imkoni bo'lsa har bir tengla-mada noma'lumlar soni bittadan oshmasin. Shu nuqtai nazardan qaraganda (4.10) yoki (4.11) ko'rinishdagi muvozanat tenglamalari-dan foydalanish maqsadga muvofiqdir. (4.11) tenglamalarni tuzishda

moment markazi uchun ikkita noma'lum reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish tavsiya etiladi. Bunday nuqtalar *Ritter nuqtalari* deb ataladi. Agar reaksiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlardan ikkitasi o'zaro parallel bo'lsa, (4.10) tenglamalardan foydalanish qulay, bunda kuchlar proekstiyalanadigan x o'q uchun parallel sterjenlarga per-pendikulyar o'q, moment markazlari uchun Ritter nuqtalari olinadi.

5.1-masala. 5.4-rasmda tasvirlangan fermaga $P_1 = 4\text{ kH}$, $P_2 = 2\text{ kH}$ kuchlar ta'sir etadi. O'lchovlar rasmda ko'rsatilgan. A va B tayanchlarning reaksiya kuchlari va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlansin.

Yechish. Dastlab A va B nuqtalarning reaksiya kuchlarini aniqlaymiz. Fermaning muvozanat tenglamalarini tuzish uchun x va y o'qlarini 5.4-rasmdagidek yo'naltiramiz.



Fermaga ta'sir etuvchi $P_1 = 4\text{ kN}$ kuch vertikal pastga, $P_2 = 2\text{ kN}$ kuch esa gorizontaal yo'nalgan. A sharnirning reaksiya kuchini \vec{X}_A va \vec{Y}_A tashkil etuvchilardan iborat deb qaraymiz. Qo'zg'aluvchan sharnir B ning reaksiya kuchi \vec{R}_B vertikal yuqoriga yo'naladi.

Shunday qilib, fermaga bir tekislikda yotuvchi \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B kuchlar ta'sir etadi. Bunday kuchlarning muvozanat tenglamalarini (4.10) ko'rinishida tuzamiz:

$$\sum X_v = 0; X_A + P_2 = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; -P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 3 + R_B \cdot 10 = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_v) = 0; -P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5 - Y_A \cdot 10 = 0.$$

Bu tenglamalarni echib, noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$X_A = -P_2 = -2\text{ kH},$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 3}{10} = 2,6\text{ kH}$$

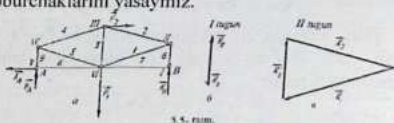
$$Y_A = \frac{-P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5}{10} = 1,4\text{ kH}.$$

Sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlashdan avval berilgan ferma statik aniq ferma ekanligini tekshirib ko'ramiz. Berilgan fer-mada tugunlar soni $n = 6$, sterjenlar soni $N = 9$. Bular (5.1) tenglikni qanoatlantiradi, $9 = 2 \cdot 6 - 3$. Demak, berilgan ferma statik aniqdir. Kuch mashtabini uzunlik birligida tanlab olamiz va sterjenlarni nomlaymiz (5.5-rasm, a).

I. Tugun kesish usuli. I tugunni kesamiz. Dastlab vertikal yuqoriga yoʻnalgan R_8 kuchni tasvirlaymiz (5.5-rasm, *o*). Uning uchidan 8 sterjenga parallel vertikal chiziq oʻtkazsak, kuch koʻpburchagi bir toʻgʻri chiziqda joylashadi va I tugun muvozanatda boʻlishi uchun R_8 ning uchi R_8 ning boshi bilan ustma-ust tushishi kerak. Bundan $R_8 = R_8 = 2,6 \text{ kN}$. Binobarin, 7 sterjendagi zoʻriqish nolga teng.

II tugunni kesamiz. Bu tugunga 8, 2 va 1 sterjenlarning reaksiya kuchlari qoʻyilgan, 8 sterjenning reaksiya kuchi maʼlum. Bunda II tugunga qoʻyilgan sterjenning reaksiya kuchi R_2 miqdor jihatdan R_8 ga teng va unga qarama-qarshi yoʻnalganini eʼtiborga olish kerak. II tugun kuch uchburchagini yasash uchun ixtiyoriy nuqtada R_2 vektorini tasvirlaymiz hamda uning boshi va uchi-dan mos ravishda 1 va 2 sterjenlarga parallel chiziqlar oʻtkazib, kuch koʻp-burchagini olamiz (5.5-rasm, *o*). II tugun muvozanatda boʻlishi uchun bu kuch uchburchagi yopiq boʻlishi kerak. Kuch uchburchagining mos tomonlarini berilgan masshtabda oʻlchab, 1 va 2 sterjenlarning reaksiya kuchlari aniqlanadi.

Xuddi shuningdek, III, IV, V va VI tugunlarni kesib, ularga mos kuch koʻpburchaklarini yasaymiz.



5.5-rasm.

Olingan natijalar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Sterjen nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zoʻriqish kN	4,5	-4,5	2	-2,4	3,4	2	0	-2,6	-1,4

II. Ritter usuli.

Ritter usuli bilan 5.1-masalada berilgan fermaning 4, 5, 6 sterjenlaridagi zoʻriqishlarni aniqlaymiz. Yuqoridagiga oʻxshab $P_1 = 4 \text{ kN}$, $P_2 = 2 \text{ kN}$ kuchlar taʼsir etadi va ta-yanch reaksiyalari $X_3 = 2 \text{ kN}$, $Y_3 = 1,4 \text{ kN}$, $R_3 = 2,6 \text{ kN}$ ga teng (5.6-rasm, *a*).

R_6 reaksiya kuchining yoʻnalishi X_3 ga qarama-qarshidir, yaʼni A tugundan sterjen oʻqi boʻylab yoʻnalib, 6 sterjen choʻziladi va $S_6 = R_6 = 2 \text{ kN}$ (5.6-rasm, *o*).

4 va 5 sterjenlardagi zo'riqishni topish uchun fermaning 4, 5 va 6 sterjenlarini $a-a$ kontur bilan fikran kesamiz hamda fermaning tashlab yuboriladigan o'ng qismining ta'sirini mos sterjenlar bo'ylab yo'nalgan R_4 , R_5 va $R_6=2$ kN reakstiya kuchlari bilan almashtiramiz (5.6-rasm, θ).

Ritter nuqtalari A_1 va A_2 ga nisbatan momentlar tenglamasini tuza-miz:

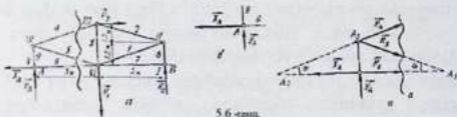
$$\sum M_{A_1}(\vec{F}_v) = 0; -Y_A \cdot 5 - R_4 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_{A_2}(\vec{F}_v) = 0; Y_A \cdot 5 - R_5 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Bu tenglamalarda $\sin \alpha = \frac{1,5}{\sqrt{(1,5)^2 + 5^2}} = 0,287$. Natijada

$$R_4 = S_4 = -\frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = -2,4356 \text{ kH},$$

$$R_5 = S_5 = \frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = 3,4356 \text{ kH}.$$



5.6-rasm.

Fermalarni 2 xil usulda hisoblashga doir namunaviy masala echimi va hisob- grafik ishlari variantlari darslik so'ngida 1-ilovaning 2-topshirig'ida berilgan.

Nazorat savollari

1. Ferma nima?
2. Fermalarning analitik hisobi.
3. Tugunlarni qirqib olish usuli.
4. Ritter usuli

6-BOB. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASI

Tayanch soʻzlar: Kuchning nuqtaga nisbatan moment-vektori, kuchning oʻqqa nisbatan momenti, fazodagi kuchlar sistemasi, muvozanat shartlari, muvozanat tenglamalari.

6.1-§. Kuchning nuqtaga nisbatan moment-vektori

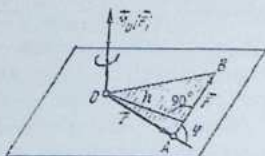
Taʼsir chiziq-lari fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga *fazodagi kuchlar sistemasi* deyiladi.

Fazodagi kuchlarning nuqtaga nisbatan momenti quyidagi uchta faktor:

1) kuch modulini uning elkasiga koʻpaytmasi Fh ga teng moment moduli;

2) kuchning taʼsir chizigʻi va moment markazi orqali oʻtuvchi OAB aylanish tekisligi; 3) mazkur tekislikdagi aylanish yoʻnalishi bilan aniqlanadi (6.1-rasm). Agar barcha kuchlar bir te-kislikda yotsa, har gal OAB aylanish tekisligini aniq-lashga ehtiyoj qolmaydi hamda kuchning nuqtaga nisbatan momentini $\pm Fh$ ga teng skalyar kattalik bilan aniqlash mumkin. Bunda koʻpaytma oldidagi ishora 3.3-§ da koʻrganimizdek aylanish yoʻ-nalishini ifodalaydi.

Jismga fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar taʼsir etsa, har bir kuchning aylanish tekisligini alohida aniqlashga toʻgʻri keladi. Aylanish tekisligining fazodagi holatini va aylanish yoʻnalishini mazkur tekislikka perpendikulyar vektor bilan aniqlash mumkin. Agar tekislikning holatini belgilovchi vektorning modulini kuchning momenti moduliga teng va uning yoʻnalishini kuchning aylanish yoʻnalishini ifodalaydigan tarzda tanlab olsak, bunday vektor yordamida kuchning O nuqtaga nisbatan momentini xarakterlovchi uchala faktorni aniqlash mumkin.



6.1- rasm.

Shu sababli \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan moment vektorini O markazga

qoʻyilgan va bu markaz xamda kuchning taʼsir chizigʻi orqali oʻtgan tekislikka perpendikulyar yoʻnalgan $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektor bilan tasvirlaymiz. $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorining

yo'nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan qaraganimizda kuch jismni O nuqta atrofida soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intil-sin. Agar \vec{F} kuch qo'yilish nuqtasining O markazga nisbatan radius vektorini \vec{r} bilan belgilasak (6.1-rasm),

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Vektorlar algebrasidan ma'lumki, $\vec{r} \times \vec{F}$ vektori \vec{r} va \vec{F} yotgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaraganda vektorlar fikran bir nuqtaga ko'chirilganda \vec{r} ni \vec{F} vektori ustiga tushirish uchun soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Bu vektorning mo-duli $|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin(\widehat{r, F})$. Rasmdan $h = r \sin(\widehat{r, F})$ bo'lgani uchun

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})|. \quad (6.2)$$

$\vec{r} \times \vec{F}$ vektorining yo'nalishi kuchning nuqtaga nisbatan moment vektori $\vec{M}_O(\vec{F})$ yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Shunday qilib, $\vec{r} \times \vec{F}$ va $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorlari miqdor jihatdan teng, yo'nalishi ustma-ust tushadi, ya'ni bu vektorlar o'z-aro teng. Binobarin, (6.1) o'rinli bo'ladi.

Demak, *kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor kattalik bo'lib, kuch qo'yil-gan nuqtaning moment markaziga nisbatan radius-vektori bilan shu kuchning vektor ko'paytmasiga teng.*

6.2 -§. Kuchning o'qqa nisbatan moment

Fazodagi kuchlar sistemasining jismga ta'sirini o'rganishda kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan birga kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasi ham kiritiladi.

z o'q atrofida aylana oladigan jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch ta'sir etsin (6.2- rasm). A nuqtadan jismning aylanish o'qiga perpendikulyar P tekislikni o'tkazamiz. z o'qning mazkur tekislik bilan kesishgan nuqtasini O , \vec{F} kuchning P tekislikdagi proeksti-yasini \vec{F}_n bilan belgilaymiz. \vec{F} kuchni \vec{F}_n va z o'qqa parallel bo'lgan \vec{F}_z tashkil etuvchilarga

5-BOB. FERMALARNI HISOBLASH USULLARI

Tayanch soʻzlar: ferma, tugun, sterjen, shamir, kesish usuli, Ritter usuli

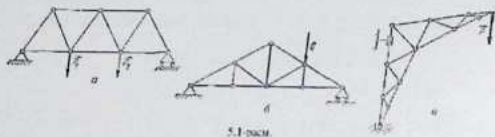
5.1-§. Ferma haqida tushuncha

Shamirlar vositasida geometrik oʻzgarmas qilib tutashtirilgan sterjenlardan hosil boʻlgan konstruktsiya *ferma* deb ataladi. Sterjenlarning uchlarini tutashti-ruvchi nuqta *tugun* deyiladi.

Fermalar qanday inshootda qoʻllanishiga qarab turlicha nom bilan ataladi. Masalan, koʻprik qurilishida foydalaniladigan *koʻprik fermalari* (5.1-rasm, a), inshootlarning tomini ushlab turadigan *stropila fermalari* (5.1-rasm, b), koʻta-rish qurilmalarida foydalaniladigan *kran fermalari* (5.1-rasm, e) va h. k.

Odatda, koʻprik va stropila fermalari bir tomondan qoʻzgʻalmas, ikkinchi tomondan qoʻzgʻaluvchi tayanchlarga oʻrnatiladi. Kran fermalari tayanch pod-shipnikka (podpyatnikka) tayanishi va silindrik hamir vositasida ushlab turi-lishi mumkin.

Sterjenlari bir tekislikda yotuvchi ferma *yassi ferma* deyiladi. Yassi fermalarni hisoblashda ularga qoʻyilgan aktiv kuchlar taʼsirida tayanch reaksiyalari hamda sterjenlarda hosil boʻladigan ichki kuchlarni (zoʻriqishni) aniqlash asosiy masala hisoblanadi. Bu masalani echishda:



5.1-pach.

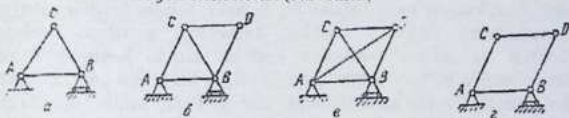
- 1) ferma sterjenlari absolyut qattiq, toʻgʻri chiziqli deb qaralib, ularning ogʻirligi eʼtiborga olinmaydi;
- 2) shamirlardagi ishqalanish hisobga olinmaydi;
- 3) yassi fermaga taʼsir etuvchi kuchlar uning tekisligida yotadi va faqat tu-gunlarga qoʻyiladi deb faraz qilinadi.

U holda ferma sterjenlariga faqat boʻylama (choʻzuvchi yoki siquvchi) kuch-lar taʼsir etadi (1.3- §).

Real fermalarning sterjenlari sharnirlar yordamida emas, balki payvandlab yoki parchin mixlar vositasida birlashtiriladi. Shu sababli ferma sterjenlariga bo'ylama kuchlardan tashqari eguvchi kuchlar xam ta'sir etadi. Tadqiqotlarga ko'ra egilishda hosil bo'ladigan zo'riqish uncha katta bo'lmay, birinchi yaqinlashishda uni e'tiborga olmaslik mumkin.

Shunday qilib, yuqorida qabul qilingan soddalashtirishlar natijasida ferma sterjenlaridagi zo'riqishlar birinchi yaqinlashishda aniqlanadi. Sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlashga o'tishdan oldin ferma strukturasi bilan tanishamiz.

n ta tugundan tashkil topgan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi (ya'ni sterjenlari bir-biriga nisbatan ko'cha olmasligi) uchun bunday ferma kamida nechta sterjendan tashkil topishini ko'rib chiqamiz. Birinchi uchta tugunni geometrik o'zgarmas qilib tutashtirish uchun uchta sterjen olish kerak (5.2- rasm,



5.2-rasm.

a). Bunday uchburchakli ABC fermaga yana bitta D tugun qo'shilishi natijasida hosil bo'lgan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi uchun D tugunni mazkur uchburchakli fermaga kamida ikkita sterjen vositasida birlashtirish kerak (5.2- rasm, b). Xuddi shu tarzda ABC uchburchakli fermaga qolgan $n-3$ ta tugun-larning xar birini ikkita sterjenlar vositasida birlashtirish natijasida n ta tugundan tashkil topgan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi uchun u kamida

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3 \quad (5.1)$$

ta sterjendan tashkil topishiga ishonch hosil qilamiz.

(5.1) shartni qanoatlantiradigan ferma *ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan yassi ferma* deyiladi (5.1- rasm). Agar $N > 2n - 3$ bo'lsa, bunday ferma *ortiqcha sterjenga ega bo'lgan yassi ferma* deyiladi (5.2-rasm, a). Agar $N < 2n - 3$ bo'lsa, bunday konstruktsiya geometrik o'zgaruvchan bo'ladi va fermani ifodalamay-di (5.2-rasm, b). n ta tugundan tashkil topgan ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan feraning har bir tugunini bog'lanishdan bo'shatib, bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi nuqta deb qarasaq, bu

nuqtalarning har biri uchun ikkitadan muvozanat teng-lamaları o'rinni bo'ladi. Natijada ferma uchun $2n$ ta muvozanat tenglamalarini olamiz. Bu tenglamalarga ta-yanch nuqtalaridagi uchta noma'lum reaksiya kuchlari ham kiradi.

Binobarin, $2n$ ta muvozanat tenglamalaridan $2n-3$ ta sterjendagi zo'ri-qishlar va tayanch nuqtalaridagi uchta noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Shu sababli ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan ferma *statik aniq ferma*, ortiqcha sterjenga ega bo'lgan ferma esa *statik noaniq ferma* deb ham ataladi.

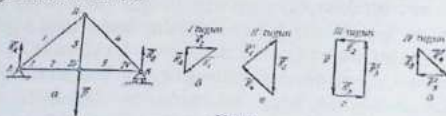
5.2- §. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash (Grafoanalitik usul)

Yuqorida ko'rganimizdek, tugun kesish usulining mohiyati shundan iboratki, ferma tugunlarini fikran ketma-ket kesa boramiz va tugunga qo'yilgan kuchlar muvozanatini tekshiramiz; bunday kuchlar qatoriga sterjenlarning reaksiya kuchlari, tugunlarga qo'yilgan berilgan kuchlar va tayanch reaksiya kuchlari kiradi. Kesilgan tugun muvozanatda bo'lishi uchun unga qo'yilgan kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lishi kerak. Har bir tugun uchun yopiq kuch ko'pburchagini yasab, ferma sterjenlaridagi reaksiya kuch-larini *grafik* usulda aniqlash mumkin.

Tugun kesish usulida masalani *analitik* echish uchun har bir tugunga qo'yilgan kuchlarning muvozanat shartlarini (2.10) ko'rinishida tuzib, bu tengla-malardan noma'lum kuchlarni aniqlash mumkin.

Misol tariqasida 5.3-rasm, *a* da tasvirlangan ferma sterjenlaridagi zo'ri-qishlarni tugunni kesish usulidan foydalanib topamiz. Ferma *A* nuqtada shamirli qo'zg'almas tayanchga, *B* nuqtada shamirli qo'zg'aluvchan tayanchga o'ma-tilgan. Fermaga III tugunga qo'yilgan vertikal pastga yo'nalgan \vec{P} kuch ta'sir etadi.

Masala echishni tayanch reaksiya kuchlarini aniqlashdan boshlaymiz. Fer-maga uning o'rtasiga qo'yilgan bitta vertikal pastga yo'nalgan kuch ta'sir eta-



5.3-rasm.

di. Shu sababli A va B nuqtalarning reaksiya kuchi vertikal yuqoriga yoʻnaladi va oʻzaro teng boʻladi:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

Sterjenlardagi zoʻriqishni aniqlashdan avval berilgan ferma statik aniq ferma ekanligini tekshirib koʻramiz. Berilgan ferma tugunlar soni $n = 4$, sterjenlar soni $N = 5$. Bularni (5.1) ga qoʻysak, $5 = 2 \cdot 4 - 3$, yaʼni berilgan ferma statik aniq fermadir.

Tugunlarni rim raqamlari, sterjenlarni arab raqamlari bilan nomlaymiz.

Kesishni shunday tugundan boshlash kerakki, bu tugunda zoʻriqishi aniq-landigan sterjenlar ikkitadan ortiq boʻlmasin, chunki bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan foydalanib faqat ikkita nomaʼlum kattalikni aniqlash mumkin. Shu sababli koʻrilayotgan ferma kesishni I yoki II tugundan boshlash kerak. I tugunni kesamiz. Bu tugunga maʼlum \vec{R}_1 kuch xamda 1 va 2 sterjenlarning reaksiya kuchlari \vec{R}_1 va \vec{R}_2 qoʻyilgan. Bu kuchlarning taʼsir chiziqlari maʼlum (ular tegishli sterjen boʻylab yoʻnalgan) boʻlib, ularning miqdorini aniqlash kerak. Buning uchun \vec{R}_1 , \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlardan tashkil topgan kuch uchburchagini tuzamiz: ixtiyoriy nuqtadan \vec{R}_1 kuch vektorini, bu kuchning boshi va uchidan esa 1 va 2 sterjenlarga parallel chiziqlar oʻtkazamiz; bu chiziqlarning kesishgan nuqtasi kuch uchburchagining uchinchi uchini ifodalaydi, uning 1 va 2 sterjenlarga parallel boʻlgan tomonlari mos ravishda \vec{R}_1 va \vec{R}_2 ning miqdoriga teng boʻladi (5.3-rasm, δ).

Nomaʼlumlarni (2.10) koʻrinishidagi tenglamalarni tuzib ham aniqlash mumkin.

II tugunni kesamiz. Bu tugunga 1 , 3 va 4 sterjenlarning reaksiya kuchlari qoʻyilgan. Bunda II tugunga qoʻyilgan 1 sterjenning reaksiya kuchi \vec{R}_1' miqdor jihatdan \vec{R}_1 ga teng va unga qarama-qarshi yoʻnalganligini eʼtiborga olish kerak. Shu sababli $\vec{R}_1' = -\vec{R}_1$ yaʼni ikkita tugunni tutashtiruvchi har bir sterjenning uchlariga qoʻyilgan reaksiya kuchlari miqdor jihatdan teng, yoʻnalishi qarama-qarshidir. II tugun uchun kuch uchburchagini yasashda ixtiyoriy nuqtadan \vec{R}_1' vektorini, uning boshi va uchidan esa 3 va 4 sterjenlarga parallel

chiziqlar o'tkazamiz (5.3-rasm, e). Hosil qilingan yopiq kuch uch-burchagining 3 va 4 sterjenlarga parallel bo'lgan tomonlari mos ravishda \bar{R}_1 va \bar{R}_2 reakstiya kuchlarining miqdoriga teng bo'ladi.

Noma'lumlarni (2.10) ko'rinishidagi tenglamalarni tuzib ham aniqlash mumkinligini ta'kidlab o'tamiz.

Shunday qilib berilgan fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlanadi (5.3-rasm, z, o).

5.3-§. Ritter usuli

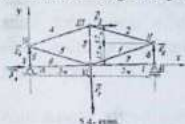
Agar yassi fermaning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, tugunlarni ajratish usulidan foydalanish qulay hisoblanadi. Lekin ferma-ning ayrim sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash lozim bo'lsa, yoki olingan na-tijalar to'g'riligini tezda aniqlash kerak bo'lsa, u holda Ritter (1826–1906) to-monidan kashf qilingan va uning nomi bilan ataladigan analitik usuldan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bu usulda ham dastlab fermaning tayanch reak-stiyalari aniqlanadi.

Ritter usulining mohiyati shundan iboratki, fermani biror $a-a$ kontur bilan fikran qirqib ikki qismga ajratiladi va ajratilgan biror qismining muvozanati tek-shiriladi. Tekislikda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari vositasida uchta noma'lum kattalikni aniqlash mumkin. Shu sababli fermani shunday kontur bilan kesish kerakki, reakstiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlar soni uchta-dan oshmasligi hamda bir nuqtada kesishadigan sterjenlar soni ikkita-dan oshmasligi shart. Fermaning kesilgan bir qismini fikran tashlab yuborib, uning fermani ikkinchi qismiga ko'rsatadigan ta'sirini sterjenlar bo'ylab tashlab yuborilgan tomonga yo'nalgan kuchlar bilan almashtiramiz, ya'ni barcha kesilgan sterjenlarni cho'ziladi deb faraz qilamiz. Masala echilganda birorta sterjenning reakstiya kuchi manfiy ishorali chiqsa, uning yo'nalishi qabul qilingan yo'nalishga qarama-qarshi bo'lib, mazkur sterjen aslida siqiladi. Fermaning ajratilgan qismi uchun tekislikdagi kuchlarning muvozanat tenglamalari tuzilib, sterjenlarning noma'lum reakstiya kuchlari aniqlanadi. Tenglamalar tuzishda shunga harakat qilish kerakki, imkoni bo'lsa har bir tenglamada noma'lumlar soni bittadan oshmasin. Shu nuqtai nazardan qaraganda (4.10) yoki (4.11) ko'rinishdagi muvozanat tenglamalaridan foydalanish maqsadga muvofiqdir. (4.11) tenglamalarni tuzishda

moment markazi uchun ikkita noma'lum reaktsiya kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish tavsiya etiladi. Bunday nuqtalar *Ritter nuqtalari* deb ataladi. Agar reaktsiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlardan ikkitasi o'zaro parallel bo'lsa, (4.10) tenglamalardan foydalanish qulay, bunda kuchlar proektsiyalanadigan x o'q uchun parallel sterjenlarga per-pendikulyar o'q, moment markazlari uchun Ritter nuqtalari olinadi.

5.1-masala. 5.4-rasmda tasvirlangan fermaga $P_1 = 4\text{ kH}$, $P_2 = 2\text{ kH}$ kuchlar ta'sir etadi. O'lchovlar rasmda ko'rsatilgan. A va B tayanchlarning reaktsiya kuchlari va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlansin.

Yechish. Dastlab A va B nuqtalarning reaktsiya kuchlarini aniqlaymiz. Fermaning muvozanat tenglamalarini tuzish uchun x va y o'qlarini 5.4-rasmdagidek yo'naltiramiz.



Fermaga ta'sir etuvchi $P_1 = 4\text{ kN}$ kuch vertikal pastga, $P_2 = 2\text{ kN}$ kuch esa gorizontal yo'nalgan. A sharnirning reaktsiya kuchini \vec{X}_A va \vec{Y}_A tashkil etuvchilardan iborat deb qaraymiz. Qo'zg'aluvchan sharnir B ning reaktsiya kuchi \vec{R}_B vertikal yuqoriga yo'naladi.

Shunday qilib, fermaga bir tekislikda yotuvchi \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B kuchlar ta'sir etadi. Bunday kuchlarning muvozanat tenglamalarini (4.10) ko'rinishida tuzamiz:

$$\sum X_v = 0; X_A + P_2 = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; -P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 3 + R_B \cdot 10 = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_v) = 0; -P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5 - Y_A \cdot 10 = 0.$$

Bu tenglamalarni echib, noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$X_A = -P_2 = -2 \text{ kH},$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 3}{10} = 2,6 \text{ kH}$$

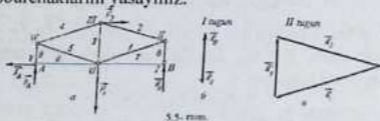
$$Y_A = \frac{-P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5}{10} = 1,4 \text{ kH}.$$

Sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlashdan avval berilgan ferma statik aniq ferma ekanligini tekshirib ko'ramiz. Berilgan fermada tugunlar soni $n = 6$, sterjenlar soni $N = 9$. Bular (5.1) tenglikni qanoatlantiradi, $9 = 2 \cdot 6 - 3$. Demak, berilgan ferma statik aniqdir. Kuch mashtabini uzunlik birligida tanlab olamiz va sterjenlarni nomerlaymiz (5.5-rasm, a).

I. Tugun kesish usuli. I tugunni kesamiz. Dastlab vertikal yuqoriga yo'nalgan \vec{R}_n kuchni tasvirlaymiz (5.5-rasm, *6*). Uning uchidan 8 sterjenga parallel vertikal chiziq o'tkazsak, kuch ko'pburchagi bir to'g'ri chiziqda joylashadi va I tugun muvozanatda bo'lishi uchun \vec{R}_n ning uchi \vec{R}_n ning boshi bilan ustma-ust tushishi kerak. Bundan $R_n = R_8 = 2,6 \text{ kN}$. Binobarin, 7 ster-jendagi zo'riqish nolga teng.

II tugunni kesamiz. Bu tugunga 8, 2 va 1 sterjenlarning reaktsiya kuchlari qo'yilgan, 8 sterjenning reaktsiya kuchi ma'lum. Bunda II tugunga qo'yilgan sterjenning reaktsiya kuchi \vec{R}_2 miqdor jihatdan \vec{R}_8 ga teng va unga qarama-qarshi yo'nalganini e'tiborga olish kerak. II tugun kuch uchburchagini yasash uchun ixtiyoriy nuqtada \vec{R}_1 vektorini tasvirlaymiz hamda uning boshi va uchi-dan mos ravishda 1 va 2 sterjenlarga parallel chiziqlar o'tkazib, kuch ko'p-burchagini olamiz (5.5-rasm, *6*). II tugun muvozanatda bo'lishi uchun bu kuch uchburchagi yopiq bo'lishi kerak. Kuch uchburchagining mos tomonlarini berilgan masshtabda o'lchab, 1 va 2 sterjenlarning reaktsiya kuchlari aniqlanadi.

Xuddi shuningdek, III, IV, V va VI tugunlarni kesib, ularga mos kuch ko'pburchaklarini yasaymiz.



5.5. rasm.

Olingan natijalar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Sterjen nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zo'riqish kN	4,5	-4,5	2	-2,4	3,4	2	0	-2,6	-1,4

II. Ritter usuli.

Ritter usuli bilan 5.1-masalada berilgan fermaning 4, 5, 6 sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlaymiz. Yuqoridagiga o'xshab $P_1 = 4 \text{ kN}$, $P_2 = 2 \text{ kN}$ kuchlar ta'sir etadi va ta-yanch reaktsiyalari $X_1 = 2 \text{ kN}$, $Y_1 = 1,4 \text{ kN}$, $R_n = 2,6 \text{ kN}$ ga teng (5.6-rasm, *a*).

R_6 reaktsiya kuchining yo'nalishi X_1 ga qarama-qarshidir, ya'ni A tu-gundan sterjen o'qi bo'ylab yo'nalib, 6 sterjen cho'ziladi va $S_6 = R_6 = 2 \text{ kN}$ (5.6-rasm, *b*).

4 va 5 sterjenlardagi zo'riqishni topish uchun fermaning 4, 5 va 6 sterjenlarini $a-a$ kontur bilan fikran kesamiz hamda fermaning tashlab yubo-riladigan o'ng qismining ta'sirini mos sterjenlar bo'ylab yo'nalgan R_4 , R_5 va $R_6=2$ kN reaktsiya kuchlari bilan almashtiramiz (5.6-rasm, a).

Ritter nuqtalari A_1 va A_2 ga nisbatan momentlar tenglamasini tuza-miz:

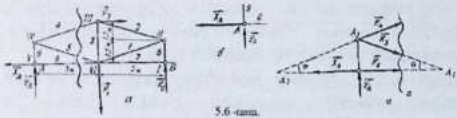
$$\sum M_{A_1}(\vec{F}_v) = 0; -Y_A \cdot 5 - R_4 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_{A_2}(\vec{F}_v) = 0; Y_A \cdot 5 - R_5 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Bu tenglamalarda $\sin \alpha = \frac{1,5}{\sqrt{(1,5)^2 + 5^2}} = 0,287$. Natijada

$$R_4 = S_4 = -\frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = -2,4356 \text{ kH},$$

$$R_5 = S_5 = \frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = 3,4356 \text{ kH}.$$



5.6-rasm.

Fermalarni 2 xil usulda hisoblashga doir namunaviy masala echimi va hisob- grafik ishlari variantlari darslik so'ngida 1-ilovaning 2-topshirig'ida berilgan.

Nazorat savollari

1. Ferma nima ?
2. Fermalarning analitik hisobi.
3. Tugunlarni qirqib olish usuli.
4. Ritter usuli

6-BOB. FAZODAGI KUHLAR SISTEMASI

Tayanch so'zlar: Kuchning nuqtaga nisbatan moment-vektori, kuchning o'qqa nisbatan momenti, fazodagi kuchlar sistemasi, muvozanat shartlari, muvozanat tenglamalari.

6.1-§. Kuchning nuqtaga nisbatan moment-vektori

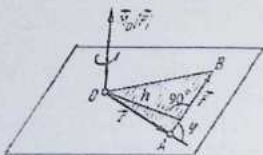
Ta'sir chiziqlari fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga *fazodagi kuchlar sistemasi* deyiladi.

Fazodagi kuchlarning nuqtaga nisbatan momenti quyidagi uchta faktor:

1) kuch modulini uning elkasiga ko'paytmasi Fh ga teng moment moduli;

2) kuchning ta'sir chizig'i va moment markazi orqali o'tuvchi OAB aylanish tekisligi; 3) mazkur tekislikdagi aylanish yo'nalishi bilan aniqlanadi (6.1-rasm). Agar barcha kuchlar bir te-kislikda yotsa, har gal OAB aylanish tekisligini aniq-lashga ehtiyoj qolmaydi hamda kuchning nuqtaga nisbatan momentini $\pm Fh$ ga teng skalyar kattalik bilan aniqlash mumkin. Bunda ko'paytma oldidagi ishora 3.3-§ da ko'rganimizdek aylanish yo'-nalishini ifodalaydi.

Jismga fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sir etsa, har bir kuchning aylanish tekisligini alohida aniqlashga to'g'ri keladi. Aylanish tekisligining fazodagi holatini va aylanish yo'nalishini mazkur tekislikka perpendikulyar vektor bilan aniqlash mumkin. Agar tekislikning holatini belgilovchi vektorning modulini kuchning momenti moduliga teng va uning yo'nalishini kuchning aylanish yo'-nalishini ifodalaydigan tarzda tanlab olsak, bunday vektor yordamida kuchning O nuqtaga nisbatan momentini xarakterlovchi uchala faktorni aniqlash mumkin.



6.1- rasm.

Shu sababli \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan moment vektorini O markazga

qo'yilgan va bu markaz xamda kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektor bilan tasvirlaymiz. $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorining

yo'nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan qaraganimizda kuch jismni O nuqta atrofida soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intil-sin. Agar \vec{F} kuch qo'yilish nuqtasining O markazga nisbatan radius vektorini \vec{r} bilan belgilasak (6.1-rasm),

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Vektorlar algebrasidan ma'lumki, $\vec{r} \times \vec{F}$ vektori \vec{r} va \vec{F} yotgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaraganda vektorlar fikran bir nuqtaga ko'chirilganda \vec{r} ni \vec{F} vektori ustiga tushirish uchun soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Bu vektorning mo-duli $|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin(\widehat{r, F})$. Rasmdan $h = r \sin(\widehat{r, F})$ bo'lgani uchun

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})|. \quad (6.2)$$

$\vec{r} \times \vec{F}$ vektorining yo'nalishi kuchning nuqtaga nisbatan moment vektori $\vec{M}_O(\vec{F})$ yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Shunday qilib, $\vec{r} \times \vec{F}$ va $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorlari miqdor jihatdan teng, yo'nalishi ustma-ust tushadi, ya'ni bu vektorlar o'z-aro teng. Binobarin, (6.1) o'rinli bo'ladi.

Demak, *kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor kattalik bo'lib, kuch qo'yil-gan nuqtaning moment markaziga nisbatan radius-vektori bilan shu kuchning vektor ko'paymasiga teng.*

6.2 -§. Kuchning o'qqa nisbatan moment

Fazodagi kuchlar sistemasining jismga ta'sirini o'rganishda kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan birga kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasi ham kiritiladi.

z o'q atrofida aylana oladigan jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch ta'sir etsin (6.2- rasm). A nuqtadan jismning aylanish o'qiga perpendikulyar P tekislikni o'tkazamiz. z o'qning mazkur tekislik bilan kesishgan nuq-tasini O , \vec{F} kuchning P tekislikdagi proeksti-yasini \vec{F}_n bilan belgilaymiz. \vec{F} kuchni \vec{F}_n va z o'qqa parallel bo'lgan \vec{F}_z tashkil etuvchilarga

ajratamiz. \vec{F}_z kuch jismni z o'q atrofida aylantira olmaydi. Bu kuch jismni z bo'yicha siljitishga intiladi. Binobarin, \vec{F} kuchning z o'q atrofida aylantirish effekti shu o'q atrofida \vec{F}_n kuchning effekti bilan bir xil bo'ladi.

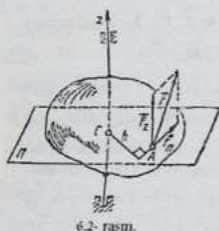
Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti deb, uning shu o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proekstiyasining o'q bilan mazkur tekislik kesishgan nuqtasiga nisbatan momentiga aytiladi.

\vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momenti $M_z(\vec{F})$ bilan belgilanadi; ta'rifga ko'ra

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_n) \quad (6.3)$$

(3.8) ga asosan $M_o(\vec{F}_n) = \pm F_n \cdot h$ bo'lgani uchun

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_n \cdot h \quad (6.4)$$



6.2- rasmi.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti skalyar miqdor bo'lib, o'qning musbat yo'nalishidan qaraganda kuchning o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proekstiyasi jismni soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, kuch momenti musbat, aks holda manfiy ishora bilan olinadi. 6.2- rasmdagi \vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momenti musbat qiymatga ega.

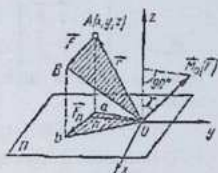
Agar \vec{F} kuchning ta'sir chizig'i z o'qqa parallel bo'lsa, $\vec{F}_n = 0$, shuningdek, kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa, $h = 0$ bo'lib, har ikkala holda (6.4) ga asosan kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

6.3-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish

Lemma. *Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti uning shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan moment-vektorining mazkur o'qdagi proekstiyasiga teng.*

Isbot. \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan moment-vektori (3.9) ga

asosan miqdor jihatdan OAB uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng: $|M_o(\vec{F})| = 2S_{\Delta OAB}$ hamda AB uchburchak tekishgiga perpendikulyar yo'naladi (6.3-rasm). Uning z o'q bilan tashkil qilgan burchagini γ bilan belgilasak, $M_o(\vec{F})$ moment-vektorining z o'qdagi proekstiyasi quyidagicha ifodalanadi.



6.3-rasm.

$$[\vec{M}_o(\vec{F})]_z = |M_o(\vec{F})| \cdot \cos \gamma = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma. \quad (6.5)$$

OAB va Oab uchburchaklarning tekishklari orasidagi burchak bu tekishklarga perpendikulyar yo'nalgan $M_o(\vec{F})$ vektor va Oz o'q orasidagi γ burchakka teng. OAB uchburchakning Π tekishkdagi proekstiyasi Oab ga teng bo'lgani uchun

$$S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma = \pm S_{\Delta Oab}$$

Natijada (6.5) ni quyidagicha yozamiz:

$$[\vec{M}_o(\vec{F})]_z = \pm 2S_{\Delta Oab} \quad (6.6)$$

6.3-rasmda $F_y \cdot h = 2S_{\Delta Oab}$ bo'lgani uchun (6.4) ga asosan

$$M_z(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta Oab} \quad (6.7)$$

(6.6) va (6.7) ni sohstirib, isbotlanishi zarur bo'lgan tenglikni olamiz:

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_o(\vec{F})]_z.$$

Xuddi shuningdek, kuchning qolgan ikkita koordinata o'qlariga nisbatan momentlari hisoblanadi. Natijada

$$M_x(\vec{F}) = [\vec{M}_o(\vec{F})]_x, \quad M_y(\vec{F}) = [\vec{M}_o(\vec{F})]_y, \quad M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_o(\vec{F})]_z \quad (6.8)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(6.1) va isbotlangan lemmadan foydalanib, kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasini aniqlaymiz. Buning uchun koordina-talar boshini O nuqtada olib, Ox , Oy , Oz o'qlarning birlik vektorlarini \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ; \vec{F} kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini X , Y , Z ; A nuqta radius-vektori \vec{r} ning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini x , y , z bilan belgilaymiz (6.3-rasm). U holda (6.1) ga asosan

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

(6.8) ni nazarda tutib, oxirgi ifodani Ox , Oy , Oz o'qlarga proekstiyalasak,

$$M_x(\vec{F}) = yZ - zY, \quad M_y(\vec{F}) = zX - xZ, \quad M_z(\vec{F}) = xY - yX. \quad (6.9)$$

(6.9) formulalar kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasidir. (6.8) va (6.9) ni e'tiborga olib, kuchning nuqtaga nisbatan momentining moduli aniqlanadigan quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

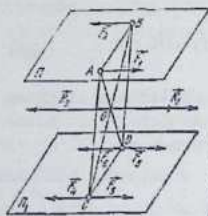
$$\begin{aligned} |\vec{M}_O(\vec{F})| &= \sqrt{[\vec{M}_O(\vec{F})]_x^2 + [\vec{M}_O(\vec{F})]_y^2 + [\vec{M}_O(\vec{F})]_z^2} = \\ &= \sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2} = \\ &= \sqrt{(yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Agar kuchning nuqtaga nisbatan moment-vektorining koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklarini α , β , γ bilan belgilasak, bu vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos \alpha = \frac{M_x(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}, \quad \cos \beta = \frac{M_y(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}, \quad \cos \gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}.$$

6.4-§. Juftni parallel tekislikka ko'chirish haqidagi teorema

Teorema. *Parallel tekisliklarda yotuvchi, momentlarining absolyut qiymati teng va bir xil aylanish yo'nalishiga ega bo'lgan ikkita juft kuch o'zaro ekvivalentdir.*

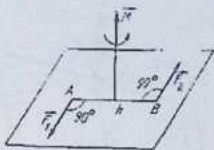


6.4-rasm.

Isbot. Π tekishkda yotuvchi va elkasi $|AB|$ ga teng (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch berilgan (6.4-rasm). Π tekishkka parallel Π_1 tekislikda $|AB|$ ga parallel va teng CD kesmani olamiz. C va D nuqtaga miqdorlari (\vec{F}_3, \vec{F}_4) tashkil etuvchilariga teng $(F_3 = F_4 = F_1 = F_2 = F)$, ta'sir chiziqlari (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft tashkil etuvchilariga parallel va $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \neq 0$ va $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \neq 0$ muvozanatdagi kuchlarni qo'yamiz. U holda

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \quad (6.11)$$

bo'ladi. $[AB]$ va $[CD]$ larga parallelogram qurib, uning $[AD]$ va $[BC]$ diagonalini o'tkazamiz. \vec{F}_1 va \vec{F}_2 parallel kuchlarni qo'shib, ularga parallel va $[AD]$ ning o'rtasi O nuqtaga qo'yilgan \vec{R}_1 kuchga ega bo'lamiz:



6.5- rasm.

$R_1 = F_1 + F_2 = 2F_1$. Xuddi shuningdek, \vec{F}_3 va \vec{F}_4 parallel kuchlarni qo'shib, ularga parallel va $[BC]$ ning o'rtasi O nuqtaga qo'yilgan $R_2 = F_2 + F_4 = 2F_2$ kuchni olamiz. \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlarning miqdorlari teng, yo'nalishi bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgani uchun

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \propto 0.$$

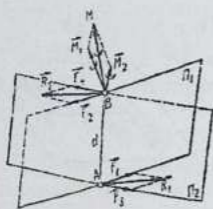
Binobarin,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \quad (6.12)$$

(6.11) va (6.12) larni solishtirib, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ natijani olamiz. 3.5-§ da is-botlangan teorema ko'ra Π_1 tekislikda yotuvchi (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juftni momenti shu juftning momentiga teng va aylanish yo'nalishi u bilan bir xil bo'lgan ixtiyoriy juft kuch bilan almashtirish mumkin bo'lganidan Π tekislikda yotuvchi (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juftni unga parallel Π_1 tekislikda yotuvchi va momenti berilgan juftning momentiga teng hamda aylanish yo'nalishi u bilan bir xil bo'lgan ixtiyoriy juft kuch bilan almashtirish mumkin degan xulosaga kelamiz.

6.5 - §. Juftning moment-vektori

Juft kuchning jismga ta'siri (xuddi fazodagi kuchning nuqtaga nisbatan momenti kabi) quyidagi uchta faktor: juft momenti moduli, juftning ta'sir te-kisligi va aylanish yo'nalishi bilan xarakterlanadi. Qayd etilgan uchta faktorini aniqlash uchun juft momenti u yotgan tekislikka perpendikulyar yo'nalgan va modul jihatdan juft momentining absolyut qiymati $|\vec{M}| = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h$ ga teng \vec{M} vektori bilan ifodalanadi. \vec{M} vektorini o'ng vint qoidasi bo'yicha, ya'ni uning musbat yo'nalishidan qaralganda juft jismi soat strelkasi harakatiga teskari aylantirishga intiladigan qilib yo'naltiramiz (6.5- rasm).



6.6- rasmi.

Juftning jismga ta'sirini o'zgartirmay o'zining ta'sir tekisligida (3.5-§) yo'ki unga parallel tekislikda ixtiyoriy holatga ko'chirish mumkin bo'lganidan (6.4-§), juft momenti vektorini jismning ixtiyoriy nuqtasiga o'ziga parallel ravishda ko'chirish mumkin. Binobarin, juft momenti vektori erkin vektor bo'ladi.

(3.10) ga binoan, $M = M_A(\vec{F}_2) = M_B(\vec{F}_1)$. 6.5- rasmdan ko'ramizki, \vec{M} , $\vec{M}_A(\vec{F}_2)$, $\vec{M}_B(\vec{F}_1)$ vektorlarning yo'nalishi bir xil bo'ladi. Shu sababli

$$\vec{M} = \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) \quad (6.13)$$

tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib, har bir juftga juft moment-vektori keladi, biroq biror juft moment-vektoriga parallel tekisliklarda yotuvchi son-sanoqsiz ekvivalent juftlar mos keladi.

6.6-§. Fazodagi juftlarni qo'shish

Teorema. Kesishuvchi tekisliklarda yotuvchi ikkita juft kuch momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bitta juftga ekvivalentdir.

Isbot. Kesishuvchi Π_1 va Π_2 tekisliklarda yotuvchi, momentlari mos ravishda \vec{M}_1 va \vec{M}_2 ga teng juftlar berilgan bo'lsin (6.6-rasm). Π_1 va Π_2 tekisliklarning kesishgan chizig'ida biror $AB = d$ kesmani olib, berilgan juftlarni o'z tekisligi-da umumiy d elkaga keltiramiz. Natijada 6.6-rasmda tasvir-langanidek, Π_1 tekislikda yotuvchi (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va Π_2 tekislikda yotuvchi (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlarni olamiz. Bu juftlar momentlarining moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$M_1 = F_1 \cdot d, M_2 = F_2 \cdot d \quad (6.14)$$

A va B nuqtalarga qo'yilgan \vec{F}_1, \vec{F}_2 va \vec{F}_3, \vec{F}_4 kuchlarni qo'shamiz:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3, \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 \quad (6.15)$$

Natijada (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlar bitta (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juftga ekvivalent bo'ladi. (6.13), (6.15) va (6.1) ga asosan bu juftning moment-

vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned}\vec{M} = \vec{M}_A(\vec{R}_2) &= \vec{AB} \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{AB} \times \vec{F}_4 = \\ &= \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_4) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.\end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad (6.16)$$

\vec{M}_1 va \vec{M}_2 moment-vektorlariga qurilgan parallelogramm *momentlar parallelogrammi* deyiladi. Bu parallelogrammning diagonali miqdor va yo'nalish jihatdan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va juftlarni qo'shish natijasida olingan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) teng ta'sir etuvchi juftning momentini ifodalaydi. Chunki momentlar parallelogrammining tomonlari (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va (\vec{F}_3, \vec{F}_4) kuchlarga qurilgan parallelogrammning tomonlariga perpendikulyar bo'lgani uchun momentlar parallelogrammining diagonali (\vec{R}_1, \vec{R}_2) teng ta'sir etuvchi juft tekisligiga perpendikulyar yo'naladi va moduli $M = R_1 \cdot d$ bo'ladi.

Agar parallel bo'lmagan tekisliklarda yotuvchi va momentlari $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ ga teng juftlar sistemasi berilsa, isbotlangan teoreмага asosan juftlarni ketma-ket qo'shib, bitta teng ta'sir etuvchi juftni olamiz. Bu juftning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i \quad (6.17)$$

Bir necha kuchlarning teng ta'sir etuvchisi kuch ko'pburchagi usulida topilgani kabi (2.1-§) teng ta'sir etuvchi juftning momentini ham ko'pburchak usulida aniqlash mumkin: teng ta'sir etuvchi juftning momenti berilgan juftlarning moment-vektorlariga qurilgan ko'pburchakda birinchi juft moment-vektorining boshini n - juftning moment-vektori uchi bilan tutashtiruvchi yopuvchi tomoni bilan xarakterlanadi.

Agar juft kuchlar parallel tekisliklarda yotsa, bu juftlarni 6.4 - § da isbotlangan teoreмага asosan bitta tekislikka ko'chirish mumkin. Ma'lumki (3.6 - §), bunday juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi.

(6.17) dan foydalanib, fazodagi juftlar sistemasining muvozanat shartlarini keltirib chiqarish mumkin. Fazodagi juftlar sistemasi bitta teng ta'sir etuvchi juftga ekvivalent va uning momenti (6.17) dan

aniqlangani uchun juftlar muvozanatda bo'lganda $\vec{M} = 0$ yoki

$$\sum \vec{M}_v = 0 \quad (6.18)$$

shart bajarilishi kerak. Binobarin, fazodagi juftlar momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Juftlar sistemasi muvozanatining analitik ifodasi quyidagicha yoziladi:

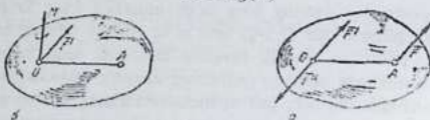
$$\sum M_{v_x} = 0, \quad \sum M_{v_y} = 0, \quad \sum M_{v_z} = 0 \quad (6.19)$$

Shunday qilib, fazodagi juftlar momentlarining har bir koordinata o'qlaridagi proekstiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

6.7-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish

Fazodagi kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish uchun (xuddi tekislikdagi kuchlar sistemasi kabi, 4.2-§) Puanso usulidan foydalanish mumkin. A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuchni ixtiyoriy O nuqtaga ko'chirish uchun O nuqtaga $\vec{F}' = \vec{F}$ va $\vec{F}'' = -\vec{F}$ kuchlarni qo'yamiz (6.7 -rasm, a). Natijada A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}' = \vec{F}$ kuchga va momenti \vec{M} ga teng (\vec{F} , \vec{F}'') qo'shilgan juftga ekvivalent bo'ladi hamda

$$\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (6.20)$$



6.7- rasm.

Bu hol 6.7-rasm, b da tasvirlangan.

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga fazoda ixtiyoriy yo'nalgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsin (6.8-rasm, a).

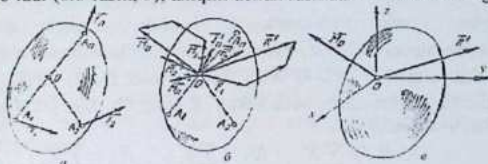
Keltirish markazi uchun ixtiyoriy O nuqtani tanlab, barcha kuchlarni shu markazga qo'shilgan juftlari bilan keltiramiz. Natijada keltirish markazi O nuqtaga qo'yilgan

$$\vec{F}_i = \vec{F}_1, \vec{F}_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n = \vec{F}_n \quad (6.21)$$

kuchlar sistemasi va momentlari

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n) \quad (6.22)$$

bo'lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ qo'shilgan juftlar sistemasi hosil bo'ladi (6.8-rasm, b); aniqlik uchun rasmda $n = 3$ holi ko'rilgan.



6.8-рasm

O nuqtaga qo'yilgan kuchlarni geometrik qo'shib, bitta \vec{R} kuchni olamiz: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ yoki (6.21) ga asosan

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \quad (6.23)$$

Xuddi tekislikdagi kuchlar sistemasi kabi barcha kuchlarning geometrik yi-g'indisiga teng bo'lgan \vec{R} kattalikka fazodagi kuchlar sistemasining bosh vek-tori deyiladi.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ fazoviy juftlarni qo'shib, momenti \vec{M}_O ga teng bitta juftni olamiz. Bu juftning momenti (6.17) ga asosan quyidagicha aniqlanadi. $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i$ yoki (6.22) ni e'tiborga olsak,

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad (6.24)$$

\vec{M}_O ga berilgan kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deyiladi. Binobarin, fazodagi kuchlar sistemasining biror markazga nisbatan bosh momenti tashkil etuvchi kuchlarning shu markazga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bu kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor \vec{R} ga teng bitta kuch bilan momenti \vec{M}_O ga teng bitta juftga ekvivalent bo'ladi (6.8-rasm, e).

6.8- rasmda momenti bosh momentga teng bitta juft kuch tasvirlanmagan. Bunga sabab, 6.5-§ da ta'kidlanganidek, juft momenti vektoriga parallel tekisliklarda yotuvchi son-sanoqsiz juftlar mos keladi.

6.8-§. Fazodagi kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentning analitik ifodalari

Bosh vektor va bosh momentning miqdor hamda yo'nahshini anahitik usulda aniqlash uchun koordinata boshini keltirish markazi O nuqtada olamiz (6.8-ra-sm, θ) \vec{F}_v kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatalarini x_v, y_v, z_v hamda kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini X_v, Y_v, Z_v bilan belgilaymiz. (6.23) ni koordinata o'qlariga proekstiyalab, bosh vektor \vec{R} ning Ox, Oy, Oz o'qlaridagi proekstiyalarini olamiz.

$$R_x = \sum X_v, \quad R_y = \sum Y_v, \quad R_z = \sum Z_v \quad (6.25)$$

Bosh vektoring moduli

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{v=1}^n X_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Y_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Z_v\right)^2} \quad (6.26)$$

formula yordamida, bosh vektoring koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan bur-chak kosinuslari esa

$$\cos \alpha = R_x / R, \quad \cos \beta = R_y / R, \quad \cos \gamma = R_z / R \quad (6.27)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

(6.24) ni koordinata o'qlariga proekstiyalab, kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti orasidagi (6.8) munosabatni e'tiborga olsak,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (y_v Z_v - z_v Y_v), \\ M_y &= \sum (z_v X_v - x_v Z_v), \\ M_z &= \sum (x_v Y_v - y_v X_v) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

yoki kuchning o'qqa nisbatan momentini (6.9) orqali ifodalasak,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_x = \sum M_x(\vec{F}_v), \\ M_y &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_y = \sum M_y(\vec{F}_v), \\ M_z &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_z = \sum M_z(\vec{F}_v) \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

formulalar o'rinli bo'ladi. (6.10) munosabatga ko'ra bosh momentning moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$M_O = \sqrt{[M_x(\vec{F}_v)]^2 + [M_y(\vec{F}_v)]^2 + [M_z(\vec{F}_v)]^2} \quad (6.30)$$

Koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchak kosinuslari esa

$$\cos(\vec{M}_O, x) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(\vec{M}_O, y) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(\vec{M}_O, z) = \frac{M_z}{M_O} \quad (6.31)$$

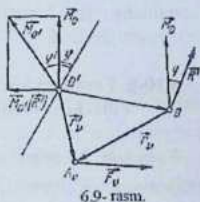
formulalardan topiladi.

6.9- §. Fazodagi kuchlar sistemasining invariantlari

Berilgan kuchlar sistemasini unga ekvivalent bo'lgan sistema bilan almashtirishda o'zgarmay qoladigan vektor yoki skalyar kattalik *kuchlar sistemasining invarianti* deyiladi.

Xuddi tekislikdagi kuchlar sistemasi kabi fa-zodagi kuchlar sistemasining bosh vektori ham berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi va keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi. Ya'ni, kuchlar sistemasining bosh vektori keltirish markaziga nisbatan invariant bo'ladi. Bosh vektor \vec{R} kuchlar sistemasining vektorli invarianti deyiladi.

Keltirish markazini o'zgartirish natijasida bosh moment qanday o'zgarishini ko'ramiz. Fazodagi ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasini O markazga keltirganda uning bosh vektori \vec{R} va bosh momenti \vec{M}_O ga teng bo'lsin (6.9-rasm). Keltirish markazi uchun boshqa O' nuqtani olib, bu nuqtaga nisbatan hisoblangan bosh momentni $\vec{M}_{O'}$ bilan



belgilaylik. Agar A_v ($v = \overline{1, n}$) nuqtaga qo'yilgan kuchning O' nuqtaga nisbatan radius - vektorini \vec{r}'_v bilan belgilasak, u holda (6.24) ga binoan

$$\vec{M}_{O'} = \sum \vec{M}_{O'}(\vec{F}_v) = \sum \vec{r}'_v \times \vec{F}_v$$

6.9-rasmdan $\vec{r}'_v = \vec{O'O} + \vec{r}_v$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum (\vec{O'O} + \vec{r}_v) \times \vec{F}_v = \sum \vec{O'O} \times \vec{F}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \\ &= \vec{O'O} \times \sum \vec{F}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \vec{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_O. \end{aligned} \quad (6.32)$$

(6.3) ga asosan $\vec{O'O} \times \vec{R} = \vec{M}_{O'}(\vec{R})$ bosh vektoring O' nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi. Buni nazarda tutib (6.32) ni quyidagicha yozish mumkin

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}(\vec{R}) + \vec{M}_O \quad (6.33)$$

yoki

$$\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O = \vec{M}_{O'}(\vec{R})$$

ya'ni keltirish markazini o'zgartirish natijasida bosh momentning o'zgarishi, av-valgi keltirish markazi O ga qo'yilgan kuchlar

sistemasi bosh vektori \vec{R} ning yangi keltirish markazi O' ga nisbatan momentiga teng.

(6.33) da $\vec{M}_O(\vec{R}) \perp \vec{R}$ ekanligini nazarda tutib, bu tenglikni bosh vektor \vec{R} ga skalyar ko'paytiramiz:

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = \vec{R} \cdot \vec{M}_O \quad (6.34)$$

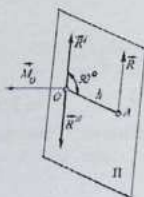
$$M_O \cos \varphi' = M_O \cos \varphi, \quad (6.35)$$

bunda $\varphi = \widehat{\vec{R}', \vec{M}_O}$ va $\varphi' = \widehat{\vec{R}, \vec{M}_O}$

Binobarin, kuchlar sistemasi bosh vektorining bosh momentga skalyar ko'payt-masi yoki bosh momentning bosh vektordagi proekstiyasi, keltirish markaziga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas kattalikdir. Bu kattalik fazodagi kuchlar sistema-sining skalyar invarianti deyiladi.

6.10-§. Fazodagi kuchlar sistemasi bitta juftga yoki teng ta'sir etuvchiga keltiriladigan hollar. Varinon teoremasi

Yuqorida ko'rganimizdek (6.7-§) jismga ta'sir etuvchi fazoda ixtiyoriy joy-lashgan ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasini O markazga keltirish natijasida bu kuchlar sistemasi bosh vektor \vec{R} ga teng bitta kuch bilan momenti bosh moment \vec{M}_O ga teng bitta juft kuchga ekvivalent bo'ladi.



6.10- rasm.

Agar kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R} = 0$ ya'ni berilgan kuchlarga qu-rilgan kuch ko'pburchagi yopiq hamda bosh momenti $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi momenti bosh moment \vec{M}_O ga teng bitta teng ta'sir etuvchi juftga keltiriladi. Bu holda (6.33) ga asosan keltirish markazini O' ga o'zgartir-gan bilan juft momenti o'zgarmaydi:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$$

Teng ta'sir etuvchi juftning momenti \vec{M}_O erkin vektor bo'lgani uchun uni jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yish mumkin. Teng ta'sir etuvchi juftning tash-kil etuvchilari esa, moment-vektori \vec{M}_O ga

perpendikulyar ixtiyoriy tekislikda yotishi mumkin.

Quyidagi ikki holda fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi:

1. Agar keltirish markazi deb tanlangan O nuqta uchun

$$\vec{R} \neq 0 \quad \vec{M}_O = 0$$

bo'lsa, u holda fazodagi kuchlar sistemasi berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng va O nuqtaga qo'yilgan bitta kuchga, ya'ni teng ta'sir etuvchi \vec{R} ga ekvivalent bo'ladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$$

hamda

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

2. Agar keltirish markazi O nuqta uchun

$$\vec{R} \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0$$

hamda bosh moment \vec{M}_O bosh vektor \vec{R} ga perpendikulyar bo'lsa, u holda fazodagi kuchlar sistemasining skalyar invarianti $\vec{R}\vec{M}_O = 0$ bo'lib, bunday kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keltirilishini isbotlaymiz. Bosh vektor \vec{R} orqali bosh moment \vec{M}_O ga perpendikulyar Π tekislikni o'tkazamiz (6.10-rasm). Momenti \vec{M}_O ga teng bo'lgan (\vec{R}, \vec{R}') juftning tashkil etuvchilaridan biri \vec{R}' ni shunday tanlaymizki, u miqdor jihatdan bosh vektor \vec{R} ga teng, yo'nalishi esa unga qarama-qarshi bo'lsin. U holda (\vec{R}, \vec{R}') juftning momenti

$$M_O = R'h = Rh$$

formuladan aniqlangani uchun juftning elkasi

$$h = \frac{M_O}{R}$$

tenglikdan topiladi. (\vec{R}, \vec{R}') juftning ikkinchi tashkil etuvchisi \vec{R} , O nuqtadan \vec{M}_O , \vec{R} lar yotgan tekislikka o'tkazilgan h perpendikulyarning uchiga shunday qo'yilganki, \vec{M}_O vektorining uchidan qaraganimizda \vec{R} kuch jismni O nuqta at-rofida soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi. O nuqtaga qo'yilgan \vec{R} va \vec{R}' kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi: $(\vec{R}, \vec{R}') \sim 0$. Shu sababli berilgan kuchlar sistemasi A nuqtaga qo'yilgan yagona kuchga ekvivalent

bo'ladi: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto \vec{R}$. Bunda \vec{R} kuch berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi.

Demak, biror O nuqtada bosh vektor \vec{R} bosh moment \vec{M}_O ga perpendi-kulyar yo'nalgan bo'lsa, kuchlar sistemasi bosh vektor \vec{R} ga parallel yo'nalgan va keltirish markazi O dan $OA = h = \frac{M_O}{R}$ masofada (\vec{M}_O yo'nalishiga mos ravishda) A nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi \vec{R} kuchga keltiriladi.

Fazodagi kuchlar teng ta'sir etuvchisining momentiga oid quyidagi Varinon teoremasini isbotlaymiz (tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun bu teorema 4.3-§ da isbotlangan):

Agar fazodagi kuchlar teng ta'sir etuvchiga keltirilsa, bu teng ta'sir etuvchining ixti-yoriy nuqtaga nisbatan momenti barcha kuchlarning mazkur nuqtaga nisbatan moment-larining geometrik yig'indisiga teng.

Isbot. Fazodagi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi A nuqtaga qo'yilgan \vec{R} teng ta'sir etuvchiga keltiriladi deb qaraylik. Ixtiyoriy O nuqtani olamiz va keltirish markazini o'zgar-tirish natijasida bosh momentning o'zgarishini ifodalovchi (6.33) tenglikka asosan sistema barcha kuchlarining O nuqtaga nisbatan bosh momenti uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_A$$

Berilgan kuchlar sistemasi A nuqtada teng ta'sir etuvchiga keltirilgani tufayli bosh mo-ment $\vec{M}_A = 0$ bo'ladi, binobarin

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R})$$

(6.24) formulaga asosan bosh moment \vec{M}_O sistema barcha kuchla-rining O nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

Oxirgi ikkita tenglikni solishtirib, quyidagi natijani olamiz:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad (6.36)$$

(6.36) tenglikni O nuqtadan o'tuvchi biror Oz o'qqa proekstiyalaymiz:

$$[\vec{M}_O(\vec{R})]_z = \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z$$

(6.8) tenglikka asosan oxirgi ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\vec{M}_z(\vec{R}) = \sum \vec{M}_z(\vec{F}_i) \quad (6.37)$$

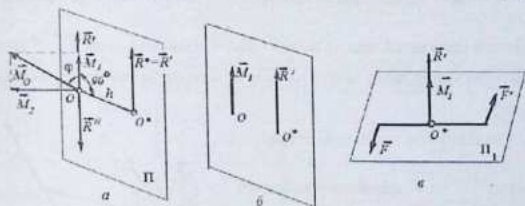
Demak, fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining ixtiyoriy o'qqa nisbatan momenti mazkur kuchlarning ushbu o'qqa nisbatan momentlarining algebraik yig'indi-siga teng.

6.11-§. Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish

Kuchlar sistemasini sodda holga keltirish bilan shug'ullanamiz. Berilgan kuchlar sistemasini O markazga keltirish natijasida bosh vektor \vec{R} bilan bosh moment \vec{M}_O orasidagi burchak $\varphi \neq 90$ holni tekshiramiz (6.11-rasm).

Bosh moment \vec{M}_O ni bosh vektor \vec{R} bo'ylab yo'nalgan \vec{M}_1 va unga perpendikulyar yo'nalgan \vec{M}_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz. (6.11-rasm, a).

$$\begin{aligned} M_1 &= |M_O \cos \varphi| = \frac{R' M_O |\cos \varphi|}{R'} = \frac{|\vec{R}' \cdot \vec{M}_O|}{R'} \\ M_2 &= |M_O \sin \varphi|. \end{aligned} \quad (6.38)$$



6.11-rasm.

$\vec{M}_O \perp \vec{R}$ bo'lgani uchun, yuqorida ko'rganimizdek, momenti \vec{M}_2 ga teng juft va \vec{R} bosh vektorni, O nuqtadan \vec{M}_2 ga perpendikulyar o'tkazilgan Π tekislikda-gi

$$OO^* = M_2 / R' = M_O |\sin \varphi| / R' \quad (6.39)$$

masofada, O^* nuqtaga qo'yilgan $\vec{R}^* = \vec{R}$ kuch bilan almashtirish mumkin (6.11-ra-sm, b).

Berilgan kuchlar sistemasi uchun \vec{M}_1 vektori o'zgarmas bo'lib,

keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi, shu sababli uni o'ziga parallel ravishda O^* nuqtaga keltiramiz (6.11-rasm, a). Natijada berilgan kuchlar sistemasi O^* nuqtaga qo'yilgan $\vec{R}^* = \vec{R}$ kuchga va shu kuch bo'ylab yo'nalgan \vec{M}_1 momentli (\vec{F}, \vec{F}')

juftga kel-tiriladi. Bu juft \vec{M}_1 ga perpendikulyar Π_1 tekislikda yotadi.

Bitta kuch va shu kuchga perpendikulyar tekislikda yotuvchi juftidan tashkil topgan sistema *dinamik vint* deyiladi.

Shunday qilib, bosh vektor noldan farqli va bosh momentga perpendikulyar bo'lmagan holda, ya'ni fazodagi kuchlar sistemasining skalyar invarianti

$\vec{R} \vec{M}_0 \neq 0$ holda kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi. Tinch holatdagi erkin jisimga kuch ta'sir etsa, jism ilgarihlama harakat qiladi, juft kuch esa jismini aylanma harakatga keltiradi. Dinamik vint ta'siridagi jism ilgarihlama va aylanma harakatda (ya'ni vint harakatida) bo'ladi.

Fazodagi kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladigan O^* nuqta yagona emas. Haqiqatan ham, \vec{M}_1 vektori erkin vektor hamda $\vec{R}^* = \vec{R}$ kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirish mumkin bo'lgani tufayli $\vec{R}^* = \vec{R}$ vektorning ta'sir chizig'ida yotuvchi ixtoriy nuqtada kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi.

6.12-§. Markaziy o'q tenglamasi

Fazoda O^* nuqtani shunday tanlash kerakki, berilgan kuchlar sistemasi shu nuqtada

dinamik vintni tashkil etsin, ya'ni bosh vektor \vec{R} bilan bosh moment \vec{M}_{O^*} bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalsin. Bu to'g'ri chiziq berilgan kuchlar sistemasining *markaziy o'qi* deyiladi.

Markaziy o'q tenglamasini aniqlash

uchun \vec{M}_{O^*} va \vec{R} vektorlarning kollinearlik shartidan foydalanamiz (6.12-rasm), ya'ni

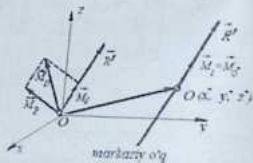
$$\frac{\vec{M}_{O^*}}{\vec{R}} = p = \frac{|\vec{R} \cdot \vec{M}_{O^*}|}{(R)^2} \quad (6.40)$$

bunda p uzunlik birligida o'lchanadigan

o'zgaruvchan kattalik bo'lib, *vint parametri*

deyiladi. (6.32) ga asosan O^* nuqtaga nisbatan bosh moment uchun

$$\vec{M}_{O^*} = \vec{OO'} \times \vec{R} + \vec{M}_O = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R}$$



6.12- rasm.

bo'lganidan (6.40) quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{M}_O - \vec{OO} \times \vec{R}') / \vec{R}' = p \quad (6.41)$$

(6.41) markaziy o'q tenglamasining vek-torli ifodasidir. Markaziy o'q tenglamasining analitik ifodasini yozish uchun ixtiyoriy O nuqtada x, y, z koordinata o'qlarini o'tkazamiz.

O nuqtaga kuchlarni keltirish natijasida bosh vektor \vec{R} va bosh moment $\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ ga (bunda $\vec{M}_1 \perp \vec{M}_2$, $\vec{M}_1 = \vec{M}_O$) ega bo'laylik. Agar $\vec{M}_O, \vec{R}, \vec{OO}$ vektorlarning proekstiyalarini mos ravishda $\vec{M}_O(M_x, M_y, M_z), \vec{R}(R_x, R_y, R_z)$,

$\vec{OO}(x', y', z')$ bilan belgilasak, dinamik vint bosh momenti

$$M_1 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \quad (6.42)$$

vint parametri

$$p = M_1 / (R')^2 = (R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z) / (R')^2 \quad (6.43)$$

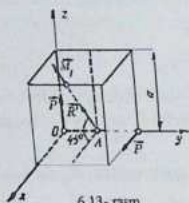
(6.41) ga asosan markaziy o'q tenglamasi analitik ifodasini olamiz

$$\frac{M_x - (y' R_z - z' R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (z' R_x - x' R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (x' R_y - y' R_x)}{R_z} = p \quad (6.44)$$

Quyidagi jadvalda fazodagi kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish hollari ko'rsatilgan (4-holning o'rinli ekanligi 6.14-§ da berilgan)

No	$\vec{R} \vec{M}_O$	\vec{R}	\vec{M}_O	Keltirish hollari
1	$\vec{R} \vec{M}_O \neq 0$	$\vec{R} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	Dinamik vint
2	$\vec{R} \vec{M}_O = 0$	$\vec{R} \neq 0$	$\vec{M}_O = 0$ $\vec{M}_O \neq 0$	Teng ra'is etuvchi kuch
3	$\vec{R} \vec{M}_O = 0$	$\vec{R} = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	Juft kuch
4	$\vec{R} \vec{M}_O = 0$	$\vec{R} = 0$	$\vec{M}_O = 0$	Kuchlar sistemasi muvozanatda

Agar kuchlar sistemasi bir tekislikda (masalan, Oxy tekisligida) yotsa, u holda bosh vektoring z o'qdagi proekstiyasi va bosh



6.13-rasm.

momentning x va y o'qlardagi proekstiyalari nolga teng bo'ladi:

$$R_x = 0, M_x = 0, M_y = 0$$

Bu qiymatlarni

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$$

ga qo'ysak, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ bo'lishini ko'ramiz.

Shunday qilib, tekislikdagi kuchlar sistemasi jadvaldagi 2, 3 va 4-hollarga

mos keladi. Xuddi shuningdek, agar fazodagi kuchlar sistemasi z o'qqa parallel bo'lsa, ularning x va y o'qlardagi proekstiyalari va z ga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Binobarin, bu holda ham kuchlarning skalyar invarianti

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$$

bo'lib, fazodagi kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish jadvaldagi 2, 3 va 4 - hollarga mos keladi va tekislikdagi kuchlar sistemasi yoki fazodagi parallel kuchlar sistemasi dinamik vintga keltirilmaydi.

Fazodagi kuchlarni sodda (kanonik) holga keltirishga oid quyidagi masalani echamiz.

6.1-masala. Kubning ikkita qirrasini bo'yicha \vec{P} kuch qo'yilgan (6.13-rasm). Shu kuchlar sistemasi sodda holga keltirilsin.

Yechish. Bu xildagi masalalar quyidagi tartibda echiladi:

1. Koordinatalar boshini kuchlar keltiriladigan nuqtada olaniz. Berilgan masalada ko-ordinata o'qlarini 6.13-rasmdagidek yo'naltiramiz.

2. (6.25—6.27) ga asosan bosh vektor \vec{R} ning miqdor va yo'nalishini aniqlaymiz:

$$R_x = \sum X_i = P, R_y = \sum Y_i = 0, R_z = \sum Z_i = P, R = P\sqrt{2}$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{x}) = \frac{R_x}{R} = \frac{P}{P\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{y}) = \frac{R_y}{R} = 0,$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{z}) = \frac{R_z}{R} = \frac{P}{P\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6.28) ga asosan:

$$M_x = M_y = 0; M_z = -aP$$

3. Dinamik vint bosh momentini (6.42) ga asosan aniqlaymiz:

$$M_1 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = Pa\sqrt{2}/2$$

4. Markaziy o'q tenglamasini tuzamiz. Bosh vektor va bosh momentning koordinata o'qlari-dagi aniqlangan proekstiyalarini nazarda tutib, (6.44) tenglamadan quyidagi munosabatni olamiz

$$\frac{0 - (y^*P - z^*0)}{P} = \frac{0 - (z^*P - x^*P)}{0} = \frac{-aP - (x^*0 - y^*P)}{P} = P$$

$$p = M_1 / (R^i)^2 = (R_x^i M_x + R_y^i M_y + R_z^i M_z) / (R^i)^2 = a\sqrt{2} / 4P$$

Bunda $z^* = z_1 = 0$ deb qarab, markaziy o'qning Oxy tekishgi bilan kesishgan $A(x_1, y_1, 0)$ nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz: $x_1 = 0, y_1 = a/2$.

Markaziy o'qning yo'nahshi bosh vektor \vec{R} yo'nahshi bilan bir xil bo'lgani uchun markaziy o'q 6.13- rasmdagidek, $A(0, a/2, 0)$ nuqta va kubning markazi orqali o'tadi.

6.13-§. Fazodagi kuchlar sistemasini ikkita o'zaro kesishmaydigan kuchlarga keltirish

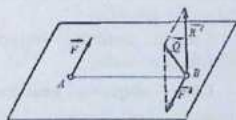
Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirilgan deb qaraylik. Dinamik vintni bosh vektor \vec{R} ga teng kuch hamda tashkil etuvchilari \vec{F} va \vec{F}' ga teng juftidan iborat deb qarash mumkin (6.14-rasm). B nuqtaga qo'yilgan juft tashkil etuvchi kuchlardan biri \vec{F}' ni \vec{R} bilan geometrik qo'shib, ularning yig'in-disini \vec{Q} bilan belgilaymiz. Natijada berilgan kuchlar sistemasini fazodagi parallel bo'lmagan va kesishmaydigan ikkita kuchlar: A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} va B nuqtaga qo'yilgan \vec{Q} ga ekvivalent bo'ladi.

6.14-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Teorema. *Fazodagi kuchlar sistemasini muvozanatda bo'lishi uchun*

$$\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0 \quad (6.45)$$

tenglklarning bajarilishi, ya'ni kuchlar sistemasining bosh vektori va ixtiyoriy kel-tirish markaziga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lishi zarur



6.14-rasm.

va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. Agar \vec{R} va \vec{M}_O noldan farqli bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi, chunki juft kuchni bitta kuch bilan muvoza-natlash mumkin emas. Agar $\vec{R}=0$, $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bitta juftga keltiriladi yoki $\vec{M}_O=0$, $\vec{R} \neq 0$ bo'lgan holda kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchiga ekvivalent bo'ladi. Har ikkala holda ham kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun (6.45) ning bajarilishi zaruriy shart hisoblanadi.

Yetariligi. (6.45) shartlar bajarilsa, keltirish markazi O ga ko'chirilgan barcha kuchlar ham, ko'shilgan juftlar sistemasi nolga ekvivalent bo'ladi. Ya'ni berilgan kuchlar sistemasi muvoza-natiashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi.

(6.45) shartlar fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining vektorli ifodasidir. (6.45) ning geometrik ma'nosi quyidagicha: fazodagi kuchlar sistemasi muvoza-natda bo'lishi uchun kuchlar ko'pburchagi va berilgan kuchlarning istalgan kel-tirish markaziga nisbatan moment vektorlariga qurilgan ko'pburchak yopiq bo'lishi kerak.

(6.26) va (6.30) ni nazarda tutib, (6.45) o'miga quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0 \quad (6.46)$$

Bu tenglamalar fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartlarni ifodalaydi: fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuch-larning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarining va kuchlarning uchta koordinata o'qlariga nisba-tan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kuchlar sistemasi muvozanatining quyidagi uchta xususiy holini alohida ko'-ramiz:

1. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar. Agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ bir nuqtada kesi-shuvchi kuchlar sistemasini tashkil etsa, keltirish markazi uchun kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishgan nuqtani olamiz. Natijada barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari uchala koordinata

o'qlarini kesib o'tadi va kuchlarning mazkur o'qlarga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Binobarin, (6.46) dagi oxirgi uchta tenglama ay-niyatga aylanadi.

Shunday qilib, bir nuqtada kesishuvchi kuchlarning muvozanat tenglamalarini avval keltirib chiqarilgan (2.10) ko'rinishida olamiz:

$$\sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum Z_v = 0$$

2. Tekislikdagi kuchlar sistemasi. Agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ bir tekislikda yotuvchi kuchlar sistemasini tashkil etsa, kuchlar yotgan tekislik uchun Oxy tekisligini ola-miz. Kuchlar z o'qqa perpendikulyar tekislikda joylashgani tufayli ularning z o'q-dagi proekstiyalari nolga teng. Kuchlarning ta'sir chiziqlari Ox va Oy o'qlariga parallel yoki kesib o'tgani uchun xar ikkala holda xam kuchlarning Ox va Oy o'qlariga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Natijada (6.46) da uchinchi, to'rtin-chi va beshinchi tenglamalar ayniyatga aylanadi. Barcha kuchlar Oxy tekisligida yotganligi sababli ularning z o'qiga nisbatan momentlari koordinatalar boshi O ga nisbatan kuchlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi. Shu sababli tekislikdagi kuchlarning muvozanat tenglamalarini ilgari chiqarilgan (4.9) ko'rini-shida yozish mumkin:

$$\sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum M_o(\vec{F}_v) = 0.$$

3. Fazodagi parallel kuchlar sistemasi. Agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ fazodagi parallel kuchlar sistemasidan iborat bo'lsa, z o'qni kuchlarga parallel yo'naltiramiz. Kuch-larning ta'sir chiziqlari Oxy tekisligiga perpendikulyar bo'lgani uchun ularning Ox va Oy o'qlardagi proekstiyalari nolga teng bo'ladi. Kuchlar z o'qqa parallel bo'l-gani uchun kuchlarning z o'qqa nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Natijada (6.46) dagi birinchi, ikkinchi va oltinchi tenglamalar ayniyatga aylanadi va *fazo-dagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari* quyidagicha yoziladi:

$$\sum Z_v = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) = 0 \quad (6.47)$$

6.15-§. Bir nuqtasi bilan maqamlangan qattiq jismning muvozanat shartlari

Yuqorida chiqarilgan (6.46) ko'rinishidagi muvozanat tenglamalari erkin qattiq jismga qo'yilgan kuchlar sistemasi uchun o'rinli bo'ladi. Bog'lanishdagi jismlar-ning muvozanatini aniqlashda bog'lanishdan bo'shatish aksiomasidan foydlanamiz. ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar ta'siridagi jism O nuqtada sferik shamir vositasida maqamlangan bo'lsin (6.15- rasm). Qo'zg'almas nuqtani koordinatalar boshi uchun qabul qilamiz. Berilgan kuchlar qatoriga sferik shamir reaksiya kuchi tashkil etuvchilari $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{Z}_O$ lami qo'shib, (6.46) ga asosan muvozanat tenglamalarini quyidagicha yoza-miz:

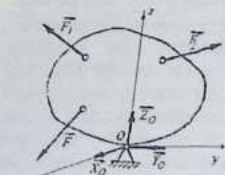
$$\sum X_v + X_O = 0, \quad \sum Y_v + Y_O = 0, \quad \sum Z_v + Z_O = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_v) = 0 \quad (6.48)$$

Oxirgi uchta tenglamada noma'lum reaksiya kuchlari qatnashmaydi va bu tenglamalar muvozanat shartlarini ifodalaydi. Bu shartlarning vektorli ifodasini

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_v) = 0 \quad (6.49)$$

shaklida yozish mumkin.



6.15- rasm.

(6.49)dan ko'ramizki, agar aktiv kuchlarning qo'zg'almas nuqtaga nisbatan moment-vektorlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, bitta nuqtasi bilan maqamlangan jism muvozanatda bo'ladi. Boshqacha aytgan-da, bitta nuqtasi bilan maqamlangan jism muvozanatda bo'lishi uchun berilgan kuchlar sistemasi qo'zg'almas nuqtadan

$$\vec{R} = -\vec{R}_O \quad (6.50)$$

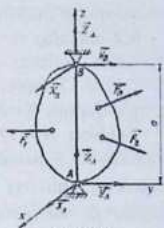
teng ta'sir etuvchiga keltirilishi kerak. (6.48) ning birinchi uchta tenglamasidan qo'zg'almas nuqtadagi reaksiya kuchi \vec{R} ning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari aniqlanadi:

$$X_o = -\sum X_v, \quad Y_o = -\sum Y_v, \quad Z_o = -\sum Z_v$$

Bu tenglamalar (6.50) vektorli tenglamaning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini ifodalaydi.

6.16-§. Ikkita nuqtasi bilan mahkamlangan qattiq jismning muvozanat shartlari

Ikkita A va B nuqtalari sferik shamir bilan mahkamlangan jism ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar ta'sirida mazkur nuqtalar orqali o'tuvchi o'q atrofida aylanishi mumkin. Koordinatalar boshini A nuqtada olib, z o'qni A va B nuqtalar orqali o'tkazamiz (6.16-rasm). Ko'zg'almas nuqtalarning reaksiya kuchlarini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'yicha $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Muvozanat bo'lishi uchun ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) va $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B$ kuchlar (6.46) muvozanat shartlarini qanoatlantirishi ke-rak:



$$\sum X_v + X_A + X_B = 0, \quad \sum Y_v + Y_A + Y_B = 0, \quad \sum Z_v + Z_A + Z_B = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B \cdot a = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B \cdot a = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_v) = 0 \quad (6.51)$$

bunda a bilan A va B nuqtalar orasidagi masofa belgilangan. Oxirgi tenglamada reaksiya kuchlari qatnashmaydi, shu sababli bu tenglama ikki nuqtasi mahkamlangan qattiq jismning muvozanat shartini ifodalaydi: *ikki nuqtasi bilan mahkamlangan qattiq jism muvozanatda bo'lishi uchun aktiv kuchlarning qo'zg'almas nuqtalardan o'tuvchi o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.*

To'rtinchi va beshinchi tenglamalardan topilgan qiymatlarni birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo'yib X_A va Y_A larni aniqlaymiz:

$$Y_B = \frac{1}{a} \sum M_x(\vec{F}_v), \quad X_B = -\frac{1}{a} \sum M_y(\vec{F}_v)$$

$$X_A = \frac{1}{a} \sum M_z(\vec{F}_v) - \sum X_v, \quad Y_A = -\frac{1}{a} \sum M_x(\vec{F}_v) - \sum Y_v$$

(6.51)ning uchinchisidan reaktsiya kuchlarining z o'qi bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilarining yig'indisini aniqlash mumkin

$$Z_A + Z_B = -\sum Z_v \quad (6.52)$$

ya'ni masala statik aniqmasdir. Texnikada bu aniqmaslikni hal qilish uchun A nuqtada tayanch podshipnik, B nuqtada silindrik podshipnik o'rnatish mumkin. Bu holda $Z_B = 0$ bo'ladi.

6.2-masala. $\vec{G} = 1$ kN og'irliqdagi $ABCD$ rom, $\vec{P} = 2$ kN kuch ta'sirida turibdi. $\vec{P} \parallel A_y$, $AD = BC = 60$ sm, $AB = CD = 100$ sm, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (6.17-rasm, a). A va B ta-yanchlarning reaktsiyalari topilsin. (A - sferik shamir, B oshiq-moshiq).

Yechish. $ABCD$ romga \vec{G} og'irlik kuchi, \vec{P} kuch, CE sterjenning reaktsiyasi S hamda A va B tayanchlarning reaktsiyalari qo'yilgan. A sferik shamirning reaktsiyasi uchta $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ tashkil etuvchilar bilan, B oshiq-moshiqning reaktsiyasi esa ikkita \vec{X}_B, \vec{Z}_B tashkil etuvchilar bilan aniqlanadi (6.17-rasm, b). Noma'lum kuchlar oltita: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, S$. Ularni aniqlash uchun oltita muvozanat tenglamasini tuzish mumkin.

Kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari tenglamalari:

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad G(BC/2) \cdot \sin 30^\circ - S \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad P \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ \cdot AB - X_B \cdot AB = 0, \quad (3)$$

(2) tenglamadan S ni aniqlaymiz; so'ngra (1) va (3) tenglamalardan Z_B va X_B larni topamiz.

Kuchlarning koordinata o'qlariga proektsiyalari tenglamalari:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (4)$$

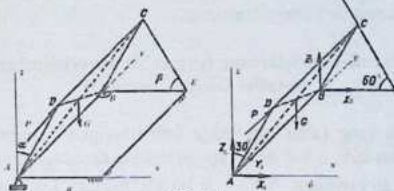
$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (6)$$

Bu tenglamalardan X_A, Y_A va Z_A ni topamiz.

Hisoblash natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Kuchlar, kN					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,299	-0,600	-2,00	-0,544	0,744	1,29



6.17-расу.

Fazoviy kuchlarga doir hisob grafik ishleri variantlari darslik so'ngida 1-ilova-ning 3-topshirig'ida berilgan.

Nazorat savollari:

1. Fazoda kuchlar sistemasining muvozanat shartlarining vektorli ifodalari
2. Fazoda kuchlar sistemi muvozanatining analitik shartlari
3. Xususiy xollarda kuchlar sistemasining muvozanati tenglamalari
4. Tekislikdagi kuchlar sistemi muvozanati tenglamalarining boshqa ko'rinishlari

7-BOB. PARALLEL KUCHLAR MARKAZI VA OG'IRLIK MARKAZI

Tayanch so'zlar: parallel kuchlar, kuchlar markazi, og'irlik markazi, og'irlik markazi koordinatalari.

7.1-§. Parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlash. Parallel kuchlar markazi

Bu bobda teng ta'sir etuvchiga keltiriladigan parallel kuchlar sistemasi qara-ladi. 6.9-§ da ko'rganimizdek, fazodagi parallel kuchlar uchun skalyar invariant $\vec{R}\vec{M}_O = 0$ bo'lib, bunday kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi uchun

$$\vec{R} \neq 0 \quad (7.1)$$

tengsizlik bajarilishi kerak.

Jismga (7.1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) parallel kuchlar sis-temasi ta'sir etsin. Kuchlarning qo'yilgan nuqtalarini mos ravishda $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ va $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan bu nuqtalarning radius-vektorlarini $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ bilan belgilaymiz (7.1-rasm). Mazkur kuchlarning teng ta'sir etuvchisini va uning qo'yilgan nuqtasini aniqlaymiz.

Agar berilgan kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel bo'lgan birlik vektorni \vec{e} bilan belgilasak, u holda \vec{F}_v ixtiyoriy kuchni

$$\vec{F}_v = F_v^* \vec{e} \quad (7.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda kuch \vec{e} vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, $F_v = F_v^*$; \vec{F}_v va \vec{e} bir-biriga qarama-qarshi yo'nalsa,

$$F_v = -F_v^* .$$

Avvalo birinchi ikkita kuchni qo'shamiz va ularning teng ta'sir etuvchisini \vec{R}_1 bilan belgilaymiz. (3.1) ga asosan

$$\vec{R}_1^* = F_1^* + F_2^* \quad (7.3)$$

Bunda \vec{R}_1 bilan \vec{e} bir xil yo'nalgani uchun $R_1^* = R_1$. (3.2) ga asosan \vec{F}_1^* va \vec{F}_2^* orasida quyidagi munosabat o'rinli:

$$\frac{F_1^*}{C_1 A_2} = \frac{F_2^*}{A_1 C_1} \quad \text{yoki} \quad \frac{A_1 C_1}{F_2^*} = \frac{C_1 A_2}{F_1^*} \quad (7.4)$$

Agar \vec{R}_1 qo'yilgan C_1 nuqtaning radius vektorini \vec{r}_{C_1} bilan belgilasak, u holda 7.1- rasmdan quyidagini olamiz:

$$\vec{A}_1 C_1 = \vec{r}_{C_1} - \vec{r}_1 \quad \vec{C}_1 A_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C_1} \quad (7.5)$$

(7.5) ni (7.4) ga qo'yib, \vec{r}_{C_1} ni aniqlaymiz:

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{F_1^* \vec{r}_1 + F_2^* \vec{r}_2}{F_1^* + F_2^*} \quad (7.6)$$

(7.3) tenglikni va $F_3^* = -F_3^*$ ekanligini nazarda tutib, \vec{R}_1 va \vec{F}_3 kuchlarni qo'shamiz. (3.5) ga asosan

$$\begin{aligned} R_2^* &= R_1 - F_3 = F_1^* + F_2^* + F_3^* = \sum_{v=1}^3 F_v^* \\ \vec{r}_{C_1} &= \frac{R_1^* \vec{r}_{C_1} + F_3^* \vec{r}_3}{R_1^* + F_3^*} = \frac{F_1^* \vec{r}_1 + F_2^* \vec{r}_2 + F_3^* \vec{r}_3}{F_1^* + F_2^* + F_3^*} = \frac{\sum_{v=1}^3 F_v^* \vec{r}_v}{\sum_{v=1}^3 F_v^*} \end{aligned}$$

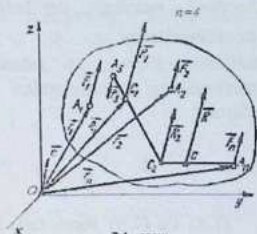
Xuddi shuningdek, n ta parallel kuchlarni qo'shish natijasida C nuqtaga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchi \vec{R} kuchni olamiz (aniqlik uchun rasmda $n = 4$ ho-li ko'rsatilgan).

$$R^* = \sum_{v=1}^n F_v^* \quad (7.7)$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* \vec{r}_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*} \quad (7.8)$$

Bunda \vec{R} kuch \vec{e} birlik vektor bilan bir xil yo'nalsa, $R^* = R$, \vec{R} va \vec{e} bir-biriga qarama-qarshi yo'nalsa, $R^* = -R$ bo'ladi.

Agar parallel kuchlar bir tomonga yo'nalsa, \vec{e} ni shu kuchlar yo'nalishida olib, (7.7) va (7.8) da (*) ishorani tushirib yozish mumkin. (7.8) formula yor-damida aniqlanadigan C nuqta *parallel*



7.1- rasm.

kuchlar markazi deyiladi. Parallel kuchlar markazining koordinatalarini x_c, y_c, z_c ; F_v kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatalarini x_v, y_v, z_v bilan belgilasak, (7.8) dan parallel kuchlar markazining ko-ordinatalari aniqlanadigan quyidagi munosabatlarni olamiz.

$$x_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v x_v}{\sum_{v=1}^n F_v}, \quad y_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v y_v}{\sum_{v=1}^n F_v}, \quad z_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v z_v}{\sum_{v=1}^n F_v} \quad (7.9)$$

(7.8) va (7.9) formulalardan ko'rinib turibdiki, fazodagi parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan C nuqtaning holati kuchlarning yo'nalishiga bog'liq bo'l-may, ularning miqdori va qo'yilgan nuqtalarining koordinatalariga bog'liqdir. Shu sababli kuchlarning qo'yilgan nuqtalarini o'zgartirmay, barcha kuchlarni biror α burchakka bursak, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ham mos ravishda α burchakka buriladi va qo'yilgan nuqtasining holati o'zgar olmaydi.

(7.8) dagi $\sum_{v=1}^n F_v \vec{r}_v$ kattalik berilgan kuchlar sistemasining C markazga nisbatan statik momenti deyiladi.

(7.9) dagi $\sum F_v x_c, \sum F_v y_c, \sum F_v z_c$ kattaliklar berilgan kuchlar sistemasining mos ravishda yOz, xOz va xOy tekisliklarga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Agar koordinatalar boshini parallel kuchlar markazida olsak, $x_c = y_c = z_c = 0$ bo'ladi va berilgan kuchlar sistemasining parallel kuchlar markaziga nisbatan statik momentlari nolga teng bo'ladi.

7.2-§. Jismning og'irlik markazini aniqlash

Istalgan qattiq jismni juda kichik zarrachalardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu zarrachalarning har biriga vertikal pastga yo'nalgan $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ Yerga tortilish kuchlari (og'irlik kuchi) ta'sir etadi. Statika bo'limida o'rganiladigan ji-smlarning o'lchovlari Yerning radiusiga nisbatan juda kichik bo'lgani uchun jism zarrachalarining og'irlik kuchini parallel kuchlar deb qarash mumkin. Jism barcha zarralari og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $P = \sum P_v$ jismning

og'irlik kuchi deyiladi hamda bu parallel kuchlarning markazi mazkur jismning og'irlik markazi deyiladi.

Jism og'irlik markazining radius-vektori (7.8), koordinatalari (7.9) formulalar asosida aniqlanadi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_v \vec{r}_v}{P}$$

$$x_c = \frac{\sum P_v x_v}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_v y_v}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_v z_v}{P} \quad (7.10)$$

Bunda $\vec{r}_v = \vec{r}_v(x_v, y_v, z_v)$ v - zarrachaning radius-vektori; $\vec{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ jism og'irlik markazining radius-vektori.

Jismning og'irlik markazi geometrik nuqtadan iborat bo'lib, ba'zida bu nuqta jismga taalluqli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, R_1 va R_2 radiusli silindrlar bilan chegaralangan chambarakning og'irlik markazi silindrlar markazida yotadi va chambarakka taalluqli emas.

Jismning og'irlik markazi aniq holatga ega bo'lib, qattiq jismni biror bur-chakka aylantirganda uning og'irlik markazi shu jismga nisbatan o'zgarmaydi. Chunki oldingi paragrafda ko'rganimizdek, parallel kuchlarni ma'lum α bur-chakka burganda ularning markazi o'zgarmaydi.

Agar jism bir jinsli bo'lsa, og'irlik markazi uning qanday materialdan tashkil topganiga bog'liq bo'lmay, faqat geometrik shakliga bog'liq bo'ladi. Kelgu-sida asosan bir jinsli jismlarning og'irlik markazini aniqlaymiz.

Og'irligi R ga teng jism V hajmga ega bo'lsin. Agar birlik hajmga to'g'ri kelgan og'irlikni γ bilan belgilasak, bir jinsli jism uchun $\gamma = const$ bo'ladi hamda jism v bo'lakchasining og'irligi

$$P_v = \gamma \Delta V_v \quad (7.11)$$

(7.11) ni (7.10) ga qo'yib, hajmga ega bo'lgan jism og'irlik markazining ra-dius-vektori va koordinatalarini aniqlaymiz:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \Delta V_v \vec{r}_v}{V} \quad (7.12)$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_v x_v}{V}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_v y_v}{V}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_v z_v}{V} \quad (7.13)$$

bunda $V = \sum \Delta V$, butun jism hajmini ifodalaydi.

Jismning bo'laklar sonini ortira borib, (7.12) va (7.13) dagi yig'indilarda $n \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0$ bo'lganda limitga o'tsak, hajmga ega bo'lgan jism og'irlik markazi uchun quyidagi integralli ifodalami olamiz.

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dV}{V} \quad (7.14)$$

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int z dV}{V} \quad (7.15)$$

Xuddi shuningdek, ixtiyoriy sirtga ega bo'lgan plastinkaning og'irlik mar-kazini aniqlash uchun quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \Delta S_i \vec{r}_i}{S} \quad (7.16)$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta S_i x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta S_i y_i}{S}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta S_i z_i}{S} \quad (7.17)$$

yoki

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dS}{S} \quad (7.18)$$

$$x_c = \frac{\int x dS}{S}, \quad y_c = \frac{\int y dS}{S}, \quad z_c = \frac{\int z dS}{S} \quad (7.19)$$

bunda S — plastinka sirtining yuzasi, x, y, z esa dS elementar yuzaning koordinatalari.

Chiziqning og'irlik markazi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum M_i \vec{r}_i}{l} \quad (7.20)$$

$$x_c = \frac{\sum M_i x_i}{l}, \quad y_c = \frac{\sum M_i y_i}{l}, \quad z_c = \frac{\sum M_i z_i}{l} \quad (7.21)$$

yoki

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dl}{l} \quad (7.22)$$

$$x_c = \frac{\int x dl}{l}, \quad y_c = \frac{\int y dl}{l}, \quad z_c = \frac{\int z dl}{l} \quad (7.23)$$

bunda l - chiziqning uzunligi; x, y, z esa dl bo'lakcha koordinatalari. (7.12), (7.14), (7.16), (7.18), (7.20) va (7.22) formulalarda kasr suratidagi vektorli kattaliklar mos ravishda *hajm, yuza* yoki *chiziqning muqtaga nisbatan statik momentini* ifodalaydi.

(7.13), (7.15), (7.17), (7.19), (7.21) va (7.23) formulalarda kasr suratidagi skalyar kattaliklar esa *hajm, yuza* yoki *chiziqning mos koordinata tekisliklariga nisbatan statik momentini* ifodalaydi.

Xususan xOy tekisligida joylashgan yuzaning Ox va Oy o'qlariga nisbatan statik momentlari

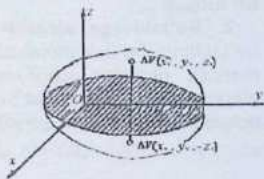
$$\int x dS = x_c \cdot S, \quad \int y dS = y_c \cdot S \quad (7.24)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

7.3-§. Og'irlik markazini aniqlash usullari

Jismning og'irlik markazini topishning quyidagi usullarini ko'ramiz.

1. Simmetriya usuli. Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, og'irlik markazini topish birmuncha soddalashadi. xOy tekisligini simmetriya tekisligida olamiz (7.2-rasm). U holda har bir x_c, y_c, z_c koordinatalar bilan aniqlanadigan

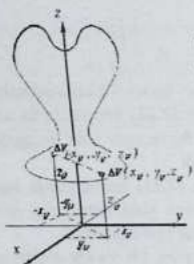


7.2-rasm.

ΔV_c hajmli bo'lakchaga koordinatalari x_c, y_c, z_c bo'lgan ΔV_c hajmli bo'lakcha mos keladi. (7.13) da shu sababli $z_c \Delta V_c$ ko'paytmalarning yig'indisi juft-juft ravishda nolga teng bo'ladi. Binobarin,

$$z_c = \frac{\sum \Delta V_c z_c}{V} = 0$$

Shunday qilib, *simmetriya tekisligiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya tekisligida yotadi.*



7.3-rasmi.

Agar jism z simmetriya o'qiga ega bo'lsa (7.3-rasm), u holda har bir x_v, y_v, z_v koordinatalar bilan aniqlanadigan ΔV_v hajmli bo'lakchaga koordinatalari $-x_v, -y_v, z_v$ bo'lgan ΔV_v hajmli bo'lakcha mos keladi. Shu tufayli (7.13) da $\Delta V_v x_v, \Delta V_v y_v$ ko'paytmalarning yig'indisi juft-juft ravishda nolga teng bo'la-di. Demak,

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_v x_v}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_v y_v}{V} = 0$$

Binobarin, simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida yotadi.

Xuddi shuningdek, simmetriya nuqtasiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi shu nuqta bilan ustma-ust tushishini isbotlash mumkin. Masalan, bir jinsli doira yoki sharning og'irlik markazi uning simmetriya nuqtasi — geometrik markazi bilan ustma-ust tushadi.

2. Bo'laklarga ajratish usuli. Ba'zida jismni fikran shunday bo'laklarga bo'lish mumkinki, bu bo'laklarning og'irligi va og'irlik markazi oldindan ma'lum bo'ladi. Bunday jismlarning og'irlik markazi (7.10) formulalar yordamida aniqlanadi. Xususan, yassi jism uchun bu formulalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \Delta S_v \vec{r}_v}{S} \quad (7.25)$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta S_v x_v}{S}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta S_v y_v}{S} \quad (7.26)$$

bunda ΔS_v - yassi jism biror bo'lagining yuzasi, \vec{r}_v - uning radius-vektori, S - yassi jism yuzasi.

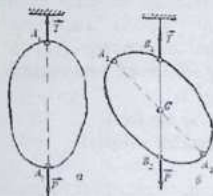
(7.13) va (7.21) ga asosan hajmli jism yoki chiziq uchun

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_v x_v}{V}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_v y_v}{V}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_v z_v}{V} \quad (7.27)$$

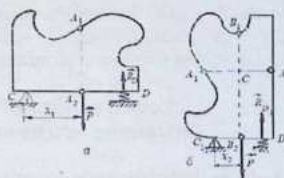
$$x_c = \frac{\sum M_v x_v}{l}, \quad y_c = \frac{\sum M_v y_v}{l}, \quad z_c = \frac{\sum M_v z_v}{l} \quad (7.28)$$

bunda ΔV_i - jism bo'lagi hajmi, Δ_i - berilgan chiziq bo'lagi uzunligi; x_i, y_i, z_i lar bo'lak og'irlik markazi koordinatalari.

3. Manfiy yuza usuli. Agar yassi jismning ma'lum qismlari qirqib tashlangan bo'lsa, bunday jismning og'irlik markazini aniqlashda manfiy yuza qo'shish usulidan foydalaniladi. Bu usul bo'laklarga bo'lish usulining xususiy holi bo'lib, uning mohiyati shundan iboratki, jismni qirqilmagan yaxlit jism va qirqilgan ji-smlardan iborat deb qaraladi, bunda qirqilgan bo'laklarning yuzasi shartli ra-vishda manfiy deb olinadi hamda og'irlik markazini aniqlashda (7.26) formulalardan foydalaniladi.



7.4-rasm.



7.5-rasm.

4. Tajriba usuli. Bir jinsli bo'lmagan yoki murakkab shaklli yassi jismlarning og'irlik markazini aniqlashda quyidagi tajriba usullaridan ham foydalaniladi.

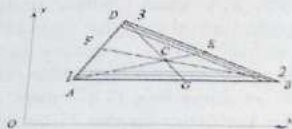
4.1. Ipga osish usuli. Yassi jismning ixtiyoriy A_1 nuqtasidan ipga osamiz. Jism ipning reaksiya kuchi va og'irlik kuchi ta'sirida muvozanatda bo'ladi. (7.4-rasm, a) Og'irlik kuchi vertikal pastga yo'nalgani tufayli ipning reaksiya kuchi vertikal yuqoriga yo'naladi. Ipning yo'nalishini davom ettirib, rasmda og'irlik kuchining ta'sir chizig'ini A_1A_2 bilan belgilaymiz. Shu tarzda jismni B nuqtasidan osib, og'irlik kuchining ta'sir chizig'i B_1B_2 ni aniqlaymiz. (7.4 - rasm, b). Natijada A_1A_2 va B_1B_2 chiziqlarning kesishgan nuqtasi C berilgan yassi jismning og'irlik markazini ifodalaydi.

4.2. Taroziya tartib usuli. Yassi jismni taroziga qo'yib, uning og'irligi P ni aniqlaymiz. So'ngra yassi jismni C va D nuqталarda ikkita tayanchga qo'ya-miz. D nuqtadagi tayanchga tarozi qo'yamiz

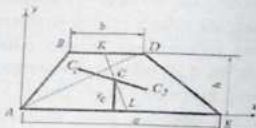
(7.5- rasm, a). U holda D nuqta-ning reakstiya kuchi miqdor jihatdan D nuqtadagi tarozi ko'rsatgan og'irlik kuchiga teng bo'ladi. Jism tayanch nuqtalarining reakstiya kuchi va og'irlik kuchi ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Jismning og'irlik kuchi va D nuqtaning reakstiya kuchi ma'lum bo'lgani uchun C nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzib, bu tenglamadan og'irlik kuchining ta'sir chizig'igacha bo'lgan x_1 masofani aniqlaymiz. Rasmda og'irlik kuchining ta'sir chizig'i A_1A_2 bilan belgilangan. Xuddi shuningdek, jismni 90° burchakka aylantirib, C_1 va D_1 ta-yanchlarga qo'yamiz (7.5- rasm, b). D_1 nuqtaning reakstiya kuchi miqdor jihatdan D_1 nuqtadagi tarozi ko'rsatgan og'irlik kuchiga teng bo'ladi. Og'irlik va reakstiya kuchlari ma'lum bo'lgani uchun C_1 nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzib, bu tenglamalardan og'irlik kuchining ta'sir chizig'i B_1B_2 gacha bo'lgan x_2 masofani aniqlaymiz. A_1A_2 va B_1B_2 larning kesishgan nuq-tasi C jismning og'irlik markazini ifodalaydi.

7.4-§. Oddiy shaklli ba'zi bir jinsli jismlarning og'irlik markazini aniqlash

1. Uchburchak yuzasining og'irlik markazi. ABD uchburchakni AB tomonga parallel bo'lgan kichik bo'laklarga ajratamiz (7.6-rasm). Bu bo'laklar har birining og'irlik markazi uning o'rtasida yotadi, ya'ni uchburchakning og'irlik markazi DG medianada yotadi. Shu tarzda uchburchak yuzasini DB tomonga parallel bo'laklarga ajratsak, ularning og'irlik markazi AE medianada yotadi. Binobarin, uchburchak yuzasining og'irlik markazi uning medianalari kesishgan C nuqtada yotadi.



7.6-rasm.



7.7-rasm.

Uchburchak yotgan tekislikda xOy tekislikni o'tkazib, uchburchak uchlari-ning koordinatalarini (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) bilan belgilasak, analitik geometri-yada chiqarilgan

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

(7.29)

formulalarga binoan C nuqtaning koordinatalari aniqlanadi.

$$CG_c = \frac{1}{3}DG$$

2. Trapeستيyaning og'irlik markazi. Asoslari a va b balandligi h ga teng $ABDE$ trapeستيya yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun trapeستيyani AE asosga parallel bo'laklarga ajratamiz (7.7-rasm). Bu bo'laklarning og'irlik markazi BD va AE asoslarning o'rtalarini tutashiruvchi KL chiziqda yotadi. Bino-barin, trapeستيyaning og'irlik markazi ham shu chiziqda yotadi. Trapeستيya og'irlik markazini analitik usulda aniqlash uchun C nuqtaning bitta koordinatasini, masalan y_c ni topish kifoya. y_c ni topish uchun trapeستيyani ABD va ADE uchburchaklarga ajratamiz. Bu uchburchaklarning og'irlik markazini $C_1(x_1, y_1)$ va $C_2(x_2, y_2)$ bilan belgilasak, KL ning C_1C_2 bilan kesishgan nuqtasi C trapeستيyaning og'irlik markazini ifodalaydi. Bu uchburchaklar uchun $y_1 = 2h/3$, $S_1 = bh/2$, $y_2 = h/3$, $S_2 = ah/2$ ekanligini e'tiborga olib, (7.26) ga asosan quyidagini yozamiz:

$$y_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$$

3. Aylana yoyining og'irlik markazi. Radiusi R , markaziy burchagi 2α ga teng ADB aylana yoyining og'irlik markazini aniqlaymiz. Koordinatalar boshini aylananing markazi O nuqtada olib, x o'qni AB vatarga perpendikulyar yo'naltiramiz.

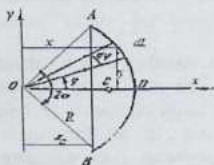
Aylananing yoyi x ga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun uning og'irlik markazi x o'qda yotadi ($y_c = 0$). 7.8-rasmda $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $l = 2R\alpha$ ekanligini e'tiborga olib, (7.23) ning 1-formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$x_c = \frac{\int x dl}{l} = \frac{\int_0^\alpha R^2 \cos \varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (7.30)$$

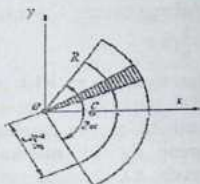
Xususiyl holda yarim aylana uchun (7.30) da $\alpha = \pi/2$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$x_c = \frac{2R}{\pi} = 0,637R \quad (7.31)$$

4. Doira sektori yuzasining og'irlik markazi. Radiusi R markaziy burchagi 2α ga teng doira sektori yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun x o'qni sektor yuzining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz. 7.9-rasmda



7.8-rasm.



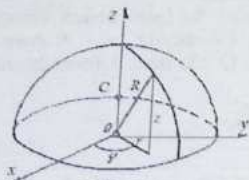
7.9-rasm.

ko'rsatilganidek sektor yuzasini bir qancha elementar sektorlardan tashkil topgan deb qaraymiz. Har bir elementar sektorni balandligi R ga teng uchburchak deb qarash, uning og'irlik markazi O nuqtadan $\frac{2R}{3}$ masofada yotadi. Binobarin, doira sektorining og'irlik markazi, radiusi $\frac{2R}{3}$ ga teng aylana yoyining og'irlik markazi bilan ustma-ust tushadi. (7.30) ga asosan

$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} \quad (7.32)$$

Yarim doira uchun (7.32) da $\alpha = \pi/2$ ekanligini nazarda tutsak,

$$x_c = \frac{4}{3\pi} R = 0,424R \quad (7.33)$$



7.10-rasm.

5. Yarim shar hajmining og'irlik markazi. Radiusi R ga teng yarim shar hajmining og'irlik markazini aniqlash uchun z o'qni simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz, u holda $x_c = y_c = 0$ (7.10-rasm). (7.15) ga ko'ra

$$z_c = \frac{\int z dl'}{V}$$

Bunda $V = \frac{2}{3} \pi R^3$, $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ ekanligini nazarda tutib, r, φ, z silindrik koordinatalarga o'tamiz va yarim shar hajmi V bo'yicha uch

karrali integralni hisoblaymiz :

$$\begin{aligned} \frac{\int z dV}{V} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z dz = 2\pi \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \pi \left[R^2 \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{4} \pi R^4 \end{aligned}$$

Shunday qilib, yarim sharning og'irlik markazi

$$z_c = \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R \quad (7.34)$$

formuladan aniqlanadi.

6. Doiraviy konus hajmining og'irlik markazi. Asosining radiusi R va ba-landligi H ga teng konusning og'irlik markazini aniqlash uchun z o'qni konusning simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz. 7.11- rasmda ko'rsatilganidek, konusni aso-siga parallel kesimlar bilan chegaralangan, hajmi dV ga teng elementar bo'laklardan tashkil topgan deb qarash mumkin. U holda

$$dV = \frac{\pi(H-z)^2}{H^2} R^2 dz, V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

bo'lgani uchun (7.15) ga asosan

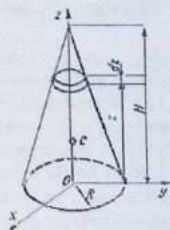
$$z_c = \frac{\int z dV}{V} = \frac{\int_0^H z \frac{\pi(H-z)^2}{H^2} R^2 dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{1}{4} H \quad (7.35)$$

Shunday qilib, doiraviy konus hajmining og'irlik markazi uning asosidan balandlikning $\frac{1}{4}$ qismicha masofada yotadi.

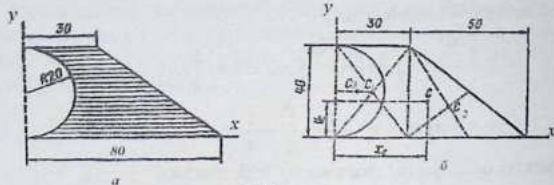
Bu natijani ixtiyoriy konus uchun ham umumlashtirish mumkin.

7.1-masala. 7.12-rasmida ko'rsatilgan tekis shakl og'irlik markazi aniqlansin.

Yechish. Ushbu masala tekis shakl og'irlik markazining koordinatalarini to-pishdagi bo'laklash usulini va uning xususiy holi bo'lgan manfiy yuzalar usulini qo'llashga doir bo'lib,



7.11-rasm.



7.12-rasm.

undan tashqari uchburchak va yarim doiraning og'irlik markazini topish formula-laridan foydalaniladi.

Masalani echishda quyidagi formulalardan foydalanamiz:

$$x_c = S_y/S; \quad y_c = S_x/S. \quad (1)$$

$S_y = \sum S_x x_c$, $S_x = \sum S_y y_c$ — tekis shaklning mos ravishda, y va x o'qlariga nisbatan statik momentlari, S — tekis shaklning yuzasi.

(1) formulalardan foydalanish uchun tekis shaklning yuzalari S_i amda og'irlik markazlarining koordinatalari x_i va y_i ma'lum bo'lgan oki oson aniqlanadigan bo'laklarga ajratamiz.

Ushbu holda mana shunday bo'laklar sifatida to'g'ri to'rtburchak, uchburchak va yarim doirani olamiz (7.12-rasm, b). To'g'ri to'rtburchakdan qirqib olingan yarim doiraning yuzasini manfiy, deb hisoblaymiz.

Yarim doira uchun (7.33) ga ko'ra $x_c = \frac{4}{3\pi}R = 0,424R$ ekanligini nazarda tutamiz.

Barcha hisob natijalarini jadvalga kiritamiz.

El.raq.	S_i, sm^2	X_i, sm	Y_i, sm	$S_{iy} = S_i x_i, \text{cm}^3$	$S_{ix} = S_i y_i, \text{sm}^3$
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	- 628	8,5	20,0	- 5338	-12560
	1572	—	—	59 362	24700

(1) formulalar bo'yicha tekis shaklning og'irlik markazi koordinatalarini hisob-laymiz:

$$x_c = 59362/1572 = 37,8 \text{ sm}, \quad y_c = 24700/1572 = 15,7 \text{ sm}.$$

Yuzasining og'irlik markazi 7.12-rasm, \bar{o} da ko'rsatilgan.

Og'irlik markaziga doir hisob - grafik ishlari variantlari darslik so'ngida 1-ilova-ning 4-topshirig'ida berilgan.

7.5- §. Gyulden teoremlari

Shved astronomi G. Gyulden (1841—1896) isbotlagan quyidagi teoremlar chiziq va yuzaning og'irlik markazini aniqlashga taalluqlidir.

1-teorema. Yassi egri chiziqni uning tekisligida yotuvchi va uni kesib o'tmaydigan o'q atrofida aylantirish natijasida olingan jismning sirti mazkur chi-ziqning uzunligi bilan bu chiziq og'irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko'paytmasiga teng.

Isbot. xOy tekisligida yotuvchi, Oy o'qni kesmaydigan va uzunligi l ga teng AB egri chiziq kesmasi berilgan bo'lsin (7.13- rasm). AB egri chiziqni juda ki-chik dl bo'laklarga bo'lamiz. dl kesmani Oy o'q atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan sirtning yuzasini ikkinchi tartibli cheksiz kichik miqdorgacha aniqlik bilan silindrik sirtga teng deb olish mumkin:

$$dS = 2\pi x dl$$

AB egri chiziqning aylanishidan xosil bo'lgan sirtni topish uchun oxirgi ifodani integrallaymiz:

$$S = 2\pi \int_1 x dl$$

(7.23) ga ko'ra $\int_1 x dl = x_c \cdot l$ bunda x_c bilan AB egri chiziq kesmasi og'irlik markazining koordinatasi belgilangan.

Shunday qilib,

$$S = 2\pi x_c l \quad (7.36)$$

(7.36) dan berilgan yassi egri chiziq og'irlik markazining koordinatasini aniq-lash mumkin:

$$x_c = \frac{S}{2\pi l}$$

2-teorema. Yassi figurani uning tekisligida yotuvchi va uni kesib o'tmaydigan o'q atrofida aylantirish natijasida olingan jismning hajmi, mazkur figura yuzasi bilan bu figura og'irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko'paytmasiga teng.

Isbot. xOy tekisligida yotuvchi, Oy o'qni kesmaydigan va yuzasi S ga teng yassi figura berilgan bo'lsin (7.14- rasm). Berilgan yassi figura yuzasini juda kichik dS yuzachalarga bo'lamiz. dS yuzani Oy atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan jismning hajmi ikkinchi tartibli kichik miq-



7.13-rasm.



7.14-rasm.

dorgacha aniqlik bilan quyidagicha ifodalanadi:

$$dV = 2\pi x dS$$

bunda x bilan dS yuza og'irlik markazining koordinatasi belgilangan. Berilgan yuzani Oy o'q atrofida aylantirish natijasida olingan jismning hajmi

$$V = 2\pi \int_S x dS$$

formuladan aniqlanadi. (7.19) ga binoan,

$$\int_S x dS = x_C \cdot S$$

Bunda x_C bilan yassi figura og'irlik markazining koordinatasi belgilangan. Shunday qilib,

$$V = 2\pi x_C \cdot S \quad (7.37)$$

(7.37) dan berilgan yassi figura og'irlik markazining koordinatasini aniqlash mumkin:

$$x_C = \frac{V}{2\pi S}$$

Nazorat savollari:

1. Bir tomonga yo'nalgan ikkita parallel kuchni qo'shish.
2. Parallel kuchlar markazi
3. Qattiq jism og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash formulalari
4. Jismlarning og'irlik markazini aniqlash usullari

II Q I S M. KINEMATIKA

8-BOB. NUQTA KINEMATIKASI

Tayanch soʻz va iboralar: Kinematika, traektoriya, godograf, parametrik teng-lama, tabiiy oʻqlar, radius vektor, oʻtilgan yoʻl, yoʻnaltiruvchi koordinata otlari, tezlik, tezlanish.

8.1-§. Asosiy tushunchalar

Nazariy mexanikaning kinematika boʻlimida nuqta va absolyut qattiq jism-ning mexanik harakati faqat geometrik nuqtai nazardan, yaʼni ularning massala-ri va taʼsir etuvchi kuchlarga bogʻliqsiz ravishda oʻrganiladi.

Harakat tushunchasi harakatlanuvchi jism (obʼekt), vaqt va fazo tushuncha-lari bilan chambarchas bogʻliqdir.

Fazo (makon) bir vaqtda mavjud boʻlgan obʼektlarning joylashish tartibini ifodalaydi. Klassik mexanikada moddiy jismlarning harakati uch oʻlchovli Eʼv-klid fazosiga nisbatan tekshiriladi hamda fazo absolyut qoʻzgʻalmas deb qara-ladi.

Jismning mexanik harakati boshqa biror jism bilan biriktirilgan va *sanoq sistemas* deb ataluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiriladi. Sanoq sistemasini shartli ravishda qoʻzgʻalmas deb olish yoki harakatdagi jismga bi-riktirilgan deb qarash mumkin.

Moddiy nuqtaning sanoq sistemasiga nisbatan harakatini oʻrganish uchun uning koordinatalarini vaqtning funkstiyasi sifatida aniqlash kerak. Jismning sanoq sistemasiga nisbatan harakatini oʻrganishda esa mazkur jism nuqtalari-ning koordinatalari bilan birga burchak koordinatalarini ham kiritishga toʻgʻri keladi.

Nazariy mexanikada uzunlik birligi sifatida SI sistemasida metr (m), burchak koordinatalari birligi uchun radian (rad) qabul qilingan.

Agar jism barcha nuqtalarining koordinatalari tanlab olingan sanoq siste-masiga nisbatan doimo oʻzgarmasdan qolca, u holda jism mazkur sistemaga nisbatan tinch holatda boʻladi. Agar vaqtning oʻtishi bilan jism nuqtalarining koordinatalari tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan oʻzgara borsa, jism shu sistemaga nisbatan harakatda boʻladi. Jism biror sanoq sistemasiga nisbatan harakatda boʻlsa, ikkinchi sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda qolishi mumkin. Shu nuqtai

nazardan harakat tushunchasi nisbiy xarakterga ega.

Vaqt ob'ektiv borliqda ro'y beruvchi hodisalarning qancha davom etishini ifodalaydi. Nazariy mexanikada vaqt barcha sanoq sistemalar uchun bir xilda o'tadi va bir sistemaning ikkinchi sistemaga nisbatan harakatiga bog'liq emas deb hisoblanadi, ya'ni vaqt absolyut deb qaraladi. Vaqtning o'lchash uchun tabiiy atda uchraydigan va davriy takrorlanuvchi hodisalardan (masalan, Yerning o'z o'qi atrofidagi aylanishidan) yoki sun'iy usulda hosil qilinadigan davriy takrorlanuvchi protesslardan (masalan, soat mayatnigining tebranma harakatidan) foydalaniladi.

Dastlab vaqtning eng kichik birligi uchun bir yildagi o'rtacha Quyosh sut-kasining $1/(24 \cdot 3600)$ bo'lagiga teng vaqt — sekund qabul qilingan edi. Kuza-tishlar natijasida Yerning o'z o'qi atrofidagi sutkalik aylanish vaqti o'zgarib bo-rishi aniqlandi. So'ngra SI istemasida vaqt birligi bir sekund (1s) uchun 1900 tropik yilining bo'lagiga teng kattalik olingan. Vaqt odatda t bilan belgilanadi. Vaqtning o'lchash boshlang'ich paytdan (masalan, $t = 0$ dan) boshlab hisoblanadi. Vaqt ikki ma'noda: berilgan on (payt, masalan, soat 5) va ma'lum vaqt oralig'i (masalan, 4 soat davomida) tarzida ishlatiladi. Vaqt bir o'lchamli va u orqaga qaytmaydi, ya'ni vaqt o'tmishdan kelajakka qarab rivojlanadi deb hisoblaymiz.

Harakati o'rganilayotgan jismni bir qancha nuqtalar to'plamidan iborat deb qarash mumkin. Shu sababli kinematikada avvalo ayrim nuqtaning harakati o'rganiladi.

Tanlab olingan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakatini o'rganish uning shu sistemaga nisbatan biror vaqt oralig'idagi traektoriyasini va har on-dagi tezlik hamda tezlanishini aniqlash masalasidan iborat. Nuqta harakatlan-ganda uning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan chizgan uzluksiz chizig'i *nuq-taning traektoriyasi* deyiladi. Agar nuqta traektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, uning harakati *to'g'ri chizikli harakat*, traektoriyasi egri chiziq bo'lsa, *egri chizikli harakat* deyiladi.

Nuqta harakati o'rganilayotganda uning ko'chishi tushunchasiga duch ke-linadi. Nuqtaning harakati va ko'chishi tushunchalarini bir-biridan farq qilish kerak. Nuqtaning ko'chishi uning boshlang'ich va oxirgi holatlari hamda vaqt oralig'i bilan aniqlanadi, bunda nuqtaning avvalgi holatdan keyingi holatga qanday usul bilan o'tishi e'tiborga olinmaydi. Harakat tushunchasida esa nuq-taning bir holatdan ikkinchi

holatga vaqtga bog'liq ravishda qanday usul bilan o'tgani ya'ni boshlang'ich va oxirgi paytlar orasidagi istalgan vaqt uchun fazo-dagi o'rni hisobga olinadi.

Nuqta kinematikasida quyidagi ikki asosiy masala ko'riladi:

1) berilgan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakatini matematik usulda aniqlash; 2) nuqtaning berilgan harakat qonuniga ko'ra mazkur harakat-ning barcha kinematik xarakteristikalarini (traektoriya, tezlik, tezlanish va hoka-zolar) ni aniqlash.

8.2-§. Nuqta harakatini aniqlash usullari

Nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan istalgan vaqtdagi holatini aniqlash usuli ma'lum bo'lsa, uning *harakati aniqlangan* yoki *berilgan* deyiladi. Nuqtaning harakatini aniqlovchi ifoda uning *harakat tenglamasi* yoki *harakat qonuni* deyiladi.

Nuqta harakati asosan quyidagi uch usulda aniqlanadi:

1) vektor usuli; 2) koordinatalar usuli; 3) tabiiy usul.

1. Vektor usuli. M nuqta qo'zg'almas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatda bo'lsin. O va M nuqtalarni tutashtirib, M nuqtaning $\vec{r} = \overline{OM}$ radius-vektorini hosil qilamiz (8.1-rasm). M nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning radius vektori miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarib boradi. Agar nuqtaning radius-vektori vaqt funktsiyasi sifatida aniqlangan yoki berilgan bo'lsa, ya'ni

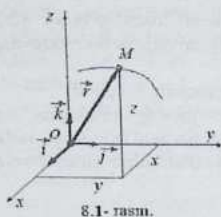
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (8.1)$$

ma'lum bo'lsa, nuqtaning fazodagi holati istalgan paytda aniqlanishi bo'ladi. Bunda ko'riladigan masalalar uchun funktsiya bir qiymatli, uzluksiz, eng kamida ikkinchi tartibli hosilaga ega deb qaraymiz. (8.1) nuqta harakatining vektor ko'ri-nishidagi kinematik tenglamasi deyiladi. U nuqta traektoriyasining vektorli tenglamasi bo'lib, nuqtaning harakat qonunini ifodalaydi. Nuqta harakatining shu tarzda aniqlanishi (berilishi) uning vektor usulda ifodalanishi deyiladi.

$\vec{r}(t)$ radius-vektor uchidagi M nuqtaning geometrik o'rni uning traektoriyasini, radius-vektorning esa godografini ifodalaydi.

Agar $\vec{r} = \text{const}$ bo'lsa, M nuqta olingan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda bo'ladi.

2. Koordinatalar usuli. Dastlab nuqtaning holatini to'g'ri burchakli De-kart koordinatalar sistemasiga nisbatan aniqlaymiz. Ha-



8.1- rasm.

rakatdagi M nuqtaning koordinatalarini x , y , z bilan belgilaymiz (8.1-rasm). Nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning koordinatalari o'zgaradi, ya'ni x , y , z koordinatalar vaqtning bir qiymatli funktsiyasidan iborat bo'ladi:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (8.2)$$

Agar (8.2) tenglamalar berilgan bo'lsa, nuqtaning istalgan paytdagi holatini aniqlash mumkin. (8.2) funktsional munosabatlar vositasida nuqtaning harakatini aniqlash uni koordinatalar usulida ifodalash deyiladi. (8.2) ifodalar nuqta harakatining Dekart koordinatalaridagi kinematik tenglamalarini ifodalaydi.

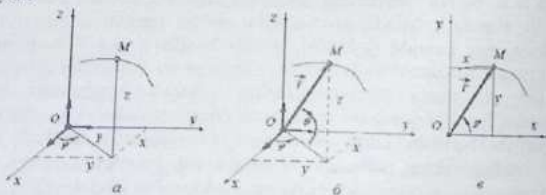
(8.2) tenglamalar nuqta traektoriyasining parametrik tenglamalarini fodalaydi. Bunda parametr sifatida t vaqt olingan.

(8.2) dan t vaqtini yo'qotib, nuqta traektoriya-sining tenglamasini olish mumkin.

M nuqtaning O koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektor \vec{r} ning koordinata o'qlarining bir-lik yo'naltiruvchi vektorlarini \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} bilan belgilasak,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (8.3)$$

o'rinli bo'ladi. (8.3) tenglik harakatning vektorli va Dekart koordinatalari orqali aniqlash usullari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.



8.2-rasm.

Agar M nuqta Oxy tekisligida harakatlansa, uning harakati

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (8.2, a)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi.

Nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatini bitta

$$x = x(t) \quad (8.2, b)$$

koordinata bilan aniqlash mumkin.

Harakatni Dekart koordinatalaridan tashqari silindrik yoki sferik koordinatalar sistemasida ham aniqlash mumkin. Agar nuqta bir tekislikda harakatlansa, qutb koordinatalar sistemasidan foydalanish mumkin.

Silindrik koordinatalar sistemasida nuqtaning holati ρ radius, φ burchak (kenglik) va z applikata bilan aniqlanadi (8.2- rasm, a). Agar

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t) \quad (8.4)$$

berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati silindrik koordinatalarda aniqlangan bo'ladi.

Sferik koordinatalar sistemasida nuqtaning holati qutb radiusi \bar{r} kenglik burchagi φ va qutb burchagi θ bilan aniqlanadi (8.2- rasm, b). Agar

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t) \quad (8.5)$$

berilgan bo'lsa, nuqtaning harakatini sferik koordinatalarda aniqlash mumkin.

Harakat qutb koordinatalarida aniqlanishi uchun qutb radiusi r va qutb burchagi φ vaqtning funktsiyasi sifatida berilishi kerak (8.2- rasm, a).

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (8.6)$$

Dekart koordinatalarini silindrik va sferik koordinatalar orqali mos ravishda ushbu formulalar yordamida ifodalash mumkin:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (8.7)$$

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta \quad (8.8)$$

Dekart va qutb koordinatalari bir-biri bilan

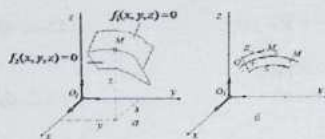
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (8.9)$$

tenglamalar vositasida bog'langan.

3. Tabiiy usul. O_1xyz koordinatalar sistemasiga nisbatan egri chiziqli harakatdagi nuqta traektoriyasining tenglamasini

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (8.10)$$

sirtlarning kesishgan chizig'i deb qarash mumkin (8.3- rasm, a) (8.10) traektoriya tenglamasini ifodalaydi, bu tenglamalar yordamida nuqtaning harakatini aniqlab bo'lmaydi. Chunki vaqtning o'tishi bilan



8.3-rasm.

vaqtning o'tishi bilan turlicha o'zgarishi mumkin (8.3-rasm, b). Nuqtaning traektoriyadagi holatini bir qiymatli aniqlash uchun yoy koordinatasining musbat va manfiy yo'nalishlarini (chizmada «+» va «-» ishora bilan) olamiz.

Agar traektoriya tenglamasi hamda nuqta yoy koordinatasining vaqt o'tishi bilan o'zgarishini ifodalaydigan

$$s = s(t) \quad (8.11)$$

munosabat ma'lum bo'lsa, nuqtaning harakatini to'liq aniqlash mumkin. Bunda $s(t)$ vaqtning bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanuvchi funktsiyasidan iborat.

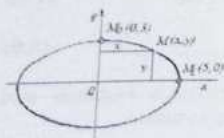
(8.11) tenglama nuqtaning traektoriya bo'ylab harakat qonunini ifodalaydi.

Nuqtaning harakatini (8.10) va (8.11) tenglamalar vositasida aniqlash uning *tabiiy usulda* aniqlanishi deyiladi.

Shunday qilib, *nuqtaning harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun*,

1) tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan traektoriya tenglamasi (8.10); 2) traektoriyada sanoq boshi uchun olingan qo'zg'almas O nuqta hamda yoy koordinatasining musbat va manfiy yo'nalishi; 3) nuqtaning traektoriya bo'y-

lab harakat qonunini ifodalovchi (8.11) tenglama berilgan bo'lishi kerak.



8.4-rasm.

8.1-masala. M nuqta

$$x = 5 \sin 10t, \quad y = 3 \cos 10t \quad (1)$$

qonun (bunda x, y lar metrda, t vaqt - sekunda o'lchanadi) asosida harakatlanadi. Nuqtaning traektoriyasi va boshlang'ich paytdagi holati aniqlansin.

Yechish. Nuqta traektoriyasining tenglamasini topish uchun (1) dan vaqt t ni

yo'qotamiz. Buning uchun (1) ni

$$\frac{x}{5} = \sin 10t, \quad \frac{y}{3} = \cos 10t$$

shaklida yozamiz. Bu tenglamalarning ikkala tomonini kvadratga oshirib, bir - biri bilan qo'shamiz. Natijada

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ko'rinishdagi traektoriya tenglamasini olamiz. Binobarin, nuqta yarim o'qlari 5 va 3 ga teng ellips bo'ylab harakatlanadi (8.4- rasm). Nuqtaning boshlang'ich paytdagi holatini aniqlash uchun (1) ga $t=0$ qiymatni qo'ysak, $x_0=0$, $y_0=3$ bo'ladi. Shunday qilib, nuqta boshlang'ich paytda Oy o'qda $M_0(0;3)$ holatni egallaydi.

8.3-§. Nuqtaning tezligi

1. Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezligi.

Nuqtaning harakati vektor usulda $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Nuqtaning biror t paytdagi traektoriyada egallagan holatini M , radius-vektorini \vec{r} , $t + \Delta t$ paytdagi holatini M_1 radius-vektorini \vec{r}_1 bilan belgilaylik (8.5-rasm).

Nuqtaning M va M_1 holatlarini tutashtiruvchi $\vec{MM}_1 = \Delta \vec{r}$ vektor nuqtaning $\Delta t = t_1 - t$ vaqt orali-g'idagi ko'chish vektori deyiladi. Rasmdan $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$. Bundan nuqtaning Δt vaqt ichidagi ko'chishini topish mumkin:

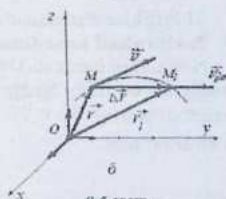
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

Ko'chish vektori $\Delta \vec{r}$ ning shu ko'chish sodir bo'ladigan Δt vaqtga nisbati nuqtaning mazkur vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik vektori deyiladi

$$\vec{v}_{or} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Bundan Δt musbat skalyar miqdor bo'lgani uchun o'rtacha tezlik vektori $\vec{MM}_1 = \Delta \vec{r}$ vektor bo'yicha, ya'ni M nuqtaning harakat yo'nalishida MM_1 ke-suvchi bo'ylab yo'naladi.

Nuqta o'rtacha tezlik vektorining Δt nolga intilgandagi limiti



8.5-rasm.

nuqtaning berilgan ondagi tezlik vektori deyiladi va \vec{v} bilan belgilanadi.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

yoki

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (8.12)$$

ya'ni nuqtaning tezlik vektori uning radius-vek-toridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Berilgan paytdagi tezlik vektori nuqta tra-ektoriyasiga harakat yo'nalishi bo'yicha o'tka-zilgan urinma bo'ylab yo'naladi.

Nuqta tezligining modulini $|\vec{v}|$ yoki v bi-lan belgilaymiz. (8.12) ga asosan tezlikning o'lchov birligini aniqlaymiz:

$$[v] = \frac{[\text{uzunlik}]}{[\text{vaqt}]} = \frac{L}{T}$$

SI birliklar sistemasida tezlik o'lchov birligi m/s dan iborat.

2. Harakati koordinatalar usulida berilgan nuqtaning tezligi.

Nuqtaning harakati Dekart koordinatalarida (8.2) tenglamalar orqali berilgan bo'lsin. Nuqta tezligi vektorining koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini v_x, v_y, v_z bilan belgilasak, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (8.13)$$

bunda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ qo'zg'almas koordinata o'qlarining birlik yo'naltiruvchi vektor-lari miqdor va yo'nalish jihatidan o'zgarmas bo'ladi.

(8.12) ga ko'ra (8.3) dan vaqt bo'yicha hosila olsak, tezlik vektor uchun yana quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

Bu tenglikni (8.13) bilan solishtirib, tezlikning koordinata o'qlaridagi proek-stiyalarini aniqlovchi ushbu formulalarga ega bo'lamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (8.14)$$

Shunday qilib, nuqta tezligining biror qo'zg'almas Dekart

koordinata o'qida-gi proekstiyasi harakatlantiruvchi nuqtaning shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga teng.

Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (8.15)$$

formuladan, yo'nalishi esa

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \quad (8.16)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

Agar nuqta tekislikda harakatlansa, (8.13)—(8.16) formulalarda $v_z = 0$ deb qaraladi.

Agarda nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, bu harakatni bitta (8.2.b) tenglama bilan aniqlash mumkin. Bu holda (8.13)—(8.16) formulalarda $\dot{y} = \dot{z} = 0$ bo'lib, tezlik vektori Ox bo'yicha yo'naladi va uning bu o'qdagi proekstiyasi

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

formuladan aniqlanadi.

Agar $\dot{x} > 0$ bo'lsa, nuqta tezlik vektori \vec{v} ning yo'nalishi Ox o'qning musbat, $\dot{x} < 0$ da o'qning manfiy yo'nalishiga mos tushadi.

Nuqta bir tekislikda harakatlanganida uning harakati va tezligini qutb koordinatalar sistemasida ham aniqlash mumkin.

Agar radius-vektorning birlik vektorini \vec{r}^0 bilan belgilasak,

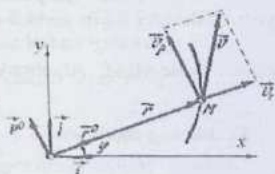
$$\vec{r} = r\vec{r}^0$$

munosabat o'rinli bo'ladi (8.6- rasm).

(8.12) dan nuqtaning tezligi uchun

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}^0) = \frac{dr}{dt}\vec{r}^0 + r\frac{d\vec{r}^0}{dt} \quad (8.17)$$

munosabat kelib chiqadi. $\frac{d\vec{r}^0}{dt}$ ni aniqlash uchun Oxy tekislikda \vec{r}^0 vektorga perpendikulyar bo'lgan va φ burchak ortadigan tomonga yo'nalgan \vec{p}^0 birlik vektorni kiritamiz. \vec{r}^0 va \vec{p}^0 vektorlarni Dekart



8.6-rasm.

koordinatalarining birlik yoʻnaltiruvchi vektorlari \vec{i}, \vec{j} hamda φ burchak orqali quyidagicha ifodalash mumkin (8.6-rasm).

$$\vec{r} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\vec{p} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

Bu munosabatlarni nazarda tutib, \vec{r} va \vec{p} ning vaqt boʻyicha hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{r} \quad (8.18)$$

Bu tengliklarning birinchisiga koʻra (8.17) ni

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}) = \frac{dr}{dt} \vec{r} + r \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{r} + r\dot{\varphi} \vec{p} \quad (8.19)$$

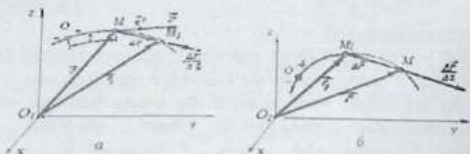
koʻrinishda yozamiz. (8.19) formula yordamida nuqtaning tezlik vektorini oʻzaro perpendikulyar boʻlgan \vec{r} va \vec{p} vektorlar yoʻnalishidagi ikkita tashkil etuvchilarga ajratish mumkin.

\vec{v} , tezlikning radial tashkil etuvchisi, \vec{v}_p esa koʻndalang tashkil etuvchisi deyiladi. Algebraik qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_p = r\dot{\varphi} \quad (8.20)$$

Tezlikning modulini

$$\vec{v} = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2} \quad (8.21)$$



8.7-rasm.

formuladan aniqlaymiz. Shunday qilib, harakati qutb koordinatalar sistemasida berilgan nuqtaning tezligi (8.19) va (8.21) formulalar vositasida aniqlanadi.

3. Harakati tabiiy usulda ifodalangan nuqtaning tezligi M nuqta berilgan traektoriya boʻylab $s = s(t)$ qonun asosida harakatlansin (8.7-rasm).

Nuqtaning oʻrtacha tezligi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$\vec{v}_{sp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

bunda Δs bilan MM_1 yoyning uzunligi belgilangan. U holda M nuqtaning berilgan ondagi tezligi

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

formuladan aniqlanadi. Agar $\Delta s > 0$ bo'lsa, $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ vektori $\Delta \vec{r}$ bilan bir xil (8.7-rasm, a), $\Delta s < 0$ da $\Delta \vec{r}$ ga qarama-qarshi yo'naladi (8.7-rasm, b). Shu sababli $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ vektorining yo'nalishi M nuqtada yoy koordinatasi ortadigan yo'nalishda traektoriyaga o'tkazilgan urinmaga intiladi. Bu vektoring moduli limit holatida birga teng bo'ladi:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$$

Shunday qilib, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektori miqdor jihatidan birga teng, yo'nalishi esa nuqta traektoriyasiga M nuqtada yoy koordinatasi ortadigan yo'nalishda o'tkazilgan urin-maning yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi. Binobarin, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektori yoy koordinatasining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan urinmaning birlik vektori $\vec{\tau}$ ni ifodalaydi:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$$

Natijada harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} \quad (8.22)$$

(8.22) da $\frac{ds}{dt}$ hosila v tezlikning urinmadagi proekstiyasi v_τ ni ifodalaydi va

tezlikning algebraik qiymati deyiladi:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} \quad (8.23)$$

uning absolyut qiymati tezlikning moduliga teng bo'ladi:

$$v = |v_t| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

Binobarin, nuqta tezligining moduli yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan hosilaning absolyut qiymatiga teng.

(8.23) ga asosan (8.22) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{v} = v_t \vec{e}_t \quad (8.22, a)$$

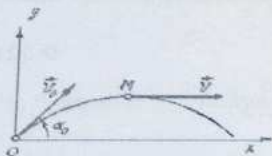
Yuqorida ko'rganimizdek, urinmaning birlik vektori \vec{e}_t doimo yoy koordi-natasining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'naladi. Agar biror paytda $\frac{ds}{dt} > 0$ bo'lsa, yoy koordinatasi orta boradi va nuqta tezligi \vec{v} ning yo'nalishi \vec{e}_t bilan ustma-ust tushadi hamda $v = v_t$ va $\vec{v} = v_t \vec{e}_t$ bo'ladi. Agar $\frac{ds}{dt} < 0$ bo'lsa, yoy koordinatasi s kamaya boradi va tezlik vektori \vec{e}_t ga qarama-qarshi yo'naladi hamda $v = -v_t$ va $\vec{v} = -v_t \vec{e}_t$ munosabat o'rinli bo'ladi (8.7-rasmda $\frac{ds}{dt} > 0$ bo'lgan hol ko'rsatilgan).

8.2-masala. Nuqtaning harakati

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

tenglamalar bilan berilgan; bu erda Ox o'z q gorizontal, Oy vertikal yuqoriga yo'nalgan, v_0, g va $\alpha_0 < \pi/2$ — o'zgarmas miqdorlardir.

1) nuqta traektoriyasi; 2) uning eng yuqori holatidagi koordinatalari; 3) nuqta Ox o'qda bo'lgan vaqtidagi tezlikning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari topilsin. (8.8-rasm.)



8.8-rasm.

Yechish. 1. Harakat tenglamalari (1) dan vaqt t ni yo'qotib, nuqtaning traektoriyasini aniqlaymiz. Buning uchun (1) ning birinchi tenglamasidan t ni aniqlab, ikkinchisiga qo'yamiz:

$$y = x \tan \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

Bu ifoda parabolaning tenglamasidir.

2. Tezlikning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari uchun ushbu ifodalarni olamiz:

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha_0 - g t \quad (2)$$

Nuqta eng yuqori holatni egallaganda uning tezligi x o'qqa parallel bo'ladi. Shu sababli $v_y = 0$ yoki $v_0 \sin \alpha_0 - g t_1 = 0$ bo'ladi, bunda t_1 bilan nuqta eng yuqori holatga ko'tarilguncha o'tgan vaqt belgilangan.

Oxirgi tenglikdan

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

Vaqtning bu qiymatini (1) ga qo'yib nuqtaning eng yuqori holatini topamiz.

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0, y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0$$

3. Nuqta Ox o'qda yotgan vaqtda $y=0$ yoki $v_0 T \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g T^2 = 0$ bo'ladi, bunda T bilan nuqta Ox o'qda bo'lgan vaqt belgilangan. Oxirgi tenglikdan $T_1 = 0, T_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}$ vaqtlarni aniqlaymiz. $T_1 = 0$ vaqt nuqtaning boshlang'ich holatiga mos keladi. T_1 va T_2 ning qiymatini (2) ga qo'yib, nuqta Ox o'qda bo'lgan vaqtidagi tezlikning koordinataga o'qlaridagi proektsiyalarini aniqlaymiz.

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0, v_y = \pm v_0 \sin \alpha_0$$

Bunda musbat ishora nuqtaning boshlang'ich holatiga mos keladi.

8.4-§. Nuqtaning tezlanishi

1. Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezlanishini aniqlash. Nuqta harakati (8.5) tenglama bilan ifodalangan bo'lsin. M nuqtaning t paytdagi tezligini \vec{v} , $t_1 = t + \Delta t$ paytdagi holatini M_1 va tezligini \vec{v}_1 bilan belgilaylik (8.9-rasm). \vec{v}_1 tezlik vektorini o'ziga parallel ravishda M nuqtaga ko'chiramiz va tezlik vektorining Δt vaqt oralig'idagi ortirmasi $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ ni topamiz.

Tezlik vektorini ortirmasi $\Delta \vec{v}$ ning Δt vaqt oralig'iga nisbati nuqtaning mazkur vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanish vektori deyiladi va \vec{a}_o belgilanadi.

$$\vec{a}_o = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Bunda Δt musbat skalyar miqdor bo'lgani uchun tezlanish vektori $\Delta \vec{v}$ bo'ylab yo'naladi.

O'rtacha tezlanish vektorining Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan ondagi *tezlanish vektori* deyiladi va \vec{a} bilan belgilanadi:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

yoki

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (8.24)$$

(8.12) ni e'tiborga olsak,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (8.24, a)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Demak, *nuqtaning tezlanish vektori uning tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga yoki radius-vektoridan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng.*

(8.24. a) ga asosan tezlanishning o'lcham birligini aniqlaymiz:

$$[a] = \frac{[\text{uzunlik}]}{[\text{vaqt}]^2} = \frac{L}{T^2}$$

SI birliklar sistemasida tezlanish m/s^2 da o'lchanadi.

2. Harakati koordinatalar usulida berilgan nuqtaning tezlanishi. Nuqtaning harakati (8.6) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Tezlanish vektorini $Oxyz$ Dekart koordinata o'qlarining birlik vektorlari orqali ifodalangan tashkil etuvchilarga quyidagicha ajratish mumkin:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (8.25)$$

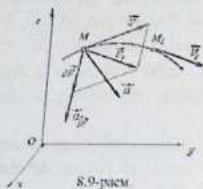
bunda a_x, a_y, a_z bilan tezlanishning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari belgilangan. Nuqtaning tezligini (8.13) ko'rinishda yozish mumkin bo'lgani uchun

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

kelib chiqadi. Bu tenglikni (8.25) bilan solishtirib, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini ifodalovchi formulalarni hosil qilamiz:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (8.26)$$

(8.14) ga asosan (8.26) ni quyidagicha yoza olamiz:



$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \quad (8.27)$$

Demak, nuqta tezlanishining biror o'qdagi proekstiyasi nuqta tezligining mazkur o'qdagi proekstiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilaga yoki o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng.

Tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (8.28)$$

yo'nalishi

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a} \quad (8.29)$$

formulalardan aniqlanadi.

Agar nuqta Oxy tekisligida harakatlansa, $a_z = \ddot{z} = 0$ bo'lib, (8.28) va (8.29)

formulalar

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}$$

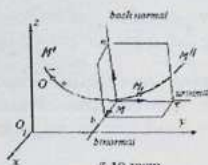
ko'rinishda yoziladi.

Nuqta Ox o'q bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilganda $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ bo'lib, tezlanish vektori Ox o'q bo'yicha yo'naladi, uning bu o'qdagi proekstiyasi va moduli $a_x = \ddot{x}$, $a = |\ddot{x}|$ tengliklardan aniqlanadi. Agar $\ddot{x} > 0$ bo'lsa, nuqtaning \vec{a} tezlanish vektori Ox o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha, $\ddot{x} < 0$ da esa manfiy yo'nalishi bo'yicha yo'naladi.

Agar \vec{v} tezlik vektori bilan \vec{a} tezlanish vektorining yo'nalishi har doim ustma-ust tushsa, nuqtaning bunday harakati *to'g'ri chiziqli tezlanuvchan harakat*, qarama-qarshi yo'nalsa, *to'g'ri chiziqli sekinlanuvchan harakat* deyiladi.

Nuqtaning harakati qutb koordinatalarida $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ tenglamalar bilan ifodalangan bo'lsa, uning tezligi (8.19) munosabat bilan aniqlanishi ma'lum. Shu-ning uchun (8.18) ni hisobga olsak,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}' + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{p}'$$



8.10-RASMI.

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni o'zaro perpendikulyar \vec{r}'' va \vec{p}^0 yo'nalishlarga proektsiyalab, *radial* va *ko'ndalang tezlanishlarni* ifodalovchi ushbu munosabatlarni olamiz:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, a_f = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \quad (8.30)$$

Bu holda nuqta tezlanishining moduli

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_f^2} \quad (8.31)$$

yo'nalishi

$$\cos \alpha = \frac{a_r}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_f}{a} \quad (8.32)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

3. Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi: a) *Tabiiy koordi-nata o'qlari. Egrilik vektori.* Avval nuqta tezlanishini aniqlash uchun zarur bo'lgan differensial geometriyaning ayrim tushunchalari bilan tanishib chiqamiz.

O_1xyz koordinatalar sistemasida berilgan $M'M'$ egri chiziqda M nuqta olib, shu nuqtada mazkur chiziqqa o'tkazilgan M_1 urinmaning rik vektorini \vec{r}'' bilan belgilaylik (8.10-rasm). \vec{r}'' vektorni s yoy oordinatasining o'sishi tomon yo'nal-tiramiz. $M'M'$ egri chiziqda M nuqtaga yaqin bo'lgan M_1 nuqta olib, \vec{r}'' vektori va M_1 nuqta orqali tekislik o'tkazaylik. M_1 nuqta berilgan chiziq bo'ylab M nuqta-ga intilganda mazkur tekislikning egallagan limit holati M nuqtadagi *yopishma te-kislik* (yoki *egrilik tekisligi*) deyiladi. Agar $M'M'$ egri chiziq tekislikda yotuvchi egri chiziqdan iborat bo'lsa, yopishma tekislik mazkur chiziq yotgan tekislik bilan ustma- ust tushadi va egri chiziqning hamma nuqtalari uchun umumiy bo'ladi. $M'M'$ egri chiziq bir tekislikda yotmasa M nuqta chiziq bo'ylab siljiganda, yo-pishma tekislik o'z holatini o'zgartirib boradi.

M nuqtada \vec{r}'' urinmaga perpendikulyar ravishda o'tkazilgan tekislik *normal tekislik* deyiladi. Yopishma va normal tekisliklarning Mp kesishish chizig'i M nuqtadagi *bosh normalni* ifodalaydi. Bosh normalning yo'nalishi M nuqtadan egri chiziqning botiq tomoniga yo'nalgan \vec{n}^0 birlik vektor bilan aniqlanadi.

Yopishma va normal tekisliklar o'zaro perpendikulyar joylashadi. Bu ikkala tekislikning har biriga perpendikulyar qilib M nuqtada o'tkazilgan (ya'ni Mp bosh normalga perpendikulyar bo'lgan) tekislik *urinma tekislik* de-yiladi. Normal va urinma tekisliklarning Mb kesishish chizig'i M nuqtadagi *binormalni* ifodalaydi. Binormal yo'nalishi \vec{b}^0 birlik vektor bilan aniqlanib, \vec{b}^0 vektor $\vec{\tau}^0, \vec{n}^0$ bilan o'ng sistemani tashkil etadigan qilib olinadi.

Normal, yopishma va urinma tekisliklardan tashkil topgan uchyoqlik *tabiiy uchyoqlik* deyiladi.

$\vec{\tau}^0, \vec{n}^0, \vec{b}^0$ orqali o'tkazilgan o'qlar M nuqtadagi *tabiiy koordinata o'qlari* de-yiladi.

MM' egri chiziqda bir-biriga yaqin M va M_1 nuqtalarda yoy koordinatasining o'sishi tomon yo'nalgan $\vec{\tau}^0$ va $\vec{\tau}_1^0$ birlik urinma vektorlarini o'tkazaylik (8.11-ra-sm).

$\Delta s = MM_1$ oraliqdagi $\vec{\tau}^0$ vektorning orttirmasi $\Delta \vec{\tau}^0 = \vec{\tau}_1^0 - \vec{\tau}^0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Yoy koordinatasi MM' musbat bo'lganda, ya'ni $\Delta s > 0$ da $\Delta \vec{\tau}^0$ vektor egri chiziqning botiqlik tomoniga, $\Delta s < 0$ holida $\Delta \vec{\tau}^0$ vektor MM' egri chiziqning qavariq tomoniga yo'naladi. MM' oraliqda $\vec{\tau}^0$ birlik vektorining M atrofida burlinishi ifodalovchi $\frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s}$ vektor egri chiziqning mazkur oraliqdagi o'rtacha egrilik vektorini deyiladi va \vec{k}_{or} bilan belgilanadi. O'rtacha egrilik vektor $\Delta \vec{\tau}^0$ bilan bir chiziqda yotadi. Agar $\Delta s > 0$ bo'lsa, \vec{k}_{or} vektor $\Delta \vec{\tau}^0$ bilan bir xil, $\Delta s < 0$ da $\Delta \vec{\tau}^0$ yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

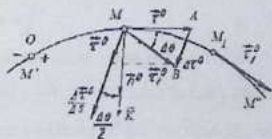
O'rtacha egrilik vektorining Δs nolga intilgandagi limiti *egri chiziqning M nuqtadagi egrilik vektor* deyiladi va \vec{k} bilan belgilanadi:

$$\vec{k} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s} \quad (8.33)$$

$\vec{\tau}^0 = \vec{\tau}^0(s)$ bo'lgani uchun

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \quad (8.34)$$

Δs oralikda $\vec{\tau}^0$ vektor yo'nalishining o'zgarish



8.11-rasm.

burchagini, ya'ni teng yonli *BMA* uchburchakda *BMA* burchakni $\Delta\theta$ bilan belgilaylik. U holda Δs ning isho-rasiga qarab $\frac{\Delta \vec{r}^0}{\Delta s}$ va \vec{r}^0 orasidagi burchak $90^\circ \pm \frac{\Delta\theta}{2}$ bo'ladi (8.11-rasm). Δs nolga intilganda $\Delta\theta$ ham nolga intilib, \vec{k}_{av} va \vec{r}^0 orasidagi burchak 90° ga intiladi. Shuning uchun \vec{k} vektor yo'nalishi bosh normal birlik vektori \vec{n}^0 bilan bir xil bo'ladi va yopishma tekislikda yotadi.

$$\vec{k} = \frac{d\vec{r}^0}{ds} = k \cdot \vec{n}^0 \text{ bunda } k = \left| \frac{d\vec{r}^0}{ds} \right| \quad (8.35)$$

Egrilik vektorining modulini hisoblaymiz: $AB = |\Delta \vec{r}^0| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ ekanligi ni hi-sobga olsak,

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{d\vec{r}^0}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}^0}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right) \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \end{aligned}$$

Bunda $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right) = 1$ bo'lgani uchun $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$

Egri chiziq egriligining teskari qiymati $\frac{1}{k}$ ga *chiziqning egrilik radiusi* deyiladi va ρ bilan belgilanadi:

$$\rho = \frac{1}{k} \quad (8.36)$$

Aylana uchun $k = 1/R$ bo'lganidan uning egrilik radiusi R ga teng bo'ladi, (8.36) ga ko'ra (8.35) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d\vec{r}^0}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}^0 \quad (8.37)$$

ya'ni egri chiziqning biror nuqtadagi egrilik vektori miqdor jihatdan uning mazkur nuqtadagi egrilik radiusining teskari qiymati $\frac{1}{\rho}$ ga teng bo'lib, bosh normal bo'yi-cha yo'naladi.

b) Tezlanishning tabiiy koordinata o'qlaridagi proekstyalari.
Harakati tabiiy

usulda berilgan nuqtaning tezligi ifodasidan nuqtaning tezlanishi formulasini ola-miz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_t}{dt} \vec{\tau}^o + v_t \frac{d\vec{\tau}^o}{dt} = \frac{dv_t}{dt} \vec{\tau}^o + v_t \frac{d\vec{\tau}^o}{ds} \frac{ds}{dt}$$

bunda $\frac{ds}{dt} = v_t$ va $v_t^2 = v^2$ bo'lgani uchun

$$\vec{a} = \frac{dv_t}{dt} \vec{\tau}^o + v^2 \frac{d\vec{\tau}^o}{ds}$$

(8.37)ga ko'ra oxirgi ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = \frac{dv_t}{dt} \vec{\tau}^o + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^o \quad (8.38)$$

(8.38) ifodada nuqta tezlanishi tabiiy koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali berilgan. Tezlanishning urinma bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchisi

$$\vec{a}_t = \frac{dv_t}{dt} \vec{\tau}^o \quad (8.39)$$

nuqtaning urinma (tangensial) tezlanishi, bosh normal bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchisi

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^o \quad (8.40)$$

esa nuqtaning normal tezlanishi deyiladi.

Binobarin, M nuqtaning tezlanish vektori shu nuqta traektoriyasiga o'tkazilgan yopishma tekislikda yotadi va binormal bo'yicha tashkil etuvchisi nolga teng.

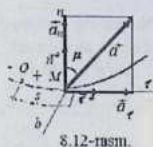
$$\vec{a}_b = 0$$

(8.39)va (8.40) ga ko'ra (8.38) ifoda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (8.41)$$

ya'ni, egri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng. shu sababli tezlanish vektori \vec{a}_t va \vec{a}_n larga qurilgan to'g'ri to'rtburchakning berilgan nuqtadan o'tuvchi diagonali bilan ifodalanadi (8.12-rasm).

Nuqta harakatlanganda normal tezlanish musbatligi uchun doimo



berilgan nuqtada traektoriyaga o'tkazilgan bosh normal bo'yicha traektoriyaning botiq to-moniga yo'naladi, urinma tezlanish musbat yoki manfiy qiymatga ega bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (8.42)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Tezlanish vektorining yo'nalishini uning bosh μ normal bilan tashkil qilgan μ burchak vositasida topish mumkin:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_t|}{a_n} \quad (8.43)$$

8.5-§. Nuqta harakatining xususiy hollari

Nuqtaning tezlanishiga qarab harakat turlarini aniqlash (8.38) formulaga asoslanadi.

1. **To'g'ri chiziqli tekis harakat.** Nuqtaning harakati davomida hamisha $\vec{a}_t = 0$ va $\vec{a}_n = 0$ ya'ni $\vec{a} = 0$ bo'lsin. Bu holda $\frac{dv_t}{dt} = 0$,

$\frac{v^2}{\rho} = 0$ bo'lib, ulardan $v_t = \text{const}$ va $\rho = \infty$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, ko'rilayotgan holda nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

2. **To'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakat.** Nuqta harakati davomida $\vec{a}_t \neq 0$ va $\vec{a}_n = 0$ bo'lsin. Bunda $\frac{dv_t}{dt} \neq 0$ va $\frac{v^2}{\rho} = 0$ bo'lib, ulardan $v = v_t \neq \text{const}$ va $\rho = \infty$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, nuqtaning tezligi yo'nalish jihatdan o'z-garmay, faqat miqdor jihatdan o'zgaradi va nuqta to'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakatda bo'ladi.

3. **Egri chiziqli tekis harakat.** Biror vaqt oralig'i uchun $\vec{a}_t = 0$ va $\vec{a}_n \neq 0$ bo'lsin. Bu holda $\frac{dv_t}{dt} = 0$, $\frac{v^2}{\rho} \neq 0$. Bundan, $v = v_t = \text{const}$,

$\rho \neq \infty$ kelib chiqadi. $\rho \neq \infty$ shart harakat traektoriyasi egri chiziqdan iborat bo'lishini ifodalaydi. Demak, bu holda nuqta egri chiziqli tekis harakat qiladi. Agar tezlikning urinmadagi proektsiyasini v_0 bilan belgilasak, $v_t = v_0 = \frac{ds}{dt}$ yoki $ds = v_0 dt$ hosil bo'ladi. Boshlang'ich paytda,

ya'ni $t=0$ da $s = s_0$ bo'lsin. Shu shart hamda $v_t = const$ ekanligini nazarda tutib, oxirgi tenglikni integrallasak,

$$s = s_0 + v_0 t \quad (8.44)$$

kelib chiqadi. (8.44) tenglama nuqtaning egri chiziqli tekis harakat tenglamasi deyiladi.

Ko'rilayotgan holda nuqtaning tezlanish vektori \vec{a} bosh normal bo'ylab yo'-naladi va uning moduli

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

bo'ladi.

4. Egri chiziqli o'zgaruvchan harakat. Biror vaqt oralig'i uchun $\vec{a}_t \neq 0$ va $\vec{a}_n \neq 0$ bo'lsin. Bunda nuqtaning tezligi miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgaradi, ya'ni nuqta egri chiziqli o'zgaruvchan harakatda bo'ladi.

Agar $a_t = const$ bo'lsa, nuqta tekis o'zgaruvchan harakatda deyiladi. \vec{v} va \vec{a}_t vektorlarning yo'nalishi ustma-ust tushsa, nuqta egri chiziqli tezlanuvchan harakatda ular qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, nuqta egri chiziqli sekinlanuvchan harakatda bo'ladi.

Boshlang'ich paytda tezligi v_0 ga teng bo'lgan nuqtaning tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini chiqaramiz. (8.39) formulaga ko'ra

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = const \text{ yoki } dv_t = a_t dt \text{ bo'ladi.}$$

$$v_t = v_0 + a_t t \quad (8.45)$$

kelib chiqadi. $v_t = v_0 + a_t t$ ekanligini nazarda tutib, (8.45) ni integrallasak,

$$s = s_0 + v_0 t + a_t \frac{t^2}{2} \quad (8.46)$$

bo'ladi. (8.46) tenglama nuqta egri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakatining tenglamasini ifodalaydi.

To'g'ri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakat tezligi va harakat tenglamasi uchun ham (8.45) va (8.46) formulalar o'rinli bo'ladi faqat yoy koordinatasi s o'rnida nuqtaning absstissasi x qatnashadi.

$$\dot{x} = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + at^2 / 2 \quad (8.47)$$

5. **Garmonik tebranma harakat.** Koordinata boshi O ga nisbatan asi

$$x = a \sin \omega t \quad (8.48)$$

qonunga ko'ra (a va ω —o'zgarimas kattaliklar) o'zgaruvchi M nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatini tekshiramiz (8.13- rasm).

(8.48) ifodadagi $\sin \omega t$ davriy o'zgarigani tufayli M nuqta tebranish markazi O nuqta atrofida tebranma harakatda bo'ladi. Nuqtaning tebranish markazidan eng katta masofaga chetga chiqishini ifodalovchi kattalik a tebranish amplitudasi, ωt tebranish fazasi, ω esa tebranishning doiraviy chastotasi deyiladi. (8.48) da $t=0$ boshlang'ich paytda $x=0$ bo'lgani uchun nuqta tebranish markazi O dan o'z harakatini boshlaydi. Sinus funktsiyasi davriy bo'lganidan, biror t vaqtda nuqta egallagan M_1 va-ziyatiga T vaqt o'tgach yana qaytadi. Nuqtaning bir marta to'liq tebranishi uchun ketgan vaqt oralig'i T tebranish davri deyiladi. Tebranish davrini

$$\sin \omega(t+T) = \sin \omega t \quad (8.49)$$

shartdan foydalanib aniqlaymiz. (8.49) tenglik $\omega T = 2\pi$ bo'lganda to'g'ri. Binobarin,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.50)$$

Tebranish davrining teskari qiymati

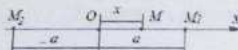
$$\nu = 1/T \quad (8.51)$$

tebranish takrorligi deyiladi va u 1 sekunddagi to'liq tebranishlar sonini ifodalaydi.

Nuqtaning tezlik va tezlanishini (8.48) dan mos ravishda birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar olib topamiz.

Nuqta $x = a \cos \omega t$ qonun bo'yicha harakatlanganida ham garmonik tebranishlar sodir bo'ladi, faqat bu holda harakat boshlang'ich $t=0$ paytda tebranish markazidan boshlanmaydi.

Nuqta $x = a \sin(\omega t + \alpha)$ yoki $x = a \cos(\omega t + \beta)$ qonunga ko'ra harakatlanganida ham yuqorida ko'rilgan hollardan tubdan farq qilmaydi, faqat $t=0$ da nuqta tebranish markazidan $x = a \sin \alpha$ yoki $x = a \cos \beta$ masofada bo'ladi. α yoki β tebranishning boshlang'ich fazasi deyiladi.



8.13-pasm.

8.3-masala. Nuqtaning harakati

quyidagi tenglamalar bilan berilgan

$$x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}, \quad y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5} \quad (1)$$

(x, y — santimetr, t — sekundlar hisobida). Nuqtaning traektoriyasi, tezligi va tezlanishi topilsin.

Yechish. Nuqta traektoriyasining tenglamasini aniqlash uchun (1) tenglamalardan vaqt t ni yo'qotamiz. Buning uchun (1) tenglamalarni ikkala tomonini kvadratga oshirib, so'ngra qo'shamiz:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Demak, nuqta traektoriyasining tenglamasi radiusi 10sm. ga teng aylanadan iborat (8.14- rasm). (8.14) ga asosan nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini aniqlaymiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}$$

(8.15) ga ko'ra nuqta tezligining moduli

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \\ &= \sqrt{\left(-4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} \\ &= 4\pi c m / c = 0,04 m / c \end{aligned}$$

teng bo'ladi.

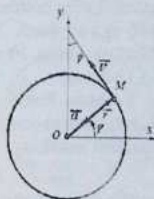
Tezlanishning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari va modulini topamiz:

$$\begin{aligned} a_x = \ddot{x} &= -\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5}, & a_y = \ddot{y} &= -\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5} \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = \\ &= \frac{8\pi^2}{5} c m / c^2 = \frac{2\pi^2}{125} m / c^2 \end{aligned}$$

Bu formulalardan tezlanish vektorini aylananing radiusi bo'ylab uning mar-kaziga yo'nalganligini ko'ramiz.

Bu masalada tezlik miqdor jihatdan o'zgarmasada, uning yo'nalishi o'zgargani tufayli tezlanish mavjuddir.

8.4-masala. Poezd radiusi $R = 1$ km bo'lgan aylana yo'lda harakat



8.14-rasm.

qiladi. Uning boshlang'ich tezligi 54 km/soat bo'lib, birinchi 30 s da u 600 m yo'l bosdi. Pоеzd harakatini tekis o'zgaruvchan harakat deb hisoblab, uning 30 sekund oxiri-dagi tezligi va tezlanishi aniqlansin (8.15-rasm).

Yechish. Pоеzd radiusi $R = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ aylanma yo'lda harakatlanayot-gani uchun uning tezlanishini (8.42) ga asosan aniqlash mumkin:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} \quad (1)$$

Harakat tekis o'zgaruvchan bo'lgani uchun pоеzdning harakati

$$s = s_0 + v_0 t + a_t \frac{t^2}{2} \quad (2)$$

bilan ifodalanadi. Sanoq boshini shunday tanlaymizki, bunda $s_0 = 0$ bo'lsin. (2) dan $a_t = 2 \frac{s - v_0 t}{t^2}$ ni olamiz. Bunda $s = 600 \text{ m}$, $v_0 = 54 \text{ km/saat} = 15 \text{ m/s}$, $t = 30 \text{ s}$ ekanligini e'tiborga olsak, $a_t = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2$ bo'ladi.

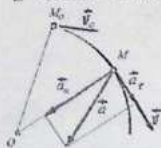
Pоеzdning tezligi va normal tezlanishini aniqlaymiz:

$$\dot{x} = v_0 + a_t t = 25 \text{ m/s} \quad a_n = \frac{v^2}{R} = 0,625 \text{ m/s}^2$$

a_t va a_n laming qiymatini (1) ga qo'yib, pоеzdning 30-sekund oxiridagi tezlanishini topamiz.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (0,625)^2} = 0,708 \text{ m/s}^2$$

8.5-masala. $H = 500 \text{ km}$ balandlikda sun'iy yo'ldosh Er atrofida doiraviy orbi-ta bo'ylab tekis harakatlanadi. Uning markazga intilma tezlanishi erkin tushuvchi jismning tezlanishiga teng. Yo'ldoshning tezligi va bir marta aylanish vaqti aniqlansin. Berilgan balandlikda $g = 8,5 \text{ m/s}^2$. Erning radiusi $R = 6370 \text{ km}$ (8.16-rasm).



8.15-rasm.

Yechish. Sun'iy yo'ldosh orbitasi radiusini r bilan belgilasak, u $r = R + H = 6870 \text{ km}$ ga teng bo'ladi. (8.51) formulaning ikkinchisidan foydalanib, sun'iy yo'ldosh tezligini aniqlaymiz:

$$v = \sqrt{a_n \cdot \rho} \quad \text{bunda } \rho = r = 6870 \text{ km},$$

$$a_n = a = g = 8,5 \text{ m/s}^2 = 0,00825 \text{ km/s}^2 \text{ ekanligini}$$

e'tiborga olsak,

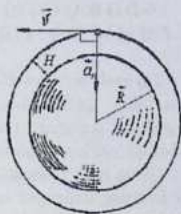
$$v = \sqrt{0,00825 \cdot 6870} = 7,64 \text{ km/s}$$

Sun'iy yo'ldosh orbitada bir marta aylanishi uchun ket-gan vaqtni T bilan belgilasak, mazkur vaqt ichida uning o'tgan yo'li $v \cdot T$ ga teng. Xuddi shu yo'l radiusi r ga teng aylana uzunligiga teng, ya'ni $v \cdot T = 2\pi r$ bundan

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6870}{7,64 \cdot 3600} = 1,568 \text{ soat}$$

Javob: $v = 7,64 \text{ km/s}$, $T = 1,568 \text{ soat}$

Nuqta harakatining berilgan tenglamalariga ko'ra uning tezligi va tezlanishini aniqlashga doir hisob -grafik ishlari variantlari kitob so'nggidagi 2-ilovaning 1-topshirig'ida berilgan.



8.16 - rasm.

Nazorat savollari:

1. Kinematika nima? Nuqtaning traektoriyasi deb nimaga aytiladi?
2. Nuqtaning harakat qonuni deb nimaga aytiladi?
3. Kinematikaning asosiy vazifalari.
4. Nuqtaning harakat qonunlarini berilish usullari qanday?
5. Nuqtaning tezligi va uning topish usullari ayting
6. Nuqtaning tezlanishi va uning topish usullari.
7. Nuqtaning tabiiy o'qlardagi harakatida uning tezlik vektorinin yo'nalishi
8. Nuqtaning tabiiy o'qlardagi harakatida nechta tezlanish bo'ladi?
9. Nuqtaning tabiiy o'qlardagi harakatidagi tezlanish vektorlarining yo'nalishlari
10. Nuqtaning Dekart o'qlaridagi harakatida uning tezligining moduli
11. Nuqtaning Dekart o'qlaridagi harakatida uning tezlik vektorinin yo'nalishi
12. Nuqtaning harakati vektor usulida berilganda uning tezlik vektorlari
13. Nuqtaning harakati vektor usulida berilganda uning tezlanish vektorlari

9-B O B. QATTIQ JISMNING ILGARILAMA VA QO'Z-FALMAC O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATLARI

Tayanch so'z va iboralar: Ilgarilama harakat, qo'zg'almas o'q atrofidagi qattiq jismning aylanma harakati, burchakli tezlik, burchakli tezlanish, tekis o'zg'a-ruvchan aylanma harakat qonuni, chiziqli tezlik, chiziqli tezlanish.

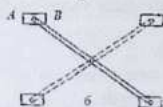
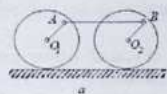
Qattiq jism kinematikasida asosan quyidagi ikki masala ko'riladi: 1. Jismning tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan har ondagi holatini aniqlash; 2. Harakat tenglamalari ma'lum bo'lgan jismning yoki jism hap bir nuqtasining kine-matik xarakteristikalarini topish.

Dastlab jismning eng sodda, xususiy holdagi harakatlarini ko'rib chiqamiz.

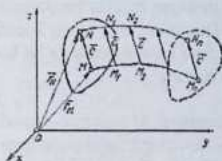
9.1-§. Jismning ilgarilama harakati

Jismda olingan har qanday kesma harakat davomida doimo o'zining boshlan-g'ich holatiga parallel ravishda harakatlansa, jismning bunday harakati *ilgarilama harakat* deyiladi. Masalan, parovoz g'ildiraklarini tutashtiruvchi AB sparnik yoki velosipedning AB pedali (9.1-rasm, a , b) ilgarilama harakatda bo'ladi. Bu misol-lardan ko'ramizki, ilgarilama harakatdagi jism nuqtasining traektoriyasi umuman egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Jism $Oxyz$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgarilama harakatda bo'lsin (9.2-rasm). Bu holda jismning ikkita nuqtasini tutashtiruvchi \overline{MN} vektor miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmasdan qoladi, chunki absolyut qattiq jism ta'rifiga ko'ra \overline{MN} kesma uzunligi o'zgarmaydi, ilgarilama harakat ta'rifiga ko'ra \overline{MN} vektor o'ziga parallel ravishda harakatlanadi. Shu tufayli ilgarilama harakat-dagi jismda bu vektor o'zgarmas $\overline{MN} = \overline{const} = \vec{c}$ vektorni ifodalaydi.



9.1-rasm.



9.2-rasm.

Teorema. Ilgarilama harakatdagi jismning hamma nuqtalari bir xil traekto-riya chizadi va har onda bir xil tezlik hamda bir xil tezlanishga ega bo'ladi.

Isbot. Jismda ixtiyoriy M va N nuqtalami olib, ularning radius-vektorlarini \vec{r}_M va \vec{r}_N bilan belgilasak,

$$\vec{r}_N = \vec{r}_M + \overline{MN} \quad (9.1)$$

o'rinni bo'ladi.

Jism ilgarilama harakatda bo'lganda \vec{r}_M va \vec{r}_N o'zgaradi, lekin \overline{MN} vektor o'zgarmaydi, ya'ni M va N nuqtalar bir xil traektoriylar bo'ylab harakatlanadi.

(9.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_N}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \frac{d\overline{MN}}{dt}$$

Bunda $\overline{MN} = \text{const} = \vec{c}$ bo'lgani uchun $\frac{d\overline{MN}}{dt} = 0$. Binobarin,

$\frac{d\vec{r}_N}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$ yoki $\vec{v}_N = \vec{v}_M$ bo'ladi. Bu tenglik ilgarilama harakatdagi jism barcha nuqtalari-ning har ondagi tezliklari bir xil bo'lishini ifodalaydi.

Oxirgi tenglikdan vaqt bo'yicha hosila olsak,

$$\vec{a}_N = \vec{a}_M$$

bo'ladi. Binobarin, ilgarilama harakatdagi jism barcha nuqtalarining har ondagi tezlanishlari bir xil bo'ladi.

Shunday qilib, jismning ilgari lama harakati uning ixtiyoriy nuqtasi harakati bilan aniqlanadi.

Qattiq jismning harakat tenglamasini chiqarish uchun jismning ixtiyoriy M nuqtasini olib, uning koordinatalarini x_M, y_M, z_M bilan belgilaymiz. Jism harakatlanganda bu koordinatalar vaqtning funktsiyasi sifatida o'zgaradi:

$$x_M=f_1(t), \quad y_M=f_2(t), \quad z_M=f_3(t) \quad (9.2)$$

(9.2) tenglama M nuqtaning harakat tenglamasi bo'lib, jismning ilgari lama ha-rakat tenglamasini ham ifodalaydi.

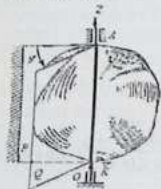
9.2-§. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat tenglamasi

Ikki nuqtasi doimo qo'zg'almasdan qoladigan jismning harakati qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat deyiladi. Qo'zg'almas nuqtalardan o'tuvchi o'q aylanish o'qi deyiladi.

Turbinalar diski, generatorlarning rotori, stanok-larning maxovigi kabi mashina va mexanizmlar-

ning harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismga misol bo'la oladi.

Jismning aylanish o'qida yotuvchi barcha nuqtalari qo'zg'almas bo'ladi. Aylanish o'qida yotmaydigan nuqtalarining traektoriyalari aylanish o'qiga perpendi-kulyar tekisliklarda yotuvchi aylanalardan iborat bo'ladi.



9.3-rasm.

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining kinematik tenglamasini aniqlash uchun aylanish o'qiga biriktirilgan qo'zg'almas P tekislikni hamda jismga biriktirilgan va birga aylanuvchi Q tekislikni o'tkazamiz (9.3-rasm). Bu tekisliklar orasidagi φ burchak jismning aylanish burchagi deyiladi.

Oz aylanish o'qi birlik vektor \vec{k} ning uchidan qaraganda φ burchakning o'zgarishi soat strelkasi ha-rakati yo'nalishiga teskari bo'lsa,

aylanish burchagini musbat, aks holda manfiy olinadi. Aylanish burchagi radianda o'lchanadi. Agar jismning aylanish soni N ma'lum bo'lsa, aylanish burchagi $\varphi = 2\pi N$ formula yordamida aniqlanadi.

Aylanish burchagi φ ning miqdori va yo'nalishi ma'lum bo'lsa, Q tekislikning P tekislikka nisbatan holatini aniqlash mumkin.

Jism Oz o'q atrofida aylanganda uning aylanish burchagi φ vaqtning funktsiyasi sifatida o'zgaradi:

$$\varphi = \varphi(t) \quad (1)$$

(9.3)

Bu tenglama jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatining kine-matik tenglamasi deyiladi.



9.4-rasm.

9.3-§. Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati burchak tezligi. Tekis aylanma harakat

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining t vaqtdagi aylanish burchagini φ , $t_1 = t + \Delta t$ vaqtdagi aylanish burchagini $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ bilan belgi-laylik. $\Delta t = t_1 - t$ vaqt oralig'ida jism $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ burchakka buriladi. $\Delta\varphi$ ning Δt ga nisbati jismning Δt vaqtdagi o'rtacha burchak tezligi deyiladi.

Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatining berilgan ondagi burchak tezligini topish uchun o'rtacha burchak tezligining Δt nolga intilgandagi limitini olamiz:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

yoki

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (9.4)$$

Shunday qilib, jismning burchak tezligi aylanish burchagidan vaq bo'yicha olingan hosilaga teng.

$\dot{\varphi}$ burchakning o'zgarish qonuniga mos ravishda burchak tezligi musbat yoki manfiy qiymatga ega bo'lishi mumkin.

Qattiq jism kinematikasida jismning burchak tezligini vektor sifatida ifodalash ko'pgina qulayliklar yaratadi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning burchak tezlik vektorini mazkur o'q bo'ylab yo'nalgan va uning musbat yo'nalishidan qaralganda aylanish soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda ko'rinadigan, aylanish o'qining ixtiyoriy nuqta-siga qo'yilgan vektor bilan ifodalaymiz (9.4-rasm).

Agar aylanish o'qi birlik vektorini \vec{k} bilan belgilasak, burchak tezlik vektorini

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} = \omega_z \vec{k} \quad (9.5)$$

ko'rinishida yozish mumkin. (9.5) dan ko'ramizki, $\dot{\varphi} > 0$ bo'lsa, $\vec{\omega}$ vektori \vec{k} yo'nalishi bo'yicha (9.4-rasm), $\dot{\varphi} < 0$ da \vec{k} ga qarama-qarshi yo'naladi. Aylanish burchagi radianda, vaqt esa sekund (s) da o'lchanganidan, burchak tezlikning o'lchov birligi rad/s yoki s^{-1} bo'ladi.

Jism harakati davomida uning burchak tezligi o'zgarmay qolsa, jism tekis aylanma harakatda deyiladi. Bu holda (9.4) ga ko'ra

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \text{const}$$

yoki $d\varphi = \omega_0 dt$ bo'ladi.

Baqt 0 dan t gacha o'zgarganda aylanishi burchagi φ_0 dan φ gacha o'zgarishini e'ti-borga ohb, oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \quad (9.6)$$

bo'ladi. (9.6) ifoda jism tekis aylanma harakatining tenglamasi deyiladi.

Jism bir marta to'la aylanganda aylanish burchagi $\varphi = 2\pi$ bo'ladi. Jism bir minutda n marta aylansa, tekis aylanma harakat burchak tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} s^{-1} \quad (9.7)$$

9.4-§. Jismning burchak tezlanishi. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat

Umumiy holda jismning burchak tezligi vaqt funktsiyasi sifatida o'zgaradi. Jismning biror t vaqtdagi Oz atrofidagi aylanish burchak tezligi $\omega_z(t)$ ga, $t_1 = t + \Delta t$ vaqtdagi burchak tezligi $\omega_z(t_1) = \omega_z(t) + \Delta\omega_z$ ga teng bo'lsin. Burchak tezlikning Δt vaqt ichidagi orttirmasi $\Delta\omega_z = \omega_z(t_1) - \omega_z(t)$ ga teng bo'ladi. $\Delta\omega_z$ ning Δt vaqtga nisbati jismning shu vaqtdagi o'rtacha burchak tezlanishi deyiladi.

O'rtacha burchak tezlanishning Δt nolga intilgandagi limiti jismning berilgan ondagi burchak tezlanishi deyiladi:

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}$$

(9.4) tenglikni hisobga olsak, oxirgi ifoda

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi} \quad (9.8)$$

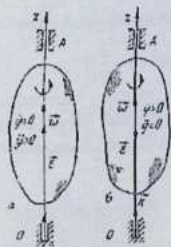
ko'rinishida yoziladi.

Binobarin, berilgan onda biror qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning burchak tezlanishi burchak tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki berilgan o'q atrofidagi aylanma harakat qonunidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo'ladi.

Jismning burchak tezlanishini (burchak tezlik kabi) aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan vektor tarzida ifodalash mumkin. Bunda jismning burchak tezlanish vektori shu jism burchak tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng deb olinadi (9.5-rasm).

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \omega \dot{\vec{k}} = \dot{\varphi} \vec{k} \quad (9.9)$$

Agar jismning burchak tezligi modul jihatdan orta borsa, bunday harakat tezlanuvchan aylanma harakat, kamaya borsa, sekinlanuvchan aylanma harakat deyiladi. Tekis aylanma harakatda $\omega = \text{const}$ bo'lgani uchun $\varepsilon = 0$ bo'ladi. Binobarin, ω_z va ε_z bir xil ishorali bo'lsa, harakat tezlanuvchan (9.5-rasm, a), turli ishoraga ega bo'lsa, harakat sekinlanuvchan (9.5-rasm, b) bo'ladi. Burchak tezlanishining o'lchov birligi rad/s^2 yoki s^{-2} bo'ladi.



9.5-rasm.

Harakat davomida burchak tezlanish o'zgar olmay qolsa (ya'ni $\varepsilon_z = \text{const}$), jism tekis o'zgaruvchan aylanma harakatda deyiladi. Bu holda (9.8) ga ko'ra $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_z = \text{const}$ yoki $d\omega_z = \varepsilon_z dt$ bo'ladi. Buni vaqt 0 dan t gacha o'zgar-ganda, burchak tezligi ω_0 dan ω_z gacha o'zgarishini e'tiborga olib integrallaymiz:

$$\omega_z = \omega_0 + \varepsilon_z t \quad (9.10)$$

Bu tenglik yordamida tekis o'zgaruvchan aylanma harakat burchak tezligi aniqlanadi.

(9.4) ni hisobga olib, (9.10) ni

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon_z t \quad \text{yoki} \quad d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon_z t) dt$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamani 0 dan t gacha bo'lgan vaqt oralig'ida aylanish burchagi φ_0 dan φ gacha o'zgarishini hisobga olib integrallasak,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_z \frac{t^2}{2} \quad (9.11)$$

tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi kelib chiqadi.

9.1-masala. Girokompasni ishga tushirish vaqtida tinch holatdagi rotorining burchak tezlanishi vaqtga to'g'ri proporsional ravishda o'zgaradi va birinchi 5 mi-nut oxirida rotoringburchak tezligi $18000 \frac{\text{ayl}}{\text{min}}$ ga teng bo'ladi. Shu vaqt ichida rotor necha marta aylanadi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $\omega_0 = 0, \varphi_0 = 0, \varepsilon_z = at$ bunda a proporsionallik koeffitsienti. $t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$ da rotor $n = 18000 \frac{\text{ayl}}{\text{min}}$

yoki $\omega = \frac{2\pi n}{30} \text{ s}^{-1} =$

$= 600 \pi \text{ s}^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanadi.

Dastlab proporsionallik koeffitsienti a ni aniqlaymiz. $\varepsilon_z = at$ va (9.8) formulalarni sohshtirib,

$$\frac{d\omega_z}{dt} = at \quad \text{yoki,} \quad d\omega_z = at dt$$

munosabatni olamiz. Bu tenglamani mos chegaraviy shartlarda integrallab, $\omega_z = \frac{at^2}{2}$ ifodani olamiz. Bundan $a = \frac{2\omega_z}{t^2}$. $t = 300 \text{ s}$ da

$$a = \frac{2600\pi}{90000} = \frac{\pi}{75}$$

Shunday qilib, rotor burchak tezligi $\omega_z = \frac{\pi}{150} t^2$ qonunga ko'ra o'zgarar ekan.

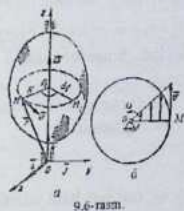
(9.4.) ga ko'ra oxirgi ifodani $d\varphi = \frac{\pi}{150} t^2 dt$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu differensial tenglamani $t = 0$ da $\varphi = 0$ bo'lishini nazarda tutib integrallasak, rotoring harakat qonunini ifodalovchi $\varphi = \frac{\pi^3}{450}$ tenglamani olamiz. $t = 300 \text{ s}$ davomidagi rotoring aylanish sonini N bilan belgilasak, $\varphi = 2 \pi N$ bo'lgani uchun $2 \pi N = \frac{\pi^3}{450}$ tenglik o'rinli

bo'ladi. Bundan $N = \frac{t^3}{900} = 30000$.

Shunday kilib, 5 minut davomida rotor 30000 marta aylanar ekan.

9.5-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezligi

Qo'zg'almas Oz o'q atrofida ω_z burchak tezlik bilan aylanuvchi qattiq jism ix-tiyoriy M nuqtasining tezligini aniqlaymiz. M nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofani R bilan belgilaylik (9.6- rasm, a). Agar dt vaqt oralig'ida jism $d\varphi$ burchakka aylansa, M nuqta aylanish o'qiga perpendikulyar tekislikda aylana bo'ylab harakatlanib



9.6-rasm.

$ds = MM_1 = R d\varphi$ bo'lgan yoy koordinatasini o'tadi hamda M nuqta tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$v_t = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \quad (9.12)$$

yoki (9.4) ga ko'ra

$$v = R\omega \quad (9.13)$$

formuladan aniqlanadi. (9.13) vositasida aniqlanadigan v tezlik qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezligi deb ataladi.

Demak, qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining har ondagi chi-ziqli tezligi miqdor jihatdan mazkur nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa bilan jismning shu ondagi burchak tezligi ko'paytmasiga teng.

Jism barcha nuqtalarining burchak tezliklari har onda o'zaro teng bo'ladi. Shu

sababli qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalarining chiziqli tezliklari mazkur nuqtalar-dan aylanish o'qigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi (9.6- rasm, b).

Nuqtaning chiziqli tezligi \vec{v} nuqta traekto-riyasini ifodalovchi aylanaga hara-kat yo'nalishi bo'yicha o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'naladi (9.6-rasm).

Koordinata boshini aylanish o'qidagi O nuq-tada olib, z o'qni aylanish o'qi bo'ylab yo'nalti-ramiz. M nuqtaning O ga nisbatan radius-vek-torini \vec{r} bilan belgilaymiz va $\vec{\omega}$ burchak tezlik vektorini o'tkazamiz (9.6- rasm, a). $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektor ko'paytmani M nuqtaning tezlik vektori \vec{v} bilan solishtiramiz. $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektori, $\vec{\omega}$ va \vec{r} yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda jismning aylanish yo'nalishi bo'yicha yo'naladi, ya'ni $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektori bilan \vec{v} tezlikning yo'nalishi bir xil bo'ladi. Mazkur vektor ko'paytmaning moduli $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \sin(\hat{\omega}, \hat{r}) = \omega \cdot R$ ya'ni \vec{v} tezlikning moduliga teng bo'ladi. Shunday qilib,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.14)$$

vektor tenglik isbotlandi.
(9.14) tenglikni

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.14')$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

(9.14) va (9.14') ifodalar kinematikadagi asosiy formulalardan biri bo'lib, *Ey-ler formulasi* deyiladi. Binobarin, *qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezlik vektori jismning burchak tezlik vektori bilan maz-kur nuqtaning aylanish o'qidagi ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan radius-vektori-ning vektor ko'paytmasiga teng.*

M nuqtaning koordinatalarini x, y, z bilan belgilasak, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektor ko'paytma uchun

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z \vec{i} + x\omega_z \vec{j}$$

munosabatni, tezlikning Dekart koordinata o'qlaridagi proekstiyalari uchun

$$v_x = -y\omega_z, v_y = x\omega_z, v_z = 0 \quad (9.15)$$

ifodalami olamiz.

9.6-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezlanishi

Qo'zg'almas o'q atrofida ω burchak tezlik va ε burchak tezlanish bilan aylanuvchi jism ixtiyoriy M nuqtasining tezlanishini (8.41) formulaga asosan urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat deb qarash mumkin:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 \quad (9.16)$$

M nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofani R bilan belgilaylik. (9.12) va (9.13) ni (8.41) ga qo'yib, qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalarining urinma va normal tezlanishlari uchun ushbu ifodalarni olamiz.

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\varepsilon \quad (9.17)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 \quad (9.18)$$

(9.17) va (9.18) ni e'tiborga olib, (9.16) ga ko'ra nuqtaning tezlanish vektorini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = R\varepsilon\vec{\tau}^0 + R\omega^2\vec{n}^0 \quad (9.19)$$

Bu formuladagi $R\varepsilon\vec{\tau}^0$ vektor vositasida ifodalanadigan urinma tezlanish ε burchak tezlanishning musbat yoki manfiy qiymat qabul qilishiga qarab, φ burchakning musbat yoki manfiy yo'nalishi bilan aniqlanadi hamda *nuqtaning aylanma tezlanishi* deyiladi (9.7-rasm). $R\omega^2 > 0$ bo'lgani uchun normal tezlanish doimo bosh normal bo'yicha yo'naladi va *nuqtaning markazga intilma tezlanishi* deyiladi.

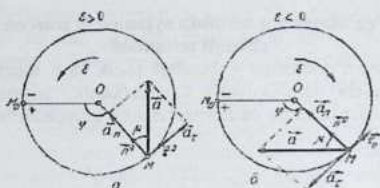
M nuqta tezlanishining moduli

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (9.20)$$

formuladan aniqlanadi. (9.19) va (9.20) yordamida aniqlanadigan tezlanish jism *nuqtasining chiziqli tezlanishi* deyiladi.

M nuqta chiziqli tezlanishining yo'nalishini aniqlash uchun bosh normal bilan \vec{a} vektori orasidagi μ burchakni aniqlash kifoya:

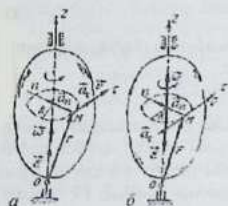
$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (9.21)$$



9.7-rasm.

Jismning barcha nuqtalari uchun ε va ω bir xil bo'lganidan qo'zg'almas o'q

atrofida aylanayotgan jism nuqtalarining chiziqli tezlanishi aylanish o'qidan mazkur nuqtalargacha bo'lgan masofaga proporsional ravishda o'zgaradi hamda berilgan onda jismning barcha nuqtalari uchun μ burchak bir xil qiymatga ega bo'ladi.



9.8-rasm.

Qo'zg'almas o'q atrofiga aylanuvchi jism nuqtalarining chiziqli tezlanishini (9.14) dan vaqt bo'yicha hosila olib ham aniqlash mumkin:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{bunda}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$$\vec{a} = \varepsilon \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (9.22)$$

Bu formulada

$$\varepsilon \times \vec{r} = \vec{a}_t \quad (9.23)$$

urinma tezlanishni ifodalaydi. Haqiqatan ham bu vektor miqdori $\varepsilon r \sin(\varepsilon, \vec{r})$ ga teng, yo'nahishi esa $\vec{\omega}$ va \vec{v} bir tomonga yo'nalganda M nuqtaning tezligi bilan mos tushadi (9.8-rasm, a) $\vec{\omega}$ va \vec{v} qarama-qarshi yo'nalgan holda tezlik vektoriga qarama-qarshi yo'naladi (9.8-rasm, b). Shu sababli M nuqtada aylanishning musbat yo'nalishi bo'yicha o'tkazilgan urinmaning birlik vektorini \vec{r}^0 bilan belgilasak, urinma tezlanish uchun

$$\vec{a}_t = R\varepsilon\vec{r}^0 \quad (9.24)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (9.22) da

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (9.25)$$

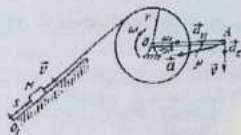
qo'shiluvchi markazga intilma (yoki o'qqa intilma) tezlanishni ifodalaydi. Haqiqatan ham uning miqdori $\vec{\omega}$ va \vec{v} lar o'zaro perpendikulyar yo'nalgani uchun ωv yoki $R\omega^2$ ga teng bo'ladi. $\vec{\omega} \times \vec{v}$ vektor ko'paytma aylanma harakat tezlanuvchan yoki sekinlanuvchan bo'lishidan qat'i nazar, $\vec{\omega}$ va \vec{v} vektorlariga perpendikulyar ravishda doimo M nuqta traektoriyasining markazi to-mon, ya'ni bosh normal Mp bo'yicha yo'naladi. Binobarin, markazga intilma tezlanish uchun

$$\vec{a}_n = R\omega^2 \vec{n}^0 \quad (9.26)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda \vec{n}^0 bosh normalning birlik vektori.

Shunday qilib, (9.23 — 9.26) lami nazarda tutib, (9.22) formuladagi vektorli qo'shiluvchilar mos ravishda (9.19) dagi birinchi va ikkinchi qo'shiluvchilar bilan ifodalanishi isbotlandi.

9.2- masala. Uzunligi $OA = l = 54$ sm ga teng dasta radiusi $r = 27$ sm bo'lgan baraban bilan birgalikda aylanadi. Barabanga ip o'ralishi natijasida M yuk $s = 2\pi^3$ sm qonungaga ko'ra qiya tekislik bo'ylab ko'tariladi. OA dasta bir marta to'la aylangan paytda dasta uchidagi A nuqtaning tezlik va tezlanishi aniqlansin (9.9-rasm).



9.9-rasm.

Yechish. M yuk qiya tekislik bo'ylab to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Dastlab harakat qonuni berilgan M nuqtaning tezligini (8.28) formulaga binoan aniqlaymiz: $v_t = \dot{s} = 6\pi^2$

Baraban va OA dasta O o'q atrofida birgalikda aylangani tufayli ularning burchak tezliklari bir xil bo'ladi. Baraban gardishidagi nuqtaning chiziqli tezligi miqdor jihatdan M nuqta tezligiga teng. Baraban aylanma harakatda bo'lgani uchun uning gardishidagi nuqtaning tezligini (9.13) formula yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli

$$v_t = s = 6\pi^2 = \omega r$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan baraban (yoki dasta) ning burchak tezligini aniqlaymiz:

$$\omega = \frac{6\pi^2}{r} = \frac{2\pi^2}{9} s^{-1}$$

(9.8) ga ko'ra dastaning burchak tezlanishini hisoblaymiz:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{4\pi}{9} s^{-2}$$

OA dasta bir marta aylanishi uchun ketgan vaqtni t_1 bilan belgilasak, $t=t_1$ da M yuk qiya tekislik bo'ylab $s_1 = 2\pi r$ aylananing uzunligiga teng masofaga ko'tariladi. Masalaning shartiga ko'ra $s_1 = 2\pi r$ binobarin $2\pi r^2 = 2\pi r$ yoki $t_1=3s$.

(9.13) dan foydalanib, A nuqta chizikli tezligining modulini aniqlaymiz:

$$v = \omega \cdot OA = \frac{2\pi^2}{9} \cdot 54 = 12\pi^2 \frac{sm}{s} \quad t=t_1=3s \text{ da } v = 108\pi \frac{sm}{s} = 3,39 \frac{m}{s}$$

A nuqta tezligining yo'nalishi 9.9-rasmda ko'rsatilgandek OA aylanish radiusi-ga perpendikulyar bo'ladi.

$$(9.17) \text{ ga ko'ra } a_t = v \cdot OA = \frac{4\pi}{9} \cdot 54, \quad t=t_1=3s \text{ da } a_t = \frac{4\pi}{3} \cdot 54 = 2,26 \frac{m}{s^2}$$

$v > 0$ bo'lgani uchun \vec{a}_t vektor \vec{v}_A bo'yicha yo'naladi. (9.18) ga asosan

$$a_n = OA \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2}{81} t^2 \cdot 54 = \frac{8\pi^2}{3} t^2 \frac{sm}{s^2}, \quad t=t_1=3s \text{ da } a_n = 21,3 \frac{m}{s^2}$$

A nuqta chizikli tezlanishining miqdorini (9.20) dan foydalanib aniqlaymiz:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 21,35 \frac{m}{s^2}$$

\hat{a} bilan OA orasidagi burchakni μ bilan belgilasak, (9.21) formulaga asosan

$$\mu = \arctg \frac{|a_t|}{a_n} = \arctg 0,106$$

bundan $\mu \approx 6^\circ$.

Qattiq jismning ilgari lama va qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatlariga doir hisob-grafik ishlari variantlari kitob so'nggidagi 2-ilovaning 2-topshirig'ida berilgan.

Nazorat savollari.

1. Ilgari lama harakatning ta'rifini bering.
2. Aylanma harakatning ta'rifini bering.
3. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismga misollar keltiring.
4. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalari tezligi.
5. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalari tezlanishi.

10-BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

Tayanch soʻz va iboralar: Qattiq jismning tekis - parallel harakati, qutb, oniy tezliklar markazi, Masshtab, qutb, oniy tezliklar markazi, aylanma tezlanish, mar-kazga intilma tezlanish, oniy tezlanishlar markazi, toʻliq tezlanish.

10.1-§. Qattiq jismning tekis parallel harakatini aniqlash. Tekis shaklning harakat tenglamalari

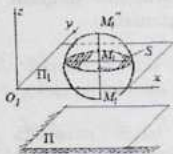
Barcha nuqtalari berilgan koʻzgʻalmas tekislikka parallel tekisliklarda ha-rakatlanuvchi jismning harakatiga tekis parallel harakat deyiladi.

Jismning tekis parallel harakatiga misol tariqasida vagon gʻildiragining toʻgʻri chiziqli izda dumalashini yoki bir tekislikda harakatlanuvchi mashina va mexanizm qismlarining harakatini keltirish mumkin. Jismning tekis parallel ha-rakatini aniqlash uchun berilgan qoʻzgʻalmas tekislikni Π bilan belgilaylik (10.1- rasm). Jismni Π tekislikka parallel boʻlgan Π_1 tekislik bilan fikran kesish natijasida hosil boʻlgan kesimni S bilan belgilab, uni *tekis shakl* deb ataymiz. Tekis parallel harakat taʼrifiga koʻra, jismning harakati davomida bu tekis shakl doimo qoʻzgʻalmas Π tekislikka parallel boʻlgan Π_1 tekislikda harakatlanadi. Agar Π_1 tekislik uchun O_1z tekislikni olib, jismda bu tekislikka perpendikulyar (yoki O_1z oʻq parallel) M_1M_2 kesmani olsak, jism harakati davomida bu kesma doim O_1z oʻqqa parallel koʻchadi, yaʼni bu kesma ilgari harakatda boʻladi. Demak, jismning M_1M_2 kesmada yotuvchi barcha nuqtalari bir xil traektoriya chizadi hamda har onda bir xil tezlik va bir xil tezlanishga ega boʻladi.

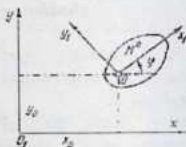
Shunday qilib, jismning M_1M_2 chiziqda yotuvchi nuqtalarining harakatini oʻrganish oʻrniga M_1M_2 kesmaning tekis shaklga taalluqli M_1 nuqtasining ha-rakatini aniqlash etarlidir. Boshqacha aytganda, jismning tekis parallel harakatini oʻrganish oʻrniga jismni qoʻzgʻalmas Π tekislikka parallel Π_1 tekislik bilan kesish natijasida olingan S tekis shaklning oʻz tekisligidagi (yaʼni Π_1 tekislikda-gi)

harakatini aniqlash etarli bo'ladi. S yuza harakatlanadigan Π_1 tekislik *tekis shaklning harakat tekisligi* deyiladi.

Tekis shaklning harakatini tekshirish uchun tekis shaklda qutb deb ataladi-gan ixtiyoriy O nuqtani ohb (10.2- rasm), bu nuqtada tekis shaklga biriktirilgan Ox_1y_1 koordinatalar sistemasini o'tkazamiz. Agar $O(x_0, y_0)$ nuqtaning koordina-talari va Ox_1 qo'zg'aluvchi o'q bilan O_1x qo'zg'almas o'q orasidagi φ burchak ma'lum bo'lsa, u holda qo'zg'aluvchi Ox_1y_1 ning holati, binobarin, tekis shakl-



10.1- rasm.



10.2- rasm.

ning harakat tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi. Shu sababli tekis shaklning

harakat tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$x_O = f_1(t), y_O = f_2(t), \varphi_O = f_3(t). \quad (10.1)$$

(10.1) tenglamalar *tekis shakl harakatining kinematik tenglamalari* yoki *ji-sm tekis parallel harakatining tenglamalari* deyiladi.

(10.1) ifodadagi birinchi ikkita tenglama qutbning harakatini, uchinchi esa tekis shaklning qutb atrofidagi aylanish qonunini ifodalaydi.

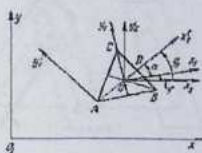
Aylanish burchagi φ dan vaqt bo'yicha olingan hosila *tekis shaklning bur-chak tezligi* deyiladi va ω_z bilan belgilanadi:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Tekis shaklning burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan hosila (yoki tekis shakl aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosila) *tekis shakl-ning burchak tezlanishi* deyiladi va ε_z bilan belgilanadi:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$$

Tekis shaklning burchak tezligi va burchak tezlanishi qutbning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmashligini isbotlaymiz. 10.3-rasmda tekis shakl sifatida teng yonli ABC uchburchak tasvirlangan. Qutb uchun medianalar kesishgan O nuqtani olamiz. Jismga birlashtirilgan va u bilan birgalikda harakatlanuvchi Ox_1 o'qni AB tomonga parallel, Oy_1 o'qni esa OC bo'yicha yo'naltiramiz. U holda aylanish burchagi $\varphi = \angle x_2Ox_1$ bo'ladi.



10.3-rasm.

Agar qutb uchun uchburchakning A uchi-ni olib, jismga birlashtirilgan

va u bilan birgalikda harakatlanuvchi Ax_1 o'qni AD mediana bo'ylab, Ay_1 o'qni AD ga perpendikulyar yo'naltirsak,

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha \quad (10.2)$$

ifoda o'rinli bo'ladi. Bunda α burchak o'zgarish ekanligini e'tiborga olib, (10.2) tenglikni ikki marta differensiallasak,

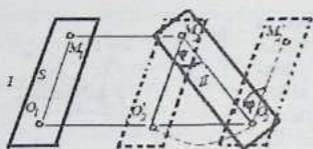
$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

isbotlanishi kerak bo'lgan munosabatlarni olamiz. Tekis shakl ixtiyoriy ko'rinishda bo'lganida ham bu tengliklar o'rinli bo'lishini isbotlash mumkin.

10.2-§. Tekis shaklning ko'chishiga oid teorema

Teorema: tekis shaklning o'z tekisligida har qanday ko'chishini qutb bilan birgalikda ilgarihlama ko'chish hamda qutb atrofida aylanma ko'chishdan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Isbot. Tekis shakl OM kesmasining t_1 va t_2 ixtiyoriy paytdagi holatlarini mos ravishda O_1M_1 va O_2M_2 bilan belgilaylik (10.4-rasm). O nuqtani qutb uchun qabul qilib, tekis shaklga shunday ilgarihlama ko'chish beramizki, natijada uning O_1 nuqtasi O_2 bilan ustma-ust tushsin, M_1 nuqta M_2 holatni egallasin. Bu ko'chishda O_1M_1 kesma O_2M_2 (tekis shakl punktir chiziq bilan ko'rsatilgan) holatni egallaydi. Tekis shaklning ilgarihlama ko'chishi O_1O_2 vektor bilan aniqlanadi. So'ngra tekis shaklning o'z harakat tekisligida O_2 qutb atrofida $\varphi = \angle M_2O_2M_1$



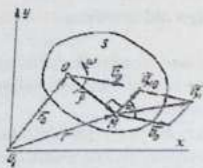
10.4-rasm.

ga aylantirsak, tekis shakl II holatni egallaydi. Rasmdan ko'ramizki, $\overline{O_1O_2} \neq \overline{M_1M_2}$, ya'ni ilgarilama ko'chish qutbning tanlanishiga bog'liq bo'ladi. Ilgarilama harakat ta'rifi ko'ra $O_2M_2 \parallel O_1M_1$ va $O_2M_2 \parallel O_1M_1$. De-mak, $O_2M_2 \parallel O_1M_1$ va $\angle M_2O_2M_1 = \angle O_2M_2O_1 = \varphi$ bo'ladi. Shu bilan birga O_2 va M_2 nuqtalar atrofidagi aylanish yo'nalishlari bir xil bo'ladi. Demak, qutb atrofidagi aylanish burchagi qutbni tanlashga bog'hq bo'lmaydi.

10.3-§. Tekis shakl nuqtalarining tezliklari

Tekis shakl nuqtalari tezligiga oid ikkita teoremani ko'rib chiqamiz.

Teorema 1. *Tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasining tezligi qutbning tezligi bilan M nuqtaning qutb atrofidagi aylanishidagi chiziqli tezligining geometrik yi-g'indisiga teng.*



10.5-rasm.

Isbot. O va M nuqtalarning qo'zg'almas O_2xy koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorlari mos ravishda \vec{r}_0 va \vec{r} bo'lsin (10.5-rasm). M nuqtaning O qutbga nisbatan radius-vektorini $\vec{\rho}$ bilan belgilaylik (jism absolyut qattiq bo'lganidan $\vec{\rho}$ vektor miqdor jihatdan o'zgarmaydi). U holda

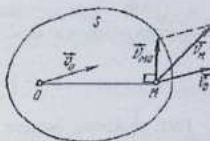
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad (10.3)$$

(10.3) ifodadan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad (10.4)$$

(10.4) da $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ va $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O$ bo'lib,

mos ravishda M va O nuqtalarning O, xy koordinata-talar sistemasiga nisbatan tezliklaridir. $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{MO}$ esa M nuqtaning



10.6-rasm.

O qutbdan o'tuvchi o'q atrofida aylanishidagi chiziqli tezligini ifodalaydi. (9.14) ga ko'ra

$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, v_{MO} = \omega \cdot \rho \quad (10.5)$$

bo'ladi. \vec{v}_{MO} vektori aylanish yo'nalishiga mos ra-vishda MO kesmaga o'tkazilgan perpendikulyar bo'yicha yo'naladi. Shunday qilib, (10.4) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \quad (10.6)$$

yoki

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (10.7)$$

Tekis shakl nuqtalari tezligini (10.6) formula vositasida aniqlashga qutb usulida aniqlash deyiladi. Agarda \vec{v}_O va \vec{v}_{MO} va ular orasidagi burchak α berilgan bo'lsa, kosi-uslar teoremasidan foydalanib M nuqta tezligining miqdori topiladi:

$$v_M = \sqrt{v_O^2 + v_{MO}^2 + 2v_O v_{MO} \cos \alpha} \quad (10.8)$$

Teorema2. *Tekis shakl ikkita nuqtasi tezliklarining shu nuqtalardan o'tuvchi o'qdagi proekstiyalari o'zaro teng*

Isbot. Tekis shakl O va M nuqtalarining tezlik vektorlari \vec{v}_O va \vec{v}_M berilgan bo'lsin (10.6-rasm). O nuqtani qutb deb olsak, M nuqtaning tezligini (10.6) ko'rinishda yozish mumkin.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$$

Bu ifodani OM o'qqa proekstiyalaymiz:

$$np_{OM} \vec{v}_M = np_{OM} \vec{v}_O + np_{OM} \vec{v}_{MO} \quad (*)$$

\vec{v}_{MO} vektor OM o'qqa perpendikulyar bo'lgani uchun

$$np_{OM} \vec{v}_{MO} = 0$$

bo'ladi. Natijada (*) dan isbotlanishi kerak bo'lgan

$$np_{OM} \vec{v}_M = np_{OM} \vec{v}_O \quad (10.9)$$

tenglikni olamiz.

(10.9) ifoda yordamida tekis shakl nuqtasining tezligini aniqlashga *proek-stiya usuli bilan aniqlash* deyiladi.

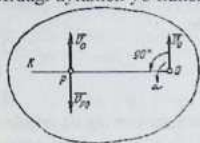
10.4- §. Tezliklar oniy markazi

Tekis shaklning berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan nuqtasi *tezliklar oniy markazi* yoki *aylanish oniy markazi* deyiladi.

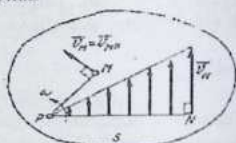
Teorema. Agar tekis shaklning burchak tezligi noldan farqli bo'lsa, tezliklar oniy markazi mavjud bo'ladi.

Isbot. Berilgan onda burchak tezligi $\omega_z = \dot{\varphi}$ bo'lgan tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezligi noldan farqli bo'lsin (10.7-rasm). O nuqtani qutb deb olamiz.

va burchak tezlikning ishorasiga qarab tekis shaklning qutb atrofidagi aylanish yo'nalishini aniqlaymiz.



10.7-rasm.



10.8-rasm.

Agar $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ bo'lsa, tekis shakl O nuqta atrofida soat strelkasi aylanishi teskari, $\omega_z = \dot{\varphi} < 0$ bo'lsa, soat strelkasi aylanadigan yo'nalishda aylanadi. $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ deb qarab aylanish yo'nalishi bo'yicha \vec{v}_O tezlik vektorini O atrofida to'g'ri burchakka burish bilan olingan OK chiziqda yotuvchi va

$$PO = \frac{v_O}{\omega}$$

tenglikka binoan aniqlanadigan P nuqtaning tezligini hisoblaymiz.

(10.6) ga asosan $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO}$. \vec{v}_{PO} vektori OP ga perpendikulyar bo'lga-

ni uchun va OP kesmaning tanlab olinishiga ko'ra \vec{v}_O va \vec{v}_{PO} vektorlar qarama-qarshi tomonga yo'naladi. (10.5) ga ko'ra \vec{v}_{PO} tezlikning moduli

$$v_{PO} = \omega \cdot PO = \frac{v_O}{\omega} \cdot \omega = v_O$$

\vec{v}_O va \vec{v}_{PO} tezlik vektorlari miqdor jihatdan teng, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgani uchun ularning yig'indisi nolga teng, ya'ni

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = 0$$

Demak, tezligi nolga teng bo'lgan tezliklar oniy markazi P mavjud ekan.

Agar P nuqtani qutb deb olsak, $\vec{v}_P = 0$ bo'lgani uchun tekis shakl M nuqtasining tezligini (10.6) formulaga binoan quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}$$

Bunda $v_{MP} = \omega \cdot PM$ (10.8-rasm) ekanligini nazarda tutsak,

$$v_M = \omega \cdot PM$$

(10.10) munosabat o'rinli bo'lishini ko'ramiz. Shunday qilib, tekis shakl nuqtalarining

tezliklar oniy markaziga nisbatan har ondagi tezliklari qo'zg'almas o'q atrofiga aylanuvchi jism nuqtalarining tezliklari kabi taqsimlanadi. Bunda aylanish oniy markazi orqali tekis shakl tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi oniy o'q qo'zg'almas o'q vazifasini o'taydi.

Agar tezliklarning oniy markazi va tekis shakl biror M nuqtasining tezligi v_M ma'lum bo'lsa, tekis shakl istalgan nuqtasining tezligini aniqlash mumkin. Haqiqatan ham (10.10) dan foydalanib teki shaklning berilgan ondagi burchak tezligini hamda ixtiyoriy N nuqtas tezligining miqdorini

$$\omega = \frac{v_M}{PM}, v_N = \omega \cdot PN = v_M \frac{PN}{PM} \quad (10.11)$$

formulalar vositasida aniqlaymiz.

\vec{v}_N vektori aylanish oniy markazi atrofidagi aylanishga mos ravishda PN chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyar bo'yicha yo'naladi.

\vec{v}_N tezlik vektorining uchini P nuqta bilan tutashtirib, PN kesmada yotuvchi nuqtalar tezliklarining taqsimlanish epyurasini 10.8-rasmdagidek tasvirlash mumkin.

(10.11) ni yana quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{v_N}{v_M} = \frac{PN}{PM} \quad (10.12)$$

ya'ni tekis shakl nuqtalarining tezliklari shu nuqtalardan tezliklar oniy marka-zigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi.

(10.10) yoki (10.12) formulalar vositasida *tekis shakl nuqtalarining tezlik-larini* aniqlashga *tezliklar oniy markazidan foydalanib aniqlash* deyiladi.

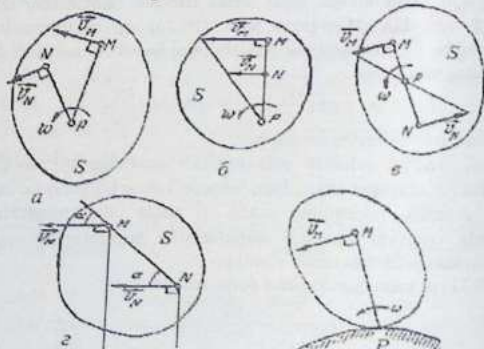
10.5- §. Tezliklar oniy markazi aniqlanadigan ba'zi holler

Tezliklar oniy markazining asosiy xususiyatlaridan foydalanib, quyidagi hollarni ko'ramiz.

1. Tekis shakl ikkita M va N nuqtasi tezliklarining yo'nalishi ma'lum bo'lsin

(10.9-rasm, *a*). M va N nuqtalardan \vec{v}_M va \vec{v}_N tezlik vektorlariga perpendikul-yarlar o'tkazsak, ularning kesishgan P nuqtasi tezliklar oniy markazini ifodalaydi.

2. M va N nuqtalarning tezlik vektorlari o'zaro parallel hamda $\vec{v}_M \perp MN$ bo'lsa, tezliklar oniy markazini aniqlash uchun tekis shakl nuqtalari tezliklari-ning miqdori shu nuqtalardan aylanish oniy markazigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'lishi xususiyatidan foydalanamiz. Bunday hollarda tezliklar oniy markazini aniqlash 10.9-rasm, *b* va *c* da ko'rsatilgan.



10.9-rasm.

10.10-rasm.

3. Agarda \vec{v}_N va \vec{v}_M vektorlari o'zaro parallel, lekin MN kesmaga perpendikul-yar bo'lmasa, bu vektorlarga o'tkazilgan perpendikulyarlar cheksizlikda kesishadi hamda tezliklar oniy markazi mavjud bo'lmaydi (10.9-rasm, ν).

Haqiqatan ham (10.9) formulaga binoan

$$v_M \cos \alpha = v_N \cos \alpha.$$

Binobarin, $\vec{v}_N = \vec{v}_M$ va (10.6), (10.5) munosabatlarni inobatga olcok, tekis sha-klning burchak tezligi berilgan onda nolga teng: $\omega = 0$. Demak, berilgan onda tekis shakl ilgari lama harakatda bo'ladi hamda tezliklar oniy markazi bo'lmaydi.

4. Tekis shakl konturi biror qo'zg'almas sirt ustida sirpanmasdan dumalasa

(10.10-rasm), har onda tekis shakl bilan sirt chizig'ining urinish nuqtasi P ning tezligi nolga teng bo'ladi. Chunki sirt qo'zg'almas bo'lgani uchun undagi har bir nuqta-ning, jumladan urinish nuqtasining tezligi nolga teng bo'ladi. Urinish nuq-tasi o'z navbatid tekis shaklga ham taalluqlidir. Demak tekis shakl konturinin qo'zg'al-mas chiziqqa urinish nuqtasi tezliklar oniy markazin ifodalaydi.

10.1-masala. $r = 0,5\text{m}$ radiusli g'ildirak to'g'ri chiziqli yo'lda sirpanib g'il-diraydi. G'ildirak markazining tezligi o'zgarmas bo'lib, $v_0 = 10\text{m/s}$ ga teng.

(10.11-rasm, a). G'ildirakning O nuqtadan shakl tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi gorizantal atrofidagi aylanish burchak tezligi $\omega = 12\text{s}^{-1}$. G'ildirak gardishidagi A va B nuqtalarning tezligi aniqlansin.

Yechish. G'ildirak nuqtalari hamisha rasm tekisligida harakatlangani tufayli u tekis pa-rallel harakatda bo'ladi. A va B nuqtalarning tezliklarini ikki usulda aniqlaymiz.

1. Qutb uchun O nuqtani olsak, (10.6) formulaga asosan A nuqta tezligi $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\omega}$ ga teng bo'ladi. Bunda \vec{v}_{ω} miqdor jihatdan

$$v_{\omega} = r \cdot \omega = 0,5 \cdot 12 = 6\text{m/s}$$

bo'lib, A nuqtada g'ildirak aylanishiga mos ravishda gorizantal bo'yicha chap-ga yo'naladi (10.11-rasm, a). Qutbning tezligi \vec{v}_0 ni A nuqtaga ko'chiramiz. \vec{v}_0

va \vec{v}_{20} vektorlari bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgani uchun ular algebraik qo'shiladi:

$$v_A = v_O - v_{20} = 4 \text{ m/s}$$

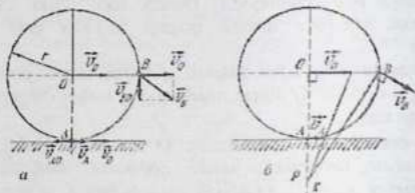
$v_O > v_{20}$ bo'lganidan \vec{v}_A vektori \vec{v}_O vektori bo'ylab yo'naladi. B nuqtaning tezligini

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{20}$$

formula vositasida aniqlaymiz. Bunda \vec{v}_{20} miqdor jihatdan $v_{20} = r \cdot \omega = 6 \text{ m/s}$ bo'lib, B nuqtada g'ildirak aylanishiga mos ravishda vertikal bo'yicha pastga yo'naladi. Qutbning tezligi v_O ni B nuqtaga ko'chirib, B nuqtaga qo'yilgan o'z-

aro perpendikulyar \vec{v}_O va \vec{v}_{20} vektorlarni qo'shsak, ularning yig'indisi to'g'ri

to'rtburchak diagonali bo'ylab yo'naladi hamda v_B ning moduli quyidagiga



10.11-pach.

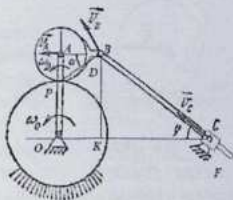
$$v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{20}^2} = \sqrt{100 + 36} = 11,66 \text{ m/s} \text{ teng bo'ladi.}$$

2. Masalani tezliklar oniy markazini topish usuli bilan echish uchun O nuq-tadan \vec{v}_O vektorga harakat yo'nalishi bo'yicha to'g'ri burchak ostida OK chiziqni o'tkazamiz (10.11-rasm, \vec{v}_O). R aylanish oniy markazi O qutbdan $PO = \frac{v_O}{\omega} = \frac{5}{6} r$ masofada yotadi. \vec{v}_A va \vec{v}_B vektorlari mos ravishda PA va PB ga perpendikulyar bo'lib, g'ildirak aylanadigan tomonga yo'naladi hamda ularning moduli (10.10) ga asosan aniqlanadi

$$v_A = PA \cdot \omega = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \text{ m/s}$$

$$v_p = PB \cdot \omega = 12 \sqrt{(0,5)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 11,66 \text{ m/s}$$

10.2-masala. Planetar — kulisa mexanizmda OA krivoship O o'q atrofida ω_0 burchak tezlik bilan aylanib, BF sterjenga shamirli bog'langan satellitni ha-rakatga keltiradi (10.12-rasm). BF sterjen o'zining harakatida doimo ko'zg'almas C nuqtadan o'tadi. OA krivoship vertikal holatda. Qo'zg'almas shesternya radiusi $2r$, qo'zg'aluvchi shesternya radiusi r ga teng hamda $\varphi = 30^\circ$, $\angle BAO = 90^\circ$, $AB = r\sqrt{3}$. BF sterjen C nuqtasining tezligi aniqlansin.



10.12-rasm.

Yechish. BF sterjen C nuqtasining tezligi A va B nuqtalar tezligiga bog'liq

bo'lgani tufayli avval A va B nuqtalar tezligini aniqlaymiz.

A nuqta ω_0 burchak tezlik bilan aylanuvchi OA krivoshipga tegishli bo'lganidan $\vec{v}_A \perp OA$ hamda

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 3r \cdot \omega_0$$

D satellit tekis parallel harakat qiladi, bunda qo'zg'aluvchi v ; qo'zg'almas shesternyalarning P urinish nuqtasi satellitning tezliklar oniy markazi bo'ladi. Shuning uchun satellit B nuqtasining \vec{v}_B tezligi P atrofida satellitning aylanish yo'nalishiga mos ravishda PB kesmaga perpendikulyar yo'naladi. To'g'ri burchakli PAB uchburchakda:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AP}{AB} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ya'ni } \alpha = 30^\circ$$

Proektsiya usulidan foydalanib B nuqta tezligini aniqlaymiz:

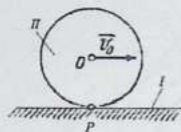
$$np_{AB} \vec{v}_B = np_{AB} \vec{v}_A$$

$$\text{Shunga ko'ra } v_B \cos 60^\circ = v_A \quad \text{yoki } v_B = \frac{v_A}{\cos 60^\circ} = 6r\omega_0$$

BF sterjen harakati ham tekis parallel harakatdan iborat. Sterjenning C nuqtasi doimo qo'zg'almas nuqtadan o'tgani uchun uning \vec{v}_C tezligi B nuqta tezligiga mos ravishda sterjen bo'yicha yo'naladi hamda proektsiya usuliga asosan \vec{v}_C va \vec{v}_B larning CB o'qdagi proektsiyalari o'zaro teng bo'ladi:

$$np_{CB} \vec{v}_C = np_{CB} \vec{v}_B$$

$$\text{Bu formulaga ko'ra } v_C = v_B \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}r\omega_0$$



10.13 - rasm.

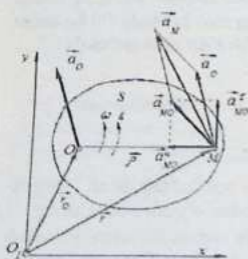
chiziqni ifodalaydi. Tezliklar oniy markazining tekis shaklning harakat tekisligidagi geometrik o'z-g'almas sentroida deyiladi.

Tezliklar oniy markazining tekis shaklga bog'lan-gan tekislikdagi geometrik o'z-g'aluvchi sentroida deyiladi.

Masalan, qo'zg'almas rels ustida sirpanmay duma-layotgan g'ildirak uchun qo'zg'almas stentroida I to'g'ri chiziq, qo'zg'aluvchi stentroida g'ildirak gardishidagi II aylanadan iborat (10.13 - rasm).

Har onda qo'zg'almas va qo'zg'aluvchi stentroidalar tezliklar oniy markazini ifodalovchi P nuqtada umumiy urinish nuqtasiga ega bo'ladi. Shu sababli qattiq jismning tekis parallel harakatini geometrik tarzda quyidagicha talqin qilish mumkin: *tekis shaklning harakatini qo'zg'aluvchi stentroidani qo'zg'almas sten-troida ustida sirpantirmasdan dumalatish natijasida olish mumkin.*

10.7-§. Tekis shakl nuqtasi tezlanishini qutb usulida aniqlash



10.14 - rasm.

Teorema. *Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi qutbning tezlanishi bilan mazkur nuqtaning qutb atrofida aylanishidagi tezlanishining geometrik yig'indisiga teng.*

Isbot. Tekis shakl M nuqtasining tezlanishini aniqlash uchun (10.7) ifoda-dan vaqt bo'yicha hosila olamiz (10.14-rasm).

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

(10.13)

Bunda $\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M$ va $\frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{a}_O$ mos

ravish-da qo'zg'almas O,xy koordinatalar sistemasi-

ga nisbatan M va O nuqtalar tezlanishini, (9.14) dan $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{p} = \vec{v}_{MO}$ — M nuqtaning O qutb atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylani-shidagi chiziqli tezligini, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ tekis sha-klning burchak tezlanishini ifodalaydi. $\vec{\varepsilon}$ vektori ($\vec{\omega}$ vektori kabi) harakat tekisligiga perpendikulyar yo'naladi.

Shunday qilib, M va O nuqtalarning tezlanishlari orasida quyidagi munosa-bat o'rinni bo'ladi:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{p} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MO} \quad (10.14)$$

Bunda

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{p} = \vec{a}_{MO}^t \quad (10.15)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{MO} = \vec{a}_{MO}^n \quad (10.16)$$

(10.15) ifoda M nuqtaning O qutb atrofida aylanishidagi aylanma tezlanishi-ni, (10.16) ifoda esa M nuqtaning O qutb atrofida aylanishidagi markazga intil-ma tezlanishini ifodalaydi.

Shunday qilib, (10.14) ifodani quyidagicha yoza olamiz:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^t + \vec{a}_{MO}^n \quad (10.17)$$

Bu formulada aylanma tezlanish bilan markazga intilma tezlanishlarning geometrik yig'indisi M nuqtaning O qutb atrofida aylanishidagi tezlanishini ifodalaydi:

$$\vec{a}_{MO} = \vec{a}_{MO}^t + \vec{a}_{MO}^n$$

Natijada (10.17) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO} \quad (10.18)$$

(10.17) formuladagi \vec{a}_{MO}^t aylanma tezlanish vektori M nuqtani O qutb bilan birlashtiruvchi OM chiziqqa perpendikulyar ravishda yo'naladi; bunda $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ bir xil ishorali bo'lsa, \vec{a}_{MO}^t va \vec{v}_{MO} vektorlari bir yo'nalishda; turlicha ishorali bo'lsa, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi (10.14-rasmda $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ bir xil ishorah bo'lgan hol tasvirlangan). (10.17) dagi \vec{a}_{MO}^n markazga intilma tezlanish vektori hamisha M nuqtadan O qutb tomon yo'naladi.

(9.17), (9.18) va (9.20) formulalarga asosan \vec{a}_{MO}^t , \vec{a}_{MO}^n va \vec{a}_{MO} larn-ing miqdori

$$\vec{a}_{MO}^t = \varepsilon \cdot MO \quad (10.19)$$

$$\vec{a}_{MO}^n = \omega^2 \cdot MO \quad (10.20)$$

$$a_{MO} = MO \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.21)$$

\vec{a}_{MO} ning yoʻnalishi esa (9.21) ga koʻra

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (10.22)$$

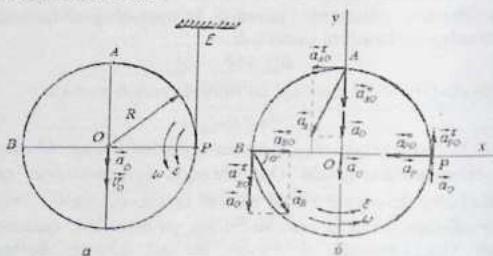
formulalar yordamida aniqlanadi.

10.8-§. Qutb usuli bilan tekis shakl nuqtalarining tezlanishlarini aniqlashga oid masalalar

Tekis parallel harakatdagi jism nuqtasining tezlanishini aniqlashga doir masalalarni asosan 4 xil guruhga boʻlish mumkin.

I xil masalalar. Tekis shaklning burchak tezligi ω , burchak tezlanishi ε hamda biror O nuqtasining tezlanishi \vec{a}_O berilgan yoki ularni aniqlash mumkin boʻlib, tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasining tezlanishini aniqlash soʻraladi.

M nuqtaning tezlanishini (10.17) dan foydalanib, \vec{a}_{MO}^r va \vec{a}_{MO}^n miqdorlarini esa (10.19), (10.20) formulalar yordamida aniqlaymiz. Soʻngra (10.17) ni oʻzaro



10.15-rasm.

perpendikulyar ikkita Mx va My yoʻnalishga proektsiyalab \vec{a}_M ning miqdorini $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}$ formula bilan aniqlash maqsadga

muvofiqdir, \vec{a}_M yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali topiladi.

10.3-masala. Radiusi R ga teng g'altakka E uchi qo'zg'almaydigan qilib bog'langan ingichka ip o'rangan (10.15-rasm, a). G'altak pastga tushishida uning o'qi vertikal bo'yicha yo'nalgan $v_o = gt/2$ tezlik bilan harakatlanadi. G'altak gardishidagi P , A , B nuqtalarning tezlanishlari aniqlansin; $PB \perp AO$.

Yechish. G'altak tekis parallel harakat qiladi. G'altak markazidagi O nuqtaning vertikal bo'yicha to'g'ri chiziqli harakati berilgan. Binobarin, O nuqtani qutb deb tanlash uchun avvalo uning tezlanishini aniqlaymiz:

$$a_o = \frac{dv_o}{dt} = g/2$$

\vec{a}_o vektori vertikal bo'yicha pastga yo'nalgan.

Ip osilib turgan qismining tezligi nolga teng bo'lganidan g'altak I nuqtasining tezligi ham nolga teng, ya'ni P nuqta g'altakning tezlilki oniy markazi bo'ladi. Shu sababli g'altakning burchak tezligi

$$\omega = \frac{v_o}{OP} = gt/2R$$

bo'ladi. \vec{v}_o tezlik yo'nalishiga ko'ra burchak tezlikni soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalgan yoy strelkasi tarzida tasvirlash mumkin.

G'altak burchak tezligi vaqtning funkstiyasi sifatida aniqlangan. Binobarin, g'altakning burchak tezlanishi quyidagicha topiladi:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = g/2R$$

ω va ε bir xil ishorali bo'lgani uchun g'altakning burchak tezlanishini 10.17- rasm, a da ko'rsatilgan yoy strelkasi bilan tasvirlash mumkin.

O nuqtani qutb deb olsak, (10.17) formulaga binoan tezliklar oniy markazi P nuqtaning tezlanishi quyidagi tenglamadan aniqlanadi:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{a}_{PO}^t + \vec{a}_{PO}^n \quad (1)$$

(10.20) va (10.19) ga ko'ra

$$a_{PO}^t = \varepsilon \cdot PO = \frac{g}{2} \quad (2)$$

$$a_{PO}^n = \omega^2 \cdot PO = \frac{g^2 t^2}{4R} \quad (3)$$

bo'lib, \vec{a}_{PO}'' markazga intilma tezlanish vektori P dan O ga qarab, \vec{a}_{PO}' — aylanma tezlanish vektori esa OP ga perpendikulyar ravishda e yoy strelkasi yo'nalishiga moslab yo'naltiriladi. 10.15-rasm, δ dan ko'ramizki, \vec{a}_{PO}' va \vec{a}_O vektorlari bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan hamda $a_O = a_{PO}'$. Shunday qilib, (1) ifodada $\vec{a}_O = -\vec{a}_{PO}'$ bo'lgani tufayli

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{PO}'' \quad \text{va} \quad a_P = a_{PO}'' = \frac{g^2 t^2}{4R}$$

P nuqta tezlanishi P dan O ga qarab yo'nalgan. A nuqta tezlanishini aniqlashda yana O ni qutb deb olamiz:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}' + \vec{a}_{AO}'' \quad (4)$$

Bu ifodadagi \vec{a}_{AO}'' vektori A dan O ga qarab, ya'ni \vec{a}_O bilan bir tomonga, \vec{a}_{AO}' esa Ox o'qning musbat yo'nalishiga teskari yo'nalgan. $AO = OP = R$ bo'lgani uchun \vec{a}_{AO}'' va \vec{a}_{AO}' miqdorlari (2) va (3) tengliklari bilan aniqlanadi.

(4) vektor tenglamani o'zaro perpendikulyar Ox va Oy o'qlarga proeksiyalaymiz:

$$a_{Ax} = -a_{AO}' = -\frac{g}{2},$$

$$a_{Ay} = -a_O - a_{AO}'' = -\frac{g}{4R}(2R + gt^2).$$

Shinobarin, A nuqta tezlanishining moduli

$$a_M = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}},$$

\vec{a}_A ning yo'nalishi esa $\cos \alpha = \frac{a_{Ax}}{a_A}$, $\cos \beta = \frac{a_{Ay}}{a_A}$ formulalardan aniqlanadi.

B nuqta tezlanishi ham A nuqtaning tezlanishiga o'xshash aniqlanadi.

II xil masalalar. Vaqtning biror payti uchun tekis shakl O nuqtasi tezlanishi-ning miqdori va yo'nalishi, oniy burchak tezlik va boshqa biror M nuqtasi tezlanishining yo'nalgan chizig'i ma'lum. Tekis shaklning shu paytdagi burchak tezlanishi va M nuqtaning tezlanishini aniqlash talab etiladi.

M nuqta tezlanishini aniqlashda (10.17) formuladan foydalanamiz. Undagi \vec{a}_{MO}^n ning miqdori (10.20) formula bilan aniqlanadi. Binobarin (10.17) tenglikning o'ng tomonidagi \vec{a}_O va \vec{a}_{MO}^n vektorlar miqdor va yo'nalish jihatdan ma'lum. \vec{a}_{MO}^t , MO ga perpendikulyar bo'lib, uning yo'nalishi ma'lum emas. Odatda \vec{a}_{MO}^t ni yo'naldirishda M nuqtaning O atrofida aylanishi tezlanuvchan deb qaraladi. (10.17) tenglamani \vec{a}_M ga perpendikulyar yo'nalishga proekstiyalash natijasida \vec{a}_{MO}^t ning miqdori aniqlanadigan bitta tenglamaga ega bo'lamiz. Agar bu kattalik manfiy qiymatga ega bo'lsa, \vec{a}_{MO}^t ning haqiqiy yo'nalishi olingan yo'nalishga qarama-qarshi, ya'ni M ning O atrofida aylanishi sekinlanuvchan bo'ladi. \vec{a}_{MO}^t ni bilgan holda (10.19) ga asosan ϵ ni aniqlaymiz. (10.17) ni \vec{a}_M ga perpendikulyar bo'lma-

gan o'qqa proekstiyalab, \vec{a}_M ni miqdor va yo'nalish jihatdan aniqlaymiz.

Bunda a_M ning ishorasi uning yo'nalishini xarakterlaydi.

10.4-masala. Krivoship-shatunli mexanizmning berilgan holati uchun B nuqtaning tezlanishi aniqlansin (10.16-rasm, a), Quyidagilar berilgan: $AB=l$, $OA=r$, $\omega_{OB} = \omega_O$, $\epsilon_{OB} = \epsilon_O$.

Yechish. OA krivoship ω_O burchak tezlik va ϵ_O burchak tezlanishi bilan aylanma harakatda bo'lgani uchun A nuqtaning tezlik va tezlanishini quyida-gicha aniqlash mumkin:

$$v_A = \omega_O \cdot r \quad (1)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O^t + \vec{a}_A^n \quad (2)$$

Bunda

$$\vec{a}_A^t = \epsilon_O \cdot r, \vec{a}_A^n = \omega_O^2 \cdot r. \quad (3)$$

Bu vektorlarning yo'nalishi 10.16-rasm, \vec{a} va ϵ dagidek yo'naladi.

A nuqtani qutb deb olib, AB shatun B nuqtasining tezlanishini (10.17) ga binoan aniqlaymiz (10.16-rasm, e):

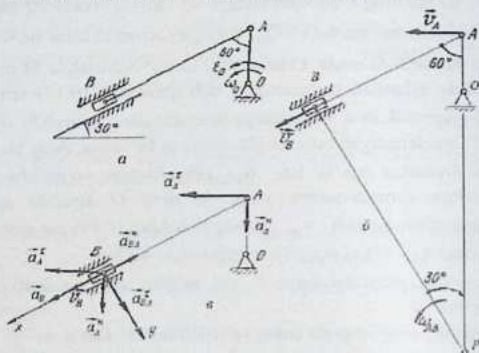
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

yoki

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n \quad (4)$$

B nuqtaning harakatini tezlanuvchan deb qarab, \vec{a}_B ni \vec{v}_B bo'yicha yo'naltiramiz.

$$(4) \text{ ifodada } a_{BA}^t = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_{AB} \cdot l, a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega_{AB}^2 \cdot l \quad (5)$$



10.16-rasm.

bo'lib, ω_{AB} va ε_{AB} lar mos ravishda AB shatunning berilgan paytdagi oniy bur-chak tezlanishini ifodalaydi.

\vec{a}_{BA}^t vektori B nuqtadan A qutbga yo'nalgan; \vec{a}_{BA}^n esa AB ga perpendikulyar yo'nalgan. B nuqtaning A qutbga nisbatan aylanishini tezlanuvchan deb faraz qi-lib, AB shatunning P tezliklar oniy markazi atrofida aylanishidagi oniy burchak tezlik yo'nalishiga mos ravishda \vec{a}_{BA}^t ni 10.16-rasm, ε dagidek yo'naltiramiz. Shatunning berilgan holati uchun tezliklar oniy markazi P nuqtada bo'lgani uchun

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_{OP}}{2l} \quad (6)$$

(6) formula yordamida mexanizmning berilgan paytdagi holatiga mos keluvchi AB shatunning oniy burchak tezligi aniqlanadi. Shu sababli, ε_{AB} ni (6) ni differensiallash yo'li bilan aniqlab bo'lmaydi. ε_{AB} noma'lum bo'lgani uchun \vec{a}_{BA}^t ni aniqlashda (4) ni \vec{a}_B vektori yo'nalishiga perpendikulyar bo'lgan B y o'qqa pro-ekstiyalaymiz:

$$0 = a_x^n \cdot \cos 30^\circ - a_x^t \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^t$$

Bundan

$$a'_{Ba} = a'_A \cdot \cos 60^\circ - a'_A \cos 30^\circ$$

(3) ni nazarda tutsak,

$$a'_{Ba} = \frac{r}{2} (\varepsilon_o - \omega_o^2 \sqrt{3}). \quad (7)$$

(7) dan ko'ramizki, $\varepsilon_o > \omega_o^2 \sqrt{3}$ bo'lsa, $a'_{Ba} > 0$ va B nuqtaning A qutb atrofida oniy aylanishi tezlanuvchan bo'ladi va \vec{a}'_{Ba} yo'nalishi 10.16-rasm, ε da ko'rsa-tilganidek qoladi; $\varepsilon_o < \omega_o^2 \sqrt{3}$ holda \vec{a}'_{Ba} ning yo'nalishi mazkur rasmdagiga qarama-qarshi bo'ladi. (5) ga ko'ra $a'_{Ba} = \varepsilon_{AB} \cdot l$

bo'lgani uchun $\varepsilon_{AB} = \frac{r}{2l} (-\omega_o^2 \sqrt{3} + \varepsilon_o)$, (4) ni Bx o'qqa proekstiyalasak,

$$\begin{aligned} a_{Ba} &= -a'_{Ba} + a'_A \cdot \cos 30^\circ + a'_A \cos 60^\circ = -\omega_o^2 \cdot l + \frac{\varepsilon_o r \sqrt{3} + \omega_o^2 r}{2} \\ &= -\frac{\omega_o^2 r^2}{2l} + \frac{\varepsilon_o r \sqrt{3}}{2} + \frac{\omega_o^2 r}{2} = \frac{r}{2} \left[\omega_o^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \varepsilon_o \sqrt{3} \right] \end{aligned}$$

Agar $\left[\omega_o^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \varepsilon_o \sqrt{3} \right] > 0$ bo'lsa, \vec{a}_B ning yo'nalishi Bx niq musbat, aks holda manfiy yo'nalishiga mos tushadi. Shunday qilib,

$$a_B = \frac{r}{2} \left[\omega_o^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \varepsilon_o \sqrt{3} \right].$$

III xil masalalar. Vaqtning biror payti uchun tekis shakl ikkita O va M nuqtalarining tezlanishi miqdor va yo'nalish jihatdan ma'lum bo'lib, tekis sha-klning shu paytdagi burchak tezligi, burchak tezlanishi, shuningdek ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini aniqlash so'raladi.

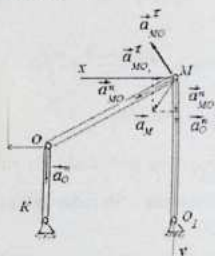
Masalani echish uchun tezlanishi ma'lum bo'lgan nuqtalardan biri, masalan O nuqtani qutb deb olib, ikkinchi nuqtasining tezlanishi uchun (10.17) ko'ri-

nisdagi tenglamani olib, uni ikkita birligiga perpendikulyar yo'nalishga (odat-da OM va unga tik bo'lgan yo'nalishga) proekstiyalanadi. Hosil bo'lgan ikkita tenglamadan \vec{a}'_{MO} va \vec{a}'_{MO} lar hamda (10.20) va (10.19) vositasida ω va ε lar aniqlanadi. Bunda

\vec{a}_{MO}^n M nuqtadan O ga qarab yo'nalgan. \vec{a}_{MO}^t vektori \vec{a}_{MO}^n ga perpendikulyar ravishda (10.17) tenglik asosida yo'naltiriladi.

IV xil masalalar. Vaqtning biror payti uchun tekis shaklning oniy burchak tezligi ω va O nuqtasining tezlanishi \vec{a}_O miqdor va yo'nalish jihatdan berilgan. Ushbu tekis shaklning ixtiyoriy M nuqtasi shakl tekisligidagi biror O_1 qo'zg'almas o'q atrofida ω_1 burchak tezlik bilan aylanuvchi jismga ham taalluqlidir. M nuqtaning tezlanishini, tekis shakl, shuningdek, O_1 o'q atrofida aylanuvchi jismning burchak tezlanishini aniqlash so'raladi.

Bu xildagi masalalarni echishda bir tomondan M nuqtani tekis shaklga (10.17-rasm) tegishli deb qarab, (10.17) tenglamani, ikkinchi tomondan O_1



10.17-rasm.

mos ravishda O_1 va O larga nisbatan aylanishi tezlanuvchan deb taxmin qilinib tanlanadi. (b) ifodani ikki xil yo'nalishga proektsiyalashdan hosil bo'lgan tenglamalardan $\vec{a}_{MO_1}^t$ va $\vec{a}_{MO_1}^n$ aniqlanadi. So'ngra M nuqta tezlanishi moduli (9.20) ga asosan

$$a_M = \sqrt{(a_{MO_1}^t)^2 + (a_{MO_1}^n)^2},$$

burchak tezlanishlari esa (10.19) va (9.17) ga ko'ra aniqlanadi:

$$\varepsilon = \frac{a_{MO}^t}{MO}, \varepsilon_1 = \frac{a_{MO_1}^t}{MO_1}.$$

Bu holda M nuqta tezlanishining yo'nalishi (9.22) tenglikdan foydalanib topiladi.

atrofida aylanuvchi jismga taalluqli deb qarab, (9.16) ga ko'ra

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MO_1}^t + \vec{a}_{MO_1}^n \quad (a)$$

tenglamani yozish mumkin. (10.17) va (a) tenglamalarni o'ng tomonlarini o'zaro tenglashtirsak,

$$\vec{a}_{MO_1}^t + \vec{a}_{MO_1}^n = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^t + \vec{a}_{MO}^n \quad (b)$$

vektorli tenglama olamiz. ω va ω_1 berilgan bo'lgani uchun (b) tenglamadagi $\vec{a}_{MO_1}^t$, \vec{a}_O , \vec{a}_{MO}^t lami hisoblab topish mumkin; $\vec{a}_{MO_1}^t$ va $\vec{a}_{MO_1}^n$ vektorlarining yo'nalishi M nuqtaning

mos ravishda O_1 va O larga nisbatan aylanishi tezlanuvchan deb taxmin qilinib tanlanadi. (b) ifodani ikki xil yo'nalishga

proektsiyalashdan hosil bo'lgan tenglamalardan $\vec{a}_{MO_1}^t$ va $\vec{a}_{MO_1}^n$

aniqlanadi. So'ngra M nuqta tezlanishi moduli (9.20) ga asosan

$$a_M = \sqrt{(a_{MO_1}^t)^2 + (a_{MO_1}^n)^2},$$

burchak tezlanishlari esa (10.19) va (9.17) ga ko'ra aniqlanadi:

$$\varepsilon = \frac{a_{MO}^t}{MO}, \varepsilon_1 = \frac{a_{MO_1}^t}{MO_1}.$$

Bu holda M nuqta tezlanishining yo'nalishi (9.22) tenglikdan foydalanib topiladi.

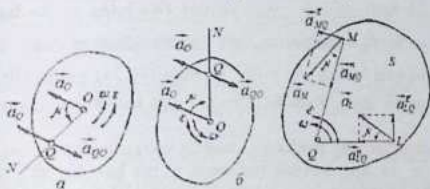
Qattiq jism tekis parallel harakatiga doir hisob-grafik ishlari variantlari 2-ilovaning 3-topshirig'ida berilgan.

10.9-§. Tezlanishlar oniy markazi

Tezlanishi berilgan onda nolga teng bo'lgan tekis shaklning (yoki tekis shaklga mahkam biriktirilgan va u bilan birgalikda harakatlanuvchi tekislikning) nuqtasi *tezlanishlar oniy markazi* deyiladi.

Tezliklar oniy markaziga o'xshash ilgarilama harakatda bo'lmagan tekis shaklning harakat tekisligida har onda tezlanishlar oniy markazi mavjud bo'lishini isbotlash mumkin.

Teorema. *Ilgarilama harakatda bo'lmagan tekis shaklning harakat tekisligida har onda tezlanishlar oniy markazi mavjud bo'ladi.*



10.18-rasm.

10.19-rasm.

Isbot. Tekis shaklning burchak tezligi ω burchak tezlanishi ε va aylanish yo'nalishi hamda O nuqtasi (qutb) ning tezlanishi \vec{a}_O berilgan bo'lsin. Tezlanishlar oniy markazini Q bilan belgilaylik. Q nuqtaning holatini aniqlash uchun (10.22) formuladan μ burchakni topamiz:

$$\mu = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

\vec{a}_O vektori bilan μ burchak tashkil etuvchi ON to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, agar tekis shaklning aylanishi tezlanuvchan bo'lsa, μ burchak aylanish yo'nalishi bo'yicha, sekinlanuvchan bo'lsa, aylanishga teskari yo'nalishda qo'yiladi (10.18-rasm, a, b). ON chiziqda O nuqtadan

$$OQ = \frac{a_o}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad (10.23)$$

masofada Q nuqtani olsak, bu nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'ladi.

Haqiqatan ham, O nuqtani qutb deb olib, Q nuqtaning tezlanishini (10.18) ga ko'ra hisoblaylik:

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_O + \vec{a}_{QO} \quad (10.24)$$

(10.21) formulaga asosan:

$$a_{QO} = QO \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

(10.23) ni e'tiborga olsak,

$$a_{QO} = \frac{a_o}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_o$$

tenglik kelib chiqadi. \vec{a}_{QO} vektori OQ bilan μ burchak tashkil adi, ya'ni \vec{a}_{QO} vektori \vec{a}_O ga miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi: $\vec{a}_{QO} = -\vec{a}_O$. Buni (10.24) ga qo'yib, $\vec{a}_Q = 0$ ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib, Q nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'ladi.

Tezlanishlar oniy markazi Q hamda tekis shaklning oniy burchak tezligi ω va oniy burchak tezlanishi ε ma'lum bo'lsa, tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasining tezlanishi quyidagicha aniqlanadi (10.19-rasm).

Q nuqtani qutb deb olsak, (10.17) ga ko'ra

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ}^* + \vec{a}_{MQ}^n$$

Bunda $\vec{a}_Q = 0$ bo'lganidan

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MQ}^* + \vec{a}_{MQ}^n \quad (10.25)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi shu nuqtaning tezlanishlar oniy markazi atrofida aylanishidagi tezlanishiga teng bo'ladi.

(10.21) va (10.22) ga ko'ra quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi.

$$a_M = MQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.26)$$

$$lg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (10.27)$$

Tekis shakl boshqa biror L nuqtasi tezlanishining miqdori (10.26) ga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$a_t = LQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.26, a)$$

yo'nalishi uchun (10.27) formula o'zgarmay qolaveradi, ya'ni *tekis shakl nuq-talarining tezlanishi mazkur nuqtalarni tezlanishlar oniy markazi bilan tutashti-ruvchi chiziq-lar bilan bir xil burchak tashkil etadi.*

(10.26) va (10.26, a) dan

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_t}{LQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.28)$$

munosabatni olamiz.

Demak, *tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari shu nuqtalardan tezlanishlar oniy markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi.*

10.5-masala. OA krivoship Oy o'qda yotganda krivoship-shatunli mexanizm B polzunining va AB shatun o'rtasidagi C nuqtaning tezlanishlari aniqlansin (10.20-rasm).

OA krivoship O nuqta atrofida $\omega_0 = 15s^{-1}$ o'zgarmas burchak tezli bilan aylanadi. Krivoshipning uzunligi $OA = 0,4M$, shatunning uzunli $AB = 2M$.

Yechish. Shatun A va B nuqtalarining tezligi \vec{v}_A va \vec{v}_B o'zaro paralle hamda $A B$ ga perpendikulyar bo'lmagani uchun tezliklar oniy markazi (\vec{v}_A va \vec{v}_B ga A va B nuqtalarda o'tkazilgan perpendikulyarning kesishgan nuqtasi) cheksiz uzoqlashgan nuqtadan iborat bo'ladi, ya'ni berilgan onda $\omega_{AB} = 0$ bo'ladi.

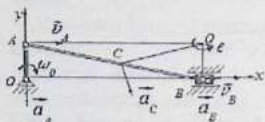
B nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lgani uchun uning tezlanishi Ox o'q bo'ylab yo'naladi; shatunning A nuqtasi OA krivoshipga ham taalluqli bo'lib, OA krivoship tekis aylanma harakat qilgani uchun \vec{a}_A tezlanish aylanish markazi O nuqtaga yo'naladi, uning qiymati $a_A = OA \cdot \omega_0^2 = 90M/s^2$ ga teng. $\omega_{AB} = 0$

bo'lgani uchun AB shatun tezlanishlarining oniy markazi A va B nuqtalarda \vec{a}_A va \vec{a}_B tezlanishlarga perpendikulyar ravishda o'tkazilgan chiziqlarning kesishgan Q nuqtasida bo'ladi.

$$\omega_{AB} = 0, \varepsilon_{AB} = \frac{a_A}{AQ} = \frac{90}{\sqrt{4-0,16}} = 45,92 \text{ s}^{-2}$$

bo'lgani uchun B va C nuqta-larning tezla-nishlari faqat tezlanishlarning oniy markazi Q nuqta atrofidagi aylanma tezlanishdan iborat bo'ladi:

$$a_B = BQ \cdot \varepsilon_{AB} = 0,4 \cdot 45,92 = 18,37 \text{ m/s}^2$$



10.20- rasm.

$$a_C = CQ \cdot \varepsilon_{AB} = 1 \cdot 45,92 = 45,92 \text{ m/s}^2$$

C nuqtaning tezlanishi CQ ga perpendikulyar yo'naladi.

Nazorat savollari:

1. Tekis parallel harakatining xususiyatlarini ayting.
2. Tekis shaklning harakat tenglamasini yozing.
3. Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb usulida aniqlash.
4. Tezliklar oniy markazi va uni aniqlash usullari.
5. Tezliklar oniy markazi yordamida tezlikarni aniqlash.
6. Tekis shakl nuqtasi tezlanishi.
7. Tezlanishlar oniy markazi.

11-BOB. QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAC NUQTA ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI

Tayanch so'zlar: qo'zg'almas nuqta, Eylar burchaklari, Eylar-Dalamber te-oremasi, oniy aylanish o'qi, aksoidlar, Eylarning kinematik tenglamalari

11.1-§. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat tenglamalari. Eylar burchaklari

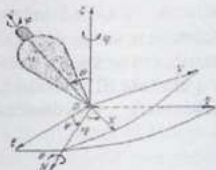
Harakat davomida bitta nuqtasi hamisha qo'zg'almasdan qoladigan qattiq jismining harakati qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat yoki sferik harakat deyiladi.

Bunday harakatda jismning barcha nuqtalari umumiy marka qo'zg'almas nuqta bilan ustma-ust tushuvchi sferalarning sirtlarini harakatlanadi.

Tayanch tekisligidagi nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan pirildoqning harakati yo-ki birgina sferik sharnirni bog'lanish qo'yilgan jismning harakati sferik harakat-ga misol bo'la oladi

Qo'zg'almas O nuqtaga ega bo'lgan jismning $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan holatini aniqlash uchun jismga birlashtirilgan va u bilan birga harakatlanuvchi hamda koordinatalar boshi qo'zg'almas O nuqta bilan ustma-ust tushuvchi $Oxyz$ qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini o'tkazamiz (11.1-rasm).

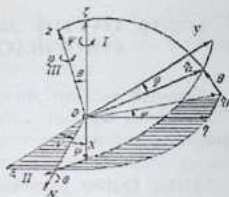
Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan holatini Eylar tomonidan tavsiya etilgan va *Eylar burchaklari* deb ataluvchi uchta bir-biriga bog'liq bo'lmagan burchaklar vositasida aniqlash mumkin. Eylar burchaklari quyidagicha belgilanadi: $O\xi\eta$ qo'zg'almas tekislikning qo'zg'aluvchi Oxy tekislik bilan kesishgan chizig'i ON tugunlar chizig'i deyiladi. Tugunlar chizig'i bir yo'la Oz va $O\xi$ ga perpendikulyar bo'lgani uchun bu o'qlar orqali o'tuvchi tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi. $O\xi\eta$ qo'zg'almas tekislikda yotuvchi, $O\xi$ o'q bilan ON



11.1-rasm.

tugunlar chizig'i orasidagi burchak ψ bilan belgilanadi va *prestessiya burchagi* deyiladi.

Tugunlar chizig'ining Ox qo'zg'aluvchi o'q bilan tashkil qilgan burchagi φ bilan belgilanib, u *sof aylanish burchagi* deyiladi. Qo'zg'aluvchi Oz o'q *sof ay-lanish o'qi* deyiladi.



11.2-rasm.

$O\xi\eta$ va Oxy tekisliklar orasidagi burchak yo-ki $O\xi$ qo'zg'almas o'q bilan Oz qo'zg'aluvchi o'q orasidagi burchak θ bilan belgilanadi va *nutastiya burchagi* deyiladi. ψ , φ , θ burchaklar *Ey-ler burchaklari* deyiladi. Eyler burchaklarining musbat yo'nalishi uchun $O\xi$, Oz va ON o'q-larning musbat yo'nalishidan qaraganda mos ravishda shu o'qlarga perpendikulyar tekisliklarda o'zgaruvchi ψ , φ , θ urchaklarning soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda orta oradigan yo'nalishlarini qabul qilamiz.

Jismning qo'zg'almas nuqta atrofida ko'chishiga oid quyidagi teoremani ko'rib chi-qamiz.

Eyler teoremasi. *Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi ixtiyoriy ko'chishini mazkur qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi uchta o'q atrofida ketma-ket uchta aylantirish bilan bajarish mumkin.*

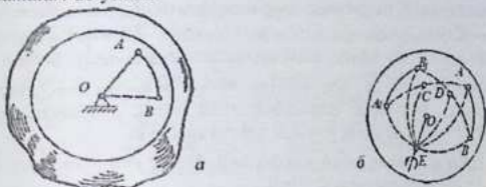
Isbot. Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning chekli vaqt ichida ko'ch-gandagi holati $Oxyz$ koordinatalar sistemasi bilan berilgan bo'lsin.

Boshlang'ich paytda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'al-mas koordinatalar sistemasi bilan ustma-ust tushgan deb qaraylik. Mazkur qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini $O\xi$ o'q atrofida I yo'nalishda ψ bur-chakka aylantirsak, u $ON\eta\zeta$ holatni egallaydi (11.2-rasm). So'ngra $ON\eta\zeta$ ko-ordinatalar sistemasini ON o'q atrofida II yo'nalishda θ burchakka aylantirib, $ON\eta\zeta$ koordinatalar sistemasini olamiz. Nihoyat, $ON\eta\zeta$ ni Oz o'q atrofida III yo'nalishda φ burchakka burish natijasida qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasini olamiz.

Shunday qilib, bu teoreмага ko'ra qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning istalgan paytdagi holatini bir-biriga bog'liq bo'lmagan uchta Eyer burchaklari vositasida aniqlash mumkinligini ko'ramiz. Jismning harakati davomida bu burchaklar vaqtning uzluksiz funkstiyasidan iborat bo'ladi:

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t) \quad (11.1)$$

Bu funkstional munosabatlar qo'zg'almas nuqta atrofida aylantiruvchi qat-tiq jismning kinematik tenglamalari yoki sferik harakat tenglamalari deyiladi.



11.3-rasm

11.2-§. Eyer- Dalamber teoremasi

Teorema. *Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jismning bir holatdan ikkinchi holatga har qanday ko'chishini qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi o'q atrofida bir aylantirish bilan amalga oshirish mumkin.*

Isbot. Geometriyadan ma'lumki, jismning fazodagi vaziyatini uning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtasining holati orqali aniqlash mumkin.

Sferik harakatdagi jismning holati uning qo'zg'almas O nuqtasi bilan bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan yana ikkita nuqtaning holati bilan aniqlanadi. O nuqta-ni markaz qilib jismni kesib o'tuvchi ixtiyoriy radiusli sfera o'tkazamiz (11.3-rasm, a). Bu sfera sirtida jismga taalluqli ikkita ixtiyoriy A va B nuqtalarni olamiz. U holda jismning holatini A va B nuqtalardan o'tuvchi sfera katta aylanasining yoyi AB bilan aniqlash mumkin.

Aytaylik, qo'zg'almas O nuqtaga ega bo'lgan jismning t vaqtdagi holati

sfera katta aylanasining yoyi AB bilan aniqlansin, $t + \Delta t$ vaqtdan keyin mazkur jism bilan birgalikda ko'chib $A_1 B_1$ holatni egallasin (11.3-rasm, \widehat{o}).

Teoremani isbotlash uchun A va A_1 hamda B va B_1 nuqtalarni sfera katta aylanasining yoylari bilan tutashtiramiz. AA_1 va BB_1 yoylarning o'rtasidagi C

va D nuqtalardan sferik perpendikulyar yoylar o'tkazib, ularning kesishgan nuqtasini E bilan belgilaylik. E nuqta A va A_1 nuqtalardan hamda B va B_1 nuqtalardan teng uzoqlikda bo'lganidan $\overline{AE} = \overline{A_1 E}$ va $\overline{BE} = \overline{B_1 E}$. Jism absolyut qattiq bo'lganidan $\overline{AB} = \overline{A_1 B_1}$. Binobarin, $\angle AEB$ va $\angle A_1 E B_1$ sferik uch-burchaklar o'zaro teng bo'ladi. Bu uchburchaklarni OE o'q atrofida $\widehat{AEA_1} = \widehat{BEB_1} = \Delta\alpha$ burchakka aylantirsak, $\angle AEB$ sferik uchburchak $\angle A_1 E B_1$ sferik uch-burchak ustiga tushadi, ya'ni AB sferik yoy $A_1 B_1$ holatni egallaydi.

OE o'q chekli aylanish o'qi deyiladi, $\widehat{AEA_1} = \widehat{BEB_1} = \Delta\alpha$ burchak esa chekli aylanish burchagi deyiladi.

11.3-§. Oniy aylanish o'qi. Aksoidlar

Eyler-Dalamber teoremasiga ko'ra jismning t_1 paytda egallagan I nolatidan t_2 paytdagi II holatga ko'chishini jismni OE o'q atrofida bir aylantirish bilan amalga oshirish mumkin. Ammo bundan jismning $\Delta t = t_2 - t_1$ vaqt ichidagi ha-qiqiy harakati aynan shunday aylanma harakatdan iborat bo'ladi degan xulosa kelib chiqmaydi. Haqiqatda jism I holatdan II holatga boshqa yo'l bilan harakat qilishi natijasida o'tishi ham mumkin. Lekin Δt vaqt oralig'i kichraya borgan sari jismning I va II holatlari bir-biriga tobora yaqinlasha boradi hamda chekli aylanish o'qi OE atrofidagi $\Delta\alpha$ burchakka ko'chish jismning haqiqiy ko'chishi-ga yaqinlasha boradi. Agar Δt nolga intilsa, u holda OE o'qining yo'nalishi bi-ror OP limit holatiga



11.4-rasm.

yaqinlashadi. Δt nolga intilganda OE o'qning limit hola-lini ifodalovchi OP o'q aylanish oniy o'qi deyiladi.

Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakatini ketma-ket uzluksiz elementar ko'chishlardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Eylar-Dalamber teoremasiga binoan, bunday har bir elementar ko'chishni aylanish oniy o'qi at-rofidagi oniy aylanma harakat tarzida amalga oshirish mumkin. Binobarin, bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning har qanday harakatini aylanish oniy o'qlari atrofidagi ketma-ket uzluksiz oniy aylanma harakatlar to'plamidan ibo-rat deb tasavvur etish mumkin.

Jismning harakati tekshirilayotgan qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan aylanish oniy o'qlarining geometrik o'mi qo'zg'almas aksoid deyiladi. Barcha aylanish oniy o'qlari jismning qo'zg'almas nuqtasi orqali o'tgani tufayli qo'zg'almas aksoid, uchi qo'zg'almas nuqtada yotuvchi konus sirtidan iborat bo'ladi.

Aylanish oniy o'qlarining jismga biriktirilgan va u bilan birgalikda harakat-lanuvchi qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan geometrik o'mi ko-nus sirtidan iborat bo'lib, qo'zg'aluvchi aksoid deyiladi.

Qo'zg'aluvchi va qo'zg'almas aksoidlarni yolg'iz OP aylanish oniy o'qi-ning ko'chishi natijasida hosil qilingani tufayli bu konuslar har onda bir-biriga umumiy yasovchi OP orqali urinadi (11.4- rasm).

OP oniy o'qda yotuvchi nuqtalarning tezliklari berilgan onda nolga teng bo'lgani uchun jism harakatlanganda qo'zg'aluvchi aksoid ko'zg'almas aksoid ustida sirpanmay dumalaydi. Binobarin qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jism-ning harakatini qo'zg'aluvchi aksoidni qo'zg'almas aksoid ustida sirpan-tirmay dumalash natijasida amalga oshirish mumkin.

11.4-§. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakatdagi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi

Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning har ondagi harakatini aylanish oniy o'qi atrofidagi aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkin bo'lgani tufayli bunday harakatni xarakterlash uchun oniy burchak tezlik va oniy bur-chak tezlanish tushunchalarini kiritamiz. Oniy burchak tezlikning miqdorini Δt vaqt ichida elementar aylanish burchagi $\Delta\alpha$ orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{\Delta t} \quad (11.2)$$

Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakatini o'rganishda oniy burchak tezlikni vektor tarzida ifodalash bunday harakatning xususiyatlarini o'rganishni soddalashtiradi.

Kelgusida qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning oniy burchak tezligini qo'zg'almas nuqtaga qo'yilgan va aylanish oniy o'qi bo'ylab yo'nalgan shun-day $\vec{\omega}$ vektori tarzida ifodalaymizki, uning musbat yo'nalishidan qaraganda kuzatuvchi jismning aylanishini soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nahshda ko'rishi kerak.

Jism qo'zg'almas nuqta atrofida harakatlanganda aylanish oniy o'qining yo'nahshi o'zgara boradi, shu sababli oniy burchak tezligi ham miqdor va yo'nahsh jihatdan o'zgara boradi.

O'ni burchak tezlik vektoridan vaqt bo'yicha ohngan hosila *oniy burchak tezlanishi* deyiladi, ya'ni

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (11.3)$$

Shunday qilib, oniy burchak tezlanish vektorini oniy burchak tezligi vektori uchining tezligi tarzida qarash mumkin. Shu sababli oniy burchak tezlanish vektori oniy burchak tezlik vektori uchining chizgan chizig'iga (godografi) o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi. $\vec{\varepsilon}$ vektorini ham qo'zg'almas O nuqtaga qo'yilgan deb qaraymiz. Demak, umumiy holda bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning oniy burchak tezlanish vektori bilan oniy burchak tezlik vektori bir chiziqda yotmaydi.

11.5-§. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi

Yuqorida ko'rganimizdek, qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning har ondagi harakatini mazkur qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi aylanish oniy o'qi atrofidagi oniy aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkin hamda aylanish oniy o'qida yotuvchi jism nuqtalarining berilgan ondagi tezliklari nolga teng bo'ladi. Agar aylanish oniy o'qi va jismning oniy burchak tezligi ma'lum bo'l-sa, bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jism ixtiyoriy M nuqtasining berilgan ondagi tezligini aniqlash uchun qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi aniqlanadigan Eyler formulasi

(9.14) dan foydalanish mumkin:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (11.4)$$

bunda \vec{r} bilan M nuqtaning qo'zg'almas nuqtaga nisbatan radius vektori belgi-langani (11.5-rasm).

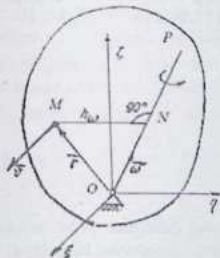
\vec{r} radius-vektor miqdor jihatdan qattiq jismning ikki nuqtasi orasidagi ma-sofani ifodalagani tufayli shu jism harakati davomida uning faqat yo'nalishi o'zgaradi. Binobarin (11.4) formulani miqdor jihatdan o'zgarimasdan, yo'nali-shi jismning qo'zg'almas nuqta atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezligi bilan aylanishi tu-fayli o'zgaradigan vektorning vaqt bo'yicha hosilasini hisoblash formulasi deb qarash mumkin.

(11.4) ga binoan M nuqta tezligining miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$v = \omega \cdot r \sin(\vec{\omega}, \hat{r}) = \omega \cdot h_c \quad (11.5)$$

bunda $h_c = r \sin(\vec{\omega}, \hat{r})$ bo'lib, M nuqtadan aylanish oniy o'qi OP gacha bo'lgan MN masofani ifodalaydi.

Shunday qilib, qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi miqdor jihatdan shu nuqtadan aylanish oniy o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'ladi. yo'nalishi esa $\vec{\omega}$ va \vec{r} vektorlariga (bino-barin MN ga) perpendikulyar tarzda oniy o'q atrofidagi aylanishga mos ravishda yo'naladi.

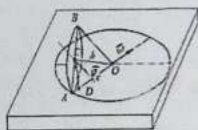


11.5-rasm.

Agar aylanish oniy o'qining holati va jism biror nuqtasining tezligi v_c ma'lum bo'lsa, (11.5) formuladan foydalanib jismning oniy burchak tezligini aniqlash mumkin:

$$\omega = \frac{v}{h_c} \quad (11.6)$$

Oniy burchak tezlikning qo'zg'aluvchi koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini mos ravishda



11.6-rasin.

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ hamda M nuqtaning koordinatalarini x, y, z bilan belgilasak, (11.4) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_z z - \omega_y y) \vec{i} + (\omega_x x - \omega_z z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}.$$

Bu tenglikni qo'zg'aluvchi x, y, z o'qlarga proekstiyalab, tezlik vektorining mazkur o'qlardagi v_x, v_y, v_z proekstiyalarini hisoblaymiz:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_z z - \omega_y y \\ v_y &= \omega_x x - \omega_z z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Xuddi shuningdek, tezlikning qo'zg'almas koordinata o'qlaridagi v_ζ, v_η, v_ξ proekstiyalari hisoblanadi:

$$\left. \begin{aligned} v_\zeta &= \omega_x \xi - \omega_y \eta \\ v_\eta &= \omega_z \xi - \omega_x \zeta \\ v_\xi &= \omega_y \eta - \omega_z \xi \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

(11.7) va (11.8) formulalar *Eyler formulalari* deyiladi.

Har onda aylanish oniy o'qi nuqtalarining tezligi nolga tengligini e'tiborga olsak, v_x, v_y, v_z larni nolga tenglab (11.7) dan

$$\left. \begin{aligned} \omega_z z - \omega_y y &= 0 \\ \omega_x x - \omega_z z &= 0 \\ \omega_x y - \omega_y x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tenglamalarni olamiz. Bu tenglamalarni

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (11.9)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(11.9) formulalar *aylanish oniy o'qi-ning berilgan payt uchun qo'zg'aluvchi ko-ordinatalar sistemasidagi tenglamalarini* ifodalaydi.

Xuddi shuningdek, aylanish oniy o'qining $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglamalarini

$$\frac{\xi}{\omega_\zeta} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\xi} \quad (11.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lar vaqt funktsiyasi sifatida o'zgarishini nazarda tutib, (11.9) va (11.10) ifodalardan vaqt t ni yo'qotish orqali mos ravishda *qo'zg'aluvchi va qo'zg'almas aksoid tenglamalarini* olish mumkin.

11.1- masala. Balandligi $h = 4$ sm, asosining radiusi $R = 2$ sm va uchi qo'z-g'almas O nuqtada bo'lgan konus gorizontal tekislikda sirpanmasdan yumalaydi (11.6- rasm). Agar konus asosi markazining tezligi $v_c = 18$ sm/s = *const* bo'lsa, konusning burchak tezligi hamda qo'zg'almas va qo'zg'aluvchi aksoidlar topilsin.

Yechish. Konus tekislikda sirpanmasdan yumalagani uchun A nuqtaning tez-ligi nolga teng. Masala shartiga ko'ra O nuqta xam qo'zg'almas. Binobarin, OA to'g'ri chiziq aylanish oniy o'qi bo'ladi. Konus tekislikda sirpanmasdan yumala-ganida OA aylanish oniy o'qining qo'zg'almas koordinata sistemasidagi geo-metrik o'rni shu gorizontal tekislikdan iborat. Demak, qo'zg'almas aksoid gorizontal tekislik bo'ladi. OA aylanish o'qining qo'zg'aluvchi sistemadagi geometrik o'rnini kuzatsak, qo'zg'aluvchi aksoid uchi O nuqtada yotuvchi, asosi berilgan konus asosidan iborat konusning yon sirti bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. Bu konusning uchidagi burchak

$$\alpha = \angle AOB = 2 \arctg \frac{1}{2} \approx 53^\circ$$

ga teng bo'ladi. Endi konus oniy burcha tezligining miqdor va yo'nalishini aniqlaymiz. (11.4) for-mulag. binoan $\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{OC}$ bo'ladi. Shuning uchun \vec{v}_c kuzatuvchi tomonga yo'nalgan holda $\vec{\omega}$ vektor'i aylanish oniy o'qi bo'yicha A nuqtadan O nuqtaga qarab yo'naladi. (11.5) formulaga asosan $v_c = \omega \cdot CD$ bo'ladi.

Rasmdan $CD = h \sin \frac{\alpha}{2}$. Binobarin, $\omega = \frac{v_c}{h \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{18}{1.8} = 10 \text{ s}^{-1}$

11.6-§. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezlanishi

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism M nuqtasining tezlanishini aniqlash uchun (11.4) ifodadan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (11.11)$$

Bunda

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$$

bo'lgani uchun (11.11) ni

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.12)$$

yoki

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (11.12, a)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(11.12) da tezlanishning

$$\vec{a}^e = \vec{\epsilon} \times \vec{r} \quad (11.13)$$

tashkil etuvchisi *aylanma tezlanish*,

$$\vec{a}^c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.14)$$

tashkil etuvchisi esa *o'qqa intilma tezlanish* deyiladi.

Shunday qilib

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^c \quad (11.15)$$

(11.15) ifoda *Rival's teoremasini* ifodalaydi; *qo'zg'almas nuqta atrofi-da aylanuvchi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi aylanma va o'qqa intilma tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng.*

(11.13) dan ko'ramizki, qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqta-sining \vec{a}^e aylanma tezlanishi $\vec{\epsilon}$ va \vec{r} orqali o'tkazilgan tekislikka perpendikul-yar ravishda shunday yo'naladiki, uning uchidan qaraganda $\vec{\epsilon}$ vektorini \vec{r} vektoriga ustiga tushirish uchun eng kichik burchakka burish soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda ko'rinishi kerak (11.7-rasm).

Aylanma tezlanishning miqdori

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 \quad (11.21)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(11.21) da jism oniy burchak tezlanishining $\vec{\varepsilon}_1$ tashkil etuvchisi vaqt o'tishi bilan oniy burchak tezligi o'zgarishini miqdor jihatdan ifodalaydi va $\frac{d\omega}{dt} > 0$ bo'lgan holda oniy burchak tezlik vektori

bo'yicha, $\frac{d\omega}{dt} < 0$ da esa unga qara-ma- qarshi yo'naladi.

Birlik vektorning vaqt bo'yicha birinchi hosilasi o'sha birlik vektorga perpendikulyar yo'nalgani tufayli oniy burchak tezlanishining $\vec{\varepsilon}_2$ tashkil etuvchisi oniy burchak tezlik vektorining vaqt o'tishi bilan yo'nalish jihatdan o'zgarishi-ni ifodalaydi va oniy burchak tezligi vektoriga hamisha perpendikulyar bo'ladi.

Alohida ahamiyatga ega bo'lgan quyidagi ikki xususiy holni ko'ramiz.

1. Jismning oniy burchak tezlik vektori yo'nalish jihatdan o'zgarmay faqat miqdori o'zgarsin. Bu holda (11.21) da

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\omega}^0$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Binobarin, bu holda jismning qo'zg'almas nuqta at-rofidagi aylanma harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatga ekvi-valent bo'ladi.

2. Oniy burchak tezligining miqdori o'zgarmay faqat yo'nalishi o'zgarsin. U holda

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.22)$$

munosabatni olamiz. Bunda bevosita burchak tezlanishning burchak tezlik or-qali ifodasi $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ dan foydalanamiz. Yuqorida

ko'rganimizdek, miqdor jihatdan o'zgarmas bo'lib yo'nalishi jismning qo'zg'almas nuqta atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezligi bilan aylanishi tufayli o'zgaradigan vektorning vaqt bo'yicha hosilasini (11.4) formula bilan hisoblash mumkin. Xuddi shunga o'xshash $\vec{\omega}$ ni miqdori o'zgarmas bo'lgan radius- vektor deb qarasaq,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \quad (11.23)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. (11.23) da $\vec{\omega}_1$ orqali $\vec{\omega}$ vektor yo'nalgan aylanish oniy o'qining burchak tezligi belgilangan.

Bu holda burchak tezlanish vektorining miqdori

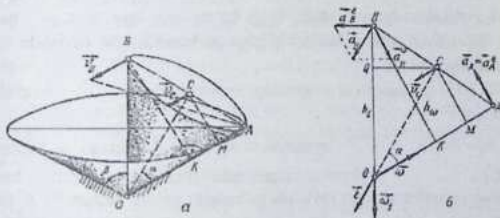
$$\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}) \quad (11.24)$$

formuladan aniqlanadi.

11.2- masala. Uchidagi burchagi $2\alpha = 60^\circ$ bo'lgan I doiraviy konus, uchidagi burchagi $2\beta = 120^\circ$ bo'lgan qo'zg'almas II konus ichida sirpanmay dumalaydi (11.8- rasm, a). I konus asosining markazi o'zgarmas $v_c = 0,44 \text{ m/s}$ tezlikka ega. I konus asosining radiusi $r = 0,2 \text{ m}$. I konusning oniy burchak tezligi, oniy burchak tezlanishi va uning A hamda B nuqtalarining tezlik, tezlanishlari topilsin.

Yechish. I konus II konus ichida sirpanmasdan dumalaganda uning uchidagi O nuqta qo'zg'almasdan qoladi hamda I konusning II konusga tegib turgan OA yasovchisida yotuvchi barcha nuqtalarning tezligi nolga teng bo'ladi, ya'ni OA chiziq I konusning aylanish oniy o'qini ifodalaydi.

Agar C nuqtaning tezligi rasm tekisligidan kuzatuvchi tomonga qarab yo'nalgan deb olsak, oniy burchak tezlik vektori unga mos ravishda 11.8- rasm, a da



11.8-рasm.

ko'rsatilgandek yo'naladi.

C nuqta tezligi berilgani tufayli konus oniy burchak tezligining miqdorini (11.6) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$\omega = \frac{v_C}{CM} = \frac{v_C}{r \sin 60^\circ} = 2,54 \text{ c}^{-1}. \quad (1)$$

A nuqta aylanish oniy o'qida yotgani uchun uning tezligi nolga teng, ya'ni $v_A = 0$

(11.5) ga asosan B nuqtaning tezligi

$$v_B = \omega \cdot BK \quad (2)$$

bunda BK bilan B nuqtadan aylanish oniy o'qigacha bo'lgan masofa-oniy aylanish radiusi belgilangan. AOB uchburchak teng tomonli bo'lgani uchun, OBK uchburchakdan

$$BK = 2r \sin 2\alpha = 0,35M. \quad (3)$$

(1) va (3) ni (2) ga qo'ysak, $v_B = 0,89M/s$.

B nuqtaning tezlik vektori rasm tekisligiga tik ravishda kuzatuvchi tomonga yo'nalgan. $\vec{\omega}$ vektori miqdor jihatdan o'zgarmas bo'lgani uchun (11.23) ga asosan konusning oniy bur chak tezlanishi

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \quad (4)$$

formula yordamida aniqlanadi. (4) da $\vec{\omega}_1$ bilan OA oniy o'qning OB atrofidagi aylanish burchak tezligi belgilangan. C nuqta tezligini ω_1 orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$v_C = \omega_1 \cdot QC.$$

Binobarin,

$$\omega_1 = \frac{v_C}{QC} = \frac{v_C}{r \sin 60^\circ} = 2,54s^{-1}.$$

$\vec{\omega}_1$ vektori \vec{v}_C ning yo'nalishi- ga mos ravishda 11.11- rasm, $\vec{\omega}$ dagidek vertikal pastga yo'naladi. 4) ga ko'ra $\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin 2\alpha = 5,59s^{-2}$ bo'lib, $\vec{\varepsilon}$ vektori OAB uchburchak tekisligiga perpendikulyar ravishda \vec{v}_C ga parallel yo'naladi.

(11.15) ga asosan A nuqtaning tezlanishi $\vec{a}_A = \vec{a}_T^* + \vec{a}_N^*$ tenglikdan topiladi.

$\vec{a}_A^* = \vec{\varepsilon} \times \vec{OA}$ aylanma tezlanishni A nuqtaga qo'yilgan va $\vec{\varepsilon}, \vec{OA}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar hamda $\vec{\varepsilon}$ ning yo'nalishiga mos ravishda yo'nalgan vektor tarzida 11.8- rasm, $\vec{\omega}$ dagidek tasvirlash mumkin. \vec{a}_A^* vektori OAB uchburchak tekisligida yotadi va OA ga perpendikulyar yo'naladi. (11.16) ga ko'ra, u $a_A^* = \varepsilon \cdot OA = \varepsilon \cdot 2r = 2,24M/s^2$ ga teng.

A nuqta aylanish oniy o'qida yotganligi tufayli $h_A = 0$ (11.17) ga binoan o'qqa intilma tezlanish \vec{a}_A^* ning miqdori ham nolga teng bo'ladi.

Shunday qilib, A nuqtaning tezlanishi faqat aylanma tezlanishdan iborat bo'ladi:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^e, \text{ ya'ni } a_A = 2,24 \text{ m/s}^2.$$

(11.15) ga ko'ra B nuqtaning tezlanishi $\vec{a}_B = \vec{a}_B^e + \vec{a}_B^o$ ifodadan topiladi.

$\vec{a}_B^e = \vec{\varepsilon} \times \vec{OB}$ aylanma tezlanish vektori B nuqtaga qo'yiladi hamda $\vec{\varepsilon}$ yo'nalishiga mos ravishda OB ga tik yo'naladi. Uning miqdori $a_B^e = \varepsilon \cdot OB = \varepsilon \cdot 2r = 2,24 \text{ m/s}^2$ ga teng. $\vec{a}_B^o = \vec{\omega} \times \vec{v}_B$ o'qqa intilma tezlanish vektori OA aylanish oniy o'qiga perpendikulyar ravishda BK bo'ylab yo'naladi hamda

$$a_B^o = \omega^2 \cdot BK = \omega^2 2r \sin 60^\circ = 2,23 \text{ m/s}^2.$$

\vec{a}_B^e va \vec{a}_B^o larni geometrik ko'shib, \vec{a}_B ni ularga qurilgan parallelogramm diagonaliga teng vektor sifatida aniqlaymiz (11.8- rasm, \vec{O}). (11.18) ga asosan

$$a_B = \sqrt{(a_B^e)^2 + (a_B^o)^2 + 2a_B^e a_B^o \cos(\alpha_B^e, \alpha_B^o)} = 2,24 \text{ m/s}^2.$$

11.8-§. Eylerning kinematik tenglamalari

Agar jism oniy burchak tezligining qo'zg'aluvchi yo'l qo'zg'almas koordina o'qlaridagi proekstiyalari ma'lum bo'lsa (11.7) va (11.8) formulalar yordamida jism ixtiyoriy nuqtasi tezligining koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini aniqlash mumkin.

Jism burchak tezligining qo'zg'aluvchi va qo'zg'almas koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini aniqlash uchun oniy burchak tezlik vektorini Oz , Oz , ON o'qlar bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_n \quad (11.25)$$

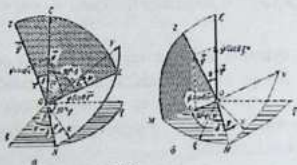
Agar Oz , Oz , ON o'qlarning birlik yo'naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{e}_z, \vec{k}, \vec{n}$ bilan belgilasak (11.9-rasm), (11.25) quyidagicha yoziladi.

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z + \omega_k \vec{k} + \omega_n \vec{n} \quad (11.26)$$

11.1-§ da bayon etilgan Eyler teoremasiga ko'ra (11.26) dagi $\omega_z, \omega_k, \omega_n$ lar mos ravishda ψ, φ, θ burchaklarning vaqt birligi ichida o'zgarishini ifodalaydi:

$$\omega_x = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \omega_y = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \omega_z = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Binobarin, (11.26) ni



11.9-rasm.

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\varphi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{i} = \dot{\psi} \vec{j} + \dot{\varphi} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \quad (11.27)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Avval burchak tezlik vektorining qo'zg'aluvchi Ox , Oy , Oz o'qlardagi pro-ekstiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun $Oz\zeta$ va Oxy tekisliklarning kesishgan chizig'ini OL bilan belgilaymiz (11.9-rasm, a), $\dot{\psi}$ ni OL va z o'qlar bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$\dot{\psi} \vec{j} = \dot{\psi} \sin \theta \cdot \vec{l} + \dot{\psi} \cos \theta \cdot \vec{k} \quad (11.28)$$

bunda \vec{l} bilan OL o'qning birlik vektori belgilangan. (11.28) ni nazarda tutib, (11.27) ning ikkala tomonini Ox , Oy , Oz o'qlarga proekstiyalaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= (\dot{\psi} \cos \theta) \cos 90^\circ + (\dot{\psi} \sin \theta) \cos(90^\circ - \varphi) + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos 90^\circ, \\ \omega_y &= (\dot{\psi} \cos \theta) \cos 90^\circ + (\dot{\psi} \sin \theta) \cos \varphi + \dot{\theta} \cos(90^\circ + \varphi) + \dot{\varphi} \cos 90^\circ, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \cos 90^\circ + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\}$$

yoki soddalashtirsak, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

(11.29) tenglamalar *Eylerning kinematik tenglamalari* deyiladi. Agar Eyler burchaklari ψ, φ, θ lar vaqtning funktsiyasi sifatida ma'lum bo'lsa, Eylemning kinematik tenglamalari vositasida qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism oniy burchak tezligining koordinata

o'qlaridagi proekstiyalari aniqlanadi.

Bu proekstiyalarni hisoblab, oniy burchak tezlikning miqdor va yo'nalishi-ni

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta}, \quad (11.30)$$

$$\cos\alpha = \omega_x / \omega, \cos\beta = \omega_y / \omega, \cos\gamma = \omega_z / \omega \quad (11.31)$$

formulalar yordamida aniqlaymiz.

Xuddi shunga o'xshash, oniy burchak tezlik vektorining qo'zg'almas ko-ordinata o'qlaridagi proekstiyalarini hisoblash mumkin, $\dot{\psi}$ va $\dot{\theta}$ vektorlarning $O\zeta$, $O\eta$, $O\zeta$ o'qlardagi proekstiyalari osonlik bilan hisoblanadi. $\dot{\phi}$ vektorning qo'zg'almas o'qlardagi proekstiyalarini hisoblash uchun bu vektorni $O\eta\zeta$ va $O\zeta z$ va tekisliklarning kesishgan chizig'i OM hamda $O\zeta$ o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratamiz (11.9-rasm, δ):

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}\sin\theta \cdot \vec{m}^o + \dot{\phi}\cos\theta \cdot \vec{z}^o \quad (11.32)$$

bunda \vec{m}^o bilan OM o'qning birlik vektori belgilangan. (11.32) ni c'tiborga olib, (11.27) ni qo'zg'almas o'qlarga proekstiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_z &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

formulalarni olamiz.

(11.33) ni (11.29) bilan solishtirib, oniy burchak tezlikning moduli

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta},$$

har ikkala holda ham aynan bir xil qiymatga ega bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Burchak tezlik vektorining qo'zg'almas o'qlar bilan tashkil qilgan burchaklari (11.31) formulalar kabi formulalar bilan aniqlanadi.

(11.29) va (11.33) dan ko'ramizki, Eylerning kinematik tenglamalari Eylerning

burchaklari va ularning vaqt bo'yicha hosilalari bilan oniy burchak tezlik vektorining qo'zg'aluvchi va qo'zg'almas o'qlardagi proekstiyalari orasidagi bog'lanish-larni ifodalaydi.

Nazorat Savollari:

1. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamalari.

2. Eyer burchaklari.
3. Eyer-Dalamber teoremasi.
4. Oniy aylanish o'qi. Aksoidlar.
5. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakatda burchak tezlik

12-BOB. ERKIN QATTIQ JISMNING HARAKATI

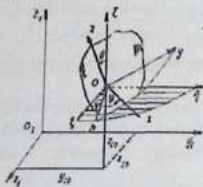
Tayanch so'zlar: Erkin jism harakatining kinematik tenglamalari, erkin jism nuqtasiniig tezligi, erkin jism nuqtasining tezlanishi

12.1-§. Erkin jism harakatining kinematik tenglamalari

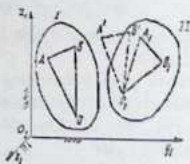
Erkin jismning biror O, x, y, z qo'zg'almas koordinatalar istemasiga nisbatan holati uning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan 3 ta uqtasining holati bilan aniq-lanadi. Bu nuqtalarni o'zaro to'g'ri hiziq kesmalari bilan tutashtirsak, uchbur-chak hosil bo'ladi. Jismning holatini aniqlovchi mazkur uchburchakning harakati qattiq jismning fazodagi harakatini batamom xarakterlaydi.

Erkin jismning ko'chishiga oid quyidagi Shal (1793 –1880) teoremasini is-botlaymiz.

Teorema. *Erkin jismning fazodagi har qanday ko'chishini qutb uchum olin-gan nuqtaning bir ilgari-lama ko'chishi va qutbdan o'tuvchi o'q atrofidagi bir aylanma ko'chishdan tashkil topgan deyish mumkin.*



12.1-rasm.



12.2-rasm.

Isbot. Erkin jismning t_1 paytdagi I holati OAB uchburchak holati bilan aniq-lansin; t_2 paytdagi II holatda esa mazkur uchburchak $O_1A_1B_1$ uchburchak holatini olgan bo'lsin (12.1-rasm). Jismning I holatdan II holatga o'tishini quyidagicha bajarish mumkin. Avvalo jismga

shunday ilgari lama ko'chish beramizki, uning O nuqtasi O_1 bilan ustma-ust tushsin, u holda A, B nuqtalar A_1, B_1 holatga o'tadi.

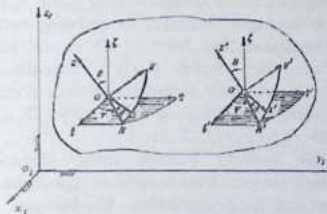
So'ngra Eylér - Dalamber teoremasiga ko'ra O_1 nuqtadan o'tuvchi biror o'q atrofida bir aylantirsak, jism ikkinchi holatni oladi.

Albatta, jismning bir holatdan ikkinchi holatga o'tishini bunday ikki harakat yig'indisidan iborat deb qarash uning haqiqiy harakatini tasvirlamaydi.

Erkin jismning haqiqiy harakati davomida bu ikki harakat bir vaqtning o'zida sodir bo'ladi.

Shu sababli erkin qattiq jismning haqiqiy harakatini quyidagicha tasvirlash mumkin: erkin kattiq jismning harakatini jismda qutb uchun tanlab olingan nuqta bilan birgalikdagi ilgari lama harakat hamda qutb atrofidagi aylanma harakatdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Shu jumladan, qutb atrofidagi harakatni mazkur nuqtadan o'tuvchi oniy o'qlar atrofidagi ketma-ket uzluksiz cheksiz kichik aylanishlardan tashkil topgan deb tasavvur qilish mumkin.

Jismning holatini aniqlash uchun uning biror O nuqtasini qutb uchun tanlab olamiz hamda qutb orqali $O_1x_1y_1z_1$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga hamisha parallel ravishda harakatlanuvchi $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasini va jisimga mahkam biriktirilgai $Oxyz$ koordinatalar sistemasini o'tkazamiz (12.2-rasm).



12.3-rasm.

Qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasining qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini o'rganish erkin jismning $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini o'rganishga ekvivalentdir. $Oxyz$ qo'zg'aluvchi koordinatalar

sistemasining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan istalgan paytdagi holatini aniqlash uchun O qutbning koordinatalari x_{10}, y_{10}, z_{10} ni vaqtning funktsiyasi sifatida ifodalash kerak. 11.1- § da ko'rganimizdek, $Oxyz$ koordinatalar sistemasining $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan holati ma'lum bo'lishi uchun uchta Eyler burchaklari ψ, φ, θ ni vaqtning funktsiyasi sifatida ifodalash kerak. Binobarin, erkin qattiq jismning qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan holati oltita: $x_{10}, y_{10}, z_{10}, \psi, \varphi, \theta$ koordinatalar bilan aniqlanadi.

Erkin qattiq jism fazoda harakatlanganda mazkur koordinatalar bir qiymatli, uzluksiz va kamida vaqt bo'yicha ikkinchi hosilasi mavjud funktsiyalardan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= f_1(t), y_{10} = f_2(t), z_{10} = f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), \varphi = f_5(t), \theta = f_6(t) \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Bu tenglamalar erkin qattiq jismning istalgan paytdagi holatini aniqlaydi va *erkin qattiq jism umumiy harakatining kinematik tenglamalari* deyiladi.

(12.1)tenglamalarning birinchi uchtasi vositasida jismning ilgariharakati aniqlanadi. Jism turli nuqtalarining koordinatalari turlicha bo'lgani tufayli bu tenglamalar qutbning tanlab olinishiga bog'liq bo'ladi.

(12.1) tenglamalarning qolgan uchtasi erkin qattiq jismning harandagi sferik harakatini ifodalaydi va qutbning tanlanishiga bog'liq o'lmaydi. Haqiqatan ham jismning O va O' nuqtalarida o'zaro parallel bo'lgan $Oxyz$ hamda $O'x'y'z'$ koordinatalar sistemasini o'tkazsak, bu koordinatalar sistemasining mos o'qlari jism harakati davomida bir-biriga parallelligicha qoladi; O va O' nuqtalardagi Eyler burchaklari bir xil bo'ladi (12.3-rasm).

Erkin qattiq jismning burchak tezligi deganda uning biror nuqtasida olingan va jism bilan birgalikda ilgariharakati qiluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan hisoblangan burchak tezlik tushuniladi.

Erkin qattiq jismning burchak tezlanishi tushunchasi ham xuddi shu usulda kiritiladi.

Erkin qattiq jismning qutb atrofidagi harakati qutbning tanlanishiga bog'liq bo'lmagani uchun erkin qattiq jismning aylanma harakatidagi burchak tezligi va burchak tezlanishi ham qutbning

tanlab olinishiga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni O yoki O' nuqtalarni qutb uchun tanlab olsak, u holda erkin qattiq jismning mazkur qutblar atrofidagi aylanma harakat burchak tezliklari $\vec{\omega}$ va $\vec{\omega}'$, shuningdek, $\vec{\varepsilon}$ va $\vec{\varepsilon}'$ burchak tezlanishlari mos ravishda teng bo'ladi.

12.2-§. Erkin jism nuqtasining tezligi

Erkin qattiq jism ikkita nuqtasining tezliklari orasidagi munosabatni ifodalovchi formulani keltirib chiqaramiz.

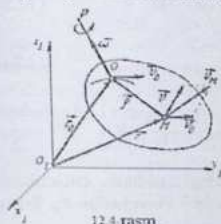
Agar erkin jism biror O nuqtasining tezligi ma'lum bo'lsa, shu nuqtani qutb uchun qabul qilamiz. Qutbning qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorini \vec{r}_0 , jism ixtiyoriy M nuqtasining mazkur koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorini \vec{r} hamda M nuqtaning O qutbga nisbatan radius-vektorini $\vec{\rho}$ bilan belgilasak (12.4-rasm), erkin jism harakati davomida hamisha

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \quad (12.2)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Jismning O va M nuqtalari orasidagi masofa o'zgarmas-dan qolgan tufayli $\rho = const$ bo'ladi, ya'ni $\vec{\rho}$ vektorining miqdori jihatdan o'zgarmas bo'lib, harakat davomida uning faqat yo'nalishi o'zgaradi.

M nuqtaning tezligini aniqlash uchun (12.2) vektorli tenglikdani vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d}{dt} \quad (12.3)$$



12.4-rasm.

bunda $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ - M nuqtaning tezligi,

$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0$ - O qutbning tezligi.

Erkin qattiq jism harakati davomida $\vec{\rho}$ vektorining miqdori o'zgarmay, faqat yo'nalishi o'zgarгани uchun $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ hosila

M nuqtaning O qutb atrofidagi sferik harakat tezligini yoki O qutbdan o'tuvchi aylanish oniy o'qi atrofidagi aylanma harakat tezligini ifodalaydi. (11.4) ga binoan

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{\text{rot}} \quad (12.4)$$

Natijada (12.3) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (12.5)$$

yoki

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{\text{rot}} \quad (12.6)$$

Shunday qilib, *erkin qattiq jism ixtiyoriy M nuqtasining tezligi qutbning tezligi-ga teng bo'lgan ilgarilama harakat tezligi bilan jismning shu qutbdan o'tuvchi ay-lanish oniy o'qi atrofida aylanishidagi mazkur nuqta tezligining geometrik yi-g'indisiga teng.*

12.3-§. Erkin jism nuqtasining tezlanishi

Erkin jism harakatining umumiy holda uning biror M nuqtasi tezlanishini aniqlash uchun mazkur nuqtaning tezligini ifodalovchi (12.5) formuladan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad (12.7)$$

Bunda

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M, \quad \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{a}_O, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}, \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{\text{rot}}$$

bo'lgani tufayli (12.7)

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (12.8)$$

yoki

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} \quad (12.8a)$$

ko'rinishni oladi.

Erkin qattiq jismning tezlanishi uchun chiqarilgan (12.8) ifodani (11.12) bilan solishtirsak, $\vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ yig'indi M nuqta tezlanishining jism O qutb atrofida oniy aylanma harakatda bo'lgandagi tashkil etuvchisini ifodalashini ko'ramiz. Tezlanishning bu tashkil etuvchisini \vec{a}_{rot} bilan belgilasak,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{\text{rot}} \quad (12.9)$$

(12.9) dan ko'ramizki, umumiy holda erkin qattiq jism ixtiyoriy M nuqtasi-ning tezlanishi O qutbning tezlanishiga teng bo'lgan ilgarilama harakat tezlanishi bilan jismning O qutb atrofida

aylanishida M nuqta olgan tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

Nazorat Savollari:

1. Erkin jism harakatining kinematik tenglamalari
2. Erkin jism nuqtasiniig tezligi
3. Erkin jism nuqtasining tezlanishi

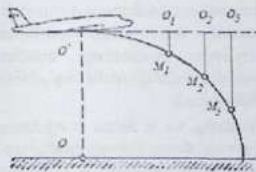
13-BOB. NUQTANING MURAKKAB HARA KATI

Tayanch so'z va iboralar: Nuqtaning murakkab harakati, nisbiy, ko'chirma va absolyut harakat, tezliklarni qo'shish, ko'chirma ilgarilama harakat, ko'chirma aylanma harakat, Eyl er formulasi, tezlanishlarni qo'shish, Koriohs tezalnishi.

13.1-§. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakatlari

Shu paytgacha nuqtaning harakatini qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirish bilan shug'ullandik. Lekin mexanika masalalarini echishda ko'pincha nuqtaning harakatini bir vaqtning o'zida ikkita koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu holda koordinata sistemalaridan biri qo'zg'almas deb qabul qilamiz va uni asosiy koordinatalar sistemasiga deb ataymiz.

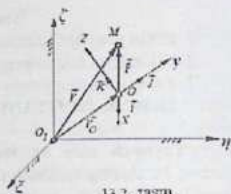
Masalan, o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanayotgan samolyotdan boshlang'ich tezliksiz tashlangan yukning harakatini Yer bilan bog'langan asosiy koordinatalar sistemasiga hamda samolyotga birlashtirilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirish mumkin. Bunda har bir koordinatalar sistemasiga nisbatan nuqtaning traektoriyasi turlicha bo'ladi. Haqiqatan ham, havoning qarshiligi hisobga olinmasa, samolyotda o'tirgan kuzatuvchiga nisbatan yuk to'g'ri chizikli harakat qilayotgandek tuyuladi. Haqiqatan ham samolyotdagi kuzatuvchi O_1, O_2, O_3 holatlarni egallaganda yuk shu nuqtalar bilan bir vertikal to'g'ri



13.1-rasm.

chiziqlarda yotuvchi M_1, M_2, M_3 holatlarni egallaydi; Yerda turgan kuzatuvchi esa, tashlangan yukning parabola bo'ylab harakatlanishini kuzatadi (13.1 - rasm).

M nuqta biror $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin. $O'z$ navbatida bu koordinatalar sistemasini qo'zg'almas deb olinadigan $O_1\zeta\eta\zeta$ asosiy koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin. Odatda har ikkala koordinatalar sistemasini ham ma'lum jismlarga birlashtirilgan deb qaraladi. Aksariyat holatlarda



13.2 - rasm.

qo'zg'almas koordinatalar sistemasini Erga bog'lab olinadi. Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini esa mashina va mexanizm qismlari, kema, samolyot, poezd kabi harakatdagi ob'ektlar bilan bog'langan deb qaraladi.

Nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati nisbiy harakat deyiladi.

M nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorini ρ koordinatalarini x, y, z hamda qo'zg'aluvchi koordinatalarining birlik yo'nal-tiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilasak,

$$\rho = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (13.1)$$

munosabat o'rinni bo'ladi.

M nuqtaning nisbiy harakat tenglamalarining Dekart koordinatalaridagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (13.2)$$

Nuqtaning nisbiy harakati qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini bilan birga-likda harakatlanuvchi kuzatuvchi tomonidan qayd qilinadi. Nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan traektoriyasi *nisbiy traektoriya* deyiladi. Nuqtaning bunday harakatdagi tezlik va tezlanishi mos ravishda *nisbiy tezlik* va *nisbiy tezlanish* deyiladi hamda \vec{v} va \vec{a} bilan belgilanadi.

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining va u bilan o'zgarish ravishda bog'langan fazo nuqtalarining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati ko'chirma harakat deyiladi. Ko'chirma harakat tushunchasi nisbiy harakatdagi nuqtaga ham taalluqli bo'lishi

mumkin.

Bunday nuqtaning biror ondagi ko'chirma harakati deganda xuddi shu onda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining berilgan nuqta bilan ustma-ust tushuvchi nuqtasining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati tushuni-ladi.

Nuqtaning berilgan ondagi ko'chirma harakatini talqin qilish uchun nuqta-ning shu ondagi nisbiy harakatini fikran e'tiborga olmay, uni qo'zg'aluvchi ko-ordinatalar sistemasi bilan birgalikda qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nis-batan harakati qaraladi.

Shu sababli nuqtaning berilgan ondagi ko'chirma tezligi va ko'chirma tezla-nishi deganda xuddi shu onda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining berilgan nuqta bilan usta-ust tushuvchi nuqtasining tezligi va tezlanishi tushuniladi. Ko'-chirma tezlik \vec{v} , ko'chirma tezlanish \vec{a} , bilan belgilanadi.

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining turli nuqtalari hap xil traektoriya bo'ylab harakatlangani tufayli umumiy holda M nuqtaning ko'chirma harakat traektoriyasi tushunchasini kiritish mumkin emas.

Nuqtaning qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati *absolyut harakat* deyiladi. Nuqta bir vaqtning o'zida ikki yoki undan ortiq harakatda ishtirok etsa, bunday harakat *murakkab harakat* deyiladi. Nuqtaning absolyut harakati o'z navbatida nisbiy va ko'chirma harakatlardan tashkil topgani tufayli nuqtaning absolyut harakatini murakkab harakat deb atash mumkin.

Absolyut harakatdagi nuqtaning tezlik va tezlanishi mos ravishda *absolyut tezlik* va *absolyut tezlanish* deyiladi. Absolyut tezlikni \vec{v} , absolyut tezlanishni \vec{a} , bilan belgilaymiz.

Nuqtaning nisbiy va ko'chirma harakatini bilgan holda uning absolyut harakatini, binobarin, absolyut harakat tezligi va tezlanishini aniqlash nuqta murakkab harakati kinematikasining asosiy masalasi hisoblanadi.

13.2-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo'shish haqidagi teorema

Qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasi $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ asosiy koordinatalar sistemasiga nisbatan ixtiyoriy ravishda harakatlansin (13.2-rasm). Yuqorida ko'rgani-mizdek, M nuqtaning harakatini

qo'zg'aluvchi va asosiy koordinata sistemalari-ning har biriga nisbatan aniqlash mumkin. Bu paragrafda nuqtaning tanlangan koordinata sistemalariga nisbatan tezliklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz.

Agar M va O nuqtalarning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan radius-vektorlarini mos ravishda \vec{r} va \vec{r}_0 bilan belgilasak, rasmdan

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \quad (13.3)$$

munosabat o'rinli bo'lishini ko'ramiz.

(13.1) ni nazarda tutib, (13.3) ni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (13.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar M nuqtaning nisbiy va ko'chirma harakati ma'lum bo'lsa, ya'ni mazkur nuqtaning nisbiy koordinatalari x, y, z va qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini boshining radius-vektori \vec{r}_0 vaqtning funktsiyasi sifatida hamda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ larning vaqt o'tishi bilan yo'nalish jihatdan o'zgarish qonuni berilgan bo'lsa, nuqtaning asosiy koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati ham berilgan deb hisoblash mumkin.

M nuqta absolyut tezligini aniqlash uchun (13.4) dan hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \quad (13.5)$$

Bu tenglikda $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ M nuqtaning absolyut tezligini, $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0$ esa qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini boshidagi O nuqtaning tezligini ifodalaydi.

(13.5) da quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (13.6)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0 + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \quad (13.7)$$

(13.6) dan ko'rinish turibdiki, tezlikning \vec{v} tashkil etuvchisini hisoblashda nuqtaning faqat nisbiy koordinatalarigina o'zgarib, \vec{r}_0 , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar o'zgar-mas deb qaraladi. Shu sababli \vec{v} nuqtaning nisbiy tezligini ifodalaydi.

(13.7) da $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ qatnashmaydi, ya'ni \vec{v}_0 ni hisoblashda nuqtaning

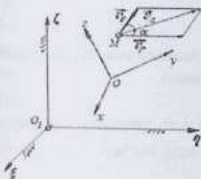
nisbiy harakati e'tiborga olinmaydi. Shu sababli \vec{v}_a M nuqtaning ko'chirma tezligini ifodalaydi.

Shunday qilib, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

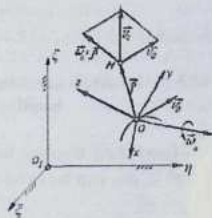
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_c \quad (13.8)$$

(13.8) tenglama murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo'shish haqidagi teoremani ifodalaydi; nuqtaning absolyut tezligi mazkur nuqta nisbiy va ko'chirma tezliklarining geometrik yig'indisiga teng.

Shunday qilib, nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezliklari miqdor va yo'nalish jihatdan ma'lum bo'lsa, absolyut tezlikning moduli nisbiy va ko'chirma tezlik-larga qurilgan parallelogramning diagonali bilan ifodalanadi. Absolyut tezlik-ning moduli kosinuslar teoremasidan foydalanib aniqlanadi (13.3-rasm).



13.3-rasm.



13.4-rasm.

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_c^2 + 2v_r v_c \cos \alpha} \quad (13.9)$$

bunda α bilan nisbiy va ko'chirma tezliklar orasidagi burchak belgilangan.

Xususan nisbiy va ko'chirma tezlik vektorlari o'zaro perpendikulyar bo'lsa, tezliklarga qurilgan parallelogramm to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'ladi. Shu sababli bu holda

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} \quad (13.10)$$

Agar nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezliklari bir to'g'ri chiziq bo'ylab bir tomonga yo'nalsa,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_c^2 + 2v_r v_c} = v_r + v_c \quad (13.11)$$

qarama-qarshi tomonga yo'nalsa,

$$v_n = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 - 2v_r v_\theta} = |v_r - v_\theta| \quad (13.12)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Nuqtaning ko'chirma tezligini aniqlash ustida to'xtalamiz. Agar qo'zg'aluv-chi koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi $\vec{\omega}$, ma'lum bo'l-sa, u holda $\frac{d\vec{i}}{dt}, \frac{d\vec{j}}{dt}, \frac{d\vec{k}}{dt}$ kattaliklarni mos

ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning uchlaridagi nuqtalarning tezligiga teng deb qarash mumkin. Shu sababli Eylar formulasiga ko'ra ushbu

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k} \quad (13.13)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

(13.13) ni (13.7) ga qo'yib, (13.1) ni e'tiborga olsak,

$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (13.14)$$

formula o'rinli bo'ladi (13.4-rasm).

13.3-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezlanishlarini qo'shish haqidagi Koriolis teoremasi

M nuqtaning absolyut tezlanishi \vec{a}_a mazkur nuqtaning absolyut tezligi \vec{v}_a dan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}$$

(13.5) dan vaqt bo'yicha hosila olsak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} + x\ddot{x}\vec{i} + y\ddot{y}\vec{j} + z\ddot{z}\vec{k} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + 2\left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \quad (13.15)$$

(13.15) da quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (13.16)$$

$$\vec{a}_i = \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \quad (13.17)$$

$$\vec{a}_t = 2\left(\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \quad (13.18)$$

(13.16)dan ko'rinib turibdiki, tezlanishning \vec{a}_r tashkil etuvchisi $\vec{r}_o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ larning hosilalariga bog'liq emas. \vec{a}_r ni hisoblashda $\vec{r}_o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar o'zgarmas, faqat x, y, z largina vaqtning funktsiyasi sifatida

o'zgaradi deb qaraladi. Shu sababli \vec{a}_e nuqtaning nisbiy tezlanishini ifodalaydi. Nuqtaning nisbiy tezlanishi-shini hisoblashda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining harakati e'tiborga olinmaydi.

(13.17) da \vec{a}_e ni hisoblashda M nuqta nisbiy koordinatalarining o'zgarishi e'tiborga olinmaydi, ya'ni berilgan onda

$$x=const, y=const, z=const$$

deb qaraladi. Boshqacha aytganda \vec{a}_e ni hisoblashda berilgan onda nuqtani qo'z-g'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan tinch holatda deb qarab, uning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini bilan birgalikda harakati tezlanishi nazar-da tutiladi. Shu sababli \vec{a}_e nuqtaning ko'chirma tezlanishini ifodalaydi.

(13.18) dan ko'ramizki, tezlanishning \vec{a}_e tashkil etuvchisi tarkibiga nuqta nisbiy koordinatalarining hosilalari bilan bir qatorda qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining birlik vektorlaridan olingan hosilalar ham qatnashadi. Shu nuqtai nazardan qaraganda \vec{a}_e ni nisbiy tezlanish tarkibiga ham ko'chirma tezlanish tarkibiga ham kiritib bo'lmaydi. \vec{a}_k Koriolis tezlanishi yoki qo'shimcha tezlanish deyiladi.

Shunday qilib, nuqtaning absolyut tezlanishi uchun quyic tenglikni ola-miz:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_k + \vec{a}_i \quad (13.19)$$

(13.19) tenglik murakkab harakatdagi nuqtaning tezlanishlarini qo'shish ha-qidagi *G.Koriolis (1792- 1843) teoremasini ifodalaydi: murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi uning nisbiy, ko'chirma va Koriolis (yoki qo'shimcha) tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.*

Agar ko'chirma harakat ilgarilama harakatdan iborat bo'lsa, u holda qo'z-g'aluvchi koordinatalar sistemasining $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlari harakat davomida o'ziga parallel ravishda ko'chadi. (13.17) va (13.18) da $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlardan vaqt bo'yicha olingan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng bo'lib,

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0, \vec{a}_k = 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Binobarin, ko'rilyotgan hol uchun (13.19) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_i \quad (13.20)$$

(13.20) tenglik ko'chirma harakati ilgari lama harakatdan iborat bo'lgan nuqtaning tezlanishlarini qo'shish haqidagi teoremani ifodalaydi: nuqtaning absolyut tezlanishi uning nisbiy va ko'chirma tezlanishlari geometrik yig'in-disiga teng.

Agar nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezlanishlari miqdor va yo'nalish ji-hatdan ma'lum bo'lsa, u holda absolyut tezlanishning moduli nisbiy va ko'chirma tezlanishlarga qurilgan parallelogramning diagonaliga teng bo'ladi:

$$a_e = \sqrt{a_r^2 + a_c^2 + 2a_r a_c \cos \alpha} \quad (13.21)$$

Shu sababli (13.20) tenglik tezlanishlarning parallelogram qoidasi deyiladi.

13.4- §. Murakkab harakatdagi nuqtaning nisbiy, ko'chirma va Kori-olis tezlanishlari

Nuktaning nisbiy tezlanishini bevosita (13.16) formula yordamida yoki qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini fikran qo'zg'almas deb qarab, 8.4-§ da chiqarilgan formulalar yordamida aniqlash mumkin.

Nuqtaning ko'chirma tezlanishi (13.17) dan foydalanib hisoblanadi. Bu formulada $\frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = \vec{a}_e$ qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasini boshining tezlanishini ifodalaydi. (13.13) ni z'tiborga olib (13.17) hadlarini quyidagicha o'zgartirish mumkin:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

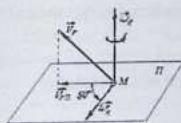
bu tenglikda $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ bilan berilgan ondagi ko'chirma harakat burchak

tezlanishi belgilangan. Xuddi shu singari $\frac{d^2 \vec{j}}{dt^2}$, $\frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}$ larni hisoblash mumkin:

$$\frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} = \vec{\varepsilon} \times \vec{j} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{j}),$$

$$\frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} = \vec{\varepsilon} \times \vec{k} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{k})$$

Natijada



13.5-rasm.

$$v \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} = \vec{e}_z (\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + z \dot{k}) + \vec{\omega}_z \times [\vec{\omega}_z \times (\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}) + \dot{\omega}_z \times (\vec{\omega}_z \times \vec{\rho})]$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib, ko'chirma tezlanish uchun quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{e}_z \times \dot{\rho} + \vec{\omega}_z \times (\vec{\omega}_z \times \vec{\rho}). \quad (13.22)$$

(13.22) va (12.8) tengliklarni solishtirib, (13.22) tenglik $Oxyz$ koordinatalar sistemasining berilgan onda M nuqta egallagan holati bilan ustma-ust tushuvchi nuqtasining tezlanishini ifodalashini ko'ramiz.

Binobarin, ko'chirma harakat tezlanishi \vec{a}_c qo'zg'atuvchi koordinatalar sistemasining boshidagi O nuqta tezlanishi \vec{a}_0 hamda aylanma tezlanish $\vec{a}_c = \vec{e}_z \times \dot{\rho}$ bilan o'qqa yoki markazga intilma tezlanish $\vec{a}_c'' = \vec{\omega}_z \times (\vec{\omega}_z \times \vec{\rho})$ ning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi ya'ni

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{a}_c' + \vec{a}_c'' \quad (13.23)$$

(13.13) ni nazarda tutib, Koriolis tezlanishini ifodalovchi (13.18) tenglikni quyidagicha yoza olamiz:

$$\vec{a}_c = 2[\dot{x}(\vec{\omega}_z \times \vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}_z \times \vec{j}) + \dot{z}(\vec{\omega}_z \times \vec{k})] = 2[\vec{\omega}_z \times (\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k})]$$

Koriolis tezlanishini ifodalovchi bu ifoda (13.6) ga ko'ra quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\vec{a}_c = 2[\vec{\omega}_z \times \vec{v}_c] \quad (13.24)$$

Demak, murakkab harakatdagi nuqtaning Koriolis tezlanishi qo'zg'atuvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi bilan nuqtaning nisbiy tezligi vektorli ko'paytmasining ikkilanganiga teng.

Koriolis tezlanishining moduli (13.24) tenglikka binoan

$$a_c = 2\omega_z v_c \sin(\hat{\omega}_z, \hat{v}_c) \quad (13.25)$$

formula bilan aniqlanadi.

\vec{a}_c ning yo'nalishini aniqlashda quyidagi Jukovskiy qoidasidan foydalanish mumkin: Koriolis tezlanishining yo'nalishini aniqlash uchun M nuqtaning nisbiy tezligi \vec{v}_c ning berilgan ondagi ko'chirma harakat burchak tezligi $\vec{\omega}_z$ ga perpendi-kulyar Π tekislikdagi

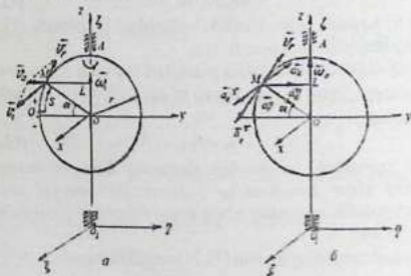
proekstiyasi \vec{u}_m ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat yo'nalishida 90° burchakka burish kerak (13.5-rasm).

13.5-§. Nuqtaning murakkab harakatiga oid masalalar

Nuqtaning murakkab harakatiga oid masalalarni echishda avvalo qo'zg'almas va qo'zg'aluvchi koordinata sistemalari tanlanib, nuqtaning absolyut harakati nisbiy va ko'chirma harakatlarga ajratiladi.

Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligini topishda (13.8) formula bilan ifodaladigan tezliklar parallelogrammi qoidasidan foydalaniladi.

13.1. masala. Radiusi $r=0,3\text{m}$ bo'lgan disk vertikal diametri atrofida $\varphi=(2t+0,3t^2)$ rad qonunga binoan aylanadi (13.6-rasm, a). M nuqta disk gardishi bo'ylab $O_1M = s = 0,1\pi \sin \frac{\pi}{4} M$ tenglamaga muvofiq harakatlanadi. $t = t_1 = \frac{2}{3}\text{s}$ bo'lgan paytda disk rasm tekisligida yotadi. M nuqtaning t_1 paytdagi absolyut tezligi va absolyut tezlanishi topilsin.



13.6-rasm.

Yechish. Qo'zg'almas $O_1\xi\eta\zeta$ va qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasini 13.6-rasmdagidek tanlab olamiz. M nuqtaning r radiusli aylana yoyi bo'ylab

$Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan $s = 0,1\pi \sin \frac{\pi}{4} M$ qonun bo'yicha

harakati nisbiy harakatdir.

Diskning $\varphi = (2t + 0,3t^2)$ qonunga binoan $O_1\zeta'$ o'q atrofidagi aylanma harakati ko'chirma harakatni ifodalaydi. M nuqtaning $O_1\zeta'$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat.

Dastlab M nuqtaning t_1 paytdagi holatini aniqlaymiz:

$$s_{O_1M} = s_{yoy} = 0,1\pi \sin \frac{2\pi}{3 \cdot 4} M = 0,05\pi M.$$

O_2M yoy o'zi tiralgan markaziy burchak α bilan ham o'lchanadi:

$$s_{O_2M} = r \cdot \alpha. \text{ Binobarin, } \alpha = \frac{0,05\pi}{r} = \frac{\pi}{6} \text{ (13.10- rasm, a).}$$

M nuqtaning absolyut tezligini (13.8) formula vositasida aniqlaymiz:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

By ifodadagi nisbiy tezlikning algebraik qiymatini (8.28) ga asosan aniqlaymiz:

$$v_{a1} = \frac{ds}{dt} = \frac{0,1\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

$t = t_1$ da $v_{a1} = 0,21M/s > 0$ bo'lganidan nisbiy tezlik moduli $v_{a1} = 0,21M/s$ yo'nalishi esa O_2M yoy koordinatasi ortadigan yo'nalishda M nuqtada diskning gardishiga o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi.

M nuqta ko'chirma tezligining moduli

$$v_c = \omega_c \cdot ML \quad (2)$$

formuladan topiladi, (2) da ω_c bilan ko'chirma harakat burchak tezligining moduli belgilangan. Ko'chirma harakat burchak tezligining algebraik qiymati (9.4) formulaga ko'ra topiladi:

$$\omega_c = \dot{\varphi} = 2 + 0,6t \quad (3)$$

$t = t_1$ da $\omega_c = 2 + 0,6 \cdot \frac{2}{3} = 2,4s^{-1} > 0$. Demak, $\omega_c = 2,4s^{-1}$. 13.6-rasm, b dan:

$$ML = r \cdot \cos \alpha = 0,3 \cdot 0,866 = 0,26M. \quad (4)$$

Shunday qilib, (2) dan $v_c = \omega_c \cdot ML = 0,62M/s$ kelib chiqadi. \vec{v}_c vektori Ox o'qqa parallel ravishda kuzatuvchi tomon yo'nalgan va nisbiy tezlikka tik bo'l-gani uchun

$$v_a = \sqrt{v_c^2 + v_1^2} = 0,654M/s.$$

\vec{v}_a vektori disk tekisligiga perpendikulyar tekislikda joylashadi. Ko'chirma harakat Oz o'q atrofida aylanma harakatdan iborat

bo'lgani uchun M nuqtaning absolyut tezlanishi (13.19) tenglama vositasida aniqlanadi. Uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\vec{a}_a = \vec{a}' + \vec{a}_\omega + \vec{a}' + \vec{a}_\omega + \vec{a}_\omega \quad (5)$$

M nuqta nisbiy harakatining urinma va normal tezlanishlarini aniqlaymiz:

$$a'_t = \frac{dv_{\omega}}{dt} = -\frac{0,1}{16} \pi^2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$t = t_1$ da $a'_t = -0,1 M/s^2$, $a'_t < 0$ bo'lgani tufayli, \vec{a}' vektori \vec{v} yo'nalishiga qarama-qarshi yo'naladi va $|\vec{a}'| = 0,1 M/s^2$.

$$a'_r = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = 0,15 M/s^2, \vec{a}'$$

vektori MO chiziq bo'yicha M dan O markazga qarab yo'naladi (13.6- rasm, δ).

M nuqtaning ko'chirma harakatdagi urinma tezlanishi moduli $a'_c = ML \cdot \varepsilon_c$,

bunda $\varepsilon_c = |\varepsilon_c|$ ko'chirma harakat burchak tezlanishining modulini ifodalaydi, u (3) dan vaqt bo'yicha hosila olib topiladi:

$\varepsilon_c = \dot{\omega}_c = 0,6 = const > 0$. Binobarin, $\varepsilon_c = \varepsilon_c = 0,6 c^{-2}$ bo'lib, M nuqtaning ko'chirma harakati tezlanuvchan bo'ladi. Shunday qilib, $t = t_1$ da

$$a'_c = ML \cdot \varepsilon_c = 0,16 M/c^2$$

$\varepsilon_c > 0$ bo'lgani tufayli \vec{a}' vektori Ox o'qqa parallel ravishda kuzatuvchi tomon yo'naladi.

Berilgan onda M nuqtaning ko'chirma harakatidagi normal tezlanishi moduli

$a'_n = ML \cdot \omega_c^2 = 1,5 M/s^2$ ga teng bo'ladi. \vec{a}' vektori M nuqtadan Oz aylanish o'qiga perpendikulyar ravishda ML bo'ylab yo'naladi (13.10- rasm, δ).

M nuqtaning Koriolis tezlanishi (13.25) ga ko'ra aniqlanadi. Berilgan paytda

$\vec{\omega}_c \vec{v}_c = \alpha = \pi/6$ bo'lganidan $a_c = 2\omega_c v_c \sin(\pi/6) = 0,5 M/s^2$ ekanligi kelib chiqadi. Jukovskiy qoidasiga ko'ra Koriolis tezlanishi \vec{a}_k M nuqtada kuzatuvchidan disk tekisligiga perpendikulyar ravishda yo'naladi.

M nuqtaning absolyut tezlanishini proekstiyalash usuli bilan aniqlaymiz. (5) ni x, y, z o'qlariga proekstiyalaymiz: $a_{ax} = a'_c - a_t = 0,34 M/s^2$,

$$a_{\omega} = -|a_r^x| \cos 60^\circ + a_r^y \cos 30^\circ + a_r^z = 1,58 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{\omega z} = -|a_r^x| \cos 30^\circ - a_r^y \cos 60^\circ = -0,6 \text{ m/s}^2$$

Binobarin,

$$a_{\omega} = \sqrt{a_{\omega x}^2 + a_{\omega y}^2 + a_{\omega z}^2} = \sqrt{2,98} \approx 1,73 \text{ m/s}^2$$

M nuqta absolyut tezlanishining koordinata o'qlaridagi proekstiyalariga ko'ra yo'nalish kosinuslarini topish qiyin emas.

Nuqtaning murakkab harakatiga doir hisob- grafik ishlari variantlari 2-ilova-ning 4-topshirig'ida keltirilgan.

Nazorat savollari:

1. Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlik vektori qanday aniqlanadi?
2. Murakkab harakatdagi nuqtaning nisbiy tezlik vektori qanday aniqlanadi?
3. Murakkab harakatda ko'chirma tezlik vektori qanday belgilanadi?
4. Murakkab harakatdagi nuqtaning nisbiy tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
5. Murakkab harakatdagi nuqta ko'chirma tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
6. Murakkab harakatdagi nuqtaning Koriolis tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
7. Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
8. Koriolis tezlanishining moduli va yo'nalishi qanday aniqlanadi?

1/2

iam,

lari-
dan
hki

hki

ts-
ng

.2)

.3)

imi

,F₂

chi

hk

ng

14-BOB. QATTIQ JISMNING MURAKKAB HARAKATI

Tayanch soʻzlar: Jismning ilgari lama harakatlarini qoʻshish, jismning kesi-shuvchi oʻqlar atrofidagi aylanma harakatlarini qoʻshish, jismning ikkita parallel oʻq atrofidagi aylanma harakatlarini qoʻshish, stilindrik tishli uzatmalar.

14.1-§. Umumiy mulohazalar

Texnikada koʻpincha qattiq jismning harakatini bir necha koordinatalar siste-masiga nisbatan oʻrganishga toʻgʻri keladi. Odatda, berilgan jism bilan bogʻlan-magan koordinata sistemalaridan biri, masalan, $O_1\xi\eta\zeta$ ni qoʻzgʻalmas deb qabul qilinadi. Shuningdek, berilgan jism bilan bogʻlanmagan va oʻz navbatida qoʻzgʻal-mas koordinatalar siste-masiga nisbatan harakatlanuvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasini olinadi. Masalan, sunʼiy yoʻldosh ichidagi jismning Yerga nisbatan harakatini oʻrganishda Yer bilan bogʻlangan $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasini qoʻzgʻal-mas deb olinadi; qoʻzgʻaluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasini uchun sunʼiy yoʻl-doshga mahkam biriktirilgan koordinatalar sistemasini olinadi.

Jismning qoʻzgʻaluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati *nisbiy harakat* deyiladi.

Yuqorida koʻrganimizdek, qoʻzgʻaluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasining qoʻzgʻalmas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati koʻchirma harakatni ifodalaydi. Bunda qoʻzgʻaluvchi koordinatalar sistemasining harakati deganda, u bilan bogʻlangan fazoning qoʻzgʻalmas koordinatalar sistemasini bilan bogʻlangan fazoga nisbatan harakati tushuniladi. Qattiq jismning berilgan ondagi *koʻchirma harakati* deganda, uning shu ondagi faqat qoʻzgʻaluvchi koordinatalar sistemasini bilan birgalikda qoʻzgʻalmas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati nazarda tutiladi.

Jismning qoʻzgʻalmas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati *mu-rakkab harakat* yoki *absolyut harakat* deyiladi. Shunday qilib, qattiq jismning absolyut harakatini nisbiy va koʻchirma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin.

14.2- §. Jismning ilgari lama harakatlarini qo'shish haqida teorema

Qattiq jism $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan \vec{v}_1 tezlik bilan ilgari lama harakatda bo'l-sin. O'z navbatida $Oxyz$ koordinatalar sistemasini ham qo'zg'almas $O_1\zeta\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan \vec{v}_2 tezlik bilan ilgari lama harakat qilsin (14.1- rasm). Jismning $O_1\zeta\eta\zeta$ koordi-natalar sistemasiga nisbatan harakatini, ya'ni absolyut harakatini aniqlaymiz.

Nisbiy harakat ilgari lama harakatdan iborat bo'lgani uchun jismning barcha nuqtalari birdek $\vec{v}_1 = \vec{v}$ nisbiy tezlik bilan harakatlanadi. Xuddi shuningdek, jismning ko'chirma harakati ham ilgari lama harakatdan iborat bo'lgani tufayli uning barcha nuqtalari bir xil $\vec{v}_2 = \vec{v}_2$ ko'chirma tezlik bilan harakatlanadi.

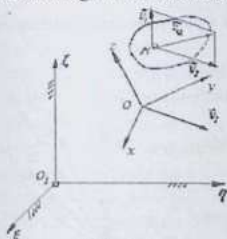
Jism biror M nuqtasining absolyut tezligini aniqlash uchun tezliliklarni qo'shish teore-masini ifodalovchi

$$\vec{v}_s = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (14.1)$$

tenglikdan foydalanamiz. Ko'ri layotgan hol uchun bu formulani

$$\vec{v}_s = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (14.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (14.2) dan ko'ramizki, jism barcha nuqtalarining absolyut tezliklari bir xil, ya'ni jismning absolyut harakati ilgari lama harakatdan iborat bo'ladi.



14.1-rasm.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: agar jismning nisbiy va ko'chirma harakatlari ilgari lama harakatdan iborat bo'lsa, jismning absolyut ha-rakati ham ilgari lama harakatdan iborat bo'ladi hamda absolyut harakat tezligi nisbiy va ko'chirma harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga tengdir.

Agar jism bir vaqtning o'zida $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ tezliklar bilan sodir bo'ladigan n ta ilgari-lama

harakatlarda qatnashsa, u holda jism ixtiyoriy nuqtasining absolyut tezligi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ilgari lama harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{v}_s = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \quad (14.3)$$

bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin.

14.3-§. Jismning kesishuvchi o'qlar atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish

Jism qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan Oz o'q atrofida ω_1 burchak tezlik bilan, o'z navbatida Oz o'q qo'zg'almas $O\xi$ o'q atrofida aylanma harakatda bo'lsin (14.2-rasm). Boshqacha aytganda jism qo'zg'aluvchi Oz o'q atrofida $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_3$ burchak tezlik bilan nisbiy harakatda hamda qo'zg'almas $O\xi$ o'q atrofida $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_1$ burchak tezlik bilan ko'chirma harakatda ishtirok etsin. O nuqta jism harakati davomida qo'zg'almasdan qolgani sababli jismning qo'zg'almas $O\xi\eta\xi$ koordinataga nisbatan harakati O nuqta atrofidagi sferik harakatdan iborat bo'ladi. Jism absolyut harakatining oniy burchak tezligi qanday bo'lishini ko'rib chiqamiz.

Jism ixtiyoriy M nuqtasining radius-vektorini \vec{r} bilan belgilab, bu nuqtaning absolyut tezligi \vec{v}_M ni aniqlaymiz. Ko'rilayotgan hol uchun (14.1) da

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{v}_s = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{v}_s$$

ekanlinini e'tiborga olsak,

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$$

bo'ladi.

M nuqtaning absolyut harakat tezligini Eyler formulasi yordamida ham aniqlash mumkin:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (14.4)$$

Bunda $\vec{\omega}$ bilan absolyut harakat burchak tezligi belgilangan.

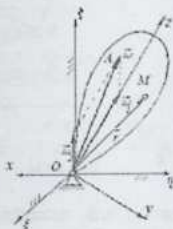
Oxirgi ikkita tenglikni solishtirib, quyidagi munosabatni olamiz:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$$

M nuqta va uning radius vektori \vec{r} ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad (14.5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, absolyut harakat burchak tezligi $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ larga



14.2-rasm.

qurilgan parallelogramning OA diagonali bilan ifodalanadi. (14.5) tenglik burchak tezliklarning *parallelogramm* qoidasi deyiladi.

OA diagonal orqali o'tuvchi o'qdagi jism nuqtalarining radius vektori $\vec{\omega}$ bilan bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun (14.4) ga ko'ra bu nuqtalarning tezligi nolga teng bo'ladi, ya'ni mazkur o'q aylanish oniy o'qidan iborat bo'ladi.

Natijada quyidagi teorema isbotlandi: *agar jism bir vaqtda O nuqtada ke-sishuvchi ikkita o'q atrofida aylanma harakatda ishtirok etsa, u holda jismning absolyut harakati O nuqtadan o'tuvchi aylanish oniy o'qi atrofida oniy aylanma harakatdan iborat bo'lib, absolyut harakat oniy burchak tezligi nisbiy va ko'chirma harakat burchak tezliklarining geometrik yig'indisiga teng.*

Agar jism bir vaqtning o'zida O nuqtada kesishuvchi n ta o'qlar atrofida $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ burchak tezliklar bilan aylanma harakatda bo'lsa, u holda jismning absolyut harakati O nuqtadan o'tuvchi oniy o'q atrofidagi oniy aylanma harakatdan iborat bo'lib, absolyut harakat

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$$

oniy burchak tezlik bilan sodir bo'ladi.

14.4-§. Jismning ikkita parallel o'q atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish

Jismning nisbiy va ko'chirma harakatlari o'zaro parallel o'qli atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'lgan hollarni ko'ramiz.

Jism qo'zg'aluvchi z o'q atrofida $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$ burchak tezlik bilan nisbiy harakatda, o'z navbatida Oz o'q o'ziga parallel bo'lgan qo'zg'almas $O_1\zeta$ o'q atrofida $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1$ burchak tezlik bilan ko'chirma aylanma harakatda bo'lsin (14.3-rasm). Bu holda jism nuqtalari nisbiy harakatda ham, ko'chirma harakatda ham Oz va $O_1\zeta$ o'qlariga perpendikulyar tekisliklarda harakatlanadi. Shu sababli jismning bunday harakatini tekis parallel harakat deb qarash mumkin.

Binobarin, bu holda jismning absolyut harakatini o'rganish jismni Oz va $O_1\zeta$ o'qlarga perpendikulyar bo'lgan Π tekislik bilan fikran kesish natijasida hosil bo'lgan S yuzaning harakatini o'rganishga keltiriladi.

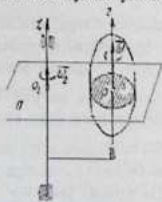
Aylanma harakatlar bir tomonga va qarama-qarshi tomonga yo'nalgan hollarni alohida ko'rib chiqamiz.

I. Nisbiy va ko'chirma aylanma harakatlar bir tomonga yo'nalgan hol. Jism (shkiv 1) gorizontaal tekislikda harakatlanuvchi krivoship 2 ga mahkam-langani vertikal z o'q atrofida $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ burchak tezlik bilan nisbiy harakatda, o'z navbatida krivoship z o'qqa parallel bo'lgan qo'zg'almas ζ o'q atrofida $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ burchak tezlik bilan ko'chirma aylanma harakatda bo'lsin (14.4-rasm). Aytaylik, nisbiy va ko'chirma harakatlar z va ζ o'qlarning musbat yo'nalishidan qaraganda soat strelkasi aylanadigan yo'nalishga teskari yo'nalishda sodir bo'lsin.

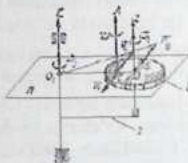
$\bar{\omega}_1$ va $\bar{\omega}_2$ burchak tezliklarni rasmda ko'rsatilganidek tasvirlaymiz. Jismning absolyut harakati qanday bo'lishini ko'rib chiqamiz. Shkivning S yuzasi orqali z va ζ o'qlarga perpendikulyar Π tekislikni o'tkazib, o'qlarning mazkur tekislik bilan kesishgan nuqtalarini mos ravishda O va O_1 bilan belgilaymiz. S yuzaning O_1O chiziqdagi C nuqtasining absolyut tezligi uning Oz o'q atrofidagi aylanma harakatdagi nisbiy tezligi v_1 hamda $O_1\zeta$ o'q atrofidagi v_2 ko'chirma tezliklarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Bu ikkita tezlik O_1O ga perpendikulyar ra-vishda bir-biriga qarama-qarshi yo'naladi. Shu sababli

$$v_2 = v_1 - v_3 = \omega_1 CO - \omega_2 O_1 C.$$

C nuqtani shunday tanlaymizki, bu nuqta uchun $\omega_1 CO - \omega_2 O_1 C = 0$ yoki

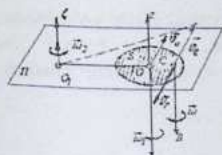


14.3-rasm.



14.4-rasm.

$$\frac{O_1 C}{CO} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (14.6)$$



14.5-rasm.

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda C nuqtaning absolyut tezligi nolga teng bo'ladi. Xuddi shuningdek, C nuqta orqali $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ larga parallel bo'lgan CA o'qda yotuvchi jism nuqtalarining absolyut tezligi ham nolga tengligiga ishonch hosil qilish mumkin. Binobarin, CA absolyut harakatdagi

aylanish oniy o'qini ifodalaydi.

(14.6) dan ko'ramizki, ko'rilayotgan holda CA aylanish oniy o'qi O_1O kesmani ichki tomondan nisbiy va ko'chirma harakat burchak tezliklariga teskari proporsional bo'laklarga bo'ladi. CA o'q atrofida absolyut harakatning oniy burchak tezligini aniqlaymiz. O nuqta O_1C o'q atrofida ω_2 burchak tezlik bilan aylangani, shuningdek, O nuqtaning absolyut harakati CA oniy o'q atrofida ω oniy burchak tezlik bilan sodir bo'lgani tufayli, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$v_O = \omega_2 \cdot O_1O = \omega \cdot CO$$

Bu tengliklarni solishtirib, absolyut harakat oniy burchak tezligini aniqlaymiz:

$$\omega_2 \cdot O_1O = \omega \cdot CO$$

$$\omega = \omega_2 \cdot \frac{O_1O}{CO} = \omega_2 \cdot \frac{O_1C + CO}{CO} = \omega_2 \cdot \left(\frac{O_1C}{CO} + 1 \right)$$

yoki (14.6) ga asosan

$$\omega = \omega_2 \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + 1 \right) = \omega_1 + \omega_2 \quad (14.7)$$

Shunday qilib, agar jism bir vaqtda ikkita parallel o'q atrofida mos ravishda $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ burchak tezliklar bilan bir tomonga aylansa, jismning absolyut harakati xuddi shu yo'nalishda $\omega = \omega_1 + \omega_2$ oniy burchak tezlik bilan mazkur o'qlarga parallel bo'lgan va (14.6) tenglik vositasida aniqlanadigan aylanish oniy o'qi atrofida oniy aylanma harakatdan iborat bo'ladi.

2. Nisbiy va ko'chirma harakat burchak tezliklari miqdor jihatdan har xil, yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgan hol. 14.3 yoki 14.4-rasmlarda tasvirlangan S yuzaning Π tekislikdagi harakatini tekshiramiz (14.5-rasm). O'qning musbat yo'nalishidan qaraganda S yuza Oz o'q atrofida soat strelkasi harakati yo'nalishida $\vec{\omega}_1$ burchak

7/2
1/2

nam,
lari-
tdan
chki
chki

ts-
ng
)2)
)3)
mi
, \vec{F}_2
chi
hk
ng

tezlik bilan, O_1C o'q atrofida esa unga qarama-qarshi yo'nalishda ω_2 burchak tezlik bilan aylansin. Aytaylik, $\omega_1 > \omega_2$ bo'lsin. Xuddi oldingi holdagi-dek, O_1O kesmaning davomida yotuvchi S nuqtaning absolyut tezligini aniqlay-miz:

$$v_s = v_2 - v_1 = \omega_1 OC - \omega_2 O_1C,$$

C nuqtani shunday tanlaymizki,

$$\omega_1 OC = \omega_2 O_1C,$$

yoki

$$\frac{O_1C}{OC} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (14.8)$$

bo'lsin. U holda $v_s = 0$ hamda $\vec{\omega}_1$ ga parallel bo'lgan CB o'q aylanish oniy o'qi-dan iborat bo'ladi.

(14.8) dan ko'ramizki, ko'rilayotgan holda CB oniy o'q O_1O kesmani tashqi tomondan nisbiy va ko'chirma harakat burchak tezliklariga teskari proporsional bo'laklarga bo'ladi.

CB o'q atrofidagi absolyut harakat burchak tezligi ω ni aniqlaymiz. Buning uchun yuqoridagidek mulohaza yuritib, O nuqtaning tezligi aniqlanadigan

$$v_o = \omega_2 \cdot O_1O = \omega \cdot OC$$

tenglilarni olamiz. Bu tengliklardan foydalanib, absolyut harakat oniy burchak tezligini aniqlaymiz:

$$\omega OC = \omega_2 O_1O,$$

$$\omega = \omega_2 \frac{O_1O}{OC} = \omega_2 \cdot \frac{O_1C - OC}{OC} = \omega_2 \cdot \left(\frac{O_1C}{OC} - 1 \right)$$

(14.8) ni e'tiborga olsak

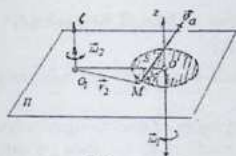
$$\omega = \omega_2 \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \right) = \omega_1 - \omega_2$$

yoki

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (14.9)$$

tenglik xosil bo'ladi.

Shunday qilib, agar jism bir vaqtda ikkita parallel o'q atrofida miqdor jihatdan bir-biriga teng bo'lmagan va ω_2 burchak tezliklar bilan ($\omega_1 > \omega_2$) qarama-qarshi tomonga aylansa, jism absolyut harakati katta burchak tezligi yo'nalishida $\omega = \omega_1 - \omega_2$ oniy burchak tezlik bilan mazkur o'qlarga parallel bo'lgan va (14.8) tenglik vositasida



14.6-rasm.

aniqlanadigan oniy o'q atrofidagi oniy aylanma harakatdan iborat bo'ladi. Aylanish oniy o'qining O_1C o'qiga nisbatan holatini aniqlash uchun (14.8) dan foydalanib, hosilaviy proporsiya tuzamiz:

$$\frac{O_1C - OC}{OC} = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} \right)$$

yoki

$$\frac{O_1O}{OC} = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} \right)$$

Bundan quyidagi tenglikni olamiz:

$$OC = O_1O \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right) \quad (14.10)$$

3. Nisbiy va ko'chirma burchak tezliklari miqdor jihatdan teng, yo'nali-shi qarama-qarshi bo'lgan hol. Agar qattiq jism ikkita parallel o'q atrofida miq-dor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgan burchak tezliklar bilan ay-lansa, bunday harakat *juft aylanish* deyiladi.

14.3 yoki 14.4-rasmlarda tasvirlangan S yuza Π tekislikdagi juft aylanishda ishtirok etsin (14.6-rasm). U holda S yuza ixtiyoriy M nuqtasining absolyut tezligi uchun

$$\vec{v}_s = \vec{v}_o + \vec{v}_m = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bunda \vec{r}_1 bilan M nuqtaning O nuqt nisbatan radius-vektori belgilangan. Qaralayotgan holda $\vec{\omega}_1 = -$ bo'lgani uchun:

$$\vec{v}_s = \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{OO}_1 = \vec{O}_1O \times \vec{\omega}_1 \quad (14.11)$$

bunda

$$\vec{O}_1O = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (14.2)$$

(14.11) tenglikdan ko'ramizki, M nuqtaning absolyut tezligi uning holatiga bog'liq bo'lmasdan, berilgan onda jismning barcha nuqtalari miqdor va yo'nalish jihatdan bir xil bo'lgan absolyut tezlik bilan harakatlanadi, ya'ni jismning absolyut harakati ilgarilama harakatdan iborat bo'ladi.

$\vec{\omega}_1 \times \vec{O}_1O$ vektor ko'paytma $\vec{\omega}_1$ vektorning O nuqtaga nisbatan

momentini yoki $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ juftning momentini ifodalaydi. Shu sababli

$$\vec{v}_a = \vec{M}_o(\vec{\omega}_1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. \vec{v}_a ni *juft aylanish momenti* deb ham ataladi.

Binobarin, juft aylanishda ishtirok etayotgan M nuqtaning absolyut tezligi $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ lar yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo'naladi hamda miqdor jihatdan $v_a = \omega_1 \cdot O_1O = \omega_1 \cdot h$ ga teng bo'ladi.

Bunda h bilan $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ vektorlari orasidagi eng qisqa masofa belgilangan bo'lib bu masofa *juft aylanish elkasi* deyiladi.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: *juft aylanish ilgarilama harakatga ekvivalent bo'lib, ilgarilama harakat tezligi juft aylanish momentiga teng.*

14.1-masala. Yerning sun'iy yo'ldoshi doiraviy orbita bo'ylab ekvator tekisligida harakatlanadi va Yer atrofini 1,5 soatda aylanib chiqadi. Quyidagi ikki holda: 1) sun'iy yo'l-dosh sharqdan g'arbga uchayotganda, 2) g'arbdan sharqqa uchayotganda uning Yerga nisbatan burchak tezligi $\vec{\omega}_3$ hisoblansin.

Yechish. Yer g'arbdan sharqqa qarab 24 soat ichida o'z o'qi atrofiga bir marta aylanadi. Sun'iy yo'ldoshning Yer bilan birgalikdagi harakatini ko'chirma harakat deb qarasaq, ko'chirma harakat burchak tezligi

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{24} \text{ ayl / soat} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ rad / sek} = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \text{ ga teng bo'ladi.}$$

Sun'iy yo'ldoshning absolyut harakat burchak tezligi berilgan:

$$\omega = \frac{1}{1,5} \text{ ayl / soat} = \frac{2\pi}{1,5 \cdot 3600} \text{ rad / sek} = 11,629 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

Yer va uning sun'iy yo'ldoshi parallel o'qlar atrofida aylanadi. Sun'iy yo'ldosh sharqdan g'arbga uchayotganda uning nisbiy burchak tezligi $\vec{\omega}_3$ ko'chirma harakat burchak tezligi $\vec{\omega}_2$ ga qarama-qarshi yo'naladi. Shu sababli (14.9) ga ko'ra

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\text{Bundan } \omega_3 = \omega + \omega_2 = \frac{1}{1,5} + \frac{1}{24} = 0,708 \text{ ayl / soat} = 12,356 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

Sun'iy yo'ldosh g'arbdan sharqqa uchayotganda $\vec{\omega}_3$ ning yo'nalishi $\vec{\omega}_2$ bilan bir xil bo'lgani uchun (14.7) ga asosan $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Bundan

$$\omega_1 = \omega - \omega_2 = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{24} = 0,624 \text{ ayl / soat} = 10,962 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

14.2-masala. OO_1 krivoship I va II tishli g'ildiraklarning O va O_1 o'qlarini birlashtiradi, g'ildiraklar o'zaro, 14.7-rasmda ko'rsatilgandek, tashqi tishlar bilan ilashadi. II g'ildirak qo'zg'almaydi. OO_1 krivoship ω_2 burchak tezlik bilan aylanadi. G'ildiraklarning radiuslari r_1 va r_2 bo'lsa, I g'ildirakning absolyut burchak tezligi ω va uning krivoshipga nisbatan burchak tezligi ω_1 hisoblan-sin.

Yechish. I g'ildirak bir vaqtning o'zida O va O_1 nuqtalardan rasm tekisligiga tik ra-vishda o'tuvchi o'zaro parallel O_1z va Oz o'qlar atrofida aylanma harakatlarda ishtirok etadi. I g'ildirak krivoship bilan bog'langan $O_1xy_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan O_1z_1 o'q atrofida $\omega_1 = \omega_1$ burchak tezlik bilan, Oz atrofida OO_1 krivoship bilan birgalikda $\omega_2 = \omega_2$ burchak tezlik bilan aylanadi. ω_1 va ω_2 vektorlari o'zaro parallel va bir tomonga yo'naladi.

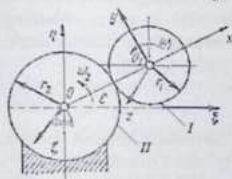
G'ildiraklar ilashgan C nuqtaning tezligi nolga teng bo'lgani tufayli shu nuqtadan rasm tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi o'q aylanish oniy o'qini ifodalaydi. Shu sababli (14.6) ga ko'ra

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ yoki } \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{r_1}$$

I g'ildirakning absolyut harakatdagi burchak tezligini (14.7) g' binoan aniq-laymiz:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_2 \frac{r_1 + r_2}{r_1}$$

14.5- §. Stilindrik tishli uzatmalar



14.7-rasmi.

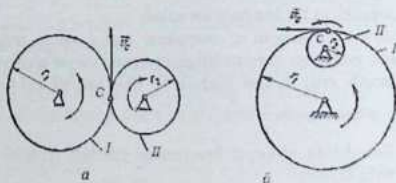
Silindrik tishli g'ildiraklardan (shesternyalardan) tashkil topgan uzatmalarni kinematik nuqtai nazardan hisoblashda avvalgi paragrafdagi natijalardan foydalanish mumkin. Biror valning aylanma harakatini unga parallel bo'lgan ikkinchi valga uzatishda tishli uzatmalardan foydalaniladi. Tishli

uzatmalar g'ildiraklar-ning harakat turiga qarab oddiy, planetar va differensial uzatmalarga ajratiladi.

Ketma-ket ilashgan tishli g'ildiraklarning aylanish o'qlari qo'zg'almasdan qolsa, bunday uzatma *oddiy uzatma* deyiladi (14.8-rasm, *a* va *b*). Oddiy uzatma g'ildiraklardan biri, masalan, tishli g'ildirak I etakchi, qolganlari esa etaklanuvchi hisoblanadi. Yetakchi g'ildirak burchak tezligi ω_1 ning etaklanuvchi g'ildirak burchak tezligi ω_2 ga nisbati *uzatish soni* deyiladi. Uzatish sonini $i_{1,2}$ bilan belgilasak,

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

munosabat o'rinni bo'ladi. Oddiy uzatma ikkita tishli g'ildirakdan tashkil topgan bo'lsa, g'ildiraklar urinadigan *C* nuqtada ularning tezliklari teng bo'ladi:



14.8-rasm.

$$|\omega_1|r_1 = |\omega_2|r_2$$

Tashqi ilashgan tishli g'ildiraklar qarama-qarshi tomonga (14.8-rasm, *a*), ichki ilashgan tishli g'ildiraklar bir tomonga (14.8-rasm, *b*) aylanishini hamda g'ildiraklarning tishlar soni z_1 va z_2 ularning radiuslari r_1 va r_2 ga to'g'ri proporsional ekanligini e'tiborga olsak, uzatish soni uchun quyidagi munosabatlar o'rinni bo'ladi:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} \quad (14.12)$$

Ichki ilashgan g'ildiraklar uchun bu formulada musbat ishora, tashqi ilashgan g'ildiraklar uchun esa manfiy ishora olinadi.

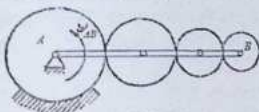
Ketma-ket ilashgan tishli g'ildiraklardan biri qo'zg'almas bo'lib,

qolganlari mazkur g'ildirak o'qi atrofida aylanuvchi AB krivoshipga o'rnatilgan bo'lsa, bun-day uzatma *planetar uzatma* deyiladi (14.9-rasm).

Agar planetar uzatmadagi qo'zg'almas g'ildirak ham o'z atrofida AB krivoshipga daxlsiz ravishda aylana olsa, bunday uzatma *differensial uzatma* deyiladi.

Planetar yoki differensial uzatmalarning kinematik xarakteristikalarini aniq-lashda quyidagi usullardan foydalanish mumkin.

1. Burchak tezliklarni qo'shish usuli. Planetar yoki differensial uzatmalar-dagi g'ildiraklarning aylanish o'qlari parallel bo'lsa, u holda (14.7) yoki (14.9) formulalar vositasida absolyut harakat burchak tezligi aniqlanadi. Absolyut harakatning burchak tezlik vektori aylanish oniy o'qi bilan ustma-ust tushadi.



14.9-rasm.

2. Tezliklar oniy markazidan foydalanish usuli. Planetar va differensial uzatma g'ildiraklar tekis prokatda ishtirok etgan va talab berilgan g'ildirak tezliklarning oniy

so'ngra

$$\omega_a = \frac{v_a}{r}$$

formula yordamida uning absolyut harakat burchak tezligini aniqlaymiz. Nisbiy harakat burchak tezligini (14.7) yoki (14.9) formulalar vositasida aniqlash mumkin.

3.«To'xtatish» usuli yoki Villis usuli. Bu usulning mohiyati shundan iborat-ki, planetar yoki differensial uzatma oddiy uzatmaga keltiriladi va unga mos bo'lgan kinematik munosabatlardan foydalaniladi. Buning uchun planetar yoki differensial uzatmaning krivoshipi fikran to'xtatiladi va uzatma tarkibiga kiruv-chi barcha g'ildiraklarga miqdor jihatdan krivoship burchak tezligiga teng, yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'lgan burchak tezlik beriladi. U holda krivoshipning burchak tezligi nolga, g'ildiraklarning burchak tezligi esa, dastlabki burchak tezligi bilan krivoship burchak tezliklarining ayirmasiga teng bo'ladi.

Bu usullarni qo'llashga oid quyidagi masalani echamiz.

14.3- masala. Charx toshini tez aylantiruvchi ilashma quyidagicha tuzilgan: IV sterjen maxsus dasta vositasida O_1 o'q atrofida ω_1 burchak tezligi bilan aylantiriladi (14.10-rasm). Sterjenning O_2 uchidagi barmoqqa r_2 radiusli II g'ildirak erkin kiy-gizilgan. Dasta aylantirilganda II g'ildirak qo'zg'almas III g'ildirak ichida sirpanmasdan aylanadi. Bunda ishqalanish hisobiga II g'ildirak charx o'qi bilan mah-kam bog'langan I g'ildirakni sirpantirmasdan aylantiradi. III g'ildirakning radiusi r_3 berilgan deb, r_1 ning shunday qiymati topilsinki, $\frac{\omega_1}{\omega_3} = 12$ bo'lsin, ya'ni charx, uni harakatga keltiruvchi

dastaga qaraganda 12 marta tezroq aylansin.

Yechish. 1. Masalani burchak tezliklarni qo'shish usulida echish uchun g'il-diraklar absolyut burchak tezliklari qiymatini mos ravishda $\omega_1, \omega_2, \omega_3 (\omega_3 = 0)$ bilan belgilaymiz. G'ildiraklarning IV sterjenga nisbatan burchak tezliklarini $\omega_{1s}, \omega_{2s}, \omega_{3s}$ bilan belgilasak, (14.7) ga binoan

$$\omega_{1s} = \omega_1 - \omega_4, \omega_{2s} = \omega_2 - \omega_4, \omega_{3s} = -\omega_4 \quad (1)$$

Bunda ω_4 bilan O_1, O_2 sterjenning burchak tezligi belgilangan o'lib, u ko'chirma harakat burchak tezligini ifodalaydi.

I va II g'ildiraklar tashqi, II va III g'ildiraklar ichki ilashgani afayli bu g'il-diraklarning nisbiy harakat burchak tezliklari orasida quyidagi munosabatlar mavjud bo'ladi:

$$\frac{\omega_{1s}}{\omega_{2s}} = \frac{r_2}{r_1}, \frac{\omega_{2s}}{\omega_{3s}} = \frac{r_3}{r_2} \quad (2)$$

(1) ni (2) ga qo'ysak,

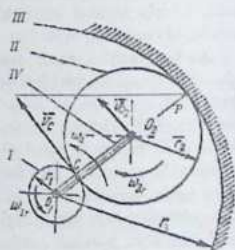
$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_2 - \omega_4} = \frac{r_2}{r_1}, \frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_3 - \omega_4} = \frac{r_3}{r_2}$$

Bu tengliklarni o'zaro ko'paytir-sak,

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_1} = \frac{r_3}{r_1} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_1} - 1 = \frac{r_3}{r_1}$$

yoki $\frac{\omega_1}{\omega_3} = 12$ bo'lgani uchun $r_1 = \frac{1}{11} r_3$

2. Masalani tezliklar oniy marka-zini aniqlash usuli bilan echamiz. II



14.10-rasm.

g'ildirak III g'ildirak ichida sirpanmasdan dumalagani sababli bu g'ildiraklarning ilashgan P nuqtasi II g'ildirak uchun tezliklar oniy markazini ifodalaydi. II g'ildirak markazining tezligini

$$v_{o_2} = \omega_1(r_1 + r_2) \quad (3)$$

formula yordamida aniqlaymiz.

I va II g'ildiraklariing ilashgan C nuqtasi ikkala g'ildirakka ham taalluqli bo'lgani uchun

$$v_C = 2v_{o_2} \quad (4)$$

$$v_C = \omega_1 r_1 \quad (5)$$

(3), (4) va (5) dan foydalanib ushbu munosabatni olamiz:

$$2\omega_1(r_1 + r_2) = \omega_1 r_1$$

bundan

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} \quad (6)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 12 \quad \text{ni (6) ga qo'ysak, } 12 = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} \Rightarrow 10r_1 = 2r_2 \text{ yoki } 2r_2 = r_1 - r_2$$

$$\text{bo'lgani uchun } r_2 = \frac{1}{11}r_1.$$

3. Masalani «to'xtatish» usuli bilan echish uchun IV sterjenni fikran to'xta-tamiz va barcha g'ildiraklarga miqdor jihatdan sterjening burchak tezligi ω_4 ga teng, yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'lgan burchak tezlik beramiz ham-da mos burchak tezlik quyidagi jadvalga yozamiz.

	Etagi IV sterjenz	G'ildiraklar		
		III	II	I
Uxlatgumcha	ω_4	0	ω_2	ω_1
Uxlatgandan kebin	0	$-\omega_4$	$\omega_2 - \omega_4$	$\omega_1 - \omega_4$
Ilashish turi		ichki		tashqi

III va II g'ildiraklar ichki, II va I g'ildiraklar tashqi ilashganligini e'tiborga olib, (14.12) formulaga asosan ushbu tengliklarni olamiz:

$$\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_4} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = \frac{r_1}{r_2}$$

Bundan $\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{r_1}{r_2}$ yoki $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 12$ bo'lgani uchun $r_1 = \frac{1}{11} r_2$.

14.6- §. Jismning ilgari lama va aylanma harakatlarini qo'shish

Qattiq jism bir vaqtning o'zida \vec{u} tezlik bilan ilgari lama harakatda hamda bi-ror o'q atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanma harakatda ishtirok etsin. Ulardan qay birini nisbiy harakat yoki ko'chirma harakat deb olish ahamiyatga ega emas. Chunki har ondagi tezliklarning taqsimlanishi tashkil etuvchi harakatlarning o'rin almashishiga bog'liq bo'lmaydi. Quyidagi uchta holni ko'rib chiqamiz.

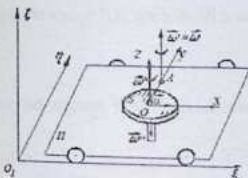
1. Ilgari lama harakat tezligi aylanish o'qiga perpendikulyar yo'nalgan hol ($\vec{u} \perp \vec{\omega}$). Aytaylik, qattiq jism qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan Oz atrofida aylanma harakatda bo'lsin. O'z nav-batida $Oxyz$ koordinatalar sistemasi qo'zg'almas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan $\vec{\omega}$ vektorga perpendikulyar yo'nalishda \vec{u} tezlik bilan (masalan, aravacha bilan birgalikda) ilgari lama harakatda ishtirok etsin (14.11-rasm). Bu holda jism z o'qqa perpendikulyar Π tekislikka nisbatan tekis parallel harakatda bo'ladi. Agar qutb uchun O nuqtani olsak, u holda jismning harakatini qutbning tezligiga teng $\vec{u} = \vec{v}_0$ tezlik bilan ilgari lama harakat hamda qutb atrofidagi $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan sodir bo'ladigan aylanma harakatdan tashkil topgan deb qarash mum-kin (10.3- §).

Jismning absolyut harakatini aniqlash uchun ilgari lama harakat tezligi \vec{u} ni shunday ($\vec{\omega}', \vec{\omega}''$) juft aylanish bilan almashtiramizki, juft aylanishni tashkil etuvchi burchak tezliklar $\vec{\omega}' = \vec{\omega}, \vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ shartlarni qanoatlantirsin. Bunda $OA = d$ masofa $u = \omega' d$ tenglikdan aniqlanadi:

$$d = \frac{u}{\omega'}$$

yoki $\omega' = \omega$, bo'lgani uchun

$$d = \frac{u}{\omega} \quad (14.13)$$



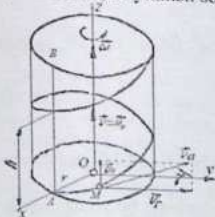
14.11-rasm.

tezlik bilan aylanma harakatda hamda $\vec{\omega}$ burchak tezlikka perpendikulyar bo'lgan \vec{u} tezlik bilan ilgari-lama harakatda ishtirok etsa, jismning absolyut harakati Oz o'qqa parallel bo'lgan va undan

$$d = \frac{u}{\omega} \text{ masofada}$$

yotuvchi o'q atrofida miqdor va yo'nalish jihatdan berilgan $\vec{\omega}$ burchak tezlikka teng bo'lgan $\vec{\omega}'$ burchak tezlik bilan sodir bo'ladigan oniy aylanma harakatdan iborat bo'ladi.

2. Ilgarilama harakat tezligi aylanish o'qiga parallel bo'lgan hol ($\vec{u} \parallel \vec{\omega}$). Vint harakati. Agar jismning absolyut harakati Oz o'q atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan sodir bo'ladigan aylanma harakatdan (nisbiy harakatdan) hamda z o'qqa parallel bo'lgan $\vec{v}_r = \vec{u}$ tezlik bilan sodir bo'ladigan ilgari-lama harakatdan (ko'chir-ma harakatdan) tashkil topgan bo'lsa, jismning bunday xarakati *vint harakati* deyiladi (14.12-rasm). Aylanish sodir bo'ladigan Oz o'q vint o'qi deyiladi.



14.12-rasm.

vintni tashkil etadi.

Jismning vint o'qi atrofidagi bir marta aylanish vaqtini T bilan

$\vec{\omega}$ va $\vec{\omega}'$ vektorlarning yig'indisi nolga teng bo'ladi. Natijada ko'ri-layotgan jismning harakatini AP atrofida $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ burchak tezlik bilan sodir bo'ladigan oniy aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkin.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi: agar jism bir vaqtning o'zida Oz o'q atrofida $\vec{\omega}$ burchak



ham,

talari-
atdan
ichki

(ichki

(20.1)

ichki

stema
nuqta

Vint harakatida bo'lgan jismning ixtiyoriy M nuqtasidan vint o'qigacha bo'lgan r masofa o'zgarmasdan qoladi. Shu sababli vint harakatida jismning nuqtasi

r radiusli doiraviy stilindr sirtida *vint chizig'i* deb ataluvchi traektoriya bo'ylab harakatlanadi.

Agar $\vec{\omega}$ va \vec{u} vektorlari Oz o'q bo'yicha bir tomonga yo'nalsa, o'ng vint, qarama-qarshi tomonga yo'nalsa, chap

larni
 \vec{F}_1, \vec{F}_2
inchi
yghk
teng

belgilaylik. Agar berilgan onda M nuqta stilindrning AB yasovchisida yotsa, bu nuqta

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

vaqt o'tgandan keyin yana AB yasovchini kesib o'tadi hamda bu yasovchi bo'ylab

$$h = uT = \frac{2\pi u}{\omega} \quad (14.14)$$

masofaga ko'chadi. h masofa vint qadami deyiladi.

Ilgarilama harakat tezligi i ning aylanma harakat burchak tezligi ω ga nisbati vint parametri deyiladi va u bilan belgilanadi:

$$p = \frac{u}{\omega} \quad (14.15)$$

(14.15) ni (14.14) ga olib borib qo'ysak, vint qadami bilan vint parametri orasidagi quyidagi munosabatni olamiz:

$$h = 2\pi p$$

M nuqta vint o'qi atrofida moduli $v = \omega r$ ga teng nisbiy tezlik hamda stilin-dr yasovchisi bo'ylab $\vec{u} = \vec{v}_s$ ko'chirma tezlik bilan harakatlanadi. Tezliklarni qo'shish haqidagi teorema ga ko'ra M nuqtaning absolyut tezligi quyidagiga teng:

$$\vec{v}_z = \vec{v}_s + \vec{v}_t$$

yoki ko'rilayotgan holda $\vec{v}_s \perp \vec{v}_t$ bo'lgani uchun absolyut tezlikning moduli

$$v_z = \sqrt{v_s^2 + v_t^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + u^2} = \omega \sqrt{p^2 + r^2} \quad (14.16)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Absolyut tezlikning stilindr yasovchisi bilan tashkil qilgan burchagini γ bilan belgilasak, u holda

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_t}{v_s} = \frac{\omega r}{u} = \frac{r}{p} \quad (14.17)$$

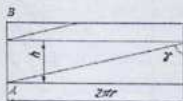
munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar harakat davomida $p = \text{const}$ bo'lsa, u holda (14.17) ga binoan

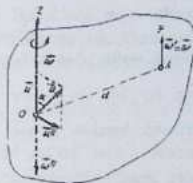
$$\operatorname{tg} \gamma = \text{const}$$

bo'ladi. Shu sababli stilindrni biror yasovchisi bo'yicha kesib, tekislikka yoysak, u holda vint chizig'i bu tekislikda stilindr yasovchisi bilan γ burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi (14.13-rasm). Rasmdan $h = 2\pi r \operatorname{ctg} \gamma$

ifodani olamiz.



14.13-rasm.



14.14-rasm.

3. Ilgarilama harakat tezligi aylanish o'qi bilan ixtiyoriy burchak tashkil etgan hol . Oniy vint harakati. Bu holda ilgarilama harakat tezligi \vec{u} ni $\vec{\omega}$ bo'yicha yo'nalgan \vec{u}' va unga perpendikulyar yo'nalgan \vec{u}'' tashkil etuvchilarga aj-ratamiz (14.14-rasm.):

$$u' = u \cos \alpha, u'' = u \sin \alpha$$

1-holda ko'rganimizdek, $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan sodir bo'ladigan aylanma harakat va \vec{u}'' tezlik bilan sodir bo'ladigan ilga-rilama harakatlarni qo'shish natijasida Oz ga parallel bo'lgan AP o'q atrofidagi oniy aylanma harakatga ega bo'lamiz. Bunda Oz va AP aylanish o'qlari orasidagi masofa (14.13) ga ko'ra

$$OA = d = \frac{u''}{\omega} = \frac{u \sin \alpha}{\omega} \quad (14.18)$$

formuladan aniqlanadi. Natijada jism AP o'q atrofida $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ burchak tezlik bilan oniy aylanma harakatda hamda $u' = u \cos \alpha$ tezlik bilan ilgarilama harakatda ishtirok etadi. Shu sababli jism nuqtalarining berilgan ondagi tezligi AP o'q atrofida $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ burchak tezlik va ilgarilama harakati $u' = u \cos \alpha$ tezlik bilan sodir bo'ladigan vint harakatidagi kabi aniqlanadi. Jism harakatlanganda AP o'q o'z holatini o'zgartira boradi. Shu sababli bunday harakat *oniy vint harakati* deyiladi.

Shunday qilib, jism bir vaqtning o'zida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanma harakatda hamda $\vec{\omega}'$ burchak tezlikka perpendikulyar bo'lmagan \vec{u} tezlik bilan ilgarilama harakatda ishtirok etsa, jismning absolyut harakati $\vec{\omega}$ vektori yo'nalgan Oz o'qqa parallel ravishda undan (14.18) formula yordamida aniqlanadigan d masofada o'tuvchi AP o'q atrofidagi oniy vint harakatidan iborat bo'ladi.



ham,
talari-
atdan
ichki

(ichki

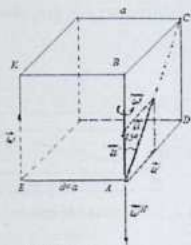
(20.1)

20.2)

20.3)

tlarni
 \vec{F}_1, \vec{F}_2
inchi
nghk
teng

14.4-masala. Kub shaklidagi qattiq jism berilgan onda AB qirradi atrofida $\omega = 1s^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanadi va AC diagonal bo'ylab $u = \frac{\sqrt{2}}{2} m/s$ tezlik bilan ilgarilama harakat qiladi. Agar kubning tomoni $a = 0,5m$ bo'lsa, berilgan onda kubning absolyut harakati aniqlansin (14.15- rasm).



14.15-rasm.

Yechish. Ilgarilama harakat tezligi \vec{u} ni $\vec{\omega}$ vektori yo'nalgan kubning AB hamda unga perpendikulyar bo'lgan AD qirralari bo'yicha \vec{u}'' va \vec{u}' tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu tashkil etuvchilarning moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$u' = u \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5m/s, u'' = u \sin 45^\circ = 0,5m/s.$$

u'' ilgarilama harakat tezligini shunday ($\vec{\omega}', \vec{\omega}''$) juft aylanish bilan almash-tiramizki, $\vec{\omega}' = \vec{\omega}, \vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ bo'lsin. 3- holda ko'rganimizdek, kubning berilgan ondagi harakati AB o'qdan

$$d = \frac{u''}{\omega} = \frac{0,5}{1} = 0,5m = a$$

masofada, ya'ni E dan o'tuvchi EK atrofidagi vint harakatidan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan onda kubning absolyut harakati EK qirradi atrofida $\omega' = 1s^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanma harakatdan hamda $u' = 0,5m/s$ tezlik bilan sodir bo'ladigan ilgarilama harakatdan tashkil topgan oniy vint harakatidan iborat bo'ladi.

14.5-masala. Parma $n = 120 \text{ cyl/min}$ burchak tezlik hamda $u = 0,02m/s$ ilgarilama harakat tezligi bilan vint harakatda bo'ladi. Agar aylanma harakat burchak tezligi $\vec{\omega}$ va ilgarilama harakat tezligi \vec{u} parma bo'ylab bir tomonga yo'nalgan bo'lsa, vint qadami va vint parametri aniqlansin.

Yechish. Parma $\omega = \frac{120\pi}{30} = 4\pi s^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanadi. (14.14) va (14.15) formulalarga asosan vint qadami va vint parametri aniqlaymiz:

$$h = \frac{2\pi u}{\omega} = 0,01m, p = \frac{u}{\omega} = 0,0016m.$$

Nazorat savollari:

1. Jismning ilgarilama harakatlarini qo'shish.
2. Jismning kesishuvchi o'qlar atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish.
3. Jismning ikkita parallel o'q atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish.
4. Stilindrik tishli uzatmalar.
5. Jismning ilgarilama va aylanma harakatlarini qo'shish.

2/2

m,

ri-
lan
iki

'ki

(1)

iki

-1

3)

ni

\vec{P}_2

hi

ik

ug

III QISM. DINAMIKA

15-BOB. DINAMIKANING ASOSIY QONUNLARI

Tayanch soʻzlar: Dinamika, kuch, moddiy nuqta, dinamika asosiy qonunlari, mexanik oʻlchov birliklari.

15.1-§. Dinamika predmeti

Dinamika yunoncha «*dynamics*» — kuch soʻzidan olingan. Dinamikada moddiy nuqta, moddiy nuqtalar sistemasi va absolyut qattiq jismning harakati shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlar bilan birgalikda oʻrganiladi.

Yuqorida jismlarning bir-biriga oʻzaro mexanik taʼsiri kuchni ifodalashini koʻrgan edik. Statikada asosan oʻzgarmas kuchlar oʻrganilgan edi. Dinamikada oʻzgarmas kuchlar bilan birgalikda miqdor va yoʻnalish jihatdan oʻzgaruvchi kuchlar taʼsiri ham oʻrganiladi. Masalan, moddiy nuqtaning tebranma harakatida unga taʼsir etuvchi davriy uygʻotuvchi kuch vaqtning funktsiyasidan iborat boʻladi; shuningdek, reaktiv dvigatelning tortish kuchi yoqilgʻining yonish vaqtiga bogʻliq; planetalarning tortishish kuchi yoki prujinaning elastiklik kuchi jismlarning holatiga bogʻliq; nuqtaning harakatiga muhitning koʻrsatadigan qarshilik kuchi nuqtaning tezligiga bogʻliq boʻladi.

Umumiy holda kuchlar vaqtga, kuch qoʻyilgan nuqtaning koordinatalariga va tezligiga bogʻliq boʻlishi mumkin:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

yoki

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

Mexanikada kuchlarning tabiati oʻrganilmaydi; bunday masala bilan fizika-ning elektrodinamika, qattiq jism nazariyasi va boshqa boʻlimlarida shugʻullani-ladi.

Ishqalanish kuchi tushunchasi kiritilganda koʻrganimizdek, baʼzan tinch tur-gan jismga kuch taʼsir etsa ham u harakatga kelmaydi. Har qanday jismning hara-kati unga taʼsir etuvchi kuchlardan tashqari, materiyaning asosiy xususiyatlaridan biri hisoblangan jismning inertligi yoki inerstiyasiga bogʻliq boʻladi. Kuch taʼsir etmaganda

jismning o'z holatini yoki harakatini saqlashida, kuch ta'sir etganida esa o'z harakatini birdaniga emas, balki jism tashkil topgan moddaning miqdoriga bog'liq ravishda asta-sekin o'zgartirishida bu xususiyat namoyon bo'ladi.

Qattiq jism tashkil topgan moddaning miqdori bilan xarakterlanuvchi va ji-smning inerthk o'lchovini ifodalovchi kattalik *merstion massa* deyiladi. Jism tashkil topgan moddaning miqdori jismning og'irhgiga bog'liq bo'ladi. Ma'lumki, jismning og'irligi jism turgan joyning geografik kengligi va dengiz sat-hidan balandligiga bog'liq faktorlar bilan aniqlanadi, lekin jismdagi modda-larning miqdori bu faktorlarga bog'liq bo'lmaydi. Kuzatishlarning ko'rsatishi-cha, Yer sirtiga yaqin masofadagi jismning og'irligini uning erkin tushish tez-lanishiga nisbati o'zgar-mas bo'lib, kuzatish joyiga bog'hq bo'lmaydi, ya'ni ji-smning og'irligini P , erkin tushish tezlanishini g bilan belgilasak,

$$\frac{P}{g} = m = \text{const} \quad (15.1)$$

bo'ladi. Jismning fizik xususiyatlariga bog'hq bo'lgan va (15.1) formula yordamida aniqlanadigan m kattalikka *gravitastion massa* deyiladi.

Odatdagi sharoitda (jismlarning tezligi yorug'lik tezligidan ancha kichik bo'lganda hamda gravitastion maydoni kuchli bo'lmaganda) ko'plab o'tkazil-gan tajribalar asosida olingan natijalarga ko'ra, gravitastion massa va inerstion massa o'zaro ten-bo'lishi isbotlangan. Bu holat A Eynshteynning nisbiylik nazariyasida muhim o'rinni egallaydi va «*ekvivalentlik prinsip*» deb yuritila-di.

Shunday qilib, *massa jism tashkil topgan moddaning miqdori o'lchovi bo'lishi bilan birga merstiya o'lchovini ham ifodalaydi*, binobarin, dinamikada ji-smning moddiylik va inerstiya xususiyatlari namoyon bo'ladi.

Nisbiylik nazariyasida jismning massasi m uning tezligiga bog'liq ravishda ushbu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.2)$$

formula yordamida aniqlanishi isbotlanadi. Bunda m_0 —jismning

F_1
 F_2

iam,
lari-
tdan
chki

chki

0.1)

chki

1.2)

1.3)

umi

F_2

chi

chki

ang

tinch holatdagi massasi; v —jismning tezligi va c - yorug'lik tezligi. Klassik mexanikada jismlarning tezligi yorug'lik tezligidan ancha kichik deb qaraladi. Shu sababli $\frac{v^2}{c^2}$ kattalik birga nisbatan juda kichik bo'lgani uchun uni e'tiborga olmay ji-smning massasi o'zgarmas deb qaraladi. SI birliklar sistemasida massa kilogramm (kg) bilan o'lchanadi.

Dinamikada dastlab moddiy nuqtaning harakati o'rganiladi. So'ngra olin-gan natijalar moddiy nuqtalar sistemasi va qattiq jismga tatbiq qilinadi.

15.2-§. Klassik mexanikaning asosiy qonunlari

Dinamika asosida tajriba va kuzatishlar vositasida aniqlangan qonunlar yotadi. Bu qonunlar XVII asrda G.Galiley va I.N'yuton tomonidan kashf qilingan hamda Nyutonning «Natural falsafaning matematik asoslari» asarida (1687 y.) bayon qi-lingan.

Klassik mexanikaning birinchi qonuni Galiley tomonidan kashf qilingan bo'-lib, jismlarning inertlik xususiyatini ifodalaydi va *inerstiya qonuni* deyiladi.

1-qonun (inerstiya qonuni). Tashqi ta'sirdan tanholangan noddiy nuqta kich ta'sir etmaguncha o'zining tinch holatini yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatini saqlaydi.

Inerstiya qonuniga binoan moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tekis harakati *inerstial harakat* yoki *inerstiya bo'yicha harakat* deyiladi. Inerstial harakatdagi nuqtaning tezlanishi nolga teng bo'ladi. 1-qonunga ko'ra, agar nuqta tinch holatda bo'lsa, u o'zicha siljiy olmaydi yoki inerstial harakatdagi nuqta o'z - o'zicha hara-kat tezligining miqdor va yo'nalishini o'zgartira olmaydi. Moddiy nuqtaning tez-ligini o'zgartirish uchun biror tashqi ta'sir bo'lishi kerak. Boshqa jismlarning berilgan nuqtaga ta'siri, ya'ni *kuch* ana shunday ta'sirni ifodalaydi. Kinematika bo'li-mida nuqtaning mexanik harakati boshqa biror jism bilan bog'langan va sanoq sis-temasi deb atalgan koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rganildi. Agar tanlangan sanoq sistemasi uchun inerstiya qonuni o'rinli bo'lsa, bunday koordinatalar siste-masi *inerstial sistema* deyiladi. Inerstial sanoq sistemasiga nisbatan tekshirilayot-gan harakat absolyut harakat deb qaraladi.

Tajribalarning ko'rsatishicha, koordinatalar boshi quyosh markazida olingan va o'qlari uchta «qo'zg'almas» yulduzlar tomonga yo'nalgan geliostentrik sistemaning inertsial sistema deb qarash mumkin. Texnikada uchraydigan ko'pgina masalalarni echishda inertsial sistema uchun Yer bilan bog'langan koordinatalar sistemi olinadi. Bunda Yerning sutkalik aylanishi hamda Quyosh atrofidagi egri chi-ziqli orbita bo'ylab harakati e'tiborga olinmaydi.

2-qonun (dinamikaning asosiy qonuni). Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi harakatlantiruvchi kuchga proporsional va kuchning ta'sir chizig'i bo'yicha sodir bo'ladi.

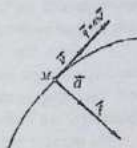
Moddiy nuqtaning massasini uning berilgan ondagi tezlik vektoriga ko'payt-masiga teng \vec{q} vektor nuqtaning harakat miqdori deyiladi:

$$\vec{q} = m\vec{v} \quad (15.3)$$

M nuqtaning harakat miqdori mazkur nuqtaga qo'yilgan \vec{q} vektor bilan ifodalanadi (15.1-rasm).

Nyuton ikkinchi qonunining vektorli ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (15.4)$$



15.1-rasm.

Agar vaqt o'tishi bilan nuqtaning massasi o'zgar-masdan qolsa, u holda (15.4) ni quyidagicha yozish mumkin

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (15.5)$$

bunda $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ nuqtaning tezlanishini ifodalaydi.

N'yutonning 2- qonunini ifodalovchi (15.5) tenglama nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamadan ko'ramizki, moddiy nuqtaning inertsial sistemaga nisbatan tezlanishi nuqtaga ta'sir etuvchi kuchga proporsional bo'lib, mazkur kuch bo'yicha yo'naladi.

Bu tenglikdan ko'ramizki, ta'sir etuvchi kuch miqdor jihatdan o'zgar-mas bo'lganda nuqtaning massasi qancha katta bo'lsa, uning tezlanishi shuncha ki-chik bo'ladi, ya'ni massa moddiy nuqta tezligining o'zgarishiga monand bo'la-digan qarshilikni (inertligini) ifodalaydi.



ham,

alari-
tdan
ichki

ichki

20.1)

ichti

20.2)

20.3)

lami
 \vec{v}_1, \vec{v}_2
nchi
tghk
teng



15.2-rasm.

3-qonun (ta'sir va aks ta'sir qonuni). Ikkita moddiy nuqtaning o'zaro ta'siri miqdor jihatdan teng va shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qa-rama-qarshi tomonga yo'naladi.

Masalan, A nuqta B nuqtaga \vec{F}_B kuch bilan ta'sir etsin; B nuqta esa A

nuqta-ga \vec{F}_A kuch bilan ta'sir etsin (15.2-rasm). 3-qonunga ko'ra

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A \quad (15.6)$$

yoki

$$F_B = F_A$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Kuchlardan ixtiyoriy bittasi «ta'sir», ikkinchisi esa «aks ta'sir» deb ataladi. Bunday ikkita kuchlar o'zaro muvozanatda bo'lmaydi, chunki ular moddiy nuqtalar deb tasavvur qilinadigan boshqa-boshqa jismlarga qo'yiladi.

4- qonun (kuchlar ta'sirining o'zaro mustaqillik qonuni). Agar moddiy nuqtaga bir nechta kuch ta'sir etsa, nuqtaning tezlanishi har bir kuchning alohida ta'siridan nuqta oladigan tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

M moddiy nuqta ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar ta'sirida bo'lsin. Bu kuchlar sistemasi ta'siridan nuqtaning olgan tezlanishini har bir kuchning alohida ta'siridan nuqta-ning oladigan tezlanishlarini $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ bilan belgi-laylik. U holda 4-qonunga asosan

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n \quad (15.7)$$

M moddiy nuqtaga ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar ta'sir etsin (15.3-rasm, aniqlik uchun rasmda $n = 3$ bo'lgan hol tasvirlangan). (15.7) ning har ikki tomonini nuqtaning massasi m ga ko'paytirsak,

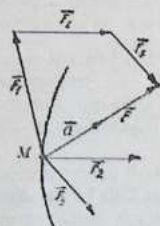
$$m\vec{a} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + \dots + m\vec{a}_n \quad (15.8)$$

tenglik xosil bo'ladi.

2-qonunga ko'ra

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_1, m\vec{a}_2 = \vec{F}_2, \dots, m\vec{a}_n = \vec{F}_n$$

Shu sababli (15.8) ni quyidagicha yozish



15.3-rasm.

mumkin:

$$m\ddot{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

yoki

$$m\ddot{a} = \sum \vec{F}_i \quad (15.9)$$

Bu vektorli tenglama kuchlar sistemasi ta'siridagi nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasini ifodalaydi. (15.9) ni (15.5) ko'rinishda yozish uchun nuqtaga ta'sir etuvchi ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlami ularning geometrik yig'indisiga (ya'ni bosh vektoriga) teng bo'lgan \vec{F} teng ta'sir etuvchi kuch bilan almastirish kerak.

$$m\ddot{a} = \vec{F} \quad (15.10)$$

Nazorat savollari:

1. Dinamikaning asosiy tushunchalari.
2. Dinamikaning asosiy qonunlarini ayting.
3. Mexanik o'lshov birliklar sistemasini sanang.
4. Dinamikaning ikkinchi qonuni.
5. Dinamikaning uchinchi qonuni.
6. Dinamikaning to'rtinchi qonuni.

77
hki

am,

ari-
dan
hki

hki

0.1)

hki

1.2)

1.3)

imi

, \vec{F}_2

chi

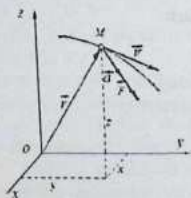
hki

ng

16-BOB. ERKIN MODDIY NUQTA HARAKATINING DIFFERENSIAL TENGLAMALARI VA DINAMIKANING IKKI ASOSIY MASALASI

Tayanch soʻzlar: Moddiy nuqta xarakatining differensial tenglamalari, bogʻlanishdagi moddiy nuqta xarakatining differensial tenglamalari, dinamikaning asosiy masalalari.

16.1-§. Erkin moddiy nuqta xarakatining differensial tenglamalari



16.1-rasm.

Massasi m ga teng boʻlgan M erkin moddiy nuqta ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar taʼsirida $Oxyz$ inercial toʻgʻri burchakli Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin. Bu nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasi

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

yoki

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

koʻrinishda yoziladi. Bunda \vec{F} - nuqta-ga qoʻyilgan kuchlarning teng taʼsir etuvchisi, \vec{a} nuqtaning tezlanishi (16.1-rasm).

Nuqta xarakatining differensial tenglamalarini turli formada ifodalash mumkin. Shulardan ayrimlarini keltiramiz.

1. Erkin moddiy nuqta xarakatining vektor formadagi differensial tenglamasi. Nuqtaning tezlanish vektori \vec{a} tezlik vektoridan vaqt boʻyicha olingan birinchi hosilaga yoki nuqtaning radiusvektoridan vaqt boʻyicha olingan ikkinchi hosilaga teng boʻlgani uchun oxirgi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{F} \quad (16.1)$$

yoki

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (16.2)$$

(16.1) yoki (16.2) tenglamalar erkin moddiy nuqta xarakatining vektor formadagi differensial tenglamasi deyiladi.

2. Erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari. (16.2) ni $Oxyz$ inersial koordinata sistemasi o'qlariga proekstiyalab, ushbu tenglamalarni olamiz:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

yoki

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z \quad (16.3)$$

Bunda x, y, z harakatlanayotgan M nuqtaning koordinatalari; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ — nuqta tez-

lanishining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari; F_x, F_y, F_z teng ta'sir etuvchi kuchning proekstiyalari. Agar \vec{F}_0 kuchlarning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini X_x, Y_x, Z_x bilan belgilasak, teng ta'sir etuvchining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari uchun

$$F_x = \sum X_x, F_y = \sum Y_x, F_z = \sum Z_x,$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Shu sababli (16.3) ni

$$m\ddot{x} = \sum X_x, m\ddot{y} = \sum Y_x, m\ddot{z} = \sum Z_x \quad (16.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(16.3) yoki (16.4) tenglamalar erkin moddiy nuqta harakatining Dekart ko-ordinata o'qlaridagi differensial tenglamalarini ifodalaydi.

Yuqorida ko'rganimizdek (15.1-§), umumiy holda nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar vaqt t ga, harakatlanuvchi nuqtaning koordinatalari x, y, z ga va nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proekstiyalariga bog'liq bo'ladi. Shu sababli umumiy holda (16.3) ni

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (16)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar moddiy nuqta Oxy tekisligida harakatlansa, (16.3) ning birinchi ikkitasi o'rinli bo'ladi:

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y \quad (16.6)$$

Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, Ox o'qni harakat traektoriyasi bo'ylab yo'naltiramiz. Bu holda nuqtaning harakati (16.3) ning birinchi tenglamasi bilan ifodalanadi:

F_x
/

ham,
alari-
atdan
ichki

ichki

20.1)

ichki

tema

0.3)
arni
 F_x
ichi
ghk
eng

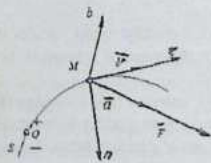
$$m\ddot{x} = F_x \quad (16.7)$$

Bu tenglamaga *nuqta to'g'ri chiziqli harakatining differensial tenglamasi* deyiladi.

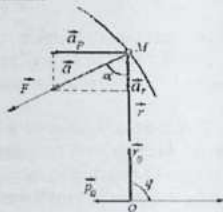
3. Erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalari Agar M nuqtaning harakat traektoriyasi berilgan bo'lsa, nuqtadan Mt - urinma, Mn - bosh normal va Mb binormal tabiiy koordinata o'qlarini (8.4-§) o'tkazamiz (16.2-rasm). Kinematikadan ma'lumki :

$$a_s = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_n = \frac{dv_t}{dt} = s, a_b = 0$$

bunda v_t tezlikning algebraik qiymati (tezlik vektorining urinmadagi proek-stiya-si), s - nuqtaning yoy koordinatasi, ρ - traektoriyaning M nuqtadagi egrilik radi-usidan iborat. Teng ta'sir etuvchining urinma, bosh normal va binormaldagi proekstiyalarini mos ravishda F_s, F_n, F_b bilan belgilab, erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalarini quyida-gicha yozish mumkin:



16.2-rasm.



16.3-rasm.

$$m\ddot{s} = F_s, m \frac{v^2}{\rho} = F_n, 0 = F_b \quad (16.8)$$

(16.8) tenglamalarga *erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'q-laridagi dinamik tenglamalari* deyiladi. Bu tenglamalar ilk bor L. Eyler tomoni-dan chiqarilgan.

(16.8) ning oxirgi tenglamasidan ko'ramizki, erkin nuqtaga qo'yilgan kuch-larning teng ta'sir etuvchisi F_b (xuddi tezlanish vektori kabi) M nuqtada traekto-riyaga o'tkazilgan egrilik tekisligida yotadi.

4. Erkin moddiy nuqta harakatining qutb koordinatalaridagi differentsial tenglamalari. Agar moddiy nuqta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sirida bir tekislikda harakatlansa, u holda kutb koordinatalar sistemasini o'tkazib, (15.10) ni qutb radiusi va unga perpendikulyar yo'nalishga proekstiyalaymiz (16.3-rasm). Teng ta'sir etuvchi kuchning bu o'qlardagi proekstiyalarini F_r, F_φ bilan belgilasak,

$$ma_r = F_r, ma_\varphi = F_\varphi \quad (16.9)$$

hosil bo'ladi. Bunda $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$ mos ravishda radial va ko'ndalang tezlanishlarni ifodalaydi. Shunday qilib, (16.9) ni quyidagicha yozamiz:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \quad \text{yoki} \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \quad \text{ekanligini}$$

e'tiborga olsak, $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi \quad (16.10)$

(16.10) tenglamalar bir tekislikda harakatlanuvchi *erkin moddiy nuqta harakatining qutb koordinatalar sistemasidagi harakat differentsial tenglamalarini ifodalaydi. Ularga erkin moddiy nuqta harakatining qutb koordinatalaridagi dinamik tenglamalari* deyiladi.

Dinamikada ham bog'lanishdagi nuqtaning harakatini o'rganish uchun bog'lanishdan bo'shatish aksiomasidan foydalanamiz.

16.2- §. Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasi

Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasi, nuqtaning massasi va kinematik harakat tenglamalari berilganda shu harakatni vujudga keltirgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlashdan iborat. Bu masalaga *nuqta dinamikasi-ning to'g'ri masalasi* deyiladi.

Kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlash uchun moddiy nuqtaning kinematik harakat tenglamalari qanday usulda berilishiga qarab, nuqtaning vektorli, De-kart koordinata o'qlaridagi, tabiiy koordinata o'qlaridagi yoki egri chizikli koordinatalardagi dinamik tenglamalaridan foydalanamiz. Barcha hollarda ham masalani echish nuqtaning kinematik tenglamalaridan tezlanishni aniqlashga keltiriladi.

1. Agar massasi m ga teng moddiy nuqtaning harakati $\vec{r} = \vec{r}(t)$

vektor usulida berilsa, nuqtaning radius-vektoridan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olib, nuqtaning tezlanishini, so'ngra (16.2) ga asosan teng ta'sir etuvchi kuchni topamiz:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (16.11)$$

2. Agar massasi m ga teng moddiy nuqta kinematik harakat tenglamalarining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodalari

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

ma'lum bo'lsa, ulardan ikki marta vaqt bo'yicha hosila olib, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini, so'ngra (16.3) ga ko'ra teng ta'sir etuvchi kuchning proektsiyalarini aniqlaymiz:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \quad (16.12)$$

Natijada teng ta'sir etuvchi kuchning modulini

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (16.13)$$

yo'naltiruvchi kosinuslarini

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F} \quad (16.14)$$

formulalar vositasida topamiz.

3. Agar massasi m ga teng moddiy nuqtaning harakati tabiiy usulda berilsa, u holda teng ta'sir etuvchi kuchning tabiiy koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini (16.8) tenglamalardan aniqlaymiz. Teng ta'sir etuvchi kuchning modulini

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_n^2} \quad (16.15)$$

yo'nalishini

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{F_n}{F_r} = \frac{a_n}{a_r} \quad (16.16)$$

formulalar yordamida hisoblaymiz. Bunda μ orqali \vec{F} bilan uning normal tashkil etuvchisi \vec{F}_n orasidagi burchak belgilangan.

4. Agar massasi m ga teng moddiy nuqtaning kinematik harakat tenglamasi

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

qutb koordinatalarida berilgan bo'lsa, (16.10) ga asosan kuchning berilgan koordinata o'qlaridagi proektsiyalarini, so'ngra teng ta'sir etuvchi kuchning modul va yo'nalishini

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{a_\varphi}{a_r} \quad (16.17)$$

ifodalar orqali aniqlaymiz.

Baʼzida moddiy nuqtaga taʼsir etuvchi kuchlardan birortasini (masalan, nomaʼlum reaksiya kuchini) topish talab qilinadigan masalalarni echishga toʻgʻri keladi. Masalan, massasi t ga teng nuqtaga \vec{F} kuch taʼsir etadi. Nuqtaga \vec{F} kuch bilan birgalikda qanday $\vec{Q}(Q_x, Q_y, Q_z)$ kuch qoʻyilganda nuqta

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (16.18)$$

qonun boʻyicha harakat qiladi?

(16.4) ga asosan

$$m\ddot{x} = X + Q_x, m\ddot{y} = Y + Q_y, m\ddot{z} = Z + Q_z$$

Bundan izlanayotgan kuchning koordinata oʻqlaridagi proekstiyalari aniqlanadi.

16.3- §. Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasini yechishga doir masalalar

Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasi quyidagi tartibda yechiladi:

1. Moddiy nuqtaning harakati qanday usulda berilishiga qarab unga mos koordinatalar sistemasini tanlab olamiz.

2. Nuqtaga taʼsir etuvchi berilgan kuchlarni tasvirlaymiz. Agar nuqtaga bogʻlanishlar qoʻyilgan boʻlsa, bogʻlanishdan boʻshati haqidagi aksiomani qoʻllab, bogʻlanish reaksiya kuchlarni koʻrsatamiz.

Berilgan kinematik harakat tenglamalaridan tezlanishni yoki uning tanlangan koordinata oʻqlaridagi proekstiyalarini aniqlaymiz.

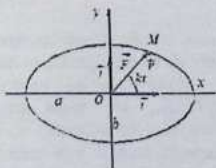
Tanlangan koordinatalar sistemasiga mos boʻlgan harakat differensial tenglamalarini tuzamiz va ulardan izlanayotgan nomaʼlum kuchlarni aniqlaymiz.

16.1-masala. Massasi m ga teng boʻlgan moddiy nuqtaning harakati

$$\vec{r} = a\vec{i} \cos kt + b\vec{j} \sin kt \quad (1)$$

vektorli tenglama bilan berilgan. Bunda a , b , k oʻzgarmas miqdorlar (16.4-rasm). Nuqtaga taʼsir etuvchi kuch aniqlansin.

Yechish. Koordinata oʻqlarini



16.4-rasm.

rasmda ko'rsatilganidek olamiz. (1) ga ko'ra M nuqta $x = a \cos kt, y = b \sin kt$ tenglamalar bilan ifodalangani uchun mazkur nuqta yarim o'qlari a va b ga teng ellips bo'ylab harakatlanadi.

(1) dan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\vec{k}_1 \sin kt + b\vec{k}_2 \cos kt$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k^2(a\vec{k}_1 \cos kt + b\vec{k}_2 \sin kt) \quad (2)$$

(16.11) ga asosan nuqtaga ta'sir etuvchi kuch

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mk^2(a\vec{k}_1 \cos kt + b\vec{k}_2 \sin kt)$$

yoki (1) ni e'tiborga olsak,

$$\vec{F} = -mk^2\vec{r}$$

ifodadan topiladi.

Binobarin, nuqtaga doimo uning radius vektori \vec{r} ga teskari yo'nalgan, ya'ni O markazga tortuvchi kuch ta'sir etadi. Bunday kuchga *markaziy kuch* deyiladi.

16.2- masala. Uzunligi l ga teng cho'zilmaydigan ipga bog'langan va og'irligi P ga teng M moddiy nuqta O nuqta atrofida

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

qonun bo'yicha kichik tebranma harakat qiladi (16.5-rasm), bunda φ_0 - boshlang'ich og'ish burchagi. M nuqta eng pastki holatdan o'tganda ipning reaksiya kuchi aniqlansin.

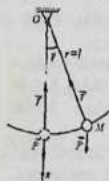
Yechish. M nuqtaning harakatini

$$r = l = \text{const}, \varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

qutb koordinatalarida berilgan deb qarash mumkin. Qutb o'qlarini rasmida ko'rsa-tilgandek yo'naltiramiz.

Moddiy nuqtaga vertikal pastga yo'nalgan og'irlik kuchi \vec{P} qo'yilgan M nuqta uchun ip bog'lanish vazifasini o'taydi. Bog'lanishdan bo'shatish aksiomasiga asosan ipning nuqtaga ta'sirini taranglik kuchi \vec{T} bilan almashtiramiz.

M nuqta eng pastki holatdan o'tgan paytda \vec{P} va \vec{T} bir to'g'ri



16.5-rasm.

chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'naladi. Shu holat uchun (16.10) ning birinchi tenglamasini tuzamiz: $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = P - T$ bunda

$$r = l, \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad \text{hamda nuqtaning ko'rilayotgan holati uchun}$$

$$\cos \sqrt{\frac{g}{l}} t = 1 \quad \text{bo'lgani sababli } T = P + mg\varphi_0^2 = P(1 + \varphi_0^2)$$

16.4-§. Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi

Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi, nuqtaning massasi va unga ta'sir etuvchi kuchlar berilganda nuqtaning kinematik tenglamalarini aniq-lashdan iborat. Bu masala *nuqta dinamikasining teskari masalasi* deyiladi.

Ikkinchi asosiy masalani echish uchun (16.2), (16.3), (16.8) yoki (16.10) ko'ri-nishdagi ikkinchi tartib differentsial tenglamalarni integrallash kerak. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar umumiy holda vaqt, nuqtaning holati va tezligiga bog'liq bo'lgani uchun bu differentsial tenglamalarni umumiy holda integrallash mumkin emas. Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi ayrim xususiy hollardagina aniq echimga ega. Shu sababli texnikada uchraydigan murakkab masalalar integrallashning sonli usuli vosita-sida elektr hisoblash mashinalarini qo'llab taqriban echiladi. Nuqtaning xaraka qanday usulda aniqlanishiga qarab, ikkinchi masala quyidagicha echiladi:

1. Agar nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi vaqt, nuqtaning radius-vektori va radius - vektordan vaqt bo'yicha olingan hosila (tezlik)ning funktsiyasi sifatida ma'lum bo'lsa, u holda (16.2) ni

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (16.19)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu vektorli ikkinchi tartibli differentsial tenglamani integrallab, uning umumiy echimini topamiz:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \quad (16.20)$$

bunda \vec{C}_1 va \vec{C}_2 bilan vektorli integrallash doimiylari ko'rsatilgan. (16.20) dan ko'-ramizki, \vec{F} kuch ta'sirida nuqta son-sanoqsiz qonunlar bo'yicha harakatlanishi mumkin, chunki har gal \vec{C}_1 va \vec{C}_2 ni o'zgartirib, yangi harakat qonunini olamiz. Shu sababli (16.19) ni in-

tegrallash uchun konkret dinamik masala uchun boshlang'ich shartlar deb ataladigan qo'shimcha shartlar berilgan bo'lishi kerak. Vaqt-ning boshlang'ich paytida, ya'ni $t = t_0$ da nuqta radius-vektori va tezligi qabul qiladigan

$$\vec{r} = \vec{r}_0, \vec{v} = \vec{v}_0 \quad (16.21)$$

qiymatlarga vektorli ko'rinishdagi boshlang'ich shartlar deyiladi. Xuddi shuningdek, boshlang'ich shartlarni Dekart koordinatalarida

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0 \quad (16.22)$$

va tabiiy koordinatalarda

$$s = s_0, \dot{s} = \dot{s}_0 \quad (16.23)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

(16.20) dan vaqt bo'yicha hosila olib, integrallash doimiylariga bog'hq

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \quad (16.24)$$

nuqtaning tezligini olamiz.

Harakatning boshlang'ich shartlari (16.21) ni (16.20) va (16.24) ga qo'yib, in-tegrallash doimiylari \vec{C}_1 va \vec{C}_2 aniqlanadigan

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \\ \vec{v}_0 &= \vec{v}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \end{aligned} \right\}$$

kkita vektorli tenglamani olamiz. Bu tenglamalarni echib, $t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0$ ning funktsiya-sidan iborat integrallash doimiylarini aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \vec{C}_1 &= \vec{C}_1(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0) \\ \vec{C}_2 &= \vec{C}_2(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0) \end{aligned} \right\}$$

Bularni (16.19) tenglamaning umumiy integrali (16.20) ga qo'yib, (16.21) boshlang'ich shartlarga mos bo'lgan xususiy integralini aniqlaymiz:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

Yuqorida ko'rganimizdek, nuqtaning dinamik tenglamalarini umumiy holda integrallash qiyin. Lekin ba'zi hollarda harakatning umumiy xususiyatlarini xarak-terlaydigan (16.19) differensial tenglamaning birinchi integralini aniqlash mum-kin. $\vec{r}(t)$ ning har qanday qiymatlarida (16.19) ni qanoatlantiradigan

$$\Phi(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = C_1$$

munosabatga (16.19) differensial tenglamaning birinchi integrali deyiladi.

Agar (16.19) ning bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikkita

$$\Phi_1(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_1$$

$$\Phi_2(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_2$$

birinchi integrallari ma'lum bo'lsa, bu vektorli tenglamalardan $\dot{\vec{r}}$ tezlikni yo'qotib,

$$Q(t, \vec{r}, \vec{C}_1, \vec{C}_2) = 0$$

munosabatni olamiz. Bundan nuqtaning radius-vektorini aniqlash mumkin.

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2)$$

Shunday qilib, (16.19) ning ikkita bir-biriga bog'liq bo'lmagan birinchi integ-rallari ma'lum bo'lsa, (16.19) ning umumiy integralini oddiy algebraik amallar yordamida topish mumkin.

Agar nuqtaga bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, (16.19) tenglamadagi kuchlar-ning teng ta'sir etuvchisi \vec{F} ning tarkibiga noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlari ham kiradi. Bu noma'lumlarni dinamik tenglamalardan yo'qotish usuli analitik mexanika bo'limida ko'riladi. Lekin ba'zi sodda hollarda mos koordinata o'qlarini tanlab olib, bog'lanish reaksiya kuchini skalyar ko'rinishdagi ayrim tenglamalardan yo'qotish mumkin.

2. Agar \vec{F} teng ta'sir etuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari F_x, F_y, F_z ma'lum bo'lsa, (16.5) ko'rinishdagi uchta ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni integrallab, oltita integrallash doimiylari $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ga bog'hq

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

ko'rinishdagi umumiy echimini topamiz.

Konkret dinamik masalani echish uchun (16.25) ga qo'shimcha ravishda (16.22) ko'rinishdagi boshlang'ich shartlar berilishi kerak. (16.25) dan vaqt bo'yi-cha hosila olsak, 6 ta integrallash doimiylariga bog'liq quyidagi uchta funktsiya hosil bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

(16.22) boshlang'ich shartlarni (16.25) va (16.26) ga qo'yib, 6 ta integrallash doimiylari qatnashadigan 6 ta tenglamalar sistemasini

olamiz. Bu tenglamalar sistemasi birgalikda echib, 6 ta integrallash doimiylarini aniqlaymiz:

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), (i = 1, 6) \quad (16.27)$$

Integrallash doimiylarining topilgan bu qiymatlarini (16.25) ga qo'yib, (16.22) boshlang'ich shartlarga mos bo'lgan nuqtaning Dekart koordinatalaridagi kinema-tik tenglamalarini olamiz:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

3. Agar nuqtaga quyilgan teng ta'sir etuvchi kuchning tabiiy koordinata o'qlaridagi proektsiyalari va (16.23) ko'rinishidagi boshlang'ich shartlar berilgan bo'l-sa, nuqta dinamikasining teskari masalasini echish uchun (16.8) tenglamalardan foydalanish kerak. (16.8) dagi birinchi tenglamaning umumiy echimini

$$s = s(t, C_1, C_2) \quad (16.27)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan vaqt bo'yicha hosila olsak, integrallash doimiylari C_1, C_2 ga bog'liq

$$\dot{s} = \dot{s}(t, C_1, C_2) \quad (16.28)$$

nuqtaning tezligini aniqlaymiz. (16.27) va (16.28) ga harakatning boshlang'ich shartlari (16.23) ni qo'yib, C_1, C_2 integrallash doimiylarini aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_1(t_0, s_0, \dot{s}_0) \\ C_2 &= C_2(t_0, s_0, \dot{s}_0) \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

(16.29) ni (16.27) ga qo'yib, nuqtaning yoy koordinatasini vaqtning funktsiyasi sifatida ifodalaymiz:

$$s = s(t)$$

16.5-§. Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasini echishga doir masalalar

Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi quyidagi tartibda echi-ladi:

1. Moddiy nuqtaning harakatini aniqlash usulini tanlab, unga mos koordinatalar sistemasini o'tkazamiz.

2. Nuqtaga ta'sir etuvchi berilgan kuchlar va bog'lanish reaksiya kuchlarini tasvirlaymiz.

3. Dinamik tenglamalarni tuzamiz va ularni integrallaymiz.

4. Harakatning boshlang'ich shartlarini aniqlaymiz va bu

shartlardan foydalanib integrallash doimiylarini topamiz.

5. Integrallash doimiylarining topilgan qiymatlarini o'rniga qo'yib, moddiy nuqtaning kinematik tenglamalarini olamiz va bu tenglamalardan izlanayotgan no-ma'lumlarni aniqlaymiz.

16.3-masala. Qoyaning temir yo'l o'tgan o'ymalarida kyuvetlarni ularga ni-shabliklardan tosh ko'chkilarining tushishidan himoya qilish uchun DC "supa" qili-nadi.

Toshning nishablikning eng yuqori nuqtasi A dan tushishi mumkinligini e'tiborga olib va bunda uning boshlang'ich tezligini $v_0=0$ deb hisoblab, supaning eng kichik eni b va unga toshning tushish tezligi v_c aniqlansin. Tosh nishablikning gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi va uzunligi l bo'lgan AB qismi bo'ylab τ s. davomida ha-rakat qiladi.

Masalani echishda toshning AB qismdagi sirpanish ishqalanish koeffitsienti f o'zgarmas, deb hisoblansin, havoning qarshiligi esa e'tiborga olinmasin.

Berilgan: $v_0=0$; $\alpha=60^\circ$; $l=4$ m; $\tau=1$ s; $f=0$; $h=5$ m; $\beta=75^\circ$. b va v_c aniqlansin.

Yech i sh. AB qismda toshning harakatini ko'rib chiqamiz. Toshni moddiy nuqta deb olib, unga ta'sir qiluvchi kuchlarni ko'rsatamiz (16.6-rasm.). og'irlik kuchi \vec{G} , normal reaktsiya kuchi \vec{N} va sirpanish ishqalanish kuchi \vec{F} . Toshning AB qismdagi harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{1i}, \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Ishqalanish kuchi

$$F = fN$$

bunda

$$N = G \cos \alpha.$$

Shunday qilib,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha,$$

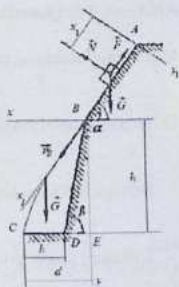
yoki

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Differensial tenglamani ikki marta integrallab, quyidagilarni olamiz.

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cdot 2]t^2 + C_1 t + C_2.$$



16.6- RASMI.

Integrallash o'zgarmlarini aniqlash uchun masalaning boshlang'ich shartlari-dan foydalanamiz.

$$t=0 \text{ da } x_1=0, \dot{x}_1=0.$$

Bu boshlang'ich shartlarni yuqorida integrallab topilgan tenglamalarga qo'yib, o'z-garmlar uchun quyidagi qiymatlarni olamiz:

$$C_1=0, C_2=0.$$

U holda

$$\begin{aligned}x_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t, \\x_2 &= ((\sin \alpha - f \cos \alpha) / 2)gt^2\end{aligned}$$

Tosh AB qismini tark etgan t on uchun

$$x_1 = v_2, \quad x_2 = l,$$

ya'ni

$$\begin{aligned}v_2 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t, \\l &= [g(\sin \alpha - f \cos \alpha) / 2]t^2.\end{aligned}$$

bundan

$$v_2 = 2l/t, \text{ ya'ni } v_2 = 2 \cdot 4 / 1 = 8 \text{ m/s.}$$

Toshning B nuqtadan C nuqtagacha bo'lgan harakatini qaraymiz. Toshga ta'sir qiluvchi og'irlik kuchi G ni ko'rsatib, uning harakat differensial tenglamalarini tuzamiz.

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = G.$$

Masalani boshlang'ich shartlari:

$$\begin{aligned}t=0 \text{ da } x=0, \quad y=0; \\ \dot{x}=v_2 \cos \alpha, \quad \dot{y}=v_2 \sin \alpha.\end{aligned}$$

Differensial tenglamalarni ikki marta integrallaymiz:

$$\begin{aligned}\dot{x} = C_3, \quad \dot{y} = gt + C_4; \\ x = C_3t + C_5, \quad y = gt^2/2 + C_4t + C_6.\end{aligned}$$

Bu erga boshlang'ich shartlarni qo'yib, quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned}C_3 = v_2 \cos \alpha, \quad C_4 = v_2 \sin \alpha; \\ C_5 = 0, \quad C_6 = 0.\end{aligned}$$

Toshning tezligi proektivlari tenglamalarini:

$$\dot{x} = v_2 \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_2 \sin \alpha,$$

va uning harakat tenglamalarini:

$$x = v_2 \cos \alpha \cdot t, \quad y = gt^2/2 + v_2 \sin \alpha \cdot t.$$

olamiz.

Tosh traektoriyasi tenglamasini harakat tenglamalaridan t parametrimni yo'qotib topamiz. Birinchi tenglamadan t ni aniqlab va uning qiymatini ikkinchisiga qo'yib, parabolaning tenglamasini hosil

qilamiz.

$$y = gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha$$

Toshning tushish onida $y=h$, $x=d$ bo'ladi, unda traektoriyaning tenglamasidan ushbu qiymatlarni topamiz:

$$d_1 = 2,11 \text{ m}; \quad d_2 = -7,75 \text{ m}.$$

Toshning harakat traektoriyasi parabolaning musbat absstissali nuqtalar tar-mog'i bo'lgani uchun $d=2,11$ m.

Supaning minimal eni $b=d-ED=d-h/\operatorname{tg}75^\circ$ yoki $b=0,77$ m.

Toshning harakat tenglamasi $x=v_0 \cos \alpha \cdot t$ dan foydalanib, uning B nuqtadan C nuqtagacha bo'lgan harakat vaqti T ni topamiz: $T=0,53$ s.

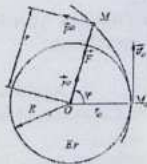
Toshning tushayotgandagi tezligining koordinata o'qlarigagi proektsiyalari

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_0 \sin \alpha.$$

orqali quyidagi formuladan topamiz: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Toshning tushish onida $t=T=0,53$ s. $v_c = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (gT + v_0 \sin \alpha)^2}$ yoki $v_c = 12,8$ m/s.

16.4-masala. Yer sirtidagi M nuqtadan yerning radiusiga perpendikulyar ravishda \vec{v}_0 boshlang'ich tezlik bilan raketa uchirilgan. Yerning tortish kuchi raketadan yer markazi O gacha bo'lgan masofa kvadratiga teskari proporsional ravishda o'zgaradi. Yersirtidagi erkin tushish tezlanishi $g=9,81 \text{ m/s}^2$. Yerning radiusi $R=6370$ km ga teng. Havoning qarshiligini hisobga olmay, raketani moddiy nuqta deb qarab, uning harakat tenglamasi aniqlansin (16.7-rasm).



16.7-rasm.

Yechish. Raketaning boshlang'ich paytdagi tezligi \vec{v}_0 bilan yerning tortish kuchi \vec{F} bir tekislikda yotgani tufayli raketaning harakati doimo shu tekislikda sodir bo'ladi. Raketaning harakatini qutb koordinatalarida aniqlaymiz. Boshlang'ich paytda qutb o'qini OM_0 bo'yicha yo'naltiramiz. Raketaning ixtiyoriy M holati uchun bu o'qning birlik vektori \vec{r}^0 rasmda tasvirlangan.

Raketaga doimo yerning markazi O nuqtaga yo'nalgan tortish kuchi \vec{F} ta'sir etadi, ya'ni raketa markaziy kuch ta'sirida harakatlanadi. Masalaning shartiga ko'ra bu kuch O markazdan rake-

tagacha bo'lgan masofaga teskari proporsional ravishda o'zgaradi:

$$F = \frac{km}{r^2} \quad (1)$$

bunda m — raketaning massasi, k — aniqlanishi lozim bo'lgan proporsionallik koeffitsienti.

Yerning sirtida $r = r_0 = R$ va $F = P = mg$ ekanligini e'tiborga olib, r va F ning bu qiymatlarini (1) ga qo'ysak, $k = gR^2$ munosabat o'rinli bo'lishini ko'ramiz. Natijada (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$F = \frac{mgR^2}{r^2} \quad (2)$$

Moddiy nuqtaning qutb koordinatalaridagi dinamik tenglamalari (16.10) ni tuzamiz:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi \quad (3)$$

\vec{F} kuch r o'q bo'yicha \vec{r}^0 ga qarama-qarshi yo'nalgani uchun $F_r = -F, F_\varphi = 0$. (2) ni e'tiborga olsak, $F_r = -\frac{mgR^2}{r^2}$. U holda (3) ni

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (4) ning ikkinchi tenglamasini integrallasak,

$$r^2\dot{\varphi} = C_1 \quad (5)$$

C_1 ni aniqlash uchun harakatning boshlang'ich shartlaridan foydalanamiz, ya'ni

$$t = 0 \text{ da } r_0 = 0, \varphi_0 = 0 \quad (6)$$

bo'lganda raketa boshlang'ich paytda M_0 holatni egallaydi; bundan tashqari boshlang'ich paytda v_0 tezlik r_0 ga perpendikulyar bo'lgani uchun

$$r_0 = 0, \varphi_0 = \frac{v_0}{R} \quad (7)$$

(6) va (7) ni e'tiborga olib, (5) dan C_1 ni aniqlaymiz: $C_1 = Rv_0$. Shunday qi-lib, (5) ni $r^2\dot{\varphi} = Rv_0$ yoki

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0}{r^2} \quad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(4) ning birinchi differensial tenglamasini integrallash uchun $r = r(\varphi)$ va $\varphi = \varphi(t)$ ekanligini nazarda tutsak, $r = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$.

U holda (8) ga ko'ra

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{Rv_0}{r^2} = -Rv_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (9)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$ bo'lgani tufayli (8) va (9) ga asosan \dot{r} uchun quyidagi ifodani olamiz;

$$\dot{r} = -\frac{R^2 v_0^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (10)$$

\dot{r} va $\dot{\varphi}$ larning qiymatini (10) va (8) dan (4) ning birinchisiga qo'yib,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{g}{v_0^2}$$

tenglamani yoki u belgilash kiritib,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{g}{v_0^2} \quad (11)$$

tenglamani olamiz.

(11) ni integrallab, raketaning izlanayotgan harakat traektoriyasini aniqlaymiz. Bu differentsial tenglamaning umumiy echimini

$$u = u_1 + u_2 \quad (12)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bunda u_1

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 0 \quad (13)$$

ko'rinishdagi bir jinsli tenglamaning umumiy echimini, u_2 esa bir jinsli bo'lma-gan (11) tenglamaning xususiy echimini ifodalaydi (13) ning xarakteristik tenglamasi $\lambda^2 + 1 = 0$ ko'rinishda yoziladi, bundan $\lambda = \pm i$. Binobarin,

$$u_1 = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

(11) ning xususiy echimini

$$u_2 = \frac{g}{v_0^2}$$

ko'rinishda olamiz. Shunday qilib,

$$u = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{g}{v_0^2}$$

yoki $u = \frac{1}{r}$ bo'lgani uchun

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{g}{v_0^2} \quad (14)$$

echimga ega bo'lamiz.

C_1, C_2 integrallash doimiylarini aniqlash uchun (14) dan vaqt

bo'yicha hosila olamiz:

$$-\frac{1}{r^2} \dot{r} = -C_2 \dot{\varphi} \sin \varphi + C_3 \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (15)$$

(6), (7) boshlang'ich shartlarni (14) va (15) ga qo'yib, C_2 va C_3 larni topamiz:

$$C_2 = \frac{v_0^2 - gR}{Rv_0^2}, \quad C_3 = 0.$$

C_2 va C_3 larning qiymatlarini (14) ga qo'yib, uni r ga nisbatan echsak,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (16)$$

hosil bo'ladi, bunda $p = \frac{v_0^2}{g}$ egri chiziqning parametrini,

$$e = \frac{v_0^4 - gR}{gR} \quad (17)$$

uning eksstentrisitetini ifodalaydi.

Analistik geometriyadan ma'lumki, (16) tenglama ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalaridagi tenglamasini ifodalaydi. Bu ikkinchi tartibli chiziq: a) $e = 0$ bo'lsa, aylana; b) $e < 1$ bo'lsa, ellips; v) $e = 1$ bo'lsa, parabola; g) $e > 1$ bo'lsa, giperboladan iborat bo'ladi. Bu hollarni alohida ko'ramiz.

a) raketa aylana bo'ylab harakatlansa, $e = 0$ bo'lib, (17) ga asosan

$$v_0 = \sqrt{gR} \quad (18)$$

Bunda $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$v_0 = 7910 \text{ m/s} \approx 7,9 \text{ km/s}. \quad (19)$$

Bu tezlik *birinchi kosmik tezlik* deyiladi.

b) raketa ellips bo'ylab harakatlansa, $e < 1$ bo'lib, (17) dan $v_0 < \sqrt{2gR}$ ya'ni

$$v_0 = 11179 \text{ m/s} \approx 11,2 \text{ km/s}. \quad (20)$$

Bu tezlik *ikkinchi kosmik tezlik* deyiladi.

Aylana ellipsning limit holati bo'lgani tufayli, raketa ellips bo'ylab harakatlanishi uchun boshlang'ich tezlik v_0 quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kerak:

$$\sqrt{gR} \leq v_0 < \sqrt{2gR} \quad \text{yoki} \quad 7,9 \text{ km/s} \leq v_0 < 11,2 \text{ km/s} \quad (21)$$

v) raketa parabola bo'ylab harakatlansa, $e = 1$ bo'lib, (17) ga asosan boshlang'ich tezlik uchun

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ km/s} \quad (22)$$

miqdori olamiz.

g) raketa giperbola bo'ylab harakatlansa, $c > 1$ bo'ladi va (17) dan

$$v_0 > \sqrt{2gR} \quad \text{yoki} \quad v_0 > 11,2 \text{ km/s} \quad (23)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib, raketaning boshlang'ich tezligi $7,9 \text{ km/s} \leq v_0 < 11,2 \text{ km/s}$ shartni qanoatlantirsa, raketa aylana yoki ellips bo'yicha harakatlanadi hamda yerning sun'iy yo'ldoshiga aylanadi. Agar $v_0 \geq 11,2 \text{ km/s}$ bo'lsa, raketa parabola yoki giperbola bo'yicha harakatlanib yerdan uzoqlasha boradi. $v_0 < 7,9 \text{ km/s}$ bo'lsa, raketa yerga qulab tushadi.

Moddiy nuqta harakati differensial tenglamasini echishga doir hisob-grafik ishlar variantlari 3-ilova 1-topshiriqda keltirilgan.

16.6-§. Moddiy nuqtaning sodda hollardagi to'g'ri chiziqli harakat differensial tenglamalarini integrallash

Moddiy nuqtaning harakat traektoriyasi x o'q bilan ustma-ust tushsa, harakat davomida $y = z = 0$ va $\dot{y} = \dot{z} = 0$ bo'ladi, ya'ni nuqtaning tezligi x o'q bo'yicha yo'naladi yoki nolga teng bo'ladi. Bundan tashqari $\dot{y} = \dot{z} = 0$ bo'lgani uchun nuqtaning Dekart koordinata o'qlaridagi dinamik tenglamalari (16.3) ga asosan

$$F_x = F_x = 0 \quad (16.30)$$

shartlar aynan bajariladi.

Agar koordinatalar boshini nuqtaning boshlang'ich holatida olib, x o'qni nuqta-ning boshlang'ich tezligi bo'yicha yo'naltirsak, u holda (16.30) shartlar bajariladi, binobarin,

$$m\ddot{y} = 0, m\ddot{z} = 0$$

bo'ladi. Bu tenglamalarni ikki marta integrallasak,

$$\dot{y} = C_1, \quad \dot{z} = C_2, \\ y = C_1 t + C_3, \quad z = C_2 t + C_4 \quad (16.31)$$

x o'qning tanlab olinishiga ko'ra boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$t_0 = 0 \text{ da } y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0$$

Bu shartlarni (16.31) ga qo'yib, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ bo'lishini ko'ramiz.

(16.7) ga asosan nuqta to'g'ri chiziqli harakatining differensial

tenglamasini

$$m\ddot{x} = X(x, v, t) \quad (16.32)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (16.32) tenglamaning umumiy echimida ikkita integ-rallash doimiysi qatnashadi:

$$x = x(t, C_1, C_2) \quad (16.33)$$

Bundan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2) \quad (16.34)$$

Harakatning boshlang'ich shartlari quyidagicha bo'lsin:

$$t = 0 \text{ da } x_0 = 0, v_0 = 0 \quad (16.35)$$

(16.35) ni (16.33) va (16.34) ga qo'yib, C_1, C_2 ni aniqlaymiz.

(16.32) tenglamani integrallash mumkin bo'lgan sodda hollarni ko'ramiz.

1. Moddiy nuqtaga miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'lgan kuch ta'sir etsin. Nuqtaning boshlang'ich tezligi \bar{v} kuchning ta'sir chizig'ida yotsin, x o'qni kuchning ta'sir chizig'i bo'ylab yo'naltiramiz. U holda (16.32) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$m\ddot{x} = F \quad (16.36)$$

bunda F bilan kuchning algebraik qiymati ko'rsatilgan. (16.36) da

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ ekanligini e'tiborga ohb, o'zgaruvchilarni ajratish yo'h bilan integrallaymiz:

$$d\dot{x} = \frac{F}{m} dt \quad (16.37)$$

$$\dot{x} = \frac{F}{m} t + C_1, \quad (16.38)$$

(16.38) ni ham o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan integrallaymiz:

$$dx = \left(\frac{F}{m} t + C_1\right) dt, \quad (16.39)$$

$$x = \frac{F}{m} t^2 + C_1 t + C_2 \quad (16.40)$$

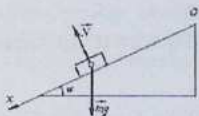
(16.40) ifoda (16.36) ning umumiy echimidir.

Harakatning boshlang'ich shartlari (16.35) ko'rinishda bo'lsin. U holda (16.35) ni (16.38) va (16.40) ga qo'yib integrallash doimiylarini aniq-laymiz: $C_1 = v_0, C_2 = x_0$. Bu qiymatlarni (16.38) ga qo'yib, nuqtaning harakat qo-nunini aniqlaymiz:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{m} t^2 \quad (16.41)$$

(16.41) dan ko'ramizki, nuqta o'zgarmas kuch ta'sirida tekis o'zgaruvchan harakatda bo'lar ekan. Bu natijani nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi (15.5) dan ham olish mumkin.

16.5- masala. Og'ir jism gorizontga $\alpha=30^\circ$ burchak ostida og'gan silliq qiya tekislik bo'ylab pastga tushadi. Agar jismning tezligi boshlang'ich paytda 2 m/s ga teng bo'lsa, jism 9,6 m yo'lni qancha vaqtda bosib o'tishi topilsin (16.8-rasm).



16.8-rasm.

Yechish. Ox o'qni tekislik bo'ylab yo'naltiramiz. Jismga vertikal pastga yo'nalgan og'irlik kuchi mg va qiya tekislikka perpendikulyar yo'nalgan normal re-akstiya kuchi \tilde{N} ta'sir etadi. Og'irlik kuchining qiya tekislikka perpendikulyar yo'nalishdagi tashkil etuvchisi normal re-akstiya kuchi bilan muvozanatlashadi.

(16.32) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha$$

O'zgaruvchilarni ajratsak,

$$\ddot{x} = g \sin \alpha dt \quad (1)$$

Harakatning boshlang'ich shartlari quyidagicha berilgan:

$$t=0 \text{ da } x=0, \dot{x}=0 \text{ m/s} \quad (2)$$

(2) ni nazarda tutib, (1) ni integrallaymiz.

$$\int_0^x dx = g \sin \alpha \int_0^t dt$$

$$\dot{x} = 2 + gt \sin \alpha \quad \text{yoki} \quad dx = (2 + gt \sin \alpha) dt$$

So'nggi tenglamani berilgan boshlang'ich shartlarda integrallaymiz:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (2 + gt \sin \alpha) dt,$$

$$x = 2t + \frac{gt^2}{2} \sin \alpha$$

Bunda $x=9,6\text{m}$, $g=9,81\text{m/s}^2$, $\alpha=30^\circ$ ekanligini nazarda tutib, t ni aniqlash uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$9,81t^2 + 8t - 38,4 = 0$$

bundan $t=1,61\text{s}$. t ni aniqlashda kvadrat ildiz oldida manfiy ishora olinmadi, chun-ki vaqt musbat qiymatga ega.

2. Moddiy nuqtaga faqat vaqtga bog'liq kuch ta'sir etgan hol. Bu holda (16.32) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$m\ddot{x} = X(t)$$

yoki to'g'ri chiziqli harakatda $\dot{x} = v$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ bo'lgani uchun

$$m \frac{dv}{dt} = X(t) \quad (16.42)$$

Bu tenglamada o'zgaruvchilarni ajratsak,

$$m dv = X(t) dt \quad (16.43)$$

Boshlang'ich $t_0 = 0$ paytda nuqtaning tezligi v_0 ga teng bo'lsin.

(16.43) ni bu boshlang'ich shartlarda integrallaymiz:

$$mv - mv_0 = \int_0^t X(t) dt \quad (16.44)$$

$X(t)$ ma'lum funktsiya bo'lgani uchun oxirgi integralni hisoblab, vaqtning funktsiyasidan iborat biror $f(t)$ funktsiyani olamiz, natijada (16.44) ni

$$mv - mv_0 = f(t) \quad (16.45)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (16.45) dan nuqtaning tezligi v ni aniqlaymiz:

$$v = v_0 + \frac{1}{m} f(t)$$

yoki

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} f(t)$$

yoki o'zgaruvchilarni ajratsak,

$$dx = \left[v_0 + \frac{1}{m} f(t) \right] dt$$

hosil bo'ladi.

Boshlang'ich $t_0 = 0$ paytda nuqtaning absstissasi x_0 ga teng deylik.

Bu boshlang'ich shartlarda oxirgi tenglamani integrallaymiz:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt$$

yoki

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt$$

Bu tenglama vaqtga bog'liq funktsiya tarzida berilgan o'zgaruvchan kuch ta'siridagi nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat qonunini ifodalaydi.

16.6-masala. Massasi m ga teng moddiy nuqta $F = F_0 \cos \omega t$ (bu

erda F_x va ω — o'zgar-mas miqdorlar) qonunga muvofiq o'zgaruvchi kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qiladi. Boshlang'ich paytda jismning tezligi $x = v_0$ bo'lgan. Nuqta harakatining tenglamasi topilsin.

Yechish. Boshlang'ich paytdagi nuqtaning holatini koordinata boshi uchun qabul qilib, x o'qni nuqtaning harakat traektoriyasi bo'yicha yo'naltiramiz.

Nuqtaga vaqtning funktsiyasidan iborat kuch ta'sir etadi. Nuqtaning harakat tenglamasini (16.42) ko'rinishda tuzamiz:

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \cos \omega t$$

o'zgaruvchilarni ajratib,

$$m dv = F_0 \cos \omega t dt$$

boshlang'ich $t = 0$ paytda $x = v_0$ shartni e'tiborga olgan holda bu tenglamani integ-rallaymiz:

$$mv - mv_0 = \frac{F_0}{\omega} \sin \omega t$$

yoki

$$v = v_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t$$

yoki

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t$$

o'zgaruvchilarni ajratib,

$$dx = \left(v_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \right) dt$$

tenglamani olamiz.

Boshlang'ich shartlarni e'tiborga olib, bu tenglamani integrallaymiz:

$$x = v_0 t + \frac{F_0}{m\omega} - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t \quad (2)$$

3. Moddiy nuqtaga faqat nuqtaning holatiga bog'liq kuch ta'sir etsin. Bu holda (16.32) ni

$$m \frac{dv}{dt} = X(x) \quad (16.46)$$

yoki

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = X(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $\frac{dx}{dt} = v$ bo'lgani uchun

$$mv \frac{dv}{dx} = X(x) \quad (16.47)$$

O'zgaruvchilarni ajratsak,

$$m v dv = X(x) dx \quad (16.48)$$

tenglama hosil bo'ladi.

Nuqtaning $t_0 = 0$ paytda absstissasi x_0 tezligi $\dot{x} = v_0$ ga teng bo'lsin. Bu bosh-lang'ich shartlarda (16.48) ni integrallaymiz:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X(x) dx \quad (16.49)$$

(16.49) ning o'ng tomonidagi integralni $f(x)$ bilan belgilaymiz

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = f(x)$$

So'nggi tenglamadan nuqtaning tezligini aniqlaymiz.

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}$$

yoki

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}$$

o'zgaruvchilarni ajratsak,

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = dt$$

bo'ladi.

Nuqtaning $t_0 = 0$ paytda absstissasi x_0 ga tengligini e'tiborga olib, bu tenglamani integrallab, x ni vaqtning funkstiyasi sifatida aniqlash mumkin.

4. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuch faqat nuqtaning tezligiga bog'liq bo'lsin. Bunday hollar odatda qarshilik kuchini hisobga olganda uchraydi. $x = f(v)$ bo'lgan holda nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat tenglamasini ikki usulda integrallash mumkin:

I. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasini

$$m \frac{dv}{dt} = f(v) \quad (16.50)$$

ko'rinishda olib, o'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{m dv}{f(v)} = dt$$

Nuqtaning $t_0 = 0$ paytda tezligi $\dot{x} = v_0$ ekanligini e'tiborga olib, bu tenglamani integrallaymiz:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = t \quad (16.51)$$

(16.51) ning chap tomonidagi integralni hisoblab, olingan ifodani v ga nisbatan echsak,

$$\frac{dx}{dt} = v = \varphi(t) \quad (16.52)$$

bo'ladi. Boshlang'ich $t_0 = 0$ paytda absstissa x_0 ekanligini e'tiborga olgan holda bu tenglamani integrallab, nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t) dt$$

II. Nuqta harakatining differensial tenglamasini yana quyidagicha yozish mum-kin:

$$m v \frac{dv}{dx} = f(v)$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{m v dv}{f(v)} = dx$$

Bu tenglamani yuqoridagi boshlang'ich shartlarda integrallasak,

$$\int_{v_0}^v \frac{m v dv}{f(v)} = x - x_0 \quad (16.53)$$

(16.53) ning chap tomonidagi integralni hisoblab, olingan tenglamani v ga nisbatan echsak, tezlikni masofaning funktsiyasi sifatida aniqlaymiz:

$$v = \frac{dx}{dt} = \psi(x)$$

Bundan

$$\frac{dx}{\psi(x)} = dt$$

Bu tenglamani yuqoridagi boshlang'ich shartlarda integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\psi(x)} = t \quad (16.54)$$

(16.54) ning chap tomonidagi integralni hisoblab, olingan tenglamani x ga nis-batan echsak, x ni vaqtning funkstiyasi sifatida ifodalash mumkin.

Nazorat savollari:

1. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalarini yozing.
2. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalarini yozing.
3. Dinamikaning asosiy masalalarini ayting.

17-BOB. MODDIY NUQTANING TO'G'RI CHIZIQLI TEBRANMA HARAKATI

Tayanch sozlar: tebranma harakat, erkin tebranma harakat, elastik jism bikrligi, so'nuvshi tebranma harakat, majburiy tebranma harakat, rezonans.

17.1-§. Umumiy mulohazalar

Bu bobda *moddiy nuqtaning* harakat turlaridan biri bo'lgan va texnikada alohi-da ahamiyatga ega bo'lgan *tebranma harakat* ustida to'xtalamiz.

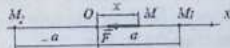
Tebranma harakatlar turh tabiatga ega bo'hshi mumkin. Masalan, inshootlar poydevorining tebranishi, mashina va mexanizm qismlarining tebranishi, tovush to'liqinining tarqahshi jarayonidagi tebranishlar mexanik harakat natijasida sodir bo'ladi; tebranish konturi, radioto'liqinlar kabi tebranishlar elektr va magnit may-donlari kuchlanganhi o'zgarishi bilan bog'hq bo'ladi. Shunga qaramasdan tebra-nishlar bir xil qonuniyatga bo'ysunadi. Masalan, mayatnik, prujinaga osilgan yuk va vagon kuzovining tebranishlari, konturidagi tebranishlar yoki suvdagi ke-maning chayqalishi differenstial tenglama bilan ifodalanishi mumkin.

Nuqtaning tebranma harakatini o'rganishda

- 1) harakat differenstial tenglamalarini tuzish;
- 2) tebranma harakat qonunini aniqlash;
- 3) tebranish davrini hamda muvozanat holatidan eng katta og'ishini hisoblash kabi masalalar bilan shug'ullanamiz.

17.2-§. Moddiy nuqtaning erlan tebranma harakati

Moddiy nuqtani muvozanat holatiga qaytarishga intiluvchi kuchga *qaytaruvchi kuch* deyiladi. Nuqtaga uning muvozanat holatidan og'ishiga proporstional bo'lgan chiziqli qaytaruvchi kuch ta'sir etgan holni ko'ramiz. x o'qni M nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat traektoriyasi bo'y-lab



17.1-rasm.

yo'naltiramiz. Koordinatalar boshi O ni M nuqtaning muvozanatda bo'lishi mumkin bo'lgan holatda olamiz (17.1- rasm).

Agar nuqta muvozanat holatidan x masofaga og'dirilsa, u holda unga x o'qi bo'ylab hamisha O nuqtaga yo'nalgan qaytaruvchi \vec{F} kuch ta'sir etadi. Bu kuch-ning x o'qdagi proekstiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$X = -cx \quad (17.1)$$

bunda c proporsionallik koeffitsientini ifodalaydi.

M nuqtaning qaytaruvchi \vec{F} kuch ta'siridagi to'g'ri chiziqli harakat differentsial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx$$

yoki $\frac{c}{m} = k^2$ belgilash kiritsak,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (17.2)$$

(17.2) tenglama nuqtaning erkin tebranma harakat differentsial tenglamasi deyiladi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning qaytaruvchi kuch ta'siridagi harakati ikkinchi tartib bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli differentsial tenglama bilan ifodalanadi.

Bu differentsial tenglamani integrallash uchun uning xarakteristik tenglamasini tuzamiz.

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

Bu tenglama $\lambda_1 = ik, \lambda_2 = -ik$ ildizlarga ega bo'lgani uchun (17.2) tenglama-ning umumiy echimi quyidagicha yoziladi:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (17.3)$$

bunda C_1, C_2 bilan integrallash doimiylari belgilangan.

(17.3) dan vaqt bo'yicha hosila olib, nuqtaning tezligini ifodalovchi

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (17.4)$$

munosabatni olamiz.

C_1, C_2 integrallash doimiylarini aniqlash uchun boshlang'ich shartlar berilgan bo'lishi kerak. Aytaylik, boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'lsin:

$$t = 0 \text{ da } x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0 \quad (17.5)$$

(17.5) ni (17.3) va (17.4) ga qo'yib,

$$C_1 = x_0, C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

ekanligini keltirib chiqaramiz. C_1, C_2 ning bu qiymatlarini (17.3) ga qo'yib, M nuqtaning harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \quad (17.6)$$

Nuqtaning harakatini yaqqolroq tasavvur qilish uchun C_1, C_2 o'rniga

$$C_1 = a \sin \alpha, C_2 = a \cos \alpha$$

tengliklar vositasida aniqlanadigan a va α yangi doimiylarni kiritamiz. U xolda (17.3) ni

$$x = a \sin(kt + \alpha) \quad (17.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglama nuqtaning garmonik tebranma harakatini ifodalaydi (8.5-§ ga qaralsin).

Harakat tezligini aniqlash uchun (17.7) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \alpha) \quad (17.8)$$

a va α ni harakatning boshlang'ich shartlaridan foydalanib aniqlash mumkin. Aytaylik, harakatning boshlang'ich shartlari (17.5) ko'rinishida berilgan bo'lsin. (17.5) ni (17.7) va (17.8) ga qo'ysak,

$$x_0 = a \sin \alpha, \dot{x}_0 = ak \cos \alpha$$

hosil bo'ladi.

Bundan a va α lar aniqlanadigan

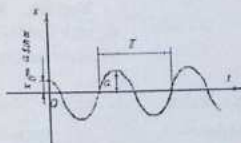
$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \quad (17.9)$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}}, \cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{k \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} \quad (17.10)$$

munosabatlarni olamiz.

M nuqtaning O tebranish markazidan eng katta og'ishiga teng bo'lgan a ma-sofaga *tebranish amplitudasi* deyiladi. M nuqtaning berilgan ondagi holati va undan keyingi harakat yo'nalishini ifodalovchi $kt + \alpha$ argument *tebranish fazasi* deyiladi. Boshlang'ich $t = 0$ paytdagi fazaning qiymati α *tebranishlarning boshlang'ich fazasi* deyiladi.

Nuqtaning erkin tebranma



17.2-rasm.

harakat gra-figi 17.2-rasmda tasvirlangan; bunda $x_0 = a \sin \alpha$ nuqtaning boshlang'ich payt-dagi og'ishini ifodalaydi. Nuqta bir marta to'liq tebranishi uchun ketgan T vaqt *tebranish davri* deyiladi. Sinus funkstiyasining davri 2π ga teng bo'lgani uchun

$k(t+T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi$

ifodadan tebranish davri aniqlanadigan quyidagi formulani olamiz:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (17.11)$$

Tebranish davrining teskari qiymatiga teng bo'lgan va nuqtaning bir sekund-dagi tebranishlar sonini ifodalovchi

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \quad (17.12)$$

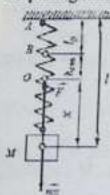
kattalikka *tebranishlar chastotasi* deyiladi.

(17.12)dan ko'ramizki,

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (17.13)$$

kattalik 2π sekund vaqt ichida nuqtaning to'liq tebranishlar sonini ifodalaydi. Bu kattalik *tebranishlarning doiraviy chastotasi* deyiladi.

Bu formulalardan ko'ramizki, erkin tebranishlar chastotasi va tebranish davri boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmay, faqat nuqtaning massasi va c koeffitsient-ga bog'liq bo'ladi.



17.3-rasm.

17.1-masala. Massasi m ga teng bo'lgan M yuk birligi c ga teng prujinaga osilgan (17.3- rasm). Prujinaning cho'zilmagan holdagi uzunligi $AB = l_0$, unga osilgan yuk boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuborilgan. Prujinaning statik muvozanat holatidagi cho'zilishi λ_{cm} ni ma'lum deb qarab, yukning tebranma harakat qonuni, tebranish davri va prujina elastiklik kuchining eng katta qiymati aniqlansin.

Yechish. Koordinatalar boshi uchun yukning og'irlik kuchi mg va prujinaning elastiklik kuchi statik muvozanatlashgan O nuqtani olamiz, O nuqtada

$$mg = c\lambda_{cm} \quad (1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, O koordinatalar boshi B nuqtadan $\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}$ - masofada yotadi. Ox o'qni vertikal pastga yo'naltiramiz. Yukning ixtiyoriy holatini M bilan belgilab, unga ta'sir

etuvchi kuchlarni rasmda ko'rsa-tilganidek tasvirlaymiz. Yukka uning og'irlik kuchi $m\bar{g}$ va prujinaning elastiklik kuchi ta'sir etadi. Guk qonuniga ko'ra prujinaning elastiklik kuchi uning cho'zi-lishiga proporsional bo'ladi, ya'ni $F = c\lambda$ bunda c - bikirlik koeffitsienti, $\lambda = l - l_0 = \lambda_{sm} + x$ — yukning M holatiga mos bo'lgan prujinaning cho'zilishi. Shu sababli prujina elastiklik kuchining x o'qdagi proektsiyasini $F_x = -c(\lambda_{sm} + x)$ formula yordamida aniqlash mumkin.

Yukning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = m\bar{g} - c(\lambda_{sm} + x) \quad (2)$$

Statik muvozanat holatida (1) tenglik o'rinli bo'lgani uchun (2) ni quyidagicha yozish mumkin

$$m\ddot{x} = -cx$$

yoki

$$x + k^2 x = 0 \quad (3)$$

(3) tenglik erkin tebranma harakat differensial tenglamasidir. Bino-barin, prujina osilgan yuk harmonik tebranma harakatda bo'ladi.

Ko'rilayotgan holda tebranish chastotasi uchun $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{sm}}}$, tebranish davri uchun esa (17.12) ga asosan

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{sm}}{g}} \quad (4)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

(3) differensial tenglamaning umumiy echimini (17.3) ko'rinishida olamiz:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (5)$$

bundan

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (6)$$

Masalaning shartiga ko'ra boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$t = 0 \text{ da } x = -\lambda_{sm}, \quad \dot{x} = 0 \quad (7)$$

(7) ni (5) va (6) ga qo'yib, $C_1 = -\lambda_{sm}, C_2 = 0$ bo'hshini aniqlaymiz. Shunday qilib yuk

$$x = -\lambda_{sm} \cos kt \quad (8)$$

qonunga ko'ra harakatlanadi.

(8) dan ko'ramizki, yukning tebranish amplitudasi a prujinaning statik cho'zilishi λ_{sm} ga teng bo'ladi: $a = \lambda_{sm}$. Shu sababli prujinaning eng katta cho'zilishi uchun

$$\lambda_{\max} = a + \lambda_{\min} = 2\lambda_{\min}$$

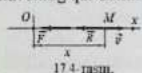
munosabat o'rinli bo'ladi. Binobarin, prujinaning eng katta elastiklik kuchi

$$F_{\max} = c\lambda_{\max} = 2c\lambda_{\min} = 2mg$$

ya'ni F_{\max} yukning og'irligi mg dan ikki baravar katta bo'ladi.

17.3-§. Tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Yuqorida nuqtaning erkin tebranma harakati ko'rilganda muhitning qarshiligi (ishqalanish, havoning qarshiligi va hokazolar) e'tiborga olinmagan edi, va holanki, texnikada uchraydigan real masalalarni echishda qarshilik kuchini hisobga olishga to'g'ri keladi. Qarshilik kuchi tebranma harakat xarakteriga jiddiy ta'sir ko'rsatadi. Masalan, bir uchi mahkamlangan va erkin uchiga yuk osilgan prujinani cho'zib, so'ngra qo'yib yuborsak, yuk bir necha marta tebranganidan keyin havoning qarshilik kuchi tufayli to'xtaydi.



Ox o'q bo'yicha harakatlanuvchi M moddiy nuqtaga F qaytaruvchi kuchdan tashqari nuqtaning tezligi v ga qarama-qarshi yo'nalgan R qarshilik kuchi ta'sir etsin (17.4- rasm).

Nuqtaning tezligi uncha katta bo'lmaganda qarshilik kuchini tezlikning birinchi darajasiga proporsional deb qarash mumkin:

$$R = -\mu v$$

Bunda μ qarshilik koefitsientini ifodalaydi. R qarshilik kuchining x o'qdagi proekstiyasi

$$R = -\mu \dot{x}$$

F va R kuchlar ta'siridagi nuqtaning harakat differentsial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$$

Bundan

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0 \quad (17.14)$$

ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz, bunda

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n$$

(17.14) tenglama qaytaruvchi kuch va nuqta tezligining birinchi

darajasiga proporsional bo'lgan qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning harakat differentsial tenglamasini ifodalaydi. Bu tenglama ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamadir. Uning xarakteristik tenglamasi $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ ildizlarga ega.

Moddiy nuqta harakatining xarakteri bu ildizlarning qabul qiladigan qiymatlariga bog'liq bo'ladi. Agar $n < k$ (qarshilik uncha katta bo'lmagan hol) bo'lsa, xarakteristik tenglamaning ildizlari qo'shma kompleks sonlardan, $n > k$ (qarshilik katta bo'lgan hol) bo'lsa, haqiqiy sonlardan iborat bo'ladi.

Bu hollarni alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1. Muhitning qarshiligi uncha katta bo'lmagan hol ($n < k$).

Bu holda $k^2 - n^2 = k_1^2$ belgilash kiritsak, xarakteristik tenglamaning ildizlari $\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1$ bo'lib, (17.14) tenglamaning umumiy echimi quyidagicha bo'ladi:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \quad (17.15)$$

Agar C_1, C_2 integrallash doimiylari o'rniga

$$C_1 = a \sin \alpha, C_2 = a \cos \alpha$$

tengliklar vositasida aniqlanadigan a va α o'zgar-maslarni kiritsak, nuqtaning harakat qonuni

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) \quad (17.16)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

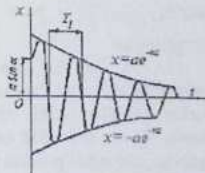
(17.16) tenglama nuqtaning garmonik tebranma harakat tenglamasidan e^{-nt} ko'paytuvchisi bilan farq qiladi. Bu ko'paytuvchi vaqtning o'tishi bilan nolga in-tiladi, ya'ni $t \rightarrow \infty$ da $e^{-nt} \rightarrow 0$. Shu sababli (17.16) qonun asosida sodir bo'la-digan harakat so'nuvchi tebranma harakat deyiladi. Bunday harakat chastotasi k_1 nuqtaning massasi m , proporsionallik koeffitsienti c bilan bir qatorda muhitning qarshilik koeffitsienti μ ga ham bog'liq bo'ladi.

So'nuvchi tebranma harakat grafigi 17.5-rasmda tasvirlangan.

(17.16) da $|\sin(k_1 t + \alpha)| \leq 1$ bo'lgani uchun x koordinataning absolyut qiymati

$$|x| \leq ae^{-nt}$$

shartni qanoatlantiradi. Binobarin, so'nuvchi tebranma harakat grafigi t



17.5-рasm.

o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan

$$x = ae^{-nt} \quad \text{va} \quad x = -ae^{-nt}$$

chiziq'larga galma-gal urinadigan sinusoida bilan ifodalanadi. a va α integrallash doimiylarini aniqlash uchun (17.16) dan vaqt bo'yicha hosila olib, nuqtaning tezligini topamiz:

$$\dot{x} = ak_1 e^{-nt} \cos(k_1 t + \alpha) - a n e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) \quad (17.17)$$

Agar boshlang'ich shartlar $t = 0$ da $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, ularni (17.16) va (17.17) ga qo'yib, ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$x_0 = a \sin \alpha,$$

$$v_0 = ak_1 \cos \alpha - n x_0$$

Bundan a va α lar aniqlanadigan

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + n x_0)^2}{k_1^2}} \quad (17.18)$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{v_0 + n x_0}{a k_1} \quad (17.19)$$

munosabatlarni olamiz.

So'nuvchi tebranma harakat chastotasi

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} \quad (17.20)$$

harakat davri esa

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} \quad (17.21)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(17.21) ni quyidagicha yozish mumkin:

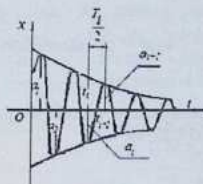
$$T_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} \quad (17.22)$$

bunda $T = \frac{2\pi}{k}$ bilan nuqtaning erkin tebranma harakat davri belgilangan.

(17.22) dan ko'ramizki, so'nuvchi tebranma harakat davri nuqtaning erkin tebranma harakat davridan birmuncha katta bo'ladi. Lekin qarshilik kichik bo'lganda bu farq uncha katta bo'lmaydi va bunda $T_1 \approx T$ deb olish mumkin. Binobarin, uncha katta bo'lmagan muhitning qarshiligi erkin tebranish davriga deyarli ta'sir etmaydi.

Moddiy nuqtaning muvozanat holatidan u yoki bu tomonga har gal tebrangan-dagi maksimal og'ishi so'nvuchi tebranma harakat amplitudasi deyiladi.

Agar bu amplitudalar ketma-ket qiymatlaridan tashkil topgan $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ qatorni olsak, bu qatorning ketma-ket a_i, a_{i+1} hadlari vaqtning t_i va $t_{i+1} = t_i + \frac{T_i}{2}$



17.6- rasm.

paytlariga mos keladi (17.6- rasm). Ya'ni $t_{i+1} - t_i = \frac{T_i}{2}$ bo'lib, nuqta $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ larga og'andagi vaqtlar ayirmasi $\frac{T_i}{2}$ ga teng arifmetik progressiyani tashkil etadi hamda

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n(t_i + \frac{T_i}{2})}}{ae^{-nt_i}} = e^{-\frac{nT_i}{2}} \quad (17.23)$$

munosabat o'rinni bo'ladi. $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ nisbat o'zgarmas bo'lgani tufayli

amplitudalarning ketma-ket qiymatlari, maxraji $e^{-\frac{nT_i}{2}}$ ga teng kamayuvchi geometrik progressiyani tashkil etadi $e^{-\frac{nT_i}{2}}$ ga teng bo'lgan abstrakt son *tebranish dekrementi* deyiladi. Dekrementning natural logarifmi moduliga teng kattalik *logarifmik dekrement* deyiladi va u D bilan belgilanadi:

$$D = \left| \ln e^{-\frac{nT_i}{2}} \right| = \frac{nT_i}{2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (17.24)$$

Miqdori n ga teng bo'lgan koeffitsient *so'nish koeffitsienti* deyiladi.

Shunday qilib, uncha katta bo'lmagan qarshilikning moddiy nuqtani erkin tebranma harakatiga ta'siri, vaqtning o'tishi bilan tebranish amplitudasining kamayi-shi bilan xarakterlanadi.

2. Aperiodik harakat ($n > k$). Bu holda $n^2 - k^2 = h^2$ belgilash kirit-sak, karakteristik tenglamaning ildizlari

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm h$$

haqiqiy, manfiy va turlicha qiymatlarga ega bo'ladi. Shu sababli (17.14) tenglama-ning umumiy echimi quyidagicha yoziladi:

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}) \quad (17.25)$$

Agar C_1, C_2 integrallash doimiylari o'rniga

$$C_1 = \frac{A+B}{2}, C_2 = \frac{A-B}{2}$$

tengliklar vositasida aniqlanadigan yangi A va B doimiylarni kiritsak, (17.25) ni

$$x = e^{-nt} \left(A \frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2} + B \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} \right)$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu tenglamada

$$\frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2} = ch(nt), \quad \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} = sh(nt)$$

giperbolik funktsiyalarni kiritib, uni quyidagicha ifodalaymiz:

$$x = e^{-nt} [A ch(nt) + B sh(nt)] \quad (17.26)$$

Nuqtaning harakatini yanada yaqqolroq tasavvur qilish uchun A va B o'zgar-maslar o'rniga

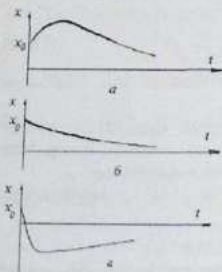
$$A = a sh \alpha, B = a ch \alpha$$

tengliklar yordamida aniqlanadigan a va α o'zgar-maslarni kiritamiz. U holda (17.26) o'rniga

$$x = a e^{-nt} sh(nt + \alpha) \quad (17.27)$$

tenglamani olamiz.

(17.27) dan ko'ramizki, $n > k$ bo'lgan holda nuqta tebranma harakatda bo'l-maydi, chunki giperbolik sinus funktsiyasi davriy funktsiya emas. Bu tenglama aperiodik harakatni ifodalaydi. Bunday harakat grafigi boshlang'ich shartlarning qanday bo'lishiga qarab, 17.7-rasmda tasvirlangan grafiklarning birortasi kabi bo'ladi.



17.7-pacat.

Agar nuqta boshlang'ich paytda x o'qning musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nal-gan boshlang'ich v_0 tezlikka ega bo'lsa, u holda bu tezlik hisobiga nuqta dastlab muvozanat holatidan uzoqlasha boradi, so'ngra qaytaruvchi kuch ta'sirida muvo-zanat holatiga asta-sekin yaqinlasha boradi (17.7-rasm, a).

Agar nuqta boshlang'ich paytda

x o'qqa qarama-qarshi yo'nalgan v_0 boshlan-g'ich tezlikka ega bo'lsa, harakat grafigi 17.7-rasm, δ , ϵ dagidek bo'ladi. Bu hol-da nuqtaning boshlang'ich tezligi etarlicha katta bo'lsa, nuqta muvozanat holati-dan bir marta o'tib, so'ngra bu holatga asta-sekin yaqinlasha boradi (17.7- rasm, ϵ).

3. Chegaraviy holdagi aperiodik harakat. Bu holda xarakteristik tenglama-ning ildizlari o'zaro teng; haqiqiy va manfiy qiymatga ega bo'ladi:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n$$

Bu (17.14) tenglamaning umumiy echimini

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2) \quad (17.28)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu holda nuqtaning tezligi

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 t + C_2) + e^{-nt}C_1 \quad (17.29)$$

formula yordamida aniqlanadi.

C_1, C_2 ni topish uchun harakatning boshlang'ich shartlaridan foydalanamiz. Aytaylik, boshlang'ich $t = 0$ paytida nuqta $x = x_0$ holatni egalasin va $\dot{x} = v_0$ tezlikka ega bo'lsin. Bu shartlarni (17.28) va (17.29) ga qo'ysak,

$$x_0 = C_2, v_0 = -nC_2 + C_1 = -nx_0 + C_1$$

bundan

$$C_1 = v_0 + nx_0$$

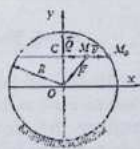
ekanligi topiladi.

C_1, C_2 larning qiymatlarini (17.28) ga qo'yib, nuqtaning harakat qonunini quyidagicha yoza olamiz:

$$x = e^{-nt}[x_0 + (v_0 + nx_0)t]$$

Bu tenglama vositasida aniqlanadigan harakat ham so'nuvchi aperiodik harakat-dan iborat bo'ladi.

17.2-masala. Massasi 2kg bo'lgan M nuqtaga $OM=r$ masofaga proporsional, O nuqtaga yo'nalgan, \vec{F} kuch va nuqtaning tezligiga qarama-qarshi yo'nalgan hamda tezlikning binnchi darajasiga proporsional qarshilik kuchi \vec{Q} ta'sir etganda nuqtaning harakat qonuni aniq-lansin (17.8- rasm). \vec{F} kuchning proporsionallik koef-fisienti $c =$



17.8- rasm.

R
 m.
 ri-
 an
 iki
 .t-
 10
 -
 3
 2)
 3)
 ni
 2)
 ni
 k
 g

$98H/m$, \bar{Q} kuchning proporsionallik koef-fisienti $\gamma = 10H \cdot s/m$.
 $OC=20sm$, $R=40sm$.

Yechish. Qaytaruvchi kuch x ga, qarshilik kuchi \bar{Q} tezlik \dot{x} ga qarama-qarshi yo'nalganligini nazarda tutib, nuqtaning harakat tenglamasini quyida-gicha yozish mumkin:

$$m\ddot{x} = -X + \bar{Q},$$

yoki

$$2\ddot{x} = -98x - 10\dot{x}$$

Bu differensial tenglamani

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $2n = 5$, $k=7$.

Xarakteristik tenglama tuzib, uning ildizlarini aniqlaymiz:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -2,5 \pm 6,144i$$

Xarakteristik tenglama ikkita mavhum qo'shma ildizga ega bo'lgani uchun M nuqtaning harakati tebranma harakatdan iborat bo'ladi hamda (17.16) ga ko'ra nuqtaning harakat qonunini

$$x = ae^{-nt} \sin(kt + \alpha)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Nuqta $t = 0$ da $x_0 = \sqrt{R^2 - OC^2} = 0,346m$, $\dot{x}_0 = 0$ boshlang'ich shartlarda harakatlanishini e'tiborga olsak, (17.18) va (17.19) ga ko'ra

$$a = \sqrt{0,346^2 + \frac{(2,5 \cdot 0,346)^2}{6,144^2}} = 0,49m$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{a} = \frac{0,346}{0,49} = 0,7061, \quad \alpha = 0,25\pi$$

Shunday qilib, M nuqta $x = 0,49e^{-2,5t} \sin(6,144t + 0,25\pi)m$ qonunga ko'ra so'nuvchi tebranma harakatda bo'ladi.

17.4-§. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Moddiy nuqtaga qaytaruvchi kuchdan tashqari vaqtning davriy funktsiyasi-dan iborat bo'lgan uyg'otuvchi kuch ham ta'sir etsa, u majburiy tebranma harakatda bo'ladi. Davriy kuch manbai o'z tabiatiga ko'ra turlicha bo'hshi mumkin. Yoqilg'i yonishi natijasida hosil bo'ladigan gazlarning ichki yonuv dvigateli porsheniga ta'sir kuchi, elektromagnitlarning o'zgaruvchan tortish kuchlari ana shular jumlasidandir.

Aytaylik, moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi \vec{Q} uyg'otuvchi kuchning x o'qdagi proektsiyasi $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ ga teng bo'lsin; bu erda H — uyg'otuvchi kuchning amplitudasi, r — uning doiraviy chastotasi, δ - boshlang'ich faza.

\vec{F} qaytaruvchi va \vec{Q} uyg'otuvchi kuchlar ta'siridagi moddiy nuqtaning ha-rakat differentsial tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta)$$

yoki

$$\ddot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (17.30)$$

Bunda

$$k^2 = \frac{c}{m}, H_0 = \frac{H}{m}$$

(17.30) tenglama moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakat tenglamasi deyiladi. Bu tenglama koeffitsientlari o'zgarmas bo'lgan ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamadan iborat. Uning umumiy echimi $\ddot{x} + k^2x = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy echimi $x_1 = a \sin(kt + \alpha)$ va (17.30) tenglama-ning xususiy mi x_2 ning yig'indisiga teng:

$$x = x_1 + x_2 \quad (17.31)$$

Agar $p \neq k$ bo'lsa, (17.30) tenglamaning xususiy echimini quyidagi ko'ri-nishda olamiz.

$$x_2 = A \sin(pt + \delta) \quad (17.32)$$

Bu tenglamadagi A doimiy kattalikni aniqlash uchun (17.32) dan vaqt bo'yi-cha ikki marta hosila olib, $\ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin(pt + \delta)$, x_2 va \dot{x}_2 larning qiymatini (17.30) tenglamaga qo'yib,

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (17.33)$$

so'ngra $\sin(pt + \delta)$ oldidagi koeffitsientlar o'zaro teng bo'lishidan

$$A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \quad (17.34)$$

munosabatni olamiz.

(17.34) ni (17.32) ga qo'yib, xususiy echim uchun

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, (17.30) tenglamaning umumiy echimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (17.35)$$

Binobarin, moddiy nuqtaga bir vaqtning o'zida qaytaruvchi va uyg'otuvchi kuchlar ta'sir etsa, mazkur nuqta k chastota bilan sodir bo'ladigan erkin tebranma harakat hamda p chastotali uyg'otuvchi kuch bilan sodir bo'ladigan majburiy tebranma harakatlardan tashkil topgan murakkab harakatda ishtirok etadi.

(17.35) dagi a va α doimiylar harakatning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi. Bu tenglamadagi nuqtaning majburiy tebranma harakatini ifodalovchi oxirgi hadda integrallash natijasida hosil bo'ladigan doimiylar qatnashmaydi. Binobarin, majburiy tebranma harakat, nuqta harakatining boshlang'ich shartlariga bog'liq bo'lmaydi.

Nuqtaning

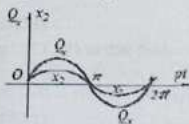
$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (17.36)$$

qonun asosida sodir bo'ladigan majburiy tebranma harakatini batafsil tekshiramiz.

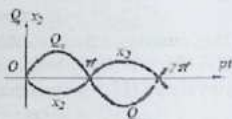
Majburiy tebranma harakat amplitudasi

$$A_1 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} \quad (17.37)$$

tenglikdan aniqlanadi.



17.9-rasm.



17.10-rasm.

Majburiy tebranma harakat tenglamasini uning amplitudasi orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$k > p \text{ bo'lsa, } x_2 = A_1 \sin(pt + \delta)$$

$$k < p \text{ bo'lsa, } x_2 = -A_1 \sin(pt + \delta) = A_1 \sin(pt + \delta - \pi)$$

Oxirgi ikkita tenglikdan ko'ramizki, agar $k > p$ bo'lsa, majburiy tebranma harakat fazasi, $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ uyg'otuvchi kuch fazasi bilan ustma-ust tushadi (17.9-rasm); agar $k < p$ bo'lsa, majburiy

tebranma harakat va uyg'otuvchi kuch qa-rama-qarshi fazaga ega bo'ladi, ya'ni majburiy tebranma harakat fazasi uyg'otuvchi kuch fazasidan π ga orqada qoladi (17.10-rasm).

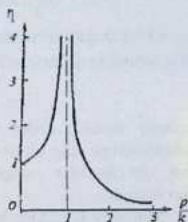
Majburiy tebranma harakat amplitudasini chastotalar nisbati orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H_0}{k^2 |1 - \frac{p^2}{k^2}|} = \frac{x_m}{|1 - \frac{p^2}{k^2}|} \quad (17.38)$$

bunda $x_m = \frac{H_0}{k^2}$ bilan nuqtaga uyg'otuvchi kuchning maksimal qiymatiga teng kuch ta'sir etganda uning muvozanat holatidan statik og'ishini ifodalovchi kattahk belgilangan. Agar $\frac{A}{x_m}$ nisbatni η orqali belgilasak,

$$\eta = \frac{A}{x_m} = \frac{1}{|1 - \frac{p^2}{k^2}|} \quad (17.39)$$

η kattalik *dinamiklik koeffitsienti* deyiladi; bu koeffitsient majburiy tebranma harakat amplitudasi statik og'ishidan necha marta ortiq bo'lishini ifodalaydi. 17.11- rasmida ifodalangan (17.39) ifodaning grafigidan ko'ramizki, $\frac{p}{k} \rightarrow 1$ da dinamiklik koeffitsienti juda katta qiymatga erishadi.



17.11-rasm.

17.5-§. Nuqtaning teplili tebranishlari

(17.30) tenglamaning umumiy echimini yana quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (17.40)$$

C_1, C_2 integrallash doimiylarini aniqlash uchun (17.40) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{pH_0}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta) \quad (17.41)$$

Aytaylik, harakatning boshlang'ich shartlari quyidagicha bo'lsin:

$$t = 0 \text{ da } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad (17.42)$$

(17.42) ni (17.40) va (17.41) ga qo'yib C_1, C_2 ni aniqlaymiz:

$$C_1 = x_0 - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \delta$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \cdot \frac{H_0}{k^2 - p^2} \cos \delta$$

C_1, C_2 ning bu qiymatlarini (17.40) ga qo'yib, tenglamaning (17.42) boshlan-g'ich shartlardagi umumiy echimini olamiz:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{p}{k} \cdot \cos \delta \cdot \sin kt) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (17.43)$$

(17.43) dan ko'ramizki, $x_0=0, \dot{x}_0=0$ boshlang'ich shartlarda ham nuqtaning uyg'otuvchi kuch ta'sirida

$$-\frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{p}{k} \cdot \cos \delta \cdot \sin kt)$$

qonun asosida sodir bo'ladigan tebranishlari erkin tebranishlar chastotasiga teng chastota bilan tebranma harakatda bo'ladi hamda bu tebranishlar amplitudasi boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi.

Majburiy tebranma harakat chastotasi p erkin tebranish chastotasi k bilan deyarli ustma-ust tushganda, bir xil amplitudali va qarama-qarshi fazali ikkita bir-biriga yaqin chastotali harakatlarni qo'shish natijasida nuqtaning tepkili tebranish (bienie) deb ataladigan harakati sodir bo'ladi.

Aytaylik, $\frac{p}{k} \approx 1$ lekin $(k^2 - p^2 \neq 0)$ bo'lsin, u holda $x_0=0, \dot{x}_0=0$ boshlan-g'ich shartlarda (17.43) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$x \approx \frac{H_0}{k^2 - p^2} [\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)]$$

yoki $\frac{p+k}{2} \approx p$ deb qarab,

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

formulani qo'llab, umumiy echim uchun

$$x = \frac{2H_0}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right) \cos(pt + \delta) \quad (17.44)$$

ifodani olamiz.

Agar

$$A(t) = \frac{2H_0}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right) \quad (17.45)$$

belgilash kiritsak, (17.44) ni

$$x = A(t) \cos(pt + \delta) \quad (17.46)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunday harakat grafigi 17.12-rasmda tasvirlangan.

(17.46) dan ko'ramizki, tepkili tebranishni chastotasi p , davri $\tau = \frac{2\pi}{p}$ ga teng hamda amplitudasi vaqtga bog'liq (17.45) tenglik

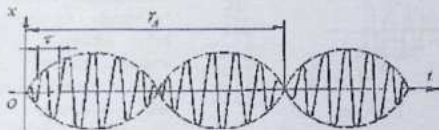
bilan ifodalanadigan davriy qo'nun asosida o'zgaradigan tebranma harakattan iborat deb qarash mumkin.

Bu holda amplitudaning o'zgarish davri

$$T_A = \frac{2\pi}{p-k} = \frac{4\pi}{p-k}$$

formula bilan ifodalanadi.

$p \approx k$ bo'lgani uchun amplitudaning o'zgarish davri $\tau = \frac{2\pi}{p}$ ga nisbatan ancha katta bo'ladi.



7.12-rasm.

f
R₂

im,
ari-
jan
hki
hki

qta
rib

s-
zg

(2)

(3)

mi
f₂
chi
hk
ng

17.6- §. Rezonans hodisasi

(17.33) dan ko'ramizki, $p \approx k$ bo'lganda (17.32) ko'rinishdagi xususiy echim mavjud bo'lmaydi. Bu holda xususiy echimni quyidagicha tanlab olamiz:

$$x_2^* = \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin pt - \sin kt)$$

Bu echimni (17.35) tenglik bilan ifodalanadigan umumiy echimdan a , α va δ kattaliklar

$$a = -\frac{H_0}{k^2 - p^2}, \alpha = 0, \delta = 0$$

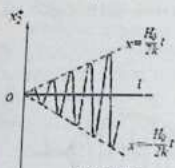
qiymatlarni qabul qilgan holda keltirib chiqarish mumkin. Agar $p = k$ bo'lsa, mazkur xususiy echim $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslikdan iborat bo'ladi. Bu aniq-maslikni yo'qotish uchun Lopital qoidasidan foydalanamiz:

$$x_2^* = H_0 \left[\frac{\frac{d}{dp} (\sin pt - \sin kt)}{\frac{d}{dp} (k^2 - p^2)} \right]_{p=k} = -\frac{H_0}{2k} \cos kt \quad (17.47)$$

Shunday qilib, $p = k$ holida (17.30) tenglamaning umumiy echimini

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{H_0}{2k} \cos kt \quad (17.48)$$

ko'rinishda yozish mumkin.



17.13-RASH.

17.14-RASH.



17.13-rasmda x_2^*

funktsiyaning grafigi tasvirlangan bo'lib, $p = k$ bo'lganda vaqtning o'tishi bilan tebranish amplitudasi vaqtning chiziqli funktsiyasi sifatida cheksiz orta boradi. Bu hodisaga *rezonans* deyiladi.

Rezonans hodisasini e'tiborga olmaslik natijasida

ba'zida insho-otlar to'satdan buzilib ketishi mumkin. Masalan, osma

ko'prik ustidan soldatlar bir xil qadam tashlab o't-ganda askar qadamlarining chasto-tasi ko'prikning tebranish chastotasi bilan ustma-ust tushganda rezonans hodisasi ro'y beradi va natijada ko'prik buzilib ketishi mumkin. 1850 yilda Anjer osma ko'prigi ustidan 500 kishilik franstuz piyo-da askarlari bataloni bir me'yorda qadam tashlab o'tib borayotganda bu ko'prik buzilib ketgan va natijada 226 kishi halok bo'lgan.

Akustika va radiotexnika hamda turli inshootlarning loyihasini dinamik hisob-lashda rezonans hodisasi alohida ahamiyatga ega.

17.3- masala. Bikirligi $c=19,6H/m$ bo'lgan prujinaga massasi 100 g bo'lgan magnit sterjeni osilgan. Magnitning pastki uchi $i=20\sin 8\pi t$ A qonun bilan o'zga-ruvchi tok oqadigan g'altakdan o'tadi. $t=0$ paytdan boshlab sterjenni solenoidga tortuvchi tok o'ta boshlaydi; shu paytga qadar magnit sterjeni prujinada qo'zg'al-may osilib turgan (17.14- rasm). Magnit bilan g'altak orasidagi o'zaro ta'sir kuchi $F=0,016\pi H$ Magnit sterjeni cho'zilmagan prujinaga osilib, boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuborilganda u qanday qonun bo'yicha harakat qilishi aniqlansin.

Yechish. Magnit sterjeni to'g'ri chiziqli harakatda bo'ladi. Unga $P=mg$ og'irlik kuchi; $F_1=cx=19,6x$ elastiklik kuchi; $F=0,016\pi i=0,320\pi \sin 8\pi t$ — mag-nit sterjeni bilan g'altak orasidagi uyg'otuvchi kuch ta'sir etadi.

Koordinatalar boshini magnit sterjenining statik muvozanat holatida olib, ha-rakat differentsial tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$m\ddot{x} = -cx + 0,320\pi \sin 8\pi t$$

yoki

$$\ddot{x} + k^2x = H_0 \sin pt \quad (1)$$

Bunda $k^2 = \frac{c}{m} = 196, H_0 = \frac{H}{m} = \frac{0,320\pi}{0,1} = 10,05H/\omega, p = 8\pi, p > k$ bo'lgani

uchun rezonans hodisasi ro'y bermaydi.

(1) tenglamaning umumiy echimini $x = x_1 + x_2$ ko'rinishda izlay-miz. Bunda

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (2)$$

(1) tenglamaning xususiy echimini

$$x_2 = A \sin pt \quad (3)$$

ko'rinishda olamiz. $A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} = -0,023$. Demak, magnit sterjenining majburiy tebranishi

$$x_2 = -0,023 \sin 8\pi t = 0,023 \sin(8\pi t - \pi)$$

qonun asosida sodir bo'ladi. Bu tenglikdan ko'ramizki, majburiy tebranma harakat fazasi uyg'otuvchi kuch fazasiga qarama-qarshi bo'ladi.

Shunday qilib, (1) tenglamaning umumiy echimi uchun

$$x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 0,023 \sin 8\pi t \quad (4)$$

ifodani olamiz.

C_1, C_2 integrallash doimiylarini aniqlash uchun (4) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\dot{x} = -14C_1 \sin 14t + 14C_2 \cos 14t - 0,578 \sin 8\pi t \quad (5)$$

Masalaning shartiga ko'ra boshlang'ich $t = 0$ paytda magnit sterjeni

$$x_0 = -\lambda_{st} = -\frac{mg}{c} = -0,05m$$

holatni egallaydi va $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$. Bu boshlang'ich shartlarni (4) va (5) ga qo'yib, C_1, C_2 ni aniqlaymiz:

$$C_1 = -0,05, C_2 = 0,0413$$

Shunday qilib, magnit sterjeni harakat qonuni

$$x = -0,05 \cos 14t + 0,0413 \sin 14t - 0,023 \sin 8\pi t (m)$$

bo'ladi.

Moddiy nuqta tebranma harakatiga doir namunaviy masala echimi va hisob-grafik ishlari variantlari 3-ilovaning 2-topshirig'ida keltirilgan.

Nazorat savollari:

1. Moddiy nuqta tebranma harakati deganda nimani tushunasiz.
2. Erkin tebranma harakatga misollar.
3. Bir nechta elastik jismlarga ekvivalent elastik jism bikrligi qanday topiladi.
4. So'nuvshi tebranma harakatga misollar keltiring.
5. So'nuvshi tebranma harakat differentsial tenglamasi yozing.
6. Majburiy tebranma harakatga misollar keltiring.
7. Majburiy tebranma harakat differentsial tenglamasini yozing.
8. Majburiy tebranma harakatga rezonans.

18-BOB. BOG'LANISHDAGI MODDIY NUQTANING HARAKATI

Tayanch so'zlar: bog'lanishdagi nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi, qo'zg'almas silliq sirt ustidagi nuqtaning harakati, Lagranjning birinchi xil tenglamalari, silliq egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning harakati

18.1-§. Bog'lanishdagi nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi

Agar nuqtaning harakati bog'lanishlar bilan cheklangan bo'lsa, bunday nuqta *bog'lanishdagi nuqta* deyiladi.

Statika bo'limida ko'rganimizdek, jismlar sirt, ip, zanjir, sterjen yoki sharnirlar vositasida o'zaro bog'langan bo'lishi mumkin. Ammo bog'lanishlar qanday predmetlar vositasida amalga oshirilishidan qat'i nazar bog'lanishlarni analitik usulda ifodalash mumkin.

Bu bobda aktiv kuchlar ta'siridagi nuqtaning qo'zg'almas sirt ustidagi yoki berilgan egri chiziq bo'ylab harakati o'rganiladi. Mazkur sirt yoki egri chiziqning tenglamasi *bog'lanish tenglamasi* deyiladi.

Bog'lanishdagi nuqtaning harakatini o'rganishda statika bo'limida ko'rilgan bog'lanishdan bo'shatish prinsipidan foydalaniladi. Buning uchun bog'lanishning M nuqtaga ta'sirini bog'lanish reaksiya kuchi \vec{R} bilan almashtirib, mazkur nuqtani aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \vec{F} va bog'lanish reaksiya kuchi \vec{R} ta'siridagi «erkin nuqta» deb qaraymiz. U holda Nyutonning ikkinchi qonuni-ga ko'ra bog'lanishdagi nuqta dinamikasining asosiy qonuni

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \quad (18.1)$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar moddiy nuqta harakatlanadigan sirt yoki egri chiziq ideal silliq bo'lmasa, u holda bog'lanish reaksiya kuchi \vec{R} ni normal reaksiya kuchi \vec{N} va dinamik ishqalanish kuchi \vec{F}^{sh} dan tashkil topgan deb qarash mumkin. Shu sababli ideal silliq bo'lmagan sirt yoki chiziq bo'ylab harakatlanayotgan nuqta uchun (18.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{\text{sh}} \quad (18.2)$$

Dinamik ishqalanish kuchi \vec{F}^{im} nuqtaning tezlik vektori \vec{v} ga qarama-qarshi yo'naladi.

Agar moddiy nuqta ideal silliq sirt yoki egri chiziq bo'yicha harakatlansa, di-

namik ishqalanish kuchi bo'lmaydi va bunday nuqta uchun

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \quad (18.3)$$

tenglama o'rinli bo'ladi.

(18.2) yoki (18.3) tenglamalar vositasida nuqtaning massasi, unga ta'sir etuvchi aktiv kuch va nuqta harakatlanadigan sirt yoki egri chiziqning tenglamasi berilganda bog'lanishdagi nuqta dinamikasining asosiy masalalarini echish mumkin.

18.2-§. Qo'zg'almas silliq sirt ustidagi nuqtaning harakati. Lagranjning birinchi xil tenglamalari

Agar M nuqta biror qo'zg'almas silliq sirt ustida harakatlansa, u holda M nuqtaning koordinatalari

$$f(x, y, z) = 0 \quad (18.4)$$

sirtning tenglamasini qanoatlantirishi kerak.

(18.3) ni Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalaymiz:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z. \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

f funkstiyaning gradienti sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgani uchun

$$\vec{N} \parallel \text{grad} f$$

bo'ladi. Bunda

$$\text{grad} f = \frac{df}{dx} \vec{i} + \frac{df}{dy} \vec{j} + \frac{df}{dz} \vec{k}$$

bo'lib, $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ xususiy hosilalar $\text{grad} f$ ning koordinata o'qlandagi proekstiyalarini ifodalaydi. Shu sababli \vec{N} va $\text{grad} f$ ning kollinearlik shartini

$$\vec{N} = \lambda \text{grad} f \quad \text{yoki} \quad N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k} = \lambda \left(\frac{df}{dx} \vec{i} + \frac{df}{dy} \vec{j} + \frac{df}{dz} \vec{k} \right) \quad (18.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda λ - proporsionallik koeffitsienti bo'lib, bog'lanish ko'paytuvchisi deyiladi.

(18.6) dan, N_x, N_y, N_z larni aniqlab, (18.5) ga qo'ysak,

$$m\ddot{x} = X + \lambda \frac{df}{dx}, m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{df}{dy}, m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{df}{dz} \quad (18.7)$$

tenglamalarni olamiz. Bu tenglamalar qo'zg'almas sirt ustida harakatdagi nuqta uchun Lagranjning birinchi xil tenglamalarini ifodalaydi.

(18.7) va (18.4) dan to'rtta x, y, z, λ topiladi.

(18.6) ga asosan reaksiya kuchining normaldagi proektsiyasi

$$N_n = \pm \lambda |\text{grad}f| = \pm \lambda \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2} \quad (18.8)$$

formuladan aniqlanadi.

18.3- §. Silliq egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning harakat dif-ferenstial tenglamalari

M nuqta $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan qo'zg'almas bo'lgan silliq egri chiziqda harakatlansa, bu chiziqni ikkita

$$f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \quad (18.9)$$

sirtlarning kesishgan chizig'i deb qarash mumkin. Bu sirtlarni ideal silliq deb qa-rasak, u holda moddiy nuqtaga ta'sirini \vec{N}_1, \vec{N}_2 normal reaksiya kuchlari bilan al-mashtirish mumkin. Silliq egri chiziqning normal reaksiya kuchi \vec{N}_1, \vec{N}_2 larning yig'indisiga teng bo'ladi. (18.3) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$m\ddot{\vec{a}} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \quad (18.10)$$

(18.10) ni koordinata o'qlariga proektsiyalab, nuqtaning mazkur o'qlarga nis-batan harakat differensial tenglamalarini olamiz:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_{1x} + N_{2x}, \\ m\ddot{y} &= Y + N_{1y} + N_{2y}, \\ m\ddot{z} &= Z + N_{1z} + N_{2z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

\vec{N}_1, \vec{N}_2 normal reaksiya kuchlari mos ravishda $\text{grad} f_1$ va $\text{grad} f_2$ ga kollinear bo'lgani tufayli

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_1 &= \lambda_1 \text{grad}f_1 = \lambda_1 \left(\frac{df_1}{dx} \vec{i} + \frac{df_1}{dy} \vec{j} + \frac{df_1}{dz} \vec{k} \right) \\ \dot{N}_2 &= \lambda_2 \text{grad}f_2 = \lambda_2 \left(\frac{df_2}{dx} \vec{i} + \frac{df_2}{dy} \vec{j} + \frac{df_2}{dz} \vec{k} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

(18.12) ni nazarda tutib, (18.11) ni

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \left(\frac{df_1}{dx} \right) + \lambda_2 \left(\frac{df_2}{dx} \right) \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \left(\frac{df_1}{dy} \right) + \lambda_2 \left(\frac{df_2}{dy} \right) \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \left(\frac{df_1}{dz} \right) + \lambda_2 \left(\frac{df_2}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(18.13) tenglamalar qo'zg'almas silliq egri chiziq bo'yicha harakatlanuvchi nuqta uchun Lagranjning birinchi xil tenglamalarini ifodalaydi.

(18.13), (18.9) dan noma'lumlar x , y , z , λ_1 va λ_2 lar topiladi.

(18.12) ga asosan bog'lanish reaksiya kuchlarining n_1 va n_2 normallardagi proektsiyalari

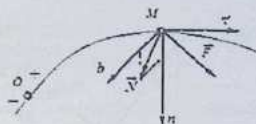
$$\left. \begin{aligned} N_{1n} &= \pm \lambda_1 |\text{grad}f_1| = \pm \lambda_1 \sqrt{\left(\frac{df_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy} \right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz} \right)^2} \\ N_{2n} &= \pm \lambda_2 |\text{grad}f_2| = \pm \lambda_2 \sqrt{\left(\frac{df_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{df_2}{dy} \right)^2 + \left(\frac{df_2}{dz} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

18.4- §. Berilgan egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy koordinata o'qlaridagi ifodasi

Nuqta ko'zg'almas egri chiziq bo'ylab harakatlanganda uning harakatini ta-biiy koordinata o'qlariga nisbatan o'rganish qulay bo'ladi. M nuqta aktiv kuch \vec{F} ta'sirida qo'zg'almas silliq, egri chiziq bo'ylab harakatlansin. Bu egri chiziq-da biror O nuqtani sanoq boshi sifatida olamiz va yoy koordinatasining musbat va manfiy yo'nalishini ko'rsatamiz. M nuqtada urinma \vec{r} , bosh

normal n va binormal b lardan tashkil topgan tabiiy koordinata o'qlarini (8.4-§) o'tkazamiz (18.1-rasm) va M nuqtaning egri chiziq bo'ylab harakatini ifodalovchi (18.3) tenglamani tabiiy koordinata o'qlariga proektsiyalaymiz:



18.1-rasm.

$$m\dot{a}_t = F_t, m\dot{a}_n = F_n + N_n, m\dot{a}_b = F_b + N_b,$$

yoki tezlanishning $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, $a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{s}$, $a_b = 0$ proektsiyalarini e'tiborga ol-sak,

$$m\dot{s} = F_t, m \frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n, 0 = F_b + N_b \quad (18.15)$$

(18.15) tenglamalar *qo'zg'almas silliq egri chiziq bo'yicha harakatlanuvchi nuqtaning tabiiy koordinata o'qlaridagi harakat differentsial tenglamalari* deyiladi.

Bu tenglamalarning (18.11) tenglama-larga nisbatan afzalligi shundan iboratki, (18.15) tenglamalar yordamida nuqta ha-rakat qonunini va bog'lanish reaksiya kuchlarini alohida- alohida aniqlash mum-kin.

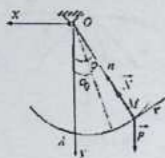
Aytaylik, moddiy nuqta bir tekislikda yotuvchi qo'zg'almas silliq, egri chiziq bo'ylab harakatlansin. U holda (18.15) ni

$$m\dot{s} = F_t, m \frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \quad (18.16)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

18.5- §. Matematik tebrangich

Vertikal tekislikda joylashgan silliq aylana bo'ylab og'irlik kuchi ta'sirida ha-rakatlanuvchi moddiy nuqta *matematik tebrangich* deyiladi. Masalan, bir uchi mahkamlangan cho'zilmaydigan va og'irligi hisobga olinmaydigan ipga osilgan M moddiy nuqtani matematik tebrangich deb qarash mumkin. M nuqtaning holatini ipning vertikal bilan tashkil qilgan ϑ burchagi bilan aniqlaymiz.



18.2-rasm.

Aytaylik, nuqta massasi m , ipning uzunligi l bo'lsin. M nuqtaga uning og'irlik kuchi \vec{P} va ipning reaksiyasi \vec{N} ta'sir etadi (18.2- rasm).

M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzish uchun

$$v_s = \dot{s} = l\dot{\varphi}, \rho = l$$

$$F_r = P_r = -mg \sin \varphi, F_n = P_n = -mg \cos \varphi$$

bo'lishini e'tiborga olamiz. U holda (18.15) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi,$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi + N_n$$

Bu tenglamalarni

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (18.17)$$

$$N_n = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi \quad (18.18)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. (18.17) tenglama vositasida matematik tebran-gichning harakat qonunini, (18.18) yordamida ipning reaksiya kuchini aniqlash mumkin.

(18.18) dan ko'ramizki, ipning reaksiyasini aniqlash uchun $\dot{\varphi}^2$ kattalikni φ bur-chakning funktsiyasi sifatida ifodalash kerak. Buning uchun

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$$

munosabat o'rinli bo'lishini nazarda tutib, (18.17) ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{1}{2} l d\dot{\varphi}^2 = -g \sin \varphi d\varphi$$

Boshlang'ich shartlar $t=0$ da $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, integrallaymiz.

$$\frac{1}{2} l \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\dot{\varphi}^2 = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi$$

yoki

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0) + l\dot{\varphi}_0^2 \quad (18.19)$$

(18.19) ni (18.18) ga qo'yib, N_n ni aniqlaymiz:

$$N_n = ml\dot{\varphi}_0^2 + mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$$

Agar nuqtaning boshlang'ich tezligi $v_0 = l\dot{\varphi}_0$, bo'lsa, ipning reaksiyasi

$$N_n = \frac{mv_n^2}{l} + mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_n) \quad (18.20)$$

(18.17) tenglama chiziqsiz differensial tenglama-dan iborat bo'lib uning echimi-ni elementar funktsiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi. Tebrangichning $\sin \varphi \approx \varphi$ sha-rtni qanoatlantiruvchi kichik tebranma harakatini tekshiramiz. Bu holda tebrangich-ning harakat differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (18.21)$$

Bu erkin tebranma harakatdagi nuqtaning harakat differensial tenglamasiga o'xshashdir. (18.21) ning umumiy echimi quyidagicha ifodalanadi:

$$\varphi = a \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right) \quad (18.22)$$

Shunday qilib, matematik tebrangichning kichik tebranishlari garmonik tebranma harakatdan iborat bo'ladi. Tebrangichning kichik tebranishlar davri

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18.23)$$

formuladan aniqlanadi. (18.23) dan ko'ramizki, tebrangichning kichik tebranishlar davri boshlang'ich og'ish burchagi φ_n ga bog'liq bo'lmaydi.

Nazorat savollari:

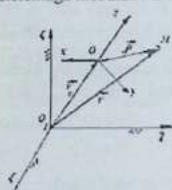
1. Bog'lanishdagi nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi
2. Qo'zg'almas silliq sirt ustidagi nuqtaning harakati.
3. Lagranjning birinchi xil tenglamalari
4. Silliq egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning harakati
5. Matematik tebrangich.

19-BOB. MODDIY NUQTANING NISBIY HARAKAT DINAMIKASI

Tayanch soʻzlari: nisbiy harakat differensial tenglamalari, koʻchirma va Koriolis inerstiya kuchlari, klassik mexanika, nisbiylik prinsipi, nuqtaning nisbiy muvozanati, vaznsizlik.

19.1-§. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat differensial tenglamalari. Koʻchirma va Koriolis inerstiya kuchlari

Yuqoridagi boblarda moddiy nuqtaning harakati inerstial sistemaga nisbatan oʻrganildi. Lekin koʻpincha nuqtaning harakatini ixtiyoriy ravishda harakatlanuvchi obʻekt bilan bogʻlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirishga toʻgʻri keladi. Masalan, nuqtaning harakatini tezlanuvchan harakatdagi raketa, samolyot yoki kosmik kema bilan bogʻlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan oʻrganishga ehtiyoj tugʻiladi. Nuqtaning inerstial boʻlmagan bunday sistemaga nisbatan harakati uning nisbiy harakatini ifodalaydi.



19.1-TASM.

Bu bobda massasi m boʻlgan va berilgan kuchlar taʼsiridagi M nuqtaning qoʻzgʻalmas $O_1\bar{\xi}\eta\zeta$ inerstial sistemaga nisbatan maʼlum qonun asosida harakatlanuvchi qoʻzgʻaluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini tekshiramiz (19.1-rasm). Kelgusida $O_1\bar{\xi}\eta\zeta$ inerstial sistemani qoʻzgʻalmas deb qaraymiz.

Bogʻlanishdagi nuqta dinamikasining qoʻzgʻalmas koordinatalar sistemasiga nisbatan asosiy tenglamasini

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} \quad (19.1)$$

koʻrinishda yozamiz. Bunda \bar{F} — aktiv kuchlar-ning teng taʼsir etuvchisi, \bar{R} — bogʻlanish re-akstiya kuchi.

Koriolis teoremasidan (13.3- §) foydalanib, nuqtaning absolyut tezlanishini uning nisbiy, koʻchirma va Koriolis tezlanishlari orqali ifodalaymiz:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_c + \bar{a}_k \quad (19.2)$$

(19.2) ni (19.1) ga qoʻysak,

$$m\bar{a}_r + m\bar{a}_c + m\bar{a}_k = \bar{F} + \bar{R}$$

yoki \vec{a}_r, \vec{a}_t qatnashgan hadlarni o'ng tomonga o'tkazsak,

$$m\vec{a}_r = (-m\vec{a}_r) + (-m\vec{a}_t) + \vec{F} + \vec{R} \quad (19.3)$$

tenglama o'rinli bo'ladi.

(19.3) da quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\vec{\phi}_r = -m\vec{a}_r \quad (19.4)$$

$$\vec{\phi}_t = -m\vec{a}_t \quad (19.5)$$

Miqdor jihatdan nuqtaning massasi bilan uning ko'chirma tezlanishi kupaytmasiga teng va ko'chir-ma tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan $\vec{\phi}_r$ vektori *ko'chirma inerstiya kuchi* deyiladi.

Miqdor jihatdan nuqtaning massasi bilan uning Koriolis tezlanishi ko'paytmasiga teng, yo'nalishi Koriolis tezlanishiga qarama-qarshi bo'lgan $\vec{\phi}_t$ vektori *Koriolis inerstiya kuchi* deyiladi.

Natijada (19.3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$m\vec{a}_r = \vec{\phi}_r + \vec{\phi}_t + \vec{F} + \vec{R} \quad (19.6)$$

(19.6) tenglama nuqtaning *inerstial bo'lmagan sistemaga nisbatan harakat differentsial tenglamasini* yoki *nisbiy harakat differentsial tenglamasini* ifodalaydi.

Demak, nisbiy harakat differentsial tenglamasi (19.6) ni tuzish uchun nuq-taga ko'yilgan aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \vec{F} va bog'lanish reaktsiya kuchlari \vec{R} qatoriga ko'chirma inerstiya kuchi $\vec{\phi}_r$ va Koriolis inerstiya kuchi $\vec{\phi}_t$ larni qo'shish kerak.

Ko'chirma va Koriolis inerstiya kuchlarini hisoblashda kinematika bo'limi-da chiqarilgan ko'chirma tezlanishni ifodalovchi (13.22)

$$\vec{a}_r = \vec{a}_0 + \vec{v}_r \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (19.7)$$

hamda Koriolis tezlanishi aniqlanadigan (13.24)

$$\vec{a}_t = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_r] \quad (19.8)$$

formulalardan foydalanamiz.

(19.4), (19.5), (19.7) va (19.8) formulalardan ko'ramizki, ko'chirma va Koriolis inerstiya kuchlari nuqtaning boshqa ob'ektlar bilan o'zaro ta'siriga emas, balki nuqtaning massasi hamda nisbiy va ko'chirma harakatigagina bog'hq bo'ladi. (19.6) ni ko'zga'aluvchi koordinata o'qlariga proektsiyalab, *nisbiy harakat differentsial tenglamasini Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasini* olamiz:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \vec{\Phi}_{ex} + \vec{\Phi}_{ex} + F_x + R_x \\ m\ddot{y} &= \vec{\Phi}_{ey} + \vec{\Phi}_{ey} + F_y + R_y \\ m\ddot{z} &= \vec{\Phi}_{ez} + \vec{\Phi}_{ez} + F_z + R_z \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

19.2- §. Klassik mexanikaning nisbiylik prinsipi

Aytaylik, ko'chirma harakat $\vec{v}_0 = const$ o'zgarmas tezlik bilan sodir bo'ladi-gan to'g'ri chiziqli ilgari lama harakatdan iborat bo'lsin, ya'ni $Oxyz$ ko'zg'aluv-chi koordinatalar sistemasi ham inerstial sistemadan iborat bo'lsin. U holda ko'chirma harakat tezlanishi $\vec{a}_i = 0$ bo'ladi, shuningdek, ko'chirma harakat to'g'ri chiziqli ilgari lama harakatdan iborat bo'lgani uchun $\vec{\omega}_i = 0$ va Koriolis tezlanishi $\vec{a}_i = 0$ bo'ladi. Binobarin,

$$\vec{\Phi}_i = \vec{\Phi}_k = 0$$

bo'lib, nisbiy harakat differensial tenglamasi (19.6) ni

$$m\vec{a}_i = \vec{F} + \vec{R} \quad (19.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda nisbiy harakat differensial tenglamasi bilan absolyut harakat differensial tenglamasi (19.1) bir xil ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar M nuqta $O_1\zeta_1\eta_1\zeta_1$ va $Oxyz$ inerstial sistemalarga nisbatan harakatlansa hamda ularning ikkinchisi birinchisiga nisbatan \vec{v}_0 tezlik bilan to'g'ri chiziqli ilgari lama harakatda bo'lsa, u holda nuqtaning mazkur sistemalarga nisbatan radi-us-vektori quyidagi munosabat bilan bog'lanadi:

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{v}_0 t \quad (19.11)$$

Bunda ikkala sistema uchun vaqt bir xilda o'tadi, ya'ni

$$t_1 = t \quad (19.12)$$

deb qaraymiz. (19.11) va (19.12) formulalar *Galiley almashtirishi* deyiladi. Biror inerstial sistemadan boshqa inerstial sistemaga o'tishda dinamika qonunlari bu almashtirishga nisbatan invariant bo'ladi. Bu natija *klassik mexanikaning nisbiylik prinsipi*, deb ataladi. Bu prinsipga ko'ra, barcha inerstial sistemalarga nisbatan moddiy nuqta bir xil qonun asosida harakatlanadi.

19.3-§. Nuqtaning nisbiy muvozanati. Vaznsizlik

Agar moddiy nuqta qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan tinch holatda bo'lsa, u holda uning nisbiy tezligi, nisbiy tezlanishi hamda Kori-olis tezlanishi nolga teng bo'ladi. Shu sababli (19.6) dan quyidagi ko'rinishdagi nisbiy muvozanat tenglamasini olamiz:

$$\vec{\phi}_i + \vec{F} + \vec{R} = 0 \quad (19.13)$$

Bu tenglamadan ko'ramizki, nuqta nisbiy muvozanatda bo'lsa muqtaga qo'yilgan aktiv va reakstiya kuchlari ko'chirma inerstiya kuchi bilan muvozanatlashadi.

Olingan natijadan foydalanib og'irlik kuchi maydonida vertikal bo'ylab tezlanuvchan (yoki sekinlanuvchan) harakatlanuvchi jism vaznining ortishi yoki kamayishini tushuntirish mumkin.

Jismning uni tutib turuvchi gorizontal tayanch tekishgiga ko'rsatadigan bosim kuchiga uning vazni deyiladi.

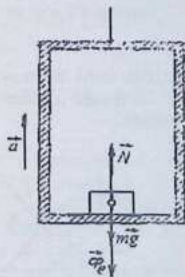
Masalan, yukning tarozi pallasiga ko'rsatadigan bosimi yukning vaznini ifodalaydi.

Agar jism qo'yilgan taglik vertikal bo'yicha tezlanuvchan harakatda bo'lsa, u holda mazkur jismga ta'sir etuvchi Yer tortish kuchi (og'irlik kuchi) $\vec{P} = m\vec{g}$ va jismning vazni bir-biridan farq qilishini quyidagi misol yordamida izohlash mumkin. Agar lift kabinasi vertikal bo'yicha \vec{a} tezlanish bilan yuqoriga qarab harakatlansa, bu tezlanish ko'chirma tezlanishdan iborat bo'lib, ko'chirma inerstiya kuchi $\vec{\phi}_i = -m\vec{a}$ mavjud bo'ladi. Lift kabinasi polidagi jismga vertikal past-ga yo'nalgan uning og'irlik kuchi hamda kabina polining reakstiya kuchi \vec{N} ta'sir etadi (19.2-rasm). (19.13) ga asosan bunday jismning muvozanat tenglamasi

$$\vec{\phi}_i + m\vec{g} + \vec{N} = 0 \quad (19.14)$$

ko'rinishda yoziladi. (19.14) ni lift harakatlanayotgan yo'nalishga proektsiya-lasak,

$$-mg + N - ma = 0$$



19.2-rasm.

munosabat o'rinli bo'ladi. Bundan

$$N = m(g + a)$$

ifodani olamiz. Binobarin, ko'rilayotgan holda yukning vazni ortadi. Bu hodisa *ortiqcha yuklanish* deb ataladi.

Start holatidan vertikal yuqoriga tezlanuvchan harakatlanayotgan kosmik ke-ma ichidagi passajirlar ortiqcha yuklanishga duchor bo'ladi.

Agar \vec{a} tezlanish vertikal pastga yo'nalsa, u holda ko'chirma inerstiya kuchi $\vec{\Phi}$, yo'nalishini o'zgartiradi hamda

$$N = m(g - a)$$

bo'lib, yukning vazni kamayadi. Xususan, $a = -g$ bo'lsa, *vaznsizlik holatiga* duch kelamiz.

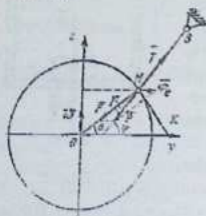
Kosmik kemalarni uchirishda ortiqcha yuklanish va vaznsizlikni hisoblash alohida ahamiyatga ega.

19.4-§. Jismlarning muvozanati va harakatiga yer aylanishining ta'siri

Yerning o'z o'qi atrofida

$$\omega_y = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0,0000729 \text{ s}^{-1}$$

burchak tezlik bilan aylanishi, Er sirtiga yaqin jismning muvozanati va harakatiga qanday ta'sir etishini quyidagi ikki holda ko'rib chiqamiz.



19.3-rasm.

yo'naltiramiz.

1. Yer sirtiga yaqin nuqtaning nisbiy muvozanati. Ipga osilgan va massasi l ga teng M nuqtaning yer sirtiga yaqin tinch holatini tekshiramiz (19.3-rasm).

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi boshini Yerning markazidagi O nuqtada olib, Oz o'qni shimoliy qutbga, Oy o'qni M nuqtaga taalluqli meridianning ekvator bilan kesishgan nuqtasiga, Ox o'qni esa mazkur meridian tekisligiga perpendikulyar

M nuqtaga Yerning markaziga yo'nalgan \vec{F} ($\vec{F} = m\vec{g}_0, \vec{g}_0$ - gravitasion tezlanish) tortish kuchi va ipning taranglik kuchi \vec{T} ta'sir etadi. (19.14) formulaga asosan, M nuqta nisbiy muvozanatda bo'lishi uchun \vec{F} va \vec{T} kuchlar qatoriga ko'-chirma inerstiya kuchi $\vec{\Phi}_c$ ni qo'shish kerak, ya'ni:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}_c = 0 \quad (19.15)$$

Yerning sutkalik aylanish burchak tezligi o'zgarmas bo'lgani tufayli $\vec{\Phi}_c$ kuch faqat aylanish o'qiga perpendikulyar yo'nalgan $\vec{\Phi}_c^*$ normal tashkil etuvchidan (markazdan qochirma inerstiya kuchidan) iborat bo'ladi hamda bu kuchning moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{\Phi}_c^* = m\omega_c^2 R_c = m\omega_c^2 R \cos\theta$$

bunda R_c bilan M nuqtaga mos geografik parallelniig radiusi belgilangan. Natija-da (19.15) ni

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}_c^* = 0 \quad (19.16)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

\vec{T} kuchning miqdorini o'lchash uchun ipni dinamometr bilan almashtirish mumkin. Dinamometr yordamida

$$\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{T} \quad (19.17)$$

nuqta og'irlik kuchining miqdorini aniqlaymiz. Buni nazarda tutib, (19.16) for-muladan quyidagi munosabatni olamiz:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F} + \vec{\Phi}_c^* \quad (19.18)$$

Shunday qilib, *Yer sirtiga yaqin nuqtaning og'irlik kuchi Yerning tortish ku-chi bilan markazdan qochirma inerstiya kuchlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.*

19.3-rasmda geostentrik kenglik θ bilan belgilangan. M nuqta Yerga nisbatan tinch holatda bo'lganda ipning taranglik kuchi \vec{T} yo'nalgan chiziq *haqiqiy vertikal* deb ataladigan yo'nalishni ifodalaydi. Bu yo'nalish bilan ekvator tekisligi orasidagi φ burchak *geografik kenglik* deyiladi.

19.3-rasmda ko'ramizki, haqiqiy vertikal bilan Yer radiusi orasidagi bur-chakni γ bilan belgilasak,

$$\varphi = \theta + \gamma$$

munosabat o'rinni bo'ladi.

(19.16) ni ipga perpendikulyar bo'lgan MK yo'nalishga proekstiyalaymiz:

$$-F \sin \gamma + \Phi_c^* \sin \varphi = 0$$

Bunda $F = mg_{\text{e}}$, $\Phi_r^* = m\omega_r^2 R \cos\theta$ bo'lgani uchun

$$\sin \gamma = \frac{\omega_r^2 R}{g_{\text{e}}} \sin \varphi \cdot \cos \theta$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Yerning burchak tezligi $\omega_r = 0,0000729 \text{ s}^{-1}$, radiusi $R = 6350000 \text{ m}$ va og'irlik kuchining tezlanishi $g_{\text{e}} = 9,81 \text{ m/s}^2$ bo'lishini e'tiborga olsak,

$$\frac{\omega_r^2 R}{g_{\text{e}}} \approx 0,0034$$

binobarin, $\gamma = \varphi - \theta$ burchak juda kichik bo'ladi hamda taqriban

$$\sin \gamma \approx \gamma = \frac{\omega_r^2 R}{2g_{\text{e}}} \sin 2\theta$$

deb yozish mumkin. $\theta = 45^\circ$ bo'lganda γ maksimal qiymatga erishadi.

(19.16) ni ipning yo'nalishi MB ga proektsiyalaymiz:

$$T - F \cos \gamma + \Phi_r^* \cos \varphi = 0$$

bunda $F = mg_{\text{e}}$, $\Phi_r^* = m\omega_r^2 R \cos \theta$ va γ burchak geografik kenglik φ ga nisbatan juda kichik bo'lganda $\cos \varphi \approx \cos \theta$ ekanligini e'tiborga olib, ipning taranglik kuchi T ni aniqlaymiz:

$$T \approx mg_{\text{e}} - m\omega_r^2 R \cos^2 \varphi = m(g_{\text{e}} - \omega_r^2 R \cos^2 \varphi) \quad (19.19)$$

(19.17) ni nazarda tutib, (19.19) dan Yer sirtidagi og'irlik kuchining tezlanishini aniqlaymiz:

$$g = g_{\text{e}} \left(1 - \frac{\omega_r^2 R}{g_{\text{e}}} \cos^2 \varphi\right)$$

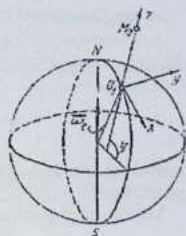
Binobarin, g kattalik nuqtaning geografik kengligi φ ga bog'liq ravishda o'zgaradi.

Quyidagi jadvalda turli geografik kengliklarga mos og'irlik kuchi tezlanishi g ning qiymatlari keltirilgan.

0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
9,780	9,783	9,793	9,806	9,819	9,828	9,832

2. Erkin tushayotgan jismning vertikalidan og'ishi. Havoning qarshiligini hisobga olmay, Yer sirtiga yaqin masofada erkin tushayotgan moddiy nuqtaning harakatiga Yerning o'z o'qi atrofidagi aylanishi qanday ta'sir etishini ko'rib chiqamiz. Buning uchun

ko'zg'aluvchi O_1xyz koordinatalar sistemasini M nuqtaning boshlang'ich holati M_0 yotgan vertikalning Yer sirti bilan kesishgan joyida olamiz (19.4-rasm). O_1z o'qni haqiqiy vertikal bo'yicha yuqoriga, O_1x o'qni meridian tekisligida O_1z ga perpendikulyar ravishda janubga hamda O_1y o'qni sharqqa yo'naltiramiz.



19.4-rasm.

M nuqtaga Yer tortish kuchi $\vec{F} = m\vec{g}_0$, ta'sir etadi. Nuqtaning nisbiy harakat tenglamasini tuzish uchun bu kuchga ko'chirma inerstiya kuchi $\vec{\Phi}_i = \vec{\Phi}_i^e$ va Koriolis inerstiya kuchini qo'shamiz:

$$m\vec{a}_i = \vec{\Phi}_i^e + \vec{F} - 2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_i) \quad (19.20)$$

Yuqorida ko'rganimizdek, Yerning tortish kuchi bilan ko'chirma inerstiya kuchini og'irlik kuchi $\vec{P} = m\vec{g}$ bilan almashtirib, nuqtaning nisbiy harakat tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

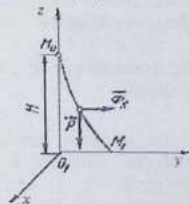
$$m\vec{a}_i = m\vec{g} - 2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_i)$$

yoki

$$\vec{a}_i = \vec{g} - 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_i) \quad (19.21)$$

Birinchi yaqinlashishda Yerning aylanishini e'tiborga olmasak, nuqta vertikal bo'ylab \vec{g} tezlanish bilan harakatlanadi.

Koriolis inerstiya kuchi $\vec{\Phi}_i$ nuqtaning og'irlik kuchi \vec{P} ga nisbatan ancha kichik bo'lgani uchun ikkinchi yaqinlashishda nuqtaning nisbiy tezligi \vec{v}_i ni vertikal bo'yicha pastga yo'nalgan deb qarash mumkin. Yerning o'z o'qi atrofidagi aylanish burchak tezlik vektori $\vec{\omega}_e$ yer aylanish o'qi bo'ylab janubdan shimolga yo'naladi. U holda Koriolis tezlanishi $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_i)$ NOS meridian tekisligiga perpendikulyar ravishda g'arbga, Koriolis inerstiya kuchi esa sharqqa yo'naladi. Shunday qilib, ikkinchi yaqinlashishda nuqta vertikaldan sharqqa og'adi (19.5-rasm). Bu og'ishning miqdorini hisoblaymiz.



19.5-rasm.

ω_x ning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari

$$\omega_x = \omega_s \cos \varphi, \omega_y = 0, \omega_z = \omega_s \sin \varphi$$

tengliklar vositasida aniqlangani sababli

$$\vec{\omega}_s \times \vec{O}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_s \cos \varphi & 0 & \omega_s \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Buni nazarda tutib, (19.21) ni x, y, z qo'zg'aluvchi

koordinata o'qla-riga proekstiyalaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y}\omega_s \sin \varphi \\ \ddot{y} &= -2(\dot{x}\omega_s \sin \varphi + \dot{z}\omega_s \cos \varphi) \\ \ddot{z} &= -g + 2\dot{y}\omega_s \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Nuqta harakatini quyidagi boshlang'ich shartlarda tekshiramiz:

$$t=0 \text{ da } \left. \begin{aligned} x=0, y=0, z=H; \\ \dot{x}=0, \dot{y}=0, \dot{z}=0 \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

(19.22) ni (19.23) boshlang'ich shartlarda integrallaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 2y\omega_s \sin \varphi \\ \dot{y} &= -2(x\omega_s \sin \varphi + z\omega_s \cos \varphi) \\ \dot{z} &= -gt + 2y\omega_s \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Bunda integrallash doimiylari nolga teng bo'lishini isbotlash mumkin.

Yerning burchak tezligi miqdor jihatdan juda kichik bo'lgani uchun birinchi yaqinlashishda (19.24) da qatnashgan hadlarni hisobga olmaymiz. U holda

$$\dot{x}=0, \dot{y}=0, \dot{z}=-gt$$

Bu tenglamalarni (19.23) boshlang'ich shartlarni e'tiborga olib integrallasak,

$$x=0, y=0, z=H-gt^2/2 \quad (19.25)$$

Bu tenglama Yerning o'z o'qi atrofidagi sutkalik aylanishini e'tiborga olmagan holdagi nuqtaning erkin tushish qonunini ifodalaydi. x, y, z larning (19.25) vosita-sida aniqlanadigan qiymatlarini (19.22) ga qo'yamiz

$$\ddot{x}=0, \ddot{y}=2\omega_s gt \cos \varphi, \ddot{z}=-g$$

va hosil bo'lgan tenglamalarni (19.23) boshlang'ich shartlarda integrallab, ikkinchi yaqinlashishda erkin tushuvchi nuqtaning harakat

qonunini aniqlaymiz:

$$x=0, y=\frac{1}{3}\omega_e g t^3 \cos\varphi, z=H-gt^2/2 \quad (19.26)$$

(19.26) dan vaqt t ni yo'qotib, nuqta traektoriyasining tenglamasini aniqlaymiz

$$y^2 = \frac{8\omega_e^2}{9g} (H-z)^3 \cos^2\varphi \quad (19.27)$$

(19.26) dan ko'ramizki, N balandlikdan bosh-lang'ich tezliksiz tushayotgan M nuqta Yerning o'z o'qi atrofida aylanishi natijasida

$$y = \frac{1}{3}\omega_e g t^3 \cos\varphi$$

qonun asosida sharqqa og'adi. Nuqta Yerga tushgan paytdagi uning vertikalidan og'ishi O_1M_1 ni y_1 bilan belgilasak, shu paytda $z=0$ bo'lgani uchun (19.27) dan foydalanib y_1 ni aniqlaymiz:

$$y_1 = \frac{1}{3}\omega_e g \cos\varphi \cdot \left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2}$$

Nazorat savollari

1. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat differensial tenglamalari.
2. Ko'chirma va Koriolis inertsiya kuchlari.
3. Klassik mexanikaning nisbiylik prinsipi.
4. Nuqtaning nisbiy muvozanati.
5. Vaznsizlik.
6. Jismlarning muvozanati va harakatiga yer aylanishi qanday ta'sir qiladi?

20-BOB. MEXANIK SISTEMA DINAMIKASIGA KIRISH

Tayanch soʻzlar. mexanik sistema, mexanik sistemaga taʼsir etuvchi kuchlar, me-xanik sistemaning harakat differensial tenglamasi, sistemaning massalar markazi, massalar markazi koordinatalari, inersiya, inersiya momenti, jismning inersiya momenti, oddiy shakllar inersiya momenti.

20.1-§. Mexanik sistema. Mexanik sistema nuqtalariga taʼsir etuvchi kuchlarni klassifikatsiya qilish

Mexanik sistema (yoki qisqacha *sistema*) deb shunday moddiy nuqtalar toʻpla-miga aytiladiki, uning har bir nuqtasining harakati va holati sistema tarkibiga ki-ruvchi boshqa nuqtalarning harakati va holatiga bogʻliq boʻladi.

Mexanik sistemaning qanday tanlab olinishi bizning ixtiyorimizga bogʻliq; ma-salan, avtomobilni mexanik sistema deb olish mumkin yoki uning motorini, tor-mozlash sistemasini (yoxud ularning ayrim zvenolarini) alohida-alohida mexanik sistema deb qarash mumkin. Shuningdek, istalgan jismni zarralar (nuqtalar) toʻp-lamidan iborat mexanik sistema deb tasavvur qilish mumkin.

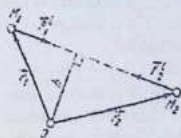
Agar jismlar (nuqtalar) bir-biriga oʻzaro taʼsir etmasa (masalan, suvdagi kema, uchayotgan samolyot va harakatlanayotgan poezdlar bir-biriga oʻzaro taʼsir etmay-di), bunday jismlar toʻplami mexanik sistema boʻlmaydi.

Agar mexanik sistema nuqtalari orasidagi masofalar oʻzgarmasdan qolsa (ma-salan, absolyut qattiq jism), bunday sistema *oʻzgarmas mexanik sistema* deyiladi.

Mexanik sistema nuqtalariga taʼsir etuvchi kuchlarni ichki va tashqi kuchlarga ajratiladi. Mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqtalar (yoki jismlar) ning oʻzaro taʼsir kuchlari *ichki kuch-lar* deyiladi. Ma-salan, Quyosh sistemasidagi planetalar-ning oʻzaro taʼsir kuchlari ichki kuchlardan iborat. Mexanik sistema tarkibiga kirmaydigan nuqta yoki jismlarning berilgan sistema nuqtalariga taʼsir kuchlari *tashqi kuchlar* deyiladi. Masalan, kemani mexanik sistema deb qarasa, kema qismlarining ogʻirlik kuchi, suvning qarshilik kuchi tashqi kuchlarni ifodalaydi. Odatda, tashqi kuchlar F^e , ichki kuch-

lar \vec{F}_i^i bilan belgilanadi.

Mexanik sistemaning qanday tanlab olinishiga qarab bitta kuchning o'zi yo tashqi, yo ichki kuchdan iborat bo'lishi mumkin. Masalan, avtomobil motorida porshen, shatun va tirsakli valni mexanik sistema deb qarasaq, gazlarning porshenga ta'sir kuchi tashqi kuchlardan iborat bo'ladi, vaholanki, motorni mexanik sistema deb qarasaq, bu kuchlar ichki kuchlardan iborat bo'ladi.



20.1-rasm.

Mexanik sistema nuqtalarining harakati ichki kuchlarga ham, tashqi kuchlarga ham bog'liq bo'ladi.

Nyutonning uchinchi qonuniga ko'ra mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi ichki kuchlar juft-juft ravishda miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshidir. Shundan kelib chiqib, ichki kuchlarning quyidagi ikkita muhim xossalari olamiz.

1. Sistema barcha ichki kuchlarining geometrik yig'indisi (ichki kuchlarning bosh vektori) nolga teng:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^i = 0 \quad (20.1)$$

Bunda \vec{F}_i^i bilan nomeri i ga teng nuqtaga ta'sir etuvchi ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchisi belgilangan, N - mexanik sistema tarkibiga kiruvchi nuqtalarning soni. Kelgusida N ta nuqta bo'yicha yig'indi olinganda yig'indi chegaralarini tushirib yozamiz.

2. Sistema barcha ichki kuchlarining ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisi (ichki kuchlarning bosh momenti) nolga teng:

$$\vec{M}_O = \sum M_O(\vec{F}_i^i) = 0 \quad (20.2)$$

yoki

$$\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i = 0 \quad (20.3)$$

Sistema ikkita M_1, M_2 nuqtalardan tashkil topsa, bu xususiyatlarni osonlikcha isbotlash mumkin. Xaqiqatan ham, M_1, M_2 nuqtalar \vec{F}_1^i, \vec{F}_2^i ichki kuchlar bilan o'zaro ta'sir etsa, Nyutonning uchinchi qonuniga ko'ra $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$ bo'lgani uchun $\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = 0$ tenglik bajariladi, O nuqtaga nisbatan ikkala kuchning yelkasi h ga teng

bo'lgani uchun bu kuchlarning O nuqtaga nisbatan momentlari ham miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi (20.1-rasm), natijada

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1') + \vec{M}_O(\vec{F}_2') = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Mexanik sistema N ta nuqtadan iborat bo'lganda ichki kuchlarning birinchi va ikkinchi xususiyatlarini isbotlash uchun ichki kuchlar sistema tarkibiga juft-juft bo'lib kirishini e'tiborga olish kerak.

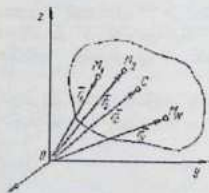
(20.1) va (20.2) ni koordinata o'qlariga proektsiyalab quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\sum X_i' = 0, \quad \sum Y_i' = 0, \quad \sum Z_i' = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i') = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_i') = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_i') = 0$$

Bu tenglamalar fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari (6.46) ga o'xshasada, ichki kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi, chunki ichki kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo'yilgan va bu kuchlar ta'siridan sistemaning nuqtalari bir-biriga nisbatan ko'chishi mumkin.

20.2-§. Sistemaning massalar markazi



20.2-rasm.

Mexanik sistemaning harakatini o'rganishda mazkur sistema nuqtalari massalarining taqsimlanishini xarakterlovchi kattaliklarni aniqlash kerak bo'ladi.

Bu kattaliklar *massalar geometriyasida* o'rganiladi.

Mexanik sistema N ta nuqtadan tashkil topgan va massalari m_1, m_2, \dots, m_N ga teng bo'lsin. Sistema nuqtalari M_1, M_2, \dots, M_N ning $Oxyz$ koordinatalar sistema-siga nisbatan radius-vektorlarini $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$; koordinatalarini $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ bilan belgilaymiz (20.2-rasm). Sistema tarkibiga kiruvchi nuqtalarning massalari

yig'indisiga teng

$$M = \sum m_i$$

kattalikka *sistemaning massasi* deyiladi. Radius vektori

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (20.4)$$

formula yordamida aniqlanadigan geometrik C nuqta *sistemaning massalar markazi* deyiladi.

(20.4) ni Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab, sistema massalar markazining koordinatalari aniqlanadigan formulalarni olamiz.

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}, y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}, z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (20.5)$$

Sistemaning massalar markazi sistemaning biror nuqtasi bilan ustma-ust tushmasligi ham mumkin. Masalan, bir jinsli halqaning massalar markazi uning geometrik markazi bilan ustma-ust tushadi lekin halqaga taalluqli bo'lmaydi.

(20.4) va (20.5) formulalardan ko'ramizki, berilgan mexanik sistema massalar markazining holati unga ta'sir etuvchi kuchlarga emas, sistema nuqtalari massalarining taqsimlanishiga bog'liq bo'ladi.

(20.4) ning o'ng tomonidagi ifodaning surat va maxrajini g ga ko'paytirsak,

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i g \vec{r}_i}{Mg}$$

yoki

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{P} \quad (20.6)$$

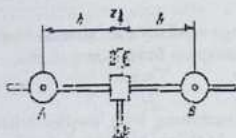
bo'ladi. Bunda $P_i = m_i g$ bilan sistema nuqtalarining og'irligi belgilangan.

7.2-§ da ko'rganimizdek, (20.6) formula yordamida og'irlik kuchi maydonidagi qattiq jismning og'irlik markazi aniqlanadi. Binobarin, qattiq jismning yoki o'zgarmas mexanik sistemaning og'irlik markazi uning massalar markazi bilan ustma-ust tushadi.

Lekin bundan og'irlik markazi va massalar markazi aynan bir xil tushunchani ifodalaydi, degan xulosa kelib chiqmaydi. Berilgan o'zgarmas mexanik sistema og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan nuqta uning og'irlik markazini ifodalaydi. Binobarin, og'irlik markazi tushunchasini faqat og'irlik kuchi maydonidagi

o'zgaras mexanik sistema (xususan, qattiq jism) uchun qo'llash mumkin. Massalar markazi esa qanday kuchlar ta'sir etishidan qat'i nazar, istalgan mexanik sistema (xususan, deformatsiyalanuvchi jism) uchun ma'noga ega bo'ladi.

20.3- §. Inerstiya momentlari



20.3-rasm.

Sistema massalar markazining holati sistema massalarining taqsimlanishini to'liq xarakterlay olmaydi. Masalan, bir xil A va B sharlarning markazlaridan aylanish o'qi Oz gacha bo'lgan h masofalarni bab-ba-ravar orttirsak (20.3-rasm), u holda A va B sharlardan tashkil topgan sistemaning massalar mar-

kazi o'zgaraydi, biroq sistemaning massalari boshqacha taqsimlanadi va natijada sistemaning harakati o'zgaradi (boshqa shartlar o'zgaraganida aylanish sekinroq sodir bo'ladi). Shu sababli mexanikada sistema massalarining taqsimlanishini xarakterlash uchun sistemaning inerstiya momenti tushunchasi kiritiladi.

Moddiy nuqtaning massasini biror o'qqacha bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytmasiga teng kattalik nuqtaning o'qqa nisbatan inerstiya momenti deyiladi.

Sistema nuqtalarining massalarini o'qqacha (nuqta yoki tekislikkacha) bo'lgan masofalar kvadratiga ko'paytmalarining yig'indisiga teng skalyar kattalik mos ravishda sistemaning o'qqa (nuqta yoki tekislikka) nisbatan inerstiya momenti deyiladi.

Nuqtaga nisbatan inerstiya momenti ko'pincha qutbga nisbatan inerstiya momenti deb ham ataladi.

Agar l o'qqa, O nuqtaga va Π tekislikka nisbatan sistemaning inerstiya momentlarini I_l, I_o va I_Π bilan belgilasak, ta'rifga ko'ra

$$I_l = \sum m_i h_i^2, I_o = \sum m_i r_i^2, I_\Pi = \sum m_i d_i^2 \quad (20.7)$$

formulalar o'rinli bo'ladi. Bunda m_i sistema M_i nuqtasining massasini, h_i, r_i, d_i lar esa mos ravishda M_i nuqtadan l o'qqa, O nuqtaga va Π tekislikkacha bo'lgan masofalarni ifodalaydi.

SI birliklar sistemasida inerstiya momentining o'lchami $[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$

bo'ladi.

Agar mexanik sistema qattiq jismdan iborat bo'lsa, bu jism inersiya momentlarini aniqlash uchun jismini massasi Δm_v ga teng ($v=1,2,\dots,N$) bo'lakchalar to'p-lamidan iborat deb qaraymiz va (20.7) formulalarda m_v lar o'rniga Δm_v larni qo'yamiz. So'ngra jism tashkil topgan bo'lakchalar sonini orttira boramiz va $N \rightarrow \infty, \Delta m_v \rightarrow \infty$ da limitga o'tamiz:

$$I_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N m_v h_v^2 = \int_{(M)} h^2 dm \quad (20.8)$$

bunda integral butun jism massasi bo'yicha olinadi.

Hajmga ega bo'lgan jismining o'qqa nisbatan inerstiya momentini aniqlash uchun (20.8) da $dm = \rho dv$ munosabat o'rinli bo'lishini e'tiborga olamiz. Bu erda dv jism bo'lakchasining hajmini, ρ zichligini bildiradi.

Bir jinsli jism uchun $\rho = \text{const}$ bo'lishini e'tiborga olsak, o'qqa nisbatan inerstiya momenti uchun yana quyidagi ifodani olamiz:

$$I_1 = \int_{(M)} h^2 \rho dv = \rho \int_{(V)} h^2 dv \quad (20.9)$$

Bu integral butun jism hajmi V bo'yicha olinadi.

Agar jism qalinligi b ga teng ($b = \text{const}$) yupqa sirtidan iborat bo'lsa, $dv = bds$ deb qarab (bunda ds sirt bo'lakchasining yuzi), (20.9) ni quyidagicha yozish mumkin:

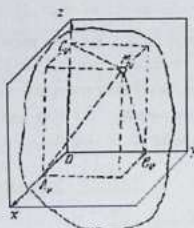
$$I_1 = \rho b \int_{(S)} h^2 ds = \rho_1 \int_{(S)} h^2 ds \quad (20.10)$$

Mazkur integral butun sirt bo'yicha olinadi va $\rho_1 = \rho b$ sirt zichligini (sirt bo'lakchasi massasining uning yuziga nisbatini) ifodalaydi.

Xuddi shuningdek, ko'ndalang kesim yu-zasi s ga teng ($s = \text{const}$) ingichka sterjenning o'qqa nisbatan inerstiya momentini hisoblashda $dv = s dl$ (dl - sterjen bo'lakchasining uzunligi) bo'lishini e'tiborga olamiz:

$$I_1 = \rho s \int_{(L)} h^2 dl = \rho_2 \int_{(L)} h^2 dl \quad (20.11)$$

Ko'rilayotgan holda integral sterjen kesmasi (sterjen o'qi) bo'yicha olinadi hamda $\rho_2 = \rho s$ sterjenning zichligini ifodalaydi.



20.4-rasm.

Mexanik sistemaning, jumladan, qattiq jismning $Oxyz$ Dekart koordinata o'qlariga nisbatan inerstiya momentlarini hisoblaymiz. Buning uchun ixtiyoriy O nuqtada koordinatalar boshini olib, sistemaning massasi m_v ga teng ixtiyoriy M_v nuqtasining koordinatalarini (x_v, y_v, z_v) bilan belgilasak, mazkur nuqtadan koordinata o'qlarigacha bo'lgan masofalar kvadrati mos ravishda

$$\left. \begin{aligned} (M_v A_v)^2 &= y_v^2 + z_v^2 \\ (M_v B_v)^2 &= x_v^2 + z_v^2 \\ (M_v C_v)^2 &= x_v^2 + y_v^2 \end{aligned} \right\}$$

formulalar yordamida aniqlanadi (20.4-rasm). Koordinata o'qlariga nisbatan inerstiya momentlarini I_x, I_y, I_z bilan belgilasak, u holda ular uchun

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum m_v (y_v^2 + z_v^2) \\ I_y &= \sum m_v (x_v^2 + z_v^2) \\ I_z &= \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

munosabatlar o'rinni bo'ladi.

Koordinatalar boshiga nisbatan sistemaning inerstiya momenti quyidagicha aniqlanadi:

$$I_O = \sum m_v r_v^2 = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \quad (20.13)$$

Bu erda r_v^2 bilan massasi m_v ga teng M_v nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa kvadrati belgilangan.

Xuddi shuningdek, koordinata tekisliklariga nisbatan inerstiya momentlari $I_{Oxy}, I_{Oyz}, I_{Ozx}$ uchun ushbu formulalar o'rinni bo'ladi:

$$I_{Oxy} = \sum m_v x_v y_v, I_{Oyz} = \sum m_v y_v z_v, I_{Ozx} = \sum m_v z_v x_v \quad (20.14)$$

(20.12), (20.13) va (20.14) dan quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O \quad (20.15)$$

$$I_{Oxy} + I_{Oyz} + I_{Ozx} = I_O \quad (20.16)$$

$$I_x = I_{Oxy} + I_{Oyz}, I_y = I_{Oyz} + I_{Ozx}, I_z = I_{Ozx} + I_{Oxy} \quad (20.17)$$

(20.15) sistemaning uchta Dekart koordinata o'qlariga nisbatan

inerstiya mo-mentlarining yig'indisi mazkur sistemaning koordinatalar boshiga nisbatan iner-stiya momentining ikkilanganiga tengligini; (20.16) sistemaning uchta koordinata tekisliklariga nisbatan inerstiya momentlarining yig'indisi mazkur sistemaning ko-ordinatalar boshiga nisbatan inerstiya momentiga tengligini; (20.17) esa biror o'q-qa nisbatan sistemaning inerstiya momenti mazkur sistemaning shu o'q bo'yicha kesishuvchi ikkita o'zaro perpendikulyar tekisliklarga nisbatan inerstiya moment-larining yig'indisiga tengligini ifodalaydi.

Ko'pincha sistemaning o'qqa nisbatan inerstiya momentini

$$I_z = M\rho_n^2 \quad (20.18)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda M — butun sistemaning massasi. Inerstiya momenti $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ o'lchamga ega bo'lishini nazarda tutsak, ρ_n uzunlik birligida o'lchanishiga ishonch hosil qilamiz. Bu uzunlik *sistemaning o'qqa nisbatan inerstiya radiusi* deyiladi. Agar sistemaning o'qqa nisbatan inerstiya momenti ma'lum bo'lsa, inerstiya radiusi

$$\rho_n = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \quad (20.19)$$

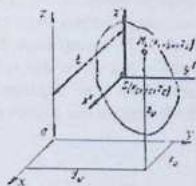
formula yordamida aniqlanadi.

(20.18) ga ko'ra, inerstiya radiusi jismning massasi mujassamlashgan nuqta-dan z o'qqacha bo'lgan shunday masofaki, bu nuqtaning z o'qqa nisbatan inerstiya momenti shu o'qqa nisbatan butun jismning inerstiya momentiga teng.

20.4-§. Jismning parallel o'qlarga nisbatan inerstiya momentlari haqi-dagi Gyuygens-Shteyner teoremasi

Jismning massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa parallel bo'lgan o'qqa nisba-tan inerstiya momentini hisoblashni ko'rib chiqamiz. Aytaylik, o'zaro parallel bo'lgan $Oxyz$ va $Cx'y'z'$ Dekart koordinata sistemalari berilgan bo'lsin, bunda C nuqta sistemaning massalar markazida joylashgan (20.5-rasm).

O'qqa nisbatan inerstiya momentining ta'rifiga ko'ra



20.5-rasm.

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ I_{z'} &= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

bunda m_i bilan M_i nuqtaning massasi; x_i, y_i, z_i va x_i', y_i', z_i' bilan mazkur nuq-taning $Oxyz$ va $Cx'y'z'$ koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari belgilangan. Agar $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan massalar markazining koordinatalarini x_c, y_c, z_c bi-

lan belgilasak, u holda M_i nuqtaning koordinatalari

$$x_i = x_c + x_i', y_i = y_c + y_i', z_i = z_c + z_i'$$

munosabatlar bilan bog'langan bo'ladi. Koordinatalarning bu qiymatlarini (20.20) ga qo'yib, soddalashtirsak,

$I_z = \sum m_i (x_c^2 + y_c^2) + 2x_c \cdot \sum m_i x_i' + 2y_c \cdot \sum m_i y_i' + (x_c^2 + y_c^2) \cdot \sum m_i$ ifoda hosil bo'ladi.

Bu ifodada $\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$ jismning massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa nisbatan inerstiya momenti; $\sum m_i = M$ - butun jism massasi; $\sum m_i x_i' = Mx_c = 0$ va $\sum m_i y_i' = My_c = 0$ chunki sistemaning massalar markazini ifodalovchi C nuq-ta $Cx'y'z'$ koordinatalar sistemasining boshida olingani tufayli $x_c = y_c = 0$. Bundan tashqari $x_c^2 + y_c^2 = d^2$ (d — Oz va Cz' o'qlar orasidagi masofa) ekanligini e'tiborga olsak,

$$I_z = I_z' + Md^2 \quad (20.21)$$

formula hosil bo'ladi.

Bu formula Gyuygens-Shteyner teoremasini ifodalaydi: *biror o'qqa nisbatan sistemaning inerstiya momenti sistemaning massalar markazi orqali shu o'qqa parallel pavishda o'tgan o'qqa nisbatan inerstiya momenti bilan sistema massasini o'qlar orasidagi masofa kvadratiga ko'paytmasining yig'indisiga teng*

(20.23) formuladan ko'ramizki, sistemaning massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa nisbatan hisoblangan inerstiya momenti unga parallel bo'lgan o'qlarga nisbatan hisoblangan inerstiya momentlari ichida eng kichik qiymatga ega bo'ladi.

20.5- §. Bir jinsli ba'zi jismlarning inerstiya momentlarini hisoblash

Ko'pincha murakkab shaklga ega bo'lgan jismni oddiy shaklli jismlarga aj-ratish usuli bilan uning inerstiya momentini aniqlash qulay bo'ladi. Bunday ji-smning inerstiya momenti uning bo'laklari inerstiya momentlarining yig'indisi-dan iborat deb qarash mumkin.

Bir jinsli oddiy shaklga ega bo'lgan ba'zi jismlarning inerstiya momentlari-ni hisoblashni ko'rib chiqamiz.

1. Bir jinsli sterjenning inerstiya momenti. x o'qmi uzunligi l ga teng in-gichka AB sterjen bo'ylab yo'naltiramiz (20.6-rasm). Sterjenning A uchidan o'tuvchi va uning o'qiga perpendikulyar yo'nalgan z o'qqa nisbatan inerstiya momentini hisoblaymiz.



20.6-rasm.

Aytaylik, sterjenning massasi M , zichligi $\rho = \frac{M}{l}$ ga teng bo'lsin. U holda sterjen dx bo'lakchasing massasi $dm = \rho_2 dx$ ekanligini nazarda tutib, (20.11) ga asosan quyidagini olamiz:

$$I_{xx} = \rho_2 \int_0^l x^2 dx = \rho_2 \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2 \quad (20.22)$$

O'qqa parallel ravishda sterjenning massalar markazi orqali utuvchi Cz' o'qqa nisbatan inerstiya momentini Gyuygens-Shteyner teoremasiga asosan aniqlaymiz:

$$I_{xx} = I_{Cz'} + M d^2$$

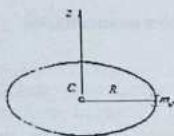
bunda

$$d^2 = \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{l^2}{4}$$

Binobarin,

$$I_{Cz'} = I_{xx} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{3} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{12} \quad (20.23)$$

etuv
sisti
siya
ersi



20.7-rasm.

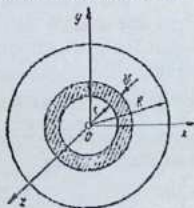
2. Ingichka doiraviy halqaning inersiya momenti. Massasi M va radiusi R ga teng doiraviy halqaning markazidan uning tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi Cz o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz (20.7 -rasm). Halqaning barcha nuqtalari Cz o'qdan bir xil $h_c = R$ masofada joylashgani tufayli (20.7) ga asosan

$$I_z = \sum m_i h_c^2 = (\sum m_i) R^2 = MR^2 \quad (20.24)$$

bo'ladi, bunda $\sum m_i = M$ halqaning massasi.

(20.24) formula massasi M , radiusi R ga teng yupqa qobiqli stilindning markaziy bo'y-lama o'qiga nisbatan inersiya momentini to-pish uchun ham o'rinli bo'ladi.

nuq
hol:
hol:



20.8-rasm.

3. Bir jinsli doiraviy diskning inersiya momenti. Massasi M , radiusi R doiraviy diskning O nuqtaga nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz (20.8-rasm). O nuqtaga nisbatan diskning inersiya momenti shu nuqtadan disk tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi Oz o'qqa nisbatan hisoblangan inersiya momentiga teng bo'ladi. Diskda radiuslari r va $r + dr$ ga teng aylanalar orasidagi doiraviy halqani ajratamiz. Bu halqaning

bir-
sist

massasi

$$dm = 2\pi r \rho dr$$

ga teng. Bu erda $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ diskning zichligini ifodalaydi. (20.8) ga

asosan

$$I_z = \int_{(dm)} r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi r \rho dr = 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \quad (20.25)$$

Bu formula radiusi R ga teng doiraviy stilindning markaziy bo'y-lama o'qiga nisbatan inersiya momentini topish uchun ham o'rinli bo'ladi.

Disk tekisligida Ox va Oy o'qlarga nisbatan nuqtalari simmetrik joylashgani uchun $I_x = I_y$ (20.15) ga asosan $2I_o = I_x + I_y$ lekin

tasl
(yc
sal:
ich
nu
tas
ras
tas

$I_z = I_o$ bo'lgani uchun

$$I_z = I_o = \frac{1}{2} I_o = \frac{MR^2}{4} \quad (20.26)$$

4. Quvurning inerstiya momenti. Massasi M , tashqi radiusi R_1 va ichki radiusi R_2 ga teng quvurning markaziy bo'ylama o'qi Cz ga nisbatan inerstiya momenti radiuslari R_1 va R_2 ga teng doiraviy stilindrlarning mazkur o'qqa nisbatan inerstiya momentlarining ayirmasiga teng bo'ladi (20.9-rasm). Shundan kelib chiqib, (20.25) ga ko'ra quyidagini olamiz:

$$I_{Cz} = M_1 \frac{R_1^2}{2} - M_2 \frac{R_2^2}{2} \quad (20.27)$$

bunda M_1 va M_2 bilan radiusi R_1 va R_2 ga teng stilindrlarning massasi belgilangan:

$$M_1 = \rho H \pi R_1^2, \quad M_2 = \rho H \pi R_2^2 \quad (20.28)$$

Bu erda H — quvurning uzunligi. (20.28) ni (20.27) ga qo'ysak,

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} \rho \pi H (R_1^4 - R_2^4)$$

lekin quvurning massasi M

$$M = M_1 - M_2 = \rho \pi H (R_1^2 - R_2^2)$$

ga tengligini e'tiborga olsak, quvurning markaziy bo'ylama o'qi Cz ga nisbatan inerstiya momenti uchun quyidagi tenglik o'rinni bo'ladi:

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \quad (20.29)$$

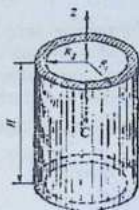
5. Sharining inerstiya momenti.

Massasi M , radiusi R ga teng sharining markazi va shu markazdan o'tuvchi koordinata o'qlariga nisbatan inerstiya momentlarini hisoblaymiz. Shar ichida radiusi r va qalinligi dr ga teng shar qobig'ini fikran ajratamiz (20.10-rasm). Uning massasi $dm = \rho dv$ bo'lib, bunda

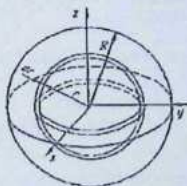
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{zichlikni; } dv = 4\pi r^2 dr$$

ajratilgan shar qobig'ining hajmini ifodalaydi. Natijada

$$dm = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr$$



20.9-rasm.



20.10-rasm.

tenglik o'rinli bo'ladi.

Sharning markaziga nisbatan inerstiya momenti

$$I_0 = \int_{(w)} r^2 dm = 4\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 4\pi\rho \frac{R^4}{4} = \frac{3}{5} MR^2. \quad (20.30)$$

formuladan aniqlanadi.

Sharning markazidan o'tuvchi koordinata o'qlariga nisbatan inerstiya momentlarini hisoblashda bu o'qlarga nisbatan shar nuqtalari simmetrik joylashgan-hgini nazarda tutsak, $I_x = I_y = I_z$ munosabat o'rinli bo'ladi. (20.15) ga ko'ra

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z = 3I_x = 3I_y = 3I_z.$$

Binobarin,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \quad (20.31)$$

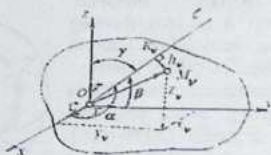
20.6-§. Jismning berilgan nuqtadan o'tuvchi o'qlarga nisbatan inerstiya momentlari

Jismning biror O nuqtasi orqah x, y, z Dekart koordinata o'qlarini hamda ix-tiyoriy l o'qni o'tkazamiz; l o'qning x, y, z o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari-ni α, β, γ bilan belgilaymiz (20.11-rasm).

Jismning l o'qqa nisbatan inerstiya momentini hisoblaymiz. (20.7) ga ko'ra jismning l o'qqa nisbatan inerstiya momenti

$$I_l = \sum m_i h_i^2 \quad (20.32)$$

formuladan aniqlanadi, bu erda h_i, M_i nuqtadan l o'qqacha bo'lgan masofa.



20.11-rasm.

$OK_x M_y$ to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$h_i^2 = r_i^2 - (OK_x)^2, \quad (20.33)$$

bunda $r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ bo'lib, x_v, y_v, z_v lar M_v nuqtaning koordinatlarini ifodalaydi. OK_v kesma $\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$ radius-vektoring Ol o'qdagi proekstiyasini ifodalaydi. \vec{r}_v vektoring Ol o'qdagi proekstiyasini aniqlash uchun bu vektorni mazkur o'qning birlik vektori $\vec{l} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ ga skalyar ko'payti-ramiz:

$$OK_v = \vec{r}_v \cdot \vec{l} = (x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k})(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) = x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma. \quad (20.34)$$

(20.33) da r_v^2 ni nuqtaning koordinatalari orqali ifodalab, uni $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ga ko'paytirsak, quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} h_v^2 = (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + \\ + z_v \cos \gamma)^2 = (y_v^2 + z_v^2) \cos^2 \alpha + (x_v^2 + z_v^2) \cos^2 \beta + (x_v^2 + y_v^2) \cos^2 \gamma - \\ - 2y_v z_v \cos \beta \cos \gamma - 2x_v z_v \cos \alpha \cos \gamma - 2y_v x_v \cos \beta \cos \alpha \end{aligned} \quad (20.35)$$

(20.35) ni (20.32) ga qo'ysak,

$$I_x = \cos^2 \alpha \sum m_v (y_v^2 + z_v^2) + \cos^2 \beta \sum m_v (x_v^2 + z_v^2) + \cos^2 \gamma \sum m_v (y_v^2 + x_v^2) - \\ - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_v y_v z_v - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum m_v x_v z_v - 2 \cos \beta \cos \alpha \sum m_v y_v x_v$$

Bu tenglikda (20.12) ga ko'ra

$$\sum m_v (y_v^2 + z_v^2) = I_x, \quad \sum m_v (x_v^2 + z_v^2) = I_y, \quad \sum m_v (y_v^2 + x_v^2) = I_z,$$

mos ravishda x, y, z o'qlarga nisbatan inerstiya momentlari,

$$\sum m_v y_v z_v = I_{yz}, \quad \sum m_v x_v z_v = I_{xz}, \quad \sum m_v y_v x_v = I_{xy} \quad (20.36)$$

lar esa markazdan qochirma inerstiya momentlari ekanligini e'tiborga olsak, ji-smning I o'qqa nisbatan inerstiya momenti quyidagiga teng bo'ladi:

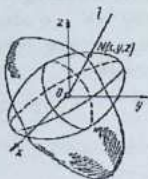
$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2I_{xy} \cos \beta \cos \alpha \quad (20.37)$$

Jismning l o'qqa nisbatan inerstiya momentini aniqlash uchun α, β, γ burchak-

lardan tashqari O nuqtadan o'tuvchi x, y, z o'qlarga nisbatan $I_x, I_y, I_z, I_{yz}, I_{xz}, I_{xy}$ oltita inerstiya momentlarini ham bilish kerak.

(20.37) da α, β, γ larga turlicha qiymatlar berib, O nuqtadan o'tuvchi o'qlar dastasiga nisbatan jismning inerstiya momentlarini aniqlash mumkin.

20.7-§. Inerstiya ellipsoidi



20.12-rasm.

α, β, γ burchaklarga mos ravishda jismlarning I o'qqa nisbatan inerstiya momenti qanday o'zgarishini aniqlash uchun mazkur o'qda O nuqtadan uzunligi

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I}} \quad (20.38)$$

ga teng kesmani qo'yamiz (20.12-rasm).

ON kesmaning yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{ON} = x\sqrt{I}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{ON} = y\sqrt{I}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{ON} = z\sqrt{I}. \end{aligned} \right\} \quad (20.39)$$

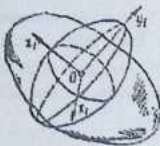
bunda x, y, z — N nuqtaning koordinatalari. (20.39) ni (20.37) ga qo'yib, I ga qisqartiramiz:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} xz = 1. \quad (20.40)$$

(20.40) tenglama α, β, γ burchaklar o'zgarib turganda (20.38) shartni qanoatlan-tiruvchi N nuqta ko'chadigan sirtning ifodalaydi. Bu sirt ellipsoiddan iborat bo'ladi, chunki $I_i \neq 0$ bo'lgani uchun (20.38) formula yordamida aniqlanadigan ON ma-sofa chekli bo'ladi. Bu ellipsoid *inerstiya ellipsoidi* deyiladi. Jismlarning har bir nuqtasi uchun o'ziga yarasha inerstiya ellipsoidi mavjud bo'ladi. Agar koordinata o'qlarini sirtning O nuqtadan o'tuvchi o'zaro perpendikulyar bosh diametrlari bo'ylab yo'naltirsak, ellipsoidning tenglamasi soddalashadi. Bunday o'qlarga *inerstiya bosh o'qlari* deyiladi.

Jismlarning massalar markaziga nisbatan yasalgan inerstiya ellipsoidi *markaziy inerstiya ellipsoidi* deyiladi. Markaziy inerstiya ellipsoidining bosh o'qlari *markaziy inerstiya bosh o'qlari* deb ataladi.

Agar x_i, y_i, z_i koordinata o'qlari uchun inerstiya bosh o'qlarini olsak (20.13-rasm), ellipsoid tenglama-sida koordinatalarning ko'paytmalari qatnashmasligi analitik



20.13-rasm.

geometriya kursidan ma'lum:

$$I_x x_1^2 + I_y y_1^2 + I_z z_1^2 = 1. \quad (20.41)$$

Bunda I_x, I_y, I_z lar inerstiya bosh momentlarini ifodalaydi.

Agar O nuqta orqali Ox_1, Oy_1, Oz_1 bosh o'qlar bilan mos ravishda α, β, γ burchak tashkil etuvchi l o'qni o'tkazsak, u holda (20.37) ga binoan bu o'qqa nisbatan inerstiya momenti

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \quad (20.42)$$

formula yordamida aniqlanadi.

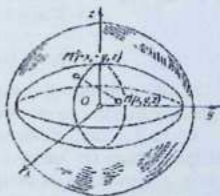
Agar xususiy holda ikkita inerstiya bosh moment-lari o'zaro teng bo'lsa, u holda inerstiya ellipsoidi aylanma ellipsoiddan iborat bo'ladi. Uchta inerstiya bosh momentlari teng bo'lsa, inerstiya ellipsoidi sferadan iborat bo'ladi.

20.8-§. Inerstiya bosh o'qlarining xususiyatlari

Inerstiya bosh o'qlarining quyidagi xususiyatlarini ko'rib chiqamiz.

1. *Berilgan nuqta orqali o'tuvchi Dekart koordinata o'qlaridan biri ushbu nuqta uchun inerstiya bosh o'qidan iborat bo'lishi uchun shu o'qqa mos koordi-nata qatnashadigan markazdan qochirma inerstiya momentlari nolga teng bo'li-shi zarur va etarlidir.*

Zarurligi. Aytaylik, Oz o'q O nuqta uchun yasalgan inerstiya ellipsoidining bosh o'qidan iborat hamda x va y o'qlari ixtiyoriy bo'lsin, u holda inerstiya el-lipsoidining har bir $M(x, y, z)$ nuqtasiga unga simmetrik bo'lgan $M'(-x, -y, z)$ nuqta mos keladi. (20.14-rasm).



20.14-rasm.

(20.40) tenglamaga dastlab M , so'ngra M' nuqtaning koordinatalarini qo'yib,

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz - 2I_{xy} xy = 1,$$

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2I_{yz} yz + 2I_{xz} xz - 2I_{xy} xy = 1$$

tenglamalarni olamiz. Bu tenglamalarning ikkinchisidan birinchisini ayirsak,

$$4I_{yz} + 4I_{zx} = 0 \quad \text{yoki} \quad z(I_{yz} + I_{zx}) = 0$$

tenglama o'rinli bo'ladi. M nuqtaning koordinatalari x, y, z lar noldan farqli bo'lgani uchun oxirgi tenglama faqat

$$I_{yz} = 0, I_{zx} = 0 \quad (20.43)$$

bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Yetarliligi. Agar (20.43) bajarilsa, inerstiya ellipsoidi tenglamasini

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan ko'ramizki, z o'q inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi.

2. Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, inerstiya bosh o'qlaridan biri simmetriya tekisligiga perpendikulyar bo'ladi hamda qolgan ikkita inerstiya bosh o'qlari shu tekislikda yotadi.

Simmetriya tekisligida jismning ixtiyoriy O nuqtasini olib, Oz o'qni simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo'naltiramiz. U holda har bir m_i

massali $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtaga bu tekislikka simmetrik bo'lgan xuddi shunday massali $M'_i(x_i, y_i, -z_i)$ nuqta mos keladi. M_i va M'_i nuqtalarning koordinatalari faqat z_i koordinatasining ishorasi bilan farq qiladi.

Markazdan qochirma inerstiya momentlari I_{yz} va I_{zx} uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = \sum_{(I)} m_i y_i z_i + \sum_{(II)} m_i y_i \cdot (-z_i) = 0,$$

$$I_{zx} = \sum m_i z_i x_i = \sum_{(I)} m_i z_i x_i + \sum_{(II)} m_i \cdot (-z_i) x_i = 0,$$

chunki jismning (I) qismiga musbat z_i koordinata, (II) qismiga $-z_i$ manfiy koordinata mos keladi.

I_{yz} va I_{zx} markazdan qochma inerstiya momentlari nolga teng bo'lgani uchun Oz inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi. Qolgan Ox va Oy o'qlari Oz ga tik bo'lgani uchun simmetriya tekisligida yotadi.

3. Agar bir jinsli jism simmetriya o'qiga ega bo'lsa, bu o'q inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi.

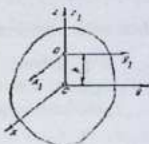
Agar simmetriya o'qi uchun z o'qni olsak, har bir x_i, y_i, z_i musbat koordinatali, m_i massali nuqtaga xuddi shunday massali, lekin x, y o'qlarga mos koordinatalari manfiy bo'lgan $-x_i, -y_i, z_i$ nuqta mos keladi (7.6-rasmga qarang) ham-da

$$I_{zx} = \sum m_i z_i x_i = \sum_{(I)} m_i z_i x_i + \sum_{(II)} m_i z_i (-x_i) = 0$$

chunki (I) va (II) yig'indilar faqat x_i oldidagi ishora bilan bir-biridan farq qiladi.

Shunga o'xshash $I_{yz} = 0$ bo'lishini isbotlash mumkin.

Binobarin, simmetriya o'qi z inertiya bosh o'qidan iborat bo'ladi. Jismning massalar markazi simmetriya o'qida yotgani tufayli z o'q markaziy inertiya bosh o'qi bilan ustma-ust tushadi.



20.15-rasm.

4. Markaziy inertiya bosh o'qi shu o'qda yotuvchi barcha nuqtalar uchun inertiya bosh o'qidan iborat bo'ladi.

Agar Cz o'qni markaziy inertiya bosh o'qi sifatida olsak (20.15-rasm),

$$I_{Cz} = \sum m_i z_i x_i = 0, I_{Cz} = \sum m_i z_i y_i = 0$$

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} = 0, y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M} = 0$$

bo'ladi. Bunda $\sum m_i = M$ butun jism massasi.

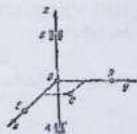
Cz o'qda ixtiyoriy O nuqtani ohb, bu nuqtada $Cxyz$ ga parallel bo'lgan $Ox_i y_i z_i$ koordinatalar sistemasini o'tkaza-miz. U holda $OC = h$ belgilash kiritib (20.5) ni e'tiborga olsak, $I_{y_1 z_1}$ va $I_{x_1 z_1}$ markazdan qochirma inertiya momentlari quyidagicha hisoblanadi:

$$I_{y_1 z_1} = \sum m_i (z_i - h) x_i = \sum m_i z_i x_i - h M x_C = 0,$$

$$I_{x_1 z_1} = \sum m_i (z_i - h) y_i = \sum m_i z_i y_i - h M y_C = 0.$$

Binobarin, Oz_1 o'q ham inertiya bosh o'qidan iborat bo'ladi.

20.1- masala. AB vertikal valga hamda o'zaro perpendikulyar bo'lgan r uzunlikdagi OE va OD sterjenlar vositasida bir xil E va D yuklar biriktirilgan (20.16-rasm). Sterjenlar va valning massasini hisobga olmay va yuklarni moddiy nuqta deb qarab, sistema massalar markazi C topilsin hamda I_{yz}, I_{xz}, I_{xy} markazdan qochirma inertiya momentlari hisoblansin.



20.16-rasm.

Yechish. Koordinatalar boshini O nuqtada olib, x o'qni OE sterjen, y o'qni OD sterjen bo'ylab, z o'qni esa AB val bo'yicha yo'naltiramiz. Agar yuklarning massalarini m bilan belgilasak, $E (r, 0, 0)$, $D (0, r, 0)$

bo'lgani uchun (20.5) ga ko'ra E va D nuqtalardan tashkil topgan sistema massalar markazining koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i x_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i y_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2}; z_C = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i z_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = 0.$$

Binobarin, sistemaning massalar markazi $C\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, 0\right)$ nuqtada yotadi.

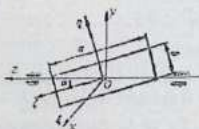
z o'q sistema nuqtalari yotgan xy tekislikka perpendikulyar yo'nalgani uchun u inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi, shu sababli I_x, I_y markazdan qochirma inerstiya momentlari nolga teng

$$I_x = 0, I_y = 0$$

Shuningdek, $E(r, 0, 0), D(0, r, 0)$ bo'lgani uchun

$$I_z = \sum_{i=1}^2 m_i x_i y_i = 0$$

Shunday qilib, $I_x = I_y = I_z = 0$.



20.17-rasm.

20.2- masala. Massasi M , tomonlari a va b ga teng to'g'ri to'rtburchak bir jinsh plastinka diagonalaridan biri orqah o'tuvchi z o'qqa birlashtirilgan (20.17-rasm). z va y o'qlari rasm tekisligida yotadi deb qarab, I_x, I_y, I_z markazdan qochir-ma inerstiya momentlari aniqlansin.

Yechish. Koordinata o'qlarini plastinkaning massalar markazidagi O nuqta orqali 20.17- rasmdagidek yo'naltiramiz. Bunda x plastinka tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan va uning massalar markazi orqali o'tgani uchun markaziy inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi. Shu sababli

$$I_x = I_y = 0$$

bo'ladi. I_z markazdan qochirma inerstiya momenti (20.38) ga ko'ra

$$I_z = \sum m_i y_i z_i \quad \text{yoki} \quad I_z = \int yz \, dm \quad (1)$$

formuladan aniqlanadi. I_z ni hisoblash uchun $O\xi\eta\zeta$ yangi koordinatalar sistemasiga o'tamiz. Bunda ξ o'q x bilan ustma-ust tushadi; η o'q to'g'ri to'rtburchakning b tomoniga parallel; ζ o'q unga perpendikulyar yo'naladi. Ox va $O\xi$ ustma-ust tushganligi tufayli $O\xi$

o'q markaziy inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi. $O\eta$ va $O\zeta$ o'qlari plastinkaning massalar markazi O nuqta orqali o'tgani va sim-metriya o'qlaridan iborat bo'lgani uchun bu o'qlar ham markaziy inerstiya bosh o'qlaridan iborat bo'ladi. Binobarin, $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasi O nuqta uchun yasalgan inerstiya ellipsoidining bosh koordinata o'qlaridan iborat bo'ladi. Oz va $O\zeta$ o'qlari orasidagi burchak

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \quad (2)$$

formuladan aniqlanadi.

Analistik geometriyadagi koordinata o'qlarini burish formulasidan foydalanib, y va z koordinatalarni η, ζ koordinatalar orqah ifodalaymiz:

$$\left. \begin{aligned} y &= \zeta \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ z &= \zeta \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

y, z larning bu qiymatlarini (1) ga qo'ysak,

$$I_{yz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\int_{(Ox)} \zeta^2 d\eta - \int_{(Ox)} \eta^2 d\zeta \right] + \cos 2\alpha \int_{(Ox)} \eta \zeta d\eta. \quad (4)$$

$O\xi\eta\zeta$ bosh koordinata o'qlaridan iborat bo'lgani uchun

$$\int_{(Ox)} \eta \zeta d\eta = 0 \quad (5)$$

(4) dagi $O\xi\eta$ va $O\xi\zeta$ tekisliklarga nisbatan plastinkaniing inerstiya momentlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_{(Ox)} \zeta^2 d\eta = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \zeta^2 d\zeta d\eta = \frac{Ma^2}{12} \quad (6)$$

$$\int_{(Ox)} \eta^2 d\zeta = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 d\eta d\zeta = \frac{Mb^2}{12} \quad (7)$$

(5), (6) va (7) ni (4) ga qo'ysak,

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \frac{M}{12} (a^2 - b^2) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{M}{12} (a^2 - b^2) = \\ &= \frac{Mab}{12} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Nazorat savollari

1. Mexanik sistemami ta'riflang va misollar keltiring.
2. Tashqi va ichki kushlarning ta'rifi.
3. Ichki kushlarning xossalari.
4. Massalar markazi bilan og'irlik markazi bir xilmi?
5. O'zgarmas mexanik sistema ta'rifi.
6. Erkin mexanik sistema ta'rifi.
7. Bog'lanishdagi mexanik sistema ta'rifi.
8. Sistema massasi formulasini keltiring.
9. Inersiya momenti nima?
10. Sistemaning inersiya momentlari qanday aniqlanadi?
11. Gyuygens-Shteyner teoremasini ayting.
12. Sodda shaklli jismlarning inersiya momentlarini hisoblash formulalari.

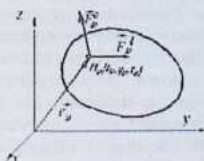
sist
qol:
me)
tasl
(yo
sal:
ich
nuc
tas.
ras
tasl

21-BOB. DINAMIKANING UMUMIY TEOREMALARI

Tayanch soʻzlar mexanik sistema harakat miqdori, harakat miqdori oʻzgarishi haqidagi teorema, sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni, quvvat, kuchning ishi, teng taʼsir etuvchining ishi, kinetik energiya, sistema kinetik energiyasining oʻzgarishi haqidagi teorema, kuch maydoni, potensial energiya.

21. 1-§. Mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari

Aytayhk, mexanik sistema M_1, M_2, \dots, M_N nuqtalardan tashkil topgan boʻlsin. Massasi m_v , biror koʻzgʻalmas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vek-tori \vec{r}_v ga teng sistema istalgan M_v nuqtasiga qoʻyilgan tashqi kuchlarning teng taʼsir etuvchisini \vec{F}_v^e - barcha ichki kuchlarning teng taʼsir etuvchisini \vec{F}_v^i - bilan belgilasak (21.1-rasm), bunday nuqta harakat differensial tenglamasining vektorh ifodasi



21.1-rasm.

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (21.1)$$

koʻrinishda yoziladi. Bunda $\frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{a}_v$ mazkur nuqtaning tezlanishi. Sistemaning har bir nuqtasi uchun (21.1) tenglama oʻrinli boʻladi.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \\ \dots & \\ m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} &= \vec{F}_N^e + \vec{F}_N^i \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Bu tenglamalarni qisqacha quyidagicha yozish mumkin;

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i, \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (21.3)$$

(21.3) tenglamalarni qoʻzgʻalmas $Oxyz$ Dekart koordinatalariga proekstiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} m_v \frac{d^2 \ddot{x}_v}{dt^2} &= X_v^e + X_v^i, \\ m_v \frac{d^2 \ddot{y}_v}{dt^2} &= Y_v^e + Y_v^i, \\ m_v \frac{d^2 \ddot{z}_v}{dt^2} &= Z_v^e + Z_v^i \end{aligned} \right\} \quad (v=1,2,\dots,N) \quad (21.4)$$

(21.3) yoki (21.4) tenglamalar *mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari* deyiladi. Umumiy holda sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlar vaqt, sistema nuqtalarining koordinatalari va tezliklarining funktsiyasidan iborat bo'lgani uchun bu tenglamalar birgalikdagi tenglamalar sistemasini tashkil etadi. Binobarin, sistema nuqtalarining massalari va ularga ta'sir etuvchi kuchlarni bilgan holda berilgan boshlang'ich shartlarda mexanik sistemaning harakatini aniqlash uchun (21.3) ko'rinishdagi N ta vektorli tenglamalar sistemasi yoki $3N$ ta ikkinchi tartibli (21.4) skalyar tenglamalar sistemasini integrallashga to'g'ri keladi. (21.4) tenglamalar sistemasini integrallash natijasida harakatning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadigan $6N$ ta integrallash doimiylari hosil bo'ladi. Vaqtning biror paytidagi sistema nuqtalarining koordinatalari va tezliklarining qiymati *mexanik sistema uchun boshlang'ich shartlarni* ifodalaydi.

Umumiy holda (21.3) yoki (21.4) tenglamalarning aniq echimini aniqlash hatto mexanik sistema bitta nuqtadan tashkil topganda ham muammodir. Agar mexanik sistema nuqtalariga bog'lanishlar ko'yilgan bo'lsa, bunday mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalarini integrallash yanada qiyinlashadi.

Odatda mexanik sistemaning harakatini aniqlashda bevosita sistemaning harakat differensial tenglamalarini integrallash bilan shug'ullanilmaydi. Ko'pincha sistema dinamikasining masalalarini echishda mexanik sistemaning ayrim xarakteristikalar to'plamini aniqlash etarli bo'ladi. Bunday xarakteristikalar to'plami (21.3) yoki (21.4) tenglamalardan keltirib chiqariladigan va *dinamikaning umumiy teoremlari* deb ataladigan teoremlar vositasida aniqlanadi. Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema, kinetik momentning o'zgarishi haqidagi teorema va kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremlar ana shular jumlasidandir. Ayrim hollarda bu teoremlardan foydalanib, sistemaning harakat diffe-

renstial tenglamasi birinchi integrallarini (ya'ni koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosila qatnashmaydigan munosabatlarni) olish mumkin.

Agar harakat differentsial tenglamasining ayrim birinchi integrallari ma'lum bo'lsa, bu birinchi integrallar sistemaning harakatini to'liq aniqlamasada, butun sistemaning harakatini xarakterlashda muhim ahamiyatga ega.

21.2- §. Moddiy nuqtaning va sistemaning harakat miqdori. Kuch impulse

Mexanikada moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat o'lchovlaridan biri sifatida uning harakat miqdori olinadi. (15.3) dan ma'lumki,

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

vektor *nuqtaning harakat miqdori*ni ifodalaydi.

Nuqta harakat miqdorining koordinata o'qlaridagi proektsiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$q_x = mv_x, q_y = mv_y, q_z = mv_z$$

Mexanik sistema nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig'indisiga teng vektor

$$\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i \quad (21.5)$$

sistemaning harakat miqdori (yoki harakat miqdorining bosh vektori) deyiladi.

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ (\vec{r}_i nuqtaning inertial sistemaga nisbatan radius-vektori) hamda sistema nuqtalarining massalari o'zgarmas bo'lgani uchun

$$\vec{Q} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i$$

(20.4) ga asosan $\sum m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_c$ (M — butun sistemaning massasi, \vec{r}_c — massalar markazining radius-vektori) munosabat o'rinli bo'lgani uchun

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_c) = M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M\vec{v}_c$$

bunda \vec{v}_c sistema massalar markazining tezligini ifodalaydi. Demak,

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c \quad (21.6)$$

bo'lib, *sistemaning harakat miqdori butun sistema massasi bilan sis-*

tema massalar markazi tezligining ko'paytmasiga teng.

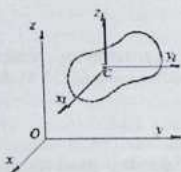
(21.6) ni boshqacha quyidagicha talqin qilish ham mumkin: sistemaning ha-rakat miqdori butun sistemaning massasi mujassamlashgan deb qaraladigan sistema massalar markazining harakat miqdoriga teng.

(21.5) va (21.6) ga ko'ra, sistema harakat miqdorining koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini aniqlash mumkin:

$$Q_x = \sum m_i v_{ix} = Mv_{Cx}$$

$$Q_y = \sum m_i v_{iy} = Mv_{Cy}$$

$$Q_z = \sum m_i v_{iz} = Mv_{Cz}$$



21.2- rasm.

Sistemaning harakat miqdorini hisoblash uchun $Oxyz$ inerstial koordinatalar sistemasi bilan birga sistemaning massalar markazi orqali o'tuvchi va unga paral-lel ravishda harakatlanuvchi $Cx_iy_i z_i$ koordinatalar sistemasini kiritamiz (21.2-rasm). Natijada sistema nuqtalarining harakatini $Cx_iy_i z_i$ bilan birgalikdagi ko'chirma (ilgarilama)

harakatdan hamda bu koordinata o'qlariga nisbatan nisbiy harakatdan iborat deb qarash mumkin. Shu sababli sistemaning harakat miqdorini ham ko'chirma va nisbiy harakat miqdorlarining yig'indisidan iborat deb olamiz:

$$\vec{Q} = \vec{Q}^r + \vec{Q}^s$$

Harakatdagi koordinatalar sistemasining boshi sistemaning massalar markazi bilan ustma-ust tushgani sababli nisbiy harakatda $\vec{v}_c^s = 0$ bo'ladi. Binobarin, (21.6) ga ko'ra $\vec{Q}^s = M\vec{v}_c^s = 0$.

Shunday qilib, sistemaning harakat miqdori uning massalar markazi bilan bir-galikdagi ilgarilama ko'chirma harakatini xarakterlaydi.

Masalan, massalar markazi orqali o'tuvchi qo'zg'almas o'q atrofida aylanuv-chi jismning harakat miqdor vektori

$$\vec{Q} = \vec{Q}^r = M\vec{v}_c = 0$$

bo'ladi, chunki massalar markazi ko'zg'almas o'qda yotadi va uning tezligi bo'l-maydi.

Mexanik harakatning vektorli o'lchovi sifatida harakat miqdori olinadi.

Berilgan nuqtaga boshqa moddiy ob'ektlarning har ondagi mexanik ta'sirini xarakterlovchi o'lchov sifatida kuch olinadi. Lekin kuch ta'sirining effekti uning har ondagi miqdor va yo'nalishigagina bog'liq bo'lmay, balki uning ta'sir vaqtiga ham bog'hq bo'ladi.

Miqdor va yo'nahsh jihatdan o'zgarmas bo'lgan \vec{F} kuch bilan uning ta'sir vaqtining ko'paytmasiga teng

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t \quad (21.7)$$

vektor kuchning impulsi deyiladi.

Kuch impulsining yo'nahshi kuchning yo'nahshi bilan bir xil bo'ladi.

Kuch impulsi o'zaro mexanik ta'sirning o'lchovi deyiladi va berilgan vaqt ichida moddiy nuqta (yoki sistema) ga boshqa moddiy ob'ektlarning ta'sirini ifodalaydi.

SI birliklar sistemasida kuch impulsi N.s bilan o'lchanadi.

Agar ta'sir etuvchi kuch vaqtning funkstiyasidan iborat bo'lsa, kuchning dt vaqt ichidagi ta'siri kuchning elementar impulsi deb ataladigan

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt \quad (21.8)$$

kattalik bilan aniqlanadi.

Kuch elementar impulsining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari

$$dS_x = X \cdot dt, dS_y = Y \cdot dt, dS_z = Z \cdot dt$$

ifodalardan, chekli t vaqt ichidagi kuch impulsi esa

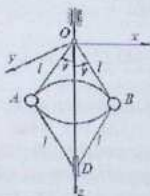
$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad (21.9)$$

formuladan aniqlanadi.

Kuch impulsining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$S_x = \int_0^t X \cdot dt, S_y = \int_0^t Y \cdot dt, S_z = \int_0^t Z \cdot dt \quad (21.9')$$

21.1-masala. Vertikal o'q atrofida tezlanuvchan aylanma harakat qiluvchi markazdan qochirma regulyatorming harakat miqdori hisoblansin. Bunda φ bur-chak $\varphi = \varphi(t)$ qonun asosida o'zgaradi va OA , OB sterjenlar aylanishi natijasida A va B sharlar ko'tariladi. Sterjenlarning uzunligi $OA = OB = AD = BD = l$. Massasi M_2 ga teng D muftaning massalar mar-



21.3-rasm.

kazi z o'qda yotadi. Har birining massasi M_1 ga teng A va B sharlar nuqta deb qaralsin. Sterjenlarning massasi hisobga olinmasin (21.3-rasm).

Yechish. Markazdan qochirma regulyatori A , B sharlar va D muftadan iborat uchta moddiy nuqtadan tashkil topgan sistema deb qaraymiz. Shu sababli

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3,$$

bunda $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ — mos ravishda A, B sharlar va D muftaning harakat miqdori (15.3) ni sistemaning xar bir nuqtasi uchun qo'llaymiz:

$$\vec{Q} = M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2 + M_3 \vec{v}_3$$

Sistema nuqtalari z o'qqa nisbatan simmetrik joylashgani tufayli sistemaning massalar markazi shu o'qda yotadi. Shu sababli

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum m_i v_{ix} = M v_{cx} = 0, \\ Q_y &= \sum m_i v_{iy} = M v_{cy} = 0, \\ Q_z &= \sum m_i v_{iz} = M v_{cz} = M z_c = M_1 z_A + M_2 z_B + M_3 z_D \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Agar sterjenlar xz tekisligida yotsa, $z_A = l \cos \varphi, z_B = l \cos \varphi, z_D = 2l \cos \varphi$, tengliklarni olamiz. Shu sababli

$$v_y = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ cm/s} \quad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'ysak

$$Q_z = -2(M_1 + M_2) l \varphi \sin \varphi$$

21.3-§. Nuqta harakat miqdorining o'zgarishi xaqidagi teorema

Nyutonning ikkinchi qonunini (15.4) ko'rinishda yozib,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$

uni dt ga ko'paytirsak,

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt \quad (21.10)$$

yoki (21.8) ga ko'ra

$$d(m\vec{v}) = d\vec{S} \quad (21.11)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(21.10) yoki (21.11) tenglama nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqida-gi teoremaning differensial ko'rinishidir. U quyidagicha o'qiladi: nuqta harakat miqdorining differensial nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning elementar impulsiga teng.

(21.10) ni koordinata o'qlariga proekstiyalab,

$$d(mv_x) = X \cdot dt, d(mv_y) = Y \cdot dt, d(mv_z) = Z \cdot dt \quad (21.12)$$

yoki

$$dS_x = dq_x, dS_y = dq_y, dS_z = dq_z \quad (21.13)$$

tengliklarni olamiz. Demak, nuqta harakat miqdori biror koordinata o'qidagi proekstiyasining differentsial nuqtaga ta'sir etuvchi kuch elementar impulsining mazkur o'qdagi proekstiyasiga teng.

Chekli vaqt ichida nuqta harakat miqdorining o'zgarishini aniqlash uchun (21.10) ni integrallaymiz.

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad (21.14)$$

yoki

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S} \quad (21.15)$$

Bunda \vec{v}_0 orqali $t_0 = 0$ boshlang'ich paytdagi tezlik, \vec{v} bilan istalgan t paytda-gi tezlik belgilangan.

(21.14) yoki (21.15) tenglama nuqta harakat miqdorining chekli vaqt ichida o'zgarishi xaqidagi teoremani ifodalaydi: nuqta harakat miqdorining chekli vaqt ichida o'zgarishi nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu vaqt ichidagi impulsiga teng.

(21.15) dan istalgan t paytdagi nuqtaning tezligi

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad (21.16)$$

formuladan aniqlanadi.

Nuqta harakat miqdori o'zgarishining koordinata o'qlaridagi (skalyar) ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$mv_x - mv_{x0} = S_x, mv_y - mv_{y0} = S_y, mv_z - mv_{z0} = S_z \quad (21.17)$$

Demak, nuqta harakat miqdorining biror koordinata o'qi bo'yicha chekli vaqt ichida o'zgarishi shu vaqt ichidagi nuqtaga ta'sir etuvchi kuch impulsining mazkur o'qdagi proekstiyasiga teng.

Quyidagi hollarda harakat miqdorining o'zgarishi xaqidagi teoremadan foydalanib, nuqtaning harakat differentsial tenglamalari (16.1) yoki (16.3) ning bi-rinchi integrallarini aniqlash mumkin:

1) Agar $\vec{F} = 0$ bo'lsa, ya'ni nuqtaga hech qanday kuchlar ta'sir etmasa (yo-ki ta'sir etuvchi kuchlar nolga ekvivalent bo'lsa), u holda (21.10) ga ko'ra

$$d(m\vec{v}) = 0$$

binobarin,

$$m\vec{v} = \vec{c} = \overline{const} \quad (21.18)$$

yoki (21.14) ga ko'ra

$$m\vec{v} = m\vec{v}_0 \quad (21.19)$$

tenglik o'rinli bo'ladi

(21.18) yoki (21.19) tengliklar *harakat mikdortining saqlanish qonunini* bildi-radi va nuqta harakat differensial tenglamasi (16.1) ning birinchi vektorli integra-lini ifodalaydi.

(21.18) da massa o'zgarmas bo'lgani uchun $\vec{v} = \overline{const}$ bo'ladi, ya'ni nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi. Bu natija Nyutonning birinchi qonuni (iner-stiya qonuni) ni ifodalaydi.

2) Agar kuchning biror o'qdagi proekstiyasi nolga teng bo'lsa:

$$X=0$$

u holda (21.17) ga asosan

$$m\dot{v}_x - m\dot{v}_{0x} = 0,$$

binobarin,

$$v_x = v_{0x} = C_1 \quad (21.20)$$

yoki

$$\dot{x} = C_1$$

ko'rinishdagi (16.3) tenglamaning birinchi integralini olamiz. (21.20) dan ko'-ramizki, ta'sir etuvchi kuchning biror o'qdagi proekstiyasi nolga teng bo'lsa, nuqta tezligining mazkur o'qdagi proekstiyasi o'zgarmasdan qoladi.

3) Agar ta'sir etuvchi kuch hamisha o'z yo'nalishini saqlasa, masalan, z o'qqa parallel bo'lsa, u holda $X = Y = 0$ bo'ladi va 2- holdagi-dek

$$\dot{x} = C_1, \dot{y} = C_2 \quad (21.21)$$

birinchi integrallar mavjud bo'ladi.

(21.21) ning birinchisini \dot{y} ikkinchisini \dot{x} ga ko'paytirib, olingan tengliklarni solishtirsak,

$$C_1\dot{y} = C_2\dot{x}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallab quyidagini olamiz:

$$C_1y - C_2x = const.$$

Bu tenglama z o'qqa parallel tekislikda yotuvchi egri chiziqning tenglamasini ifodalaydi. Binobarin, ushbu holda nuqtaning

traektoriyasi hamisha z o'qqa pa-rallel tekislikda yotadi.

21.2-masala. Og'irligi P N. bo'lgan avtomobilni t s. vaqt ichida tezligini v_0 dan v m/s gacha kamaytirish uchun qanday kuch bilan tormozlash kerak?

Yechish. Avtomobil to'g'ri chiziqli harakatda deb qaraymiz (21.4 rasm). Avtomobilga uning og'irlik kuchi \vec{F} normal reaksiya kuchi \vec{N} , tormozlash kuchi \vec{F} qo'yilgan bo'lib, barcha kuchlar yo'-nalish va miqdor jihatdan o'zgarmasdir.

(21.17) ning birinchi tenglamasidan foydalanib, x o'qqa nisbatan xarakat miqdorining o'z-garishi haqidagi teoremani quyidagicha yozish mumkin:

$$m(v - v_0) = -Ft$$

yoki

$$F = \frac{P}{g} \frac{v_0 - v}{t} \text{ N.}$$

21.3-masala. Snaryad boshlang'ich O holatdan eng baland M holatga o'tganda ketgan vaqt ichida unga ta'sir qiladigan barcha kuchlar teng ta'sir etuvchisining impulsi topilsin (21.5-rasm).

Berilgan:

$$v_0 = 500 \text{ m/s}, \alpha_0 = 60^\circ, v = 200 \text{ m/s,}$$

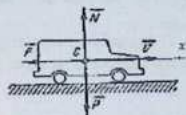
snaryad massasi $m = 100 \text{ kg}$.

Yechish. (21.17) dan foydalanib, barcha kuchlar teng ta'sir etuvchisi impulsining ko-ordinata o'qlaridagi proekstiyalarini aniqlaymiz:

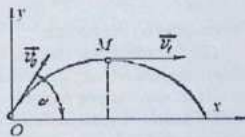
$$mv_x - mv_{0x} = S_x = 100(200 - 500 \cos 60^\circ) = -5000 \text{ N}\cdot\text{s,}$$

$$mv_y - mv_{0y} = S_y = 100(-500 \sin 60^\circ) = -43300 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Harakat miqdori o'zgarishi to'g'risidagi teorema tadbqiqiga doir hisob-grafik ishlari 3-ilovaning 3-topshirig'ida berilgan.



21.4-rasm.



21.5-rasm.

21.4-§. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan sistema nuqtalariga ichki va tashqi kuchlar ta'sir etsin. U holda (21.3) da

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = m_v \vec{a}_v = \frac{d}{dt} (m_v \vec{v}_v), (v = 1, 2, \dots, N)$$

ekanligini nazarda tutib, sistemaning harakat differensial tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt} (m_v \vec{v}_v) = \vec{F}_v^i + \vec{F}_v^e, (v = 1, 2, \dots, N) \quad (21.22)$$

(21.22) tenglamalarni qo'shamiz:

$$\frac{d}{dt} \sum (m_v \vec{v}_v) = \sum \vec{F}_v^i + \sum \vec{F}_v^e,$$

bunda (21.5) ga ko'ra $\sum (m_v \vec{v}_v) = \vec{Q}$ sistemaning harakat miqdorini bildiradi. Ichki kuchlarning xossasiga ko'ra $\sum \vec{F}_v^i = 0$ bo'ladi. $\sum \vec{F}_v^e = \vec{R}$ tashqi kuchlarning bosh vektorini ifodalashini nazarda tutsak,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R} \quad (21.23)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

(21.23) tenglama sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema-ning differensial ko'rinishidir. U quyidagicha o'qiladi: sistemaning harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektoriga teng.

(21.23) tenglamada ichki kuchlar qatnashmaydi. Haqiqatan ham ichki kuchlar sistema ayrim nuqtalarining harakat miqdori o'zgarishiga ta'sir etsada, sistema harakat miqdorining o'zgarishiga bevosita emas, balki bilvosita, tashqi kuchlar orqali ta'sir etadi.

Masalan, avtomobilni sistema deb qarasaq, akselerator pedalini bosgan sari (bunda hosil bo'ladigan kuch ichki kuchdan iborat) avtomobil dvigatelinining aylanishlar soni orta boradi; agar avtomobil silliq muz ustida turgan bo'lsa, dvigatel aylanishlari har qancha katta bo'lsa ham etakchi g'ildiraklar bilan muz ustidagi ishqalanish kuchi (tashqi kuch) kichik bo'lganda avtomobil joyidan siljimaydi, ya'ni avtomobilning harakat miqdori nolga teng bo'ladi. Ko'pincha mashina va mexanizm qismlariga ta'sir etuvchi ichki kuchlar no-

ma'lum bo'ladi. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning amaliy afzalligi shundan iboratki, bu teoremani qo'llashda ichki kuchlar butunlay e'tiborga olinmaydi. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremadan suyuqlik va gaz dinamikasida xamda o'zgaruvchan massah jism dinamikasida samarali foydalaniladi.

Agar sistemaga tashqi kuchlar ta'sir etmasa yoki tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa ($\vec{R}^e = 0$), (21.23) ni

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan

$$\vec{Q} = \overline{const} \quad (21.24)$$

munosabatni olamiz.

Shunday qilib, 21.24 ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 \quad (21.25)$$

(21.24) yoki (21.25) tengliklar *mexanik sistema harakat miqdorining saqla-nish qonuni* deb ataladi hamda sistema harakat differensial tenglamalari (21.3) ning birinchi vektorli integralini ifodalaydi. Bu tengliklardan ko'ramizki, *agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning harakat miqdor vektori miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'ladi.*

(21.23) ni Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab, sistema harakat miqdorining o'zgarishi xaqidagi teoremaning skalyar ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e \quad (21.26)$$

(21.26) quyidagicha o'qiladi: *sistema harakat miqdorining biror o'qdagi proekstiyasidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining mazkur o'qdagi proekstiyasiga teng.*

(21.23) tenglamaning chap va o'ng tomonini dt ga ko'paytirib, integrallasak:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{R}^e dt \quad (21.27)$$

(21.27) tenglama *sistema harakat miqdorining chekli vaqt ichida o'zgarishi haqidagi teoremani* ifodalaydi: *sistema harakat*

miqdorining chekli vaqt ichida o'zgarishi sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining shu vaqt ichidagi impulsiga teng.

(21.27) ni qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab, quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \int_0^t R'_x dt, \\ Q_y - Q_{0y} &= \int_0^t R'_y dt, \\ Q_z - Q_{0z} &= \int_0^t R'_z dt \end{aligned} \right\} \quad (21.28)$$

Shunday qilib, chekli vaqt ichida biror qo'zg'almas koordinata o'qlari bo'yicha sistema harakat miqdorining o'zgarishi xuddi shu vaqt ichida sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori impulsining mazkur o'qdagi proeksti-yasiga teng bo'ladi.

Agar tashqi kuchlar bosh vektorining biror (masalan, Ox) o'qdagi proekstiya-si nolga teng bo'lsa ($R'_x = 0$), (21.28) ning birinchisidan

$$Q_x - Q_{0x} = 0$$

tenglikni olamiz. Binobarin,

$$Q_x = Q_{0x} = \text{const} \quad (21.29)$$

bo'ladi.

(21.29) tenglik berilgan o'q bo'yicha sistema harakat miqdorining saqla-nish qonunini ifodalaydi: sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori-ning biror o'qdagi proekstiyasi nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdorining mazkur o'qdagi proekstiyasi o'zgarmas bo'ladi.



21.6-rasm.

21.4-masala. Inerstiyasi bo'yicha \vec{v}_0

tezlik bilan harakatlanuvchi gorizontal A platforma bo'ylab B telejka u nisbiy tezlik bilan harakatlanadi (21.6-rasm). Ma'lum vaqtda telejka tormozlanadi. Agar M —platforma massasi, m —

telejka massasi ma'lum bo'lsa, telejka to'xtagandan keyin uning platforma bilan birgalikdagi tezligi aniqlansin.

Yechish. x o'qni platformaning harakat yo'nalishida olamiz. Platforma va telejkani sistema deb qarash, sistema nuqtalariga vertikal pastga yo'nalgan \vec{F}_1, \vec{F}_2 og'irlik kuchlari ta'sir etadi. Shu sababli

tashqi kuchlar bosh vektorining x o'qdagi proektsiyasi nolga teng bo'ladi, ya'ni $R_x^e = 0$.

U holda x o'q bo'yicha sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni (21.29) ga asosan

$$Q_x = Q_{x_0}$$

tenglik bilan ifodalanadi, bu erda

$$Q_{x_0} = m(v_{x_0} + u_{x_0}) + Mv_{x_0}, Q_x = (M + m)v_x$$

bo'lgani uchun quyidagi hosil bo'ladi:

$$(M + m)v_x = m(v_{x_0} + u_{x_0}) + Mv_{x_0}$$

Bundan izlanayotgan tezlikni topamiz: $v_x = v_{x_0} + \frac{m}{M + m}u_{x_0}$.

21.5-§. Sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema

Sistema harakat miqdori o'zgarishi haqidagi teoremadan foydalanib, sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremani keltirib chiqaramiz.

(21.6) dan \bar{Q} ning qiymatini (21.23) ga qo'yamiz:

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{R}^e \quad (21.30)$$

yoki

$$M\bar{a}_c = \bar{R}^e \quad (21.31)$$

bu erda $\bar{a}_c = \frac{d\bar{v}_c}{dt}$ — sistema massalar markazining tezlanishi.

(21.30) yoki (21.31) tenglamalar sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremani ifodalaydi: sistemaning massalar markazi massasi butun sistema massasiga teng va sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori ta'siridagi moddiy nuqta kabi harakatlanadi.

Sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema va sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremlar bitta teoremaning turli ko'rinishlari-dir.

(21.30) yoki (21.31) tenglamalarda ichki kuchlar qatnashmaydi. Shundan kelib chiqib, ichki kuchlar sistema massalar markazining harakatini o'zgartira olmaydi, degan natijani olamiz.

Agar tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa ($\bar{R}^e = 0$), (21.30) ga ko'ra,

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$$

bundan

$$\vec{v}_c = \overline{const}$$

bo'ladi. Bu tenglik sistema massalar markazi harakatining saqlanish qonunini ifodalaydi. tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning massa-lar markazi tinch holatda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi. Agar sistemaning massalar markazi boshlang'ich paytda qo'zg'almas bo'lsa ($\vec{v}_c = 0$), sistemaning massa-lar markazi keyinchalik ham qo'zg'almasdan qoladi $\vec{r}_c = \overline{const}$.

(21.31) ni qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab, quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$M\ddot{x}_c = R'_x, M\ddot{y}_c = R'_y, M\ddot{z}_c = R'_z \quad (21.32)$$

(21.32) tenglamalar sistema massalar markazining qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga nisbatan harakat differensial tenglamalarini ifodalaydi.

Agar tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lmay, uning biror (masalan, Ox) o'qdagi proekstiyasi nolga teng, ya'ni $R'_x = 0$ bo'lsa, (21.32) ga ko'ra

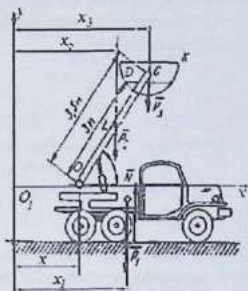
$$M \frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0$$

yoki

$$\dot{x}_c = v_{cx} = const \quad (21.33)$$

bo'ladi. Binobarin, sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar bosh vektorining biror qo'zg'almas o'qdagi proekstiyasi nolga teng bo'lsa, sistema massalar markazi tezligining mazkur o'qdagi proekstiyasi o'zgarmas bo'ladi. Agar boshlang'ich $t = 0$ paytda sistema massalar markazi tezligining x o'qdagi proekstiyasi v_{cx} nol bo'lsa, keyinchalik ham $v_{cx} = 0$ bo'ladi binobarin, $x_c = const$ bo'ladi, ya'ni sistemaning massalar markazi bu holda x bo'yicha ko'chmaydi. Bu natija sistema massalar markazi koordinatalarining saqlanish qonunini ifodalaydi.

21.5- masala. Massasi 1000 kg ga teng avtomashinaga elektr simlarni remont qilishda ishlatiladigan qo'zg'aluvchi aylanma kran o'rnatilgan. Kraning osma kajavasi K rasm tekisligiga perpendikulyar gorizontal O o'q atrofida aylana ola-digan L sterjenga biriktirilgan (21.7-ra-sm). Boshlang'ich paytda kran gorizontal holda va avtomashina tinch holatda bo'lgan. Agar kran $\alpha = 60^\circ$ burchakka aylansa, tormozlanmagan mashina qanday masofaga siljiydi. Bir jinsli L sterjenning uzunligi 3 metr va massasi 100 kg ga teng. Kajavaning massasi 200 kg bo'lib, uning massalar markazi O o'qdan $OC = 3,5$ m masofada joylashgan. Harakatga ko'rsatiladigan qarshilik kuch hisobga olinmasin.



21.7-rasm.

Yechish. Bu masalada avtomashina, L sterjen va K osma kajavadan tashkil topgan uchta jismdan iborat sistemaga egamiz. Ularning og'irlik kuchlari mos ravishda $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ ga teng, g'ildiraklarga normal reaksiya kuchlarining yig'indisi \vec{N} ga teng kuch ham ta'sir etadi. Bu kuchlarning barchasi vertikal bo'lgani uchun ularning gorizontal x o'qdagi proekstiyalarining yig'indi-si nolga teng bo'ladi.

$$R'_x = 0$$

Shu sababli (21.33) ga ko'ra massalar markazi tezligining x o'qdagi proekstiyasi o'zgarmas bo'ladi:

$$\dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const}$$

Boshlang'ich paytda $v_{Cx} = 0$ bo'lgani uchun

$$x_C = \text{const} \quad (1)$$

bo'ladi.

(20.5) ni e'tiborga olsak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m_3 x_{30}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

yoki

$$m_1(x_1 - x_{10}) + m_2(x_2 - x_{20}) + m_3(x_3 - x_{30}) = 0 \quad (2)$$

Bunda x_{10}, x_{20}, x_{30} avtomashina, L sterjen va K kajava massalari

markazining boshlang'ich paytdagi absstissalarini: x_1, x_2, x_3 lar esa kran $\alpha = 60^\circ$ burchakka ko'tarilgandan keyingi absstissalarini ifodalaydi.

21.7-rasmdan:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + x_{10}, x_2 = x + \frac{OD}{2} \cos \alpha, \\ x_3 &= x + OC \cos \alpha, x_{30} = \frac{OD}{2}, x_{30} = OC. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) ni (2) ga qo'yib, x siljishni topamiz:

$$x = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left[\frac{m_2 OD}{2} (1 - \cos \alpha) + m_3 OC (1 - \cos \alpha) \right] = 0,327 \text{ m}.$$

21.6- §. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani suyuqlikning stasionar oqimiga tadbqiqi. Eyler tenglamasi

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremadan tutash muhitlar di-namikasida ham foydalaniladi. Bu teoremani o'zgaruvchan kesimga ega bo'lgan quvur ichida harakatlanuvchi suyuqhkning stasionar oqimi uchun qo'llaymiz, ya'ni quvur devoriga perpendikulyar o'tkazilgan biror kesimdagi suyuqhk zarralarining tezklarini bir xil va vaqtga bog'hq emas deb qaraymiz.

Quvur devori hamda s_1, s_2 kesimlar bilan chegaralangan hajmdagi suyuqlikka hajm kuchlari (odatda, og'irlik kuchlari) va sirt kuchlari (masalan, suyuqhkning qu-vur devoriga ishqalanish kuchlari) ta'sir etadi.

Tashqi hajm kuchlarining bosh vektorini \vec{R}_s va tashqi sirt kuchlarining bosh vektorini \vec{R}_i bilan belgilaymiz.

Agar berilgan hajmdagi suyuqlikning biror paytdagi harakat miqdori \vec{Q} ga teng bo'lsa, harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_s + \vec{R}_i \quad (21.34)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Aytaylik, suyuqlik o'zgaruvchan kesimga ega bo'lgan quvur bo'ylab harakat-lansin (21.8- rasm). Suyuqlikning zichligini (ya'ni birlik hajmdagi massasini) ρ bi-lan belgilaylik. U holda s_1 kesimdagi suyuqlikning zichligi ρ_1 ga, s_2 kesimda esa ρ_2 ga teng bo'ladi.

$\rho_1 v_1 s_1$ va $\rho_2 v_2 s_2$ ko'paytmalar s_1 va s_2 kesimlar orqali vaqt birligi

ichida oqib o'tuvchi suyuqlik massalarini ifodalaydi. Massaning saqlanish qonuniga ko'ra

$$\rho_2 v_2 s_2 = \rho_1 v_1 s_1$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Istalgan kesim orqali vaqt birligi ichida oqib o'tuvchi suyuqlikning massasini M_c bilan belgilasak, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$M_c = \rho_2 v_2 s_2 = \rho_1 v_1 s_1 \quad (21.35)$$

SI birliklar sistemasida M_c kattalik $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ o'lchamga ega bo'ladi.

Aytaylik, t vaqtda s_1, s_2 yuzalar orasidagi suyuqlik hajmi τ ga teng bo'lsin;

$t + dt$ vaqt ichida xuddi shu massaga ega bo'lgan suyuqlik s_1, s_2 kesimlar bilan chegaralangan hajmni ishg'ol etadi (21.8- rasm). Shundan kelib chiqib, ko'rilayot-gan massa harakat miqdorining o'zgarishi s_1, s_1' yuzalar orasidagi suyuqlik harakat miqdorining kamayishi hamda s_2, s_2' yuzalar orasidagi suyuqlik harakat miqdorining ortishi hisobiga sodir bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Suyuqlikning oqimi stasionar bo'lganda s_1, s_2 kesimlar orqali dt vaqt ichida

$M_c dt$ suyuqlik massasi o'tadi hamda harakat miqdorlari $M_c dt \vec{v}_1$ va $M_c dt \vec{v}_2$ ga

teng bo'ladi. dt vaqt ichida harakat miqdorining o'zgarishini $d\vec{Q}$ bilan belgilasak,

$$d\vec{Q} = M_c dt \vec{v}_2 - M_c dt \vec{v}_1$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan

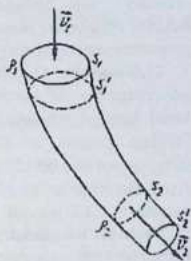
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M_c \vec{v}_2 - M_c \vec{v}_1 \quad (21.36)$$

munosabatni olamiz. Bu tenglamadagi $M_c \vec{v}_1$ va $M_c \vec{v}_2$ ko'paytmalar vaqt birligi ichidagi s_1, s_2 kesimlardagi harakat miqdorini ifodalaydi.

(21.36) ni (21.34) ga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$M_c \vec{v}_1 - M_c \vec{v}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_c = 0 \quad (21.37)$$

(21.37) tenglama Eylar tenglamasini ifodalaydi: quvurning ikkita ixtiyoriy ke-simi orqali oqib o'tuvchi suyuqlikning shu kesimlar

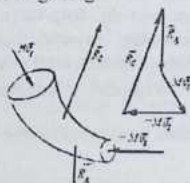


21 8-rasm.

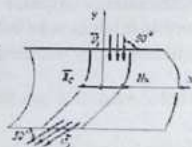
orasidagi vaqt birligidagi ha-jmning ichki tomoniga yo'nalgan harakat miqdorlari hamda hajm va sirt kuchlari bosh vektorlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'ladi (21.9- rasm).

21.6-masala. Qirqimi o'zgarib boradigan qo'zg'almas kanalga gorizontga $\alpha = 90^\circ$ burchak ostida $v_1 = 2$ m/s tezlik bilan suv kirmoqda; kanal vertikal tekislikka nisbatan simmetrik bo'lib, suv kiradigan joyidagi qirqimi $s_1 = 0,02$ m², suvning kanaldan chiqish joyidagi tezligi $v_2 = 4$ m/s bo'lib, gorizontga $\alpha = 30^\circ$ burchak ostida yo'nalgan. Kanal devorida suv hosil qiladigan reakstiyaning gorizont tuzuvchisi aniqlansin (21.10-rasm).

Yechish. Koordinata o'qlarini 21.10-rasmdagi-dek yo'naltiramiz. Kanal bo'ylab oqayotgan suv zarralariga har onda og'irlik kuchi va kanal devorida hosil bo'ladigan reakstiya kuchi ta'sir etadi. Og'irlik kuchlari hajm kuchlaridan iborat bo'lib, ularning bosh vektori kanalning berilgan hajmini ishg'ol etgan suvning og'irlik kuchiga teng va vertikal bo'ylab yo'nalganidan uning gorizont o'qdagi proekstiyasi nolga teng.



21.9-rasm.



21.10-rasm.

Kanal devorida suv hosil qiladigan reakstiya-ning gorizont tuzuvchisi N_x kanal devorida hosil bo'ladigan sirt kuchlaridan iborat reakstiya kuchi bosh vektorining gorizont tashkil etuvchisi X_c ga miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi. Kanalga kiruvchi suvning v_1 tez-ligi x o'qiga perpendikulyar va kanaldan chiquvchi suvning tezligi esa x o'q bilan 30° burchak tashkil etishini nazarda tutib, (21.38) ning birinchi tenglamasini qu-yidagicha tuzamiz.

$$M_1 v_1 \cos 90^\circ - M_2 v_2 \cos 30^\circ + X_c = 0$$

yoki

$$X_z = N_z \cdot M_z = \rho \cdot v_z \cdot S_z = \frac{\gamma}{g} v_z \cdot S_z, \gamma = 9803,92 \text{ N/m}^3 \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$$N_z = \frac{\gamma}{g} v_z \cdot S_z \cdot v_z \cdot \cos 30^\circ = \frac{9803,92}{9,81} \cdot 0,02 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 138 \text{ N bo'ladi.}$$

21.7-§. O'zgaruvchan massali jism xaqida tushuncha

Nazariy mexanikada asosan massalari o'zgarmas bo'lgan sistema va jismlar-ning harakati o'rganiladi. Lekin jismlar harakatlanganda unga moddiy zarralarning qo'shilishi yoki ajralishi natijasida jismlarning massasi sezilarli darajada o'zgari-shiga ko'plab misollar keltirish mumkin. Masalan, raketa aktiv uchastkada hara-katlanganda yoqilg'i yonib, undan ajralishi natijasida raketaning massasi kamaya boradi; aysberglarning erishi (yoki muzlashi) natijasida ularning massasi kamaya-di yoki ortadi; barabanga qog'oz, ip yoki kabelning o'ralishi natijasida uning mas-sasi ortadi va h.k.

Jism massasi o'zgarishining o'ziga xos xususiyatlarini o'rganishdan avval o'z-garuvchan massali jism tushunchasini kiritamiz.

Vaqt o'tishi bilan moddiy zarralarning qo'shilishi yoki ajralishi natijasida massasi uzluksiz ravishda o'zgaradigan jism *o'zgaruvchan massali jism* deyiladi.

21.8-§. I. V. Meshcherskiy tenglamasi

O'zgaruvchan massali nuqta uchun o'zgarmas massali nuqta dinamikasining asosiy qonunini bevosita qo'llash mumkin emas.

Yoqilg'i sarf bo'lishi natijasida massasi uzluksiz ravishda kamayib boruvchi raketani moddiy nuqta deb qarab, uning aktiv uchastkadagi harakat differensial tenglamasini chiqaramiz. Raketa massasi $M(t)$ ni vaqtning uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiyasidan iborat deb qaraymiz. Raketaning harakatini biror qo'zg'al-mas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiramiz. Ajraluvchi zarralarning raketaga ko'rsatadigan bosim kuchini ichki kuch deb olamiz, ya'ni raketa va undan ajraluvchi zarralami bitta mexanik sistema deb qaraymiz.

Aytaylik, biror t paytda raketaning massasi $M = M(t)$ va tezligi \vec{u} ga teng bo'l-sin. Shu paytdagi raketaning harakat miqdori

$$\vec{Q}_0 = M\vec{v}$$

bo'ladi. dt vaqt ichida raketadan absolyut tezligi \vec{u} ga teng dM massali zarralar ajralsin. Raketaning massasi kamayuvchi funkstiyadan iborat bo'lgani uchun $dM < 0$ va $dM = -dM$. $t + dt$ vaqtdan keyin sistema (raketa va undan ajralgan zarralar) ning harakat miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{Q} = [M - (-dM)] \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dM \cdot \vec{u}$$

dt vaqt ichida harakat miqdorining o'zgarishini $d\vec{Q}$ bilan belgilasak,

$$d\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

yoki

$$\begin{aligned} d\vec{Q} &= (M + dM) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dM \cdot \vec{u} - M\vec{v} = \\ &= Md\vec{v} + dM(\vec{v} - \vec{u}) + dM \cdot d\vec{v} \end{aligned} \quad (21.39)$$

Agar raketaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori \vec{F} bilan belgilansa, sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi (21.23) tenglamaga ko'ra,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} \quad (21.40)$$

(21.39) ni (21.40) ga qo'yib, $dM \cdot d\vec{v}$ ikkinchi tartibli kichik miqdorni e'tibor-ga olmasak,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt} (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F} \quad (21.41)$$

yoki $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_r$ — ajraluvchi zarralarning nisbiy tezligi ekanligini e'tiborga olsak,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dM}{dt} \vec{u}_r \quad (21.42)$$

tenglamani olamiz.

(21.41) yoki (21.42) tenglamalar o'zgaruvchan massali nuqtaning harakat differensial tenglamasini ifodalaydi. Bu tenglama I.V. Meshcherskiy tenglamasi deyiladi.

(21.42) da

$$\frac{dM}{dt} \vec{u}_r = \vec{\Phi} \quad (21.43)$$

kattalik kuch o'lchamiga ega bo'ladi; $\frac{dM}{dt}$ kattalik vaqt birligi ichidagi yoqilg'i massasining o'zgarishini ifodalaydi. $\vec{\Phi}$ kuch zarralarning

raketadan \vec{u} , nisbiy tezlik bilan ajralishi natijasida hosil bo'ladi va reaktiv kuch deyiladi.

(21.43) ni e'tiborga olib, (21.41) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi} \quad (21.44)$$

(21.44) tenglamadan ko'ramizki, har onda o'zgaruvchan massali nuqta massa-sini uning tezlanishiga ko'paytmasi mazkur nuqtaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori bilan reaktiv kuchning geometrik yig'indisiga teng.

Agar ajraluvchi zarralarning absolyut tezligi \vec{u} nolga teng bo'lsa, (21.41) ni

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dM}{dt} \vec{v}$$

yoki

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \vec{F} \quad (21.45)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Binobarin, agar ajraluvchi zarralar absolyut tezligi nolga teng bo'l-sa, o'zgaruvchan massali nuqtaning harakat differensial tenglamasi (21.45) bilan Nyutonning ikkinchi qonunini ifodalovchi tenglamalar bir xil ko'rinishga ega bo'ladi.

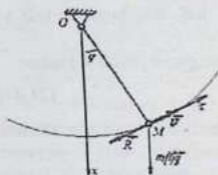
Shuningdek, ajraluvchi zarralarning nisbiy tezligi $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_r = 0$ bo'lsa, (21.42) dan

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (21.46)$$

tenglamani olamiz.

Shunday qilib, raketadan ajraluvchi zarralarning nisbiy tezligi nolga teng bo'l-sa, o'zgarmas massali nuqtaning harakat differensial tenglamasi (16.1) bilan o'zgaruvchan massali nuqtaning harakat differensial tenglamasi (21.46) bir xil ko'rinishga ega bo'ladi.

21.7-masala. Uzunligi l ga teng va massasi $m = m(t)$ qonun asosida o'zgaruvchi hamda burchak tezlikka proporsional bo'lgan $R = \beta \dot{\varphi}$ qarshilik kuchi ta'siri-dagi tebrangichning harakat tenglamasi tuzilsin. Tebrangichdan ajraluvchi zarra larning nisbiy tezligi nolga teng deb qaralsin.



21.11-rasm.

Yechish. Tebrangichga uning og'irlik kuchi $m(t)g$ va tezlikka qarama-qarshi yo'nalgan muhitning qarshilik kuchi R ta'sir etadi (21.11-rasm). Ajraluvchi zarralarning nisbiy tezligi $u_r = 0$ bo'lgani uchun $\dot{\Phi} = 0$. (21.44) ni M nuqtadan harakat traektoriyasiga o'tkazilgan urinmaga proektsiyalaymiz:

$$M \frac{dv}{dt} = F_r + \Phi, \quad (1)$$

Masala shartida $M = m(t)$, $F_r = -m(t)g \sin \varphi + R$, $\Phi = -\beta \varphi$, $\dot{\Phi}_r = 0$ bo'lgani uchun (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t)g \sin \varphi - \beta \varphi.$$

Bunda $v = l\dot{\varphi}$ bo'lgani uchun tebrangichning harakat differentsial tenglamasini

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\beta}{m(t)l} \varphi$$

ko'rinishda yozish mumkin.

21.9-§. Siolkovskiý formulasi

Yerning tortish kuchi va havoning qarshiligini hisobga olmay, raketaning faqat reaktiv kuch ta'siridagi harakatini tekshiramiz. Yoqilg'i yonishi natijasida raketa-dan ajraluvchi zarralarning absolyut tezligi \bar{u} , miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgar-mas bo'lib, raketaning tezligi \bar{v} ga qarama-qarshi yo'nalgan deb qaraymiz va yo-qilg'i yonib bo'lgan paytdagi raketaning tezligini aniqlaymiz. x o'qni raketa harakati bo'yicha yo'naltiramiz va $\vec{F} = 0$ ekanligini nazarda tutib, (21.42) ni bu o'qqa proektsiyalaymiz:

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} u,$$

yoki

$$dv = -\frac{dM}{M} u.$$

Bu tenglamani integrallaymiz:

$$v - v_0 = u_r \ln \frac{M_0}{M} \quad (21.47)$$

bunda v_0, M_0 — raketaning boshlang'ich paytdagi tezligi va massasi.

Agar raketa korpusi massasini M_k , yonilg'i massasini M_y bilan belgilasak, raketaning boshlang'ich paytdagi massasi $M_0 = M_k + M_y$, yoqilg'i yonib bo'l-gandan keyingi massasi $M = M_k$ bo'ladi. Yoqilg'i yonib bo'lgan paytda, ya'ni ak-tiv uchastka oxirida raketa eng katta tezlikka erishadi va bu tezlik (21.47) ga asosan

$$v_{\max} = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{M_y}{M_k} \right) \quad (21.47')$$

formuladan aniqlanadi.

Stolkovski soni deb ataladigan

$$z = \frac{M_y}{M_k} \quad (21.48)$$

kattalikni kiritsak, (21.47') ni quyidagicha yozish mumkin:

$$v_{\max} = v_0 + u_r \ln z \quad (21.49)$$

Bu formula *Stolkovski formulasi* deyiladi.

(21.49) dan ko'ramizki, aktiv uchastka oxirida raketaning tezligi uning boshlang'ich tezligi v_0 ga, ajraluvchi zarralarning nisbiy tezligi u_r ga, Stolkovski so-ni z ga bog'liq bo'ladi. Bundan raketaning maksimal tezligi yoqilg'ining tez yoki sekin sarflanishiga bog'liq bo'lmaydi, degan xulosaga kelamiz.

(21.49) dan v_0, u_r, z ortgan sari raketa tezligi ham ortishini ko'ramiz. Yerning sun'iy yo'ldoshlarini uchirishda v_0 ni oshirish uchun ko'p bosqichli raketadan foydalaniladi. Biror bosqichdagi yoqilg'i yonib bo'lgach, bu bosqich raketadan avtomatik tarzda ajraladi va raketa qo'shimcha boshlang'ich tezlik oladi. u_r, z lami oshirish raketa konstruktiviyasi va yoqilg'i turiga bog'liq.

Agar raketaning boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lsa, (21.47') ni quyidagi-cha yozish mumkin:

$$v_{\max} = u_r \ln z \quad (21.50)$$

Bu formula ham *Stolkovski formulasi* deb ataladi. (21.50) dan

$$z = e^{\frac{v}{u_r}} \quad (21.51)$$

munosabatni olamiz.

21.8-masala. Uch bosqichli raketa ilgari lama harakat qiladi, unga Yerning tor-tish kuchi va atmosfera qarshiligi ta'sir etmaydi. Har bir bosqich uchun ajralish effektiv tezligi va Siolkovskiy soni bir xil bo'lib, $v_e = 2500$ m/s, $z=4$. Birinchi, ik-kinchi va uchinchi bosqichlarda yoqilg'i yonib tugagan paytdagi raketaning tez-liklari aniqlansin.

Izoh. Erning tortish kuchi va atmosferaning qarshiligi hisobga olinmagan holda raketa uchun ajrahsh effektiv tezligi \bar{v} , va ajraluvchi zarralarning nisbiy tezligi \bar{u} , o'zaro teng bo'ladi $\bar{v} = \bar{u}$.

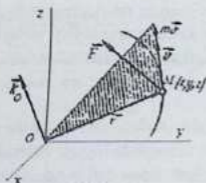
Yechish. Izlanayotgan tezliklarni v_1, v_2, v_3 bilan belgilasak, (21.50) va (21.49) Siolkovskiy formulalariga ko'ra

$$v_1 = v_e \ln z = 2500 \ln 4 = 3465 \text{ m/s,}$$

$$v_2 = v_1 + v_e \ln z = 3465 + 2500 \ln 4 = 6930 \text{ m/s,}$$

$$v_3 = v_2 + v_e \ln z = 6930 + 2500 \ln 4 = 10395 \text{ m/s.}$$

21.10-§. Moddiy nuqta harakat miqdorining momenti va sistemaning kinetik momenti



21.12-rasm.

Massasi m harakat tezligi \bar{v} ga teng M nuqtaning biror O markazga nisbatan radius-vektori \vec{r} ga teng bo'lsin. O markazga nisbatan nuqta harakat miqdorining momenti deb,

$$\vec{k}_0 = \vec{M}_O(m\bar{v}) = \vec{r} \times m\bar{v} \quad (21.52)$$

ga teng vektor kattalikka aytiladi (21.12-rasm).

M nuqta harakat miqdorining momenti \vec{k}_0 moment markazi O nuqtaga

qo'yila-di.

Koordinatalar boshini O markazda olib, qo'zg'almas x, y, z o'qlarni o'tkazsak, (21.52) ni

$$\vec{k}_0 = \vec{M}_O(m\bar{v}) = \vec{r} \times m\bar{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglikni koor-dinata o'qlariga proekstiyalab, o'qlarga nisba-tan harakat miqdorining momentlarini

aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= M_x(m\vec{v}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ k_y &= M_y(m\vec{v}) = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ k_z &= M_z(m\vec{v}) = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned} \right\} \quad (21.52')$$

SI birliklar sistemasida harakat miqdori momenti $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ yoki $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ bilan o'lchanadi.

Mexanik sistema barcha nuqtalarining O markazga nisbatan harakat miqdori momentlarining geometrik yig'ini

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O(m_i \vec{v}_i) = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (21.53)$$

ga teng vektor *sistemaning O markazga nisbatan kinetik momenti yoki sistema harakat miqdorining bosh momenti* deyiladi.

Sistema kinetik momenti \vec{K}_O moment markazi O nuqtaga qo'yiladi.

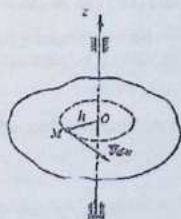
Agar mexanik sistema nuqtalari biror hajm (sirt yoki chiziq bo'yicha) uzluksiz taqsimlangan bo'lsa, u holda (21.53) da yig'ini o'rniqa massaning qanday taqsimlanishiga mos integral olinadi.

(21.53) ni koordinata o'qlariga proektsiyalab, mos o'qlarga nisbatan sistema-ning kinetik momentini aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum M_x(m_i \vec{v}_i) = \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \\ K_y &= \sum M_y(m_i \vec{v}_i) = \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) \\ K_z &= \sum M_z(m_i \vec{v}_i) = \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \end{aligned} \right\} \quad (21.53')$$

Sistema harakat miqdori uning massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarihlama harakatini, kinetik momenti esa uning aylanma harakatini xarakterlaydi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti. z o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanuvchi jismning z o'qiga nisbatan kinetik momenti K_z ni hisoblaymiz (21.13-rasm). Buning uchun jismdan massasi dm ga teng M bo'lakchasini ajratamiz va uni moddiy nuqta deb qaraymiz. Jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanganda bu bo'lakcha markazi aylanish o'qidagi O nuqtada yotuvchi va radiusi h ga teng aylana bo'ylab harakatlanadi. M nuqtaning tezligi



21.13- rasm.

\vec{v} mazkur aylanaga M nuqtada o'tkazilgan urinma bo'y-lab yo'nalgani uchun $\vec{v}dm$ ham urinma bo'y-lab yo'naladi. Shu sababli z o'qqa nisbatan M bo'lakcha harakat miqdorining momenti $k_z = M_z(\vec{v}dm) = vdmh = \omega h^2 dm$ ga teng bo'ladi. Butun jism kinetik momenti esa $K_z = \int_{(M)} \omega h^2 dm = \omega \int_{(M)} h^2 dm$ ga teng bo'ladi.

(20.8) ga ko'ra, $\int_{(M)} h^2 dm = I_z$ bo'lganidan quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$K_z = I_z \cdot \omega \quad (21.54)$$

Demak, *qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti jismning mazkur o'qqa nisbatan inerstiya momenti bilan burchak tezligining ko'paytmasiga teng.*

Agar sistema qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi bir necha jismdan tashkil topgan bo'lsa, uning kinetik momenti

$$K_z = I_{1z} \cdot \omega_1 + I_{2z} \cdot \omega_2 + \dots + I_{nz} \cdot \omega_n \quad (21.55)$$

formula yordamida hisoblanadi. Bunda $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ lar har bir jismning burchak tezligini, $I_{1z}, I_{2z}, \dots, I_{nz}$ lar esa jismlarning z o'qqa nisbatan inerstiya momentlarini ifodalaydi.

21.11-§. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqida teorema

M nuqtaning massasi m ga teng bo'lib, \vec{F} kuch ta'sirida \vec{v} tezlik bilan harakatlansin. Bunday nuqta uchun dinamikaning asosiy qonunini (16.1) ga asosan $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Bu tenglamaning har ikkala tomonini nuqtaning radius-vektori \vec{r} ga vektorli ko'paytiramiz

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (21.56)$$

Tenglamaning chap tomonidagi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}$$

Ammo $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ga teng va $\vec{v} \times m\vec{v}$ vektor ko'paytma nolga teng. Shu

sababli $\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$ tenglik o'rinli bo'ladi. Natijada (21.56) dan

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (21.57)$$

tenglamani olamiz.

(21.52) ga ko'ra $\vec{k}_o = \vec{M}_o(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$ vektori nuqtaning O markazga nisbatan harakat miqdori momentini ifodalaydi.

Statika bo'limida ko'rganimizdek, $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ tenglik M nuqtaga qo'yil-gan \vec{F} kuchning O markazga nisbatan momentini ifodalaydi.

Shunday qilib

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{M}_o(\vec{F}) \quad (21.58)$$

yoki

$$\frac{d\vec{k}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}) \quad (21.59)$$

tenglama o'rinli bo'ladi.

(21.58) yoki (21.59) tenglamalar nuqta harakat miqdori momentining o'zga-rishi haqidagi quyidagi teoremani ifodalaydi: moddiy nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas markazga nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu markazga nisbatan momentiga teng.

(21.59) ni Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab, nuqta harakat miqdori-ning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari o'zgarishi haqidagi teoremani olamiz:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_y(\vec{F}), \quad \frac{dk_y}{dt} = M_z(\vec{F}), \quad \frac{dk_z}{dt} = M_x(\vec{F}) \quad (21.60)$$

ya'ni moddiy nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu o'q-qa nisbatan momentiga teng.

Koordinata o'qlariga nisbatan kinetik momentning ifodasi (21.52) va kuchning o'qqa nisbatan momenti uchun o'rinli bo'lgan (6.9) larni nazarda tutib, (21.60) ni quyidagicha yozamiz:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) &= yZ - zY \\ m \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) &= zX - xZ \\ m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) &= xY - yX \end{aligned} \right\} \quad (21.61)$$

21.12-§. Nuqtaning markaziy kuch ta'siridagi harakati. Yuzalar qonuni

Ta'sir chizig'i hamisha fazoning biror qo'zg'almas nuqtasi orqali o'tuvchi kuch *markaziy kuch* deyiladi. Masalan, Yerga hamisha Quyosh markaziga yo'nalgan uning tortish kuchi ta'sir etadi.

M nuqtaga \vec{F} markaziy kuch ta'sir etsin (21.14-rasm). \vec{F} kuchning ta'sir chizig'i hamisha O nuqtadan o'tgani tufayh uning shu nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi. Binobarin, (21.59) ga asosan

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = 0$$

ya'ni, O markazga nisbatan nuqta harakat miqdorining momenti o'zgarmas vektor-dan iborat bo'ladi:

$$\vec{k}_O = M_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{c} \quad (21.62)$$

Bu tenglama nuqta harakat miqdori momentining saqlanishi haqidagi quyidagi qonuni ifodalaydi: markaziy kuch ta'siridagi nuqta harakat miqdorining kuch markaziga nisbatan momenti o'zgarmasdan qoladi.

(21.62) ni Dekart koordinata o'qlariga proektsiyalab, nuqta harakat differentsial tenglamalarining uchta skalyar birinchi integralini olamiz:

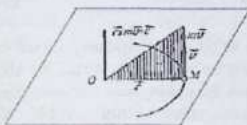
$$\left. \begin{aligned} m(y\dot{z} - z\dot{y}) &= C_1 \\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) &= C_2 \\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= C_3 \end{aligned} \right\} \quad (21.63)$$

bunda C_1, C_2, C_3 lar integrallash doimiylari bo'lib, harakatning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi.

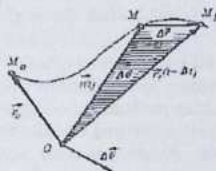
(21.62) ga quyidagicha geometrik interpretatsiya berish mumkin: \vec{r} va \vec{v} yot-gan tekishka har onda perpendikulyar yo'nalgan $\vec{r} \times m\vec{v}$ vektori hamisha o'zgar-mas yo'nahshga ega bo'ladi. Shu sababli $\vec{r}, m\vec{v}$ vektorlari doimo O markazdan o'tuvchi bir tekislikda yotadi.

Binobarin, markaziy kuch ta'siridagi nuqtaning traektoriyasi bir tekislikda yotuvchi egri chiziqdan iborat bo'ladi. Bu egri chiziq bo'yicha harakat qanday qonun asosida sodir bo'lishini aniqlash uchun nuqtaning *sek-tor tezligi* tushunchasini kiritamiz.

Aytaylik, t vaqtda nuqta o'z traektoriyasida M holatni, $t + \Delta t$ vaqtda M_1 holatni egallasin (21.15-rasm). Agar OMM_1 uchburchak yuzini $\Delta\sigma$ bilan belgilasak, rasmdan $\Delta\sigma$ yuzi \vec{r} radius-vektor bilan $\Delta\vec{r}$ ko'chish vektorining vektorli ko'payt-masi modulining yarmiga teng bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.



21.14- rasm.



21.15- rasm.

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

Quyidagi formula yordamida aniqlanadigan

$$\Delta\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta\vec{r} \quad (21.64)$$

yuza vektorini kiritamiz.

Yuza vektori $\Delta\vec{\sigma}$ ning shu yuzaga mos Δt vaqt oralig'iga nisbatining $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti *nuqtaning O markazga nisbatan sektor tezligi* deyiladi.

Shunday qilib, sektor tezligi uchun

$$\vec{\omega}_o = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Sektor tezligi $\vec{\omega}_o$ ni nuqta tezligi \vec{v} orqali ifodalash uchun (21.64) ning ikkala tomonini Δt ga bo'lib, $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz:

$$\vec{\omega}_o = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

yoki

$$2\vec{\omega}_o = (\vec{r} \times \vec{v}) = M_o(\vec{v}) \quad (21.65)$$

Binobarin, *nuqtaning biror markazga nisbatan ikkilangan sektor*

tezligi shu nuqta tezligining mazkur markazga nisbatan momentiga teng.

Agar nuqta bir tekislikda harakatlansa, u holda qutb koordinatalarini kiritib, sektor tezligining miqdori uchun ushbu formulani olamiz:

$$v_{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} r v_{\tau} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \quad (21.66)$$

(21.65) ning ikkala tomonini t ga ko'paytirsak,

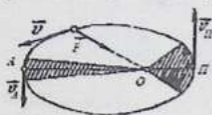
$$2m\vec{v}_{\sigma} = (\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{k}_0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni (21.62) bilan solishtirib,

$$\vec{k}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = 2m\vec{v}_{\sigma} = \vec{c} \quad (21.67)$$

bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, markaziy kuch ta'siridagi nuqtaning sektor tezligi o'zgarmas bo'ladi, ya'ni nuqtaning radius-vektori ikkita bir xil vaqt oralig'ida o'zaro teng yuzalar chizadi. Bu natija yuzalar qonuni deyiladi. Yuzalar qonuni planetalar harakati uchun o'rinli bo'lib, Kepler qonunlaridan birini ifodalaydi.



21.16-rasm.

Agar 21.16-rasmda tasvirlangan ellips biror planetaning orbitasini ifodalasa hamda uning O fokusida Quyosh yotsa, u holda perigeliy deb ataladigan Π nuqtada planeta eng katta \vec{v}_{Π} tezlikka, afeliy deb ataladigan A nuqtada eng kichik \vec{v}_A tezlikka ega

bo'ladi. Bu natijani \vec{v}_{Π} va \vec{v}_A tezliklarning O nuqtaga nisbatan momentlarining tengligidan keltirib chiqarish mumkin:

$$v_{\Pi} \cdot OH = v_A \cdot OA$$

(21.66) ni nazarda tutib, (21.67) ga ko'ra yuzalar qonunini yana quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$mr^2 \dot{\varphi} = const$$

yoki

$$r^2 \dot{\varphi} = const \quad (21.68)$$

Agar nuqtaga ta'sir etuvchi noldan farqli \vec{F} kuch butun harakat davomida z o'q-qa parallel bo'lsa yoki uning ta'sir chizig'i z o'qni kesib o'tsa, u holda (21.60) ning uchinchi tenglamasiga ko'ra

$$k_z = M_z(m\vec{v}) = const \quad (21.69)$$

bo'ladi, ya'ni nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan mo-menti hamisha nolga teng bo'lsa, u holda nuqtaning shu o'qqa nisbatan kinetik momenti o'zgarmasdan qoladi. Bu xulosa nuqta kinetik momentining berilgan o'qqa nisbatan saqlanish qonunini ifodalaydi.

21.13-§. Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqida teorema

N ta nuqtadan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan barcha bog'lanishlarni bog'lanish reaktsiya kuchlari bilan almashtirib, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha kuchlarni (jumladan, bog'lanish reaktsiya kuchlarini ham) \vec{F}_v^* tashqi va \vec{F}_v^i ichki kuchlarga ajratamiz. Natijada bunday sistema nuqtalarini erkin deb qarab, ularning har biri uchun kinetik momentning o'zgarishi haqidagi (21.58) teoremani qo'llash mumkin:

$$\frac{d}{dt} \vec{M}(m, \vec{v}_v) = \vec{M}_o(\vec{F}_v^*) + \vec{M}_o(\vec{F}_v^i), (v = 1, 2, \dots, N)$$

Bu tenglamalarni qo'shsak,

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{M}(m, \vec{v}_v) = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_v^*) + \sum \vec{M}_o(\vec{F}_v^i) \quad (21.70)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(21.70) da (21.53) ga ko'ra $\vec{K}_o = \sum \vec{M}_o(m, \vec{v}_v) = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v$ sistemaning kine-tik momentini ifodalaydi.

Barcha tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng

$$\vec{M}_o^* = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_v^*) \quad (21.71)$$

kattalik tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi.

(20.2) ga ko'ra barcha ichki kuchlarning O nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng:

$$\sum \vec{M}_o(\vec{F}_v^i) = 0$$

Shunday qilib, (21.70) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o^* \quad (21.72)$$

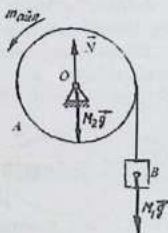
Olingan tenglama sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi ushbu teoremani ifodalaydi: sistemaning biror qo'zg'almas

nuqtaga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.

(21.72) ni ikkala tomonini qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab, quyidagi tengliklarni olamiz:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x', \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y', \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z' \quad (21.73)$$

(21.73) tenglamalar qo'zg'almas koordinata o'qlariga nisbatan sistema ki-netik momenti haqidagi teoremani ifodalaydi: *sistemaning biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila sistema nuqta-lariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan bosh momentiga teng.*



21.17-rasm.

Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqi-dagi teoremadan jismning qo'zg'almas o'q atro-fidagi aylanma harakati, sferik hapakati (jumladan, giroskoplarning harakati) ni o'rganishda samarali foydalaniladi.

(21.72) va (21.73) tenglamalardan ko'rinib tu-ribdiki, ularda ichki kuchlar qatnashmaydi. Faqat ichki kuchlar sistemaning kinetik momentini o'z-gartira olmaydi. Ichki kuchlar bilvosita tashqi kuchlar bilan birgalikda sistema kinetik momentining o'z-ga-rishiga ta'sir etishi mumkin.

21.9-masala. Elektr chig'iriqni yurgizish paytida uning A barabaniga vaqtga pro-porsional aylantiruvchi moment $m_{0z} = at$ qo'yiladi, bunda a — o'zgarmas miqdor. M_1 massali B yuk massasi M_2 ga teng va r radiusli A barabanga o'raladigan arqon vositasi-da ko'tariladi (21.17-rasm). Barabanni doiraviy stilindr deb hisoblab, uning burchak tezligi aniqlansin. Boshlang'ich paytda chig'iriq tinch holtda bo'ladi deb hisoblanadi.

Yechish. Chig'iriq barabani va B yukni sistema deb qarasa-k, barabanga uning og'irlik kuchi M_2g , tayanch reakstiya kuchi \vec{N} va m_{0z} aylantiruvchi moment ta'sir etadi. B yukka esa uning og'irlik kuchi M_2g qo'yil-gan.

O nuqtada rasm tekisligiga perpendikulyar yo'nal-gan Oz o'qni

o'tkazib, bu o'qqa nisbatan kinetik mo-mentning o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llaymiz. (21.73) ning uchinchi tenglamasi

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z' \quad (1)$$

dan foydalanamiz. (21.54) ga asosan

$$K_z = I\omega \quad (2)$$

bunda

$$I = \frac{M_2 r^2}{2} + M_1 r^2 \quad (3)$$

bo'lib, baraban va B yukning z o'qqa nisbatan inertiya momentini; ω esa barabanning burchak tezligini bildiradi. Ta'sir etuvchi kuchlar rasm tekisligida yotganidan $M_z' = M_z'$ tenglik o'rinli bo'ladi. $M_2 \bar{g}$ va \bar{N} kuchlar O nuqtaga qo'yilgani uchun ularning shu nuqtaga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Shu sababli

$$M_z' = M_z' = m_{am} - M_1 gr = at - M_1 gr \quad (4)$$

(2) va (4) ni (1) ga qo'yib, o'zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \frac{1}{I} \int_0^t (at - M_1 gr) dt, \text{ bundan } \omega = \frac{1}{I} \left(\frac{at^2}{2} - M_1 grt \right)$$

(3) ni e'tiborga olsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\omega = \frac{t(at - 2M_1 gr)}{r^2(2M_1 + M_2)}$$

21.14-§. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni

Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan quyidagi natijalarni olamiz.

1. Agar sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lsa, sistemaning shu nuqtaga nisbatan kinetik momenti miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar $\bar{M}'_O = 0$ bo'lsa, (21.72) ga ko'ra

$$\frac{d\bar{K}'_O}{dt} = 0$$

bo'ladi. Bundan

$$\bar{K}'_O = \overline{\text{const}} \quad (21.74)$$

2. Agar sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o'qqa (ma-salan, Oz o'qqa) nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lsa,

sistemaning shu o'qqa nisbatan kinetik momenti harakat davomida o'zgarmasdan qoladi.

Agar $M_z' = 0$ bo'lsa, (21.73) ga asosan

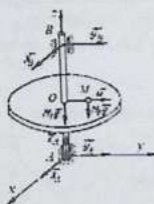
$$\frac{dK_z}{dt} = 0$$

bo'ladi, bundan esa

$$K_z = \text{const} \quad (21.75)$$

ekanligi kelib chiqadi.

(21.74) va (21.75) tenglamalar sistema kinetik momentining saqlanish qonunini ifodalaydi.



21.18-rasm.

21.10-masala. Massasi M_1 va radiusi r ga teng bir jinsli disk o'z markazidan o'tuvchi vertikal o'q atrofida ω_1 boshlang'ich burchak tezlik bilan aylanadi. Boshlang'ich paytda disk markazidan uning radiusi bo'ylab M_2 massali nuqta u tezlik bilan harakat qiladi (21.18-rasm). Tayanch nuqtalaridagi ishqalanish kuchlarini hisobga olmay diskning biror t_1 vaqtdan keyingi hamda nuqta diskning gardishiga etgan t_2 paytdagi ($t_1 < t_2$) aylanish burchak tezliklari ω_1, ω_2 aniqlansin.

Yechish. r radiusli disk va M nuqtani sistema deb qarasaq, sistema nuqtalari-ga disk va nuqtaning og'irlik kuchlari $M_1 \vec{g}$ va $M_2 \vec{g}$ hamda A va B nuqtalarning tayanch reaksiya kuchlari $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ lar ta'sir etadi. Bu kuchlardan $M_1 \vec{g}, M_2 \vec{g}, \vec{Z}_A$ lar z o'qqa parallel hamda $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ lar z o'qni kesib o'tgani uchun ularning shu o'qqa nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Binobarin,

$$M_z' = 0$$

Shu sababli z o'qqa nisbatan kinetik momentning saqlanish qonunini ifodalovchi $K_z = \text{const}$ yoki

$$K_{oz} = K_{1z} = K_{2z} \quad (1)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bunda K_{oz}, K_{1z}, K_{2z} lar sistemaning boshlang'ich paytdagi, t_1, t_2 vaqtdan keyingi kinetik momentlarini ifodalaydi. (21.54), (21.52') va (20.25) ga ko'ra

$$K_{oz} = I \cdot \omega_0 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_0 \quad (2)$$

$$K_{1z} = I \cdot \omega_1 + M_2 O M_2^2 \omega_1 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_1 + M_2 a^2 l_1^2 \omega_1 = \frac{\omega_1}{2} (M_1 r^2 + 2M_2 a^2 l_1^2) \quad (3)$$

$$K_{2z} = I \cdot \omega_2 + M_2 r^2 \omega_2 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_2 + M_2 r^2 \omega_2 = \frac{\omega_2}{2} (M_1 + 2M_2) r^2 \quad (4)$$

ifodalarni olamiz.

(2), (3) va (4) ni (1) ga qo'yib, ω_1, ω_2 larni aniqlaymiz:

$$\omega_1 = \frac{M_1 r^2 \omega_2}{M_1 r^2 + 2M_2 a^2 l_1^2}$$

$$\omega_2 = \frac{M_1 \omega_1}{M_1 + 2M_2}$$

21.15-§. Murakkab harakatdagi sistemaning kinetik momenti

Ko'pincha moddiy nuqtalar sistemasining qo'zg'almas koordinatalar sistema-siga nisbatan harakatini murakkab harakatdan iborat deb qarab, uni sodda harakat-larga ajratish sistema kinetik momentini hisoblashni osonlashtiradi.

Qo'zg'almas $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistema-siga nisbatan sistema massalar markazi bilan ilgari lama harakat qiluvchi $Cxyz$ koordinatalar sistemasini kiritamiz (21.19-rasm).

Massasi m , ga teng sistemaning ixtiyoriy M nuqtasining O nuqtaga nisbatan radius-vektorini \vec{r} , massalar markazidagi C nuqtaga nisbatan radius-vektorini $\vec{\rho}$, hamda C nuqtaning $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorini \vec{r}_c bilan belgilasak,

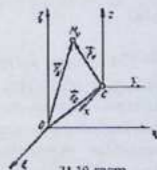
$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{\rho}, \quad (21.76)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Kinematika bo'limidagi (13.8) ga ko'ra, M nuqtaning qo'zg'almas $O\xi\eta\zeta$ ko-ordinatalar sistemasiga nisbatan tezligi \vec{v}_n nisbiy va \vec{v}_c ko'chirma tezliklarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_c$$

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini ilgari lama harakatda bo'lgani uchun $\vec{v}_n = \vec{v}_c$, $\vec{v}_c = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$. Binobarin,



21.19-rasm.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_n \quad (21.77)$$

(21.53) ga ko'ra, qo'zg'almas O nuqta va sistemaning massalar markazi C ga nisbatan sistemaning kinetik momentlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O(m_i \vec{v}_i) = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (21.78)$$

$$\vec{K}_C = \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_n \quad (21.79)$$

\vec{K}_O va \vec{K}_C lar orasidagi bog'lanishni topish uchun (21.78) ga \vec{r}_i ning qiymatini (21.76) dan, \vec{v}_i ning qiymatini (21.77) dan keltirib qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_c + \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_c + \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_n + \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_n = \\ &= \vec{r}_c \times (\sum m_i) \vec{v}_c + (\sum m_i \vec{r}_c) \times \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \sum m_i \vec{v}_n + \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_n \end{aligned} \quad (21.80)$$

(21.80) da $\sum m_i = M$ — butun sistema massasi; (20.4) ga asosan $\sum m_i \vec{r}_c = M \vec{r}_c = 0$ (chunki C nuqta koordinatalar boshida olingan),

$\sum m_i \vec{v}_n = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_c = 0$ hamda (21.79) ga ko'ra $\sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_n = \vec{K}_C$ bo'lgani uchun uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{K}_C \quad (21.81)$$

yoki

$$\vec{K}_O = \vec{M}_O(M \vec{v}_c) + \vec{K}_C \quad (21.82)$$

(21.82) dan ko'ramizki, *sistemaning biror qo'zg'almas markazga nisbatan ab-solyut harakatining kinetik momenti, massasi butun sistema massasiga teng deb qaraladigan sistema massalar markazining shu nuqtaga nisbatan kinetik momenti bilan sistemaning massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momenti-ning geometrik yig'indisiga teng*. Bunda sistemaning nisbiy harakati, koordinatlar boshi sistemaning massalar markazi bilan ustma-ust tushuvchi va ilgari harakatdagi $Cxyz$ sistemasiga nisbatan qaraladi.

(21.82) ni qo'zg'almas $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasi o'qlariga proektsiyalab, quyidagi uchta skalyar tengliklarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= M_x(M \dot{v}_c) + K'_{cx}, \\ K_y &= M_y(M \dot{v}_c) + K'_{cy}, \\ K_z &= M_z(M \dot{v}_c) + K'_{cz} \end{aligned} \right\} \quad (21.83)$$

21.16-§. Sistema massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema

(21.76) ni nazarda tutib, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning bosh momentini quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\vec{M}'_O = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}'_i = \sum (\vec{r}'_c + \vec{\rho}'_i) \times \vec{F}'_i = \vec{r}'_c \times \sum \vec{F}'_i + \sum \vec{\rho}'_i \times \vec{F}'_i$$

yoki

$$\vec{M}'_O = \vec{r}'_c \times \vec{R}' + \vec{M}'_c \quad (21.84)$$

bunda \vec{R}' — sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori; \vec{M}'_c — tashqi kuchlarning sistema massalar markaziga nisbatan bosh momenti.

(21.81) va (21.84) ga asosan sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.72) tenglamani

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}'_c \times M \vec{v}'_c) + \frac{d\vec{K}'_c}{dt} = \vec{r}'_c \times \vec{R}' + \vec{M}'_c$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu tenglamani vektor ko'paytma ta'rifiga ko'ra quyidagicha yoza olamiz:

$$(\vec{r}'_c \times M \vec{a}'_c) + \frac{d\vec{K}'_c}{dt} = \vec{r}'_c \times \vec{R}' + \vec{M}'_c \quad (24.85)$$

Massalar markazining harakati haqidagi teoremani ifodalovchi (21.31) tenglamaga asosan

$$M \vec{a}'_c = \vec{R}'$$

Bu tenglamani ikkala tomonini \vec{r}'_c ga vektorli ko'paytirsak,

$$\vec{r}'_c \times M \vec{a}'_c = \vec{r}'_c \times \vec{R}'$$

Binobarin, (21.85) dan

$$\frac{d\vec{K}'_c}{dt} = \vec{M}'_c \quad (21.86)$$

formulani olamiz. Bu formula *sistemaning massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani* ifodalaydi: *sistema massalar markaziga nisbatan hisoblangan sistemaning kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning massalar markaziga nisbatan bosh momentiga teng.*

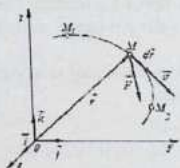
(21.86) da $\vec{M}'_c = 0$ bo'lsa,

$$\vec{K}'_c = \vec{c} \quad (21.87)$$

o'rinli bo'ladi.

(21.87) tenglik sistema massalar markaziga nisbatan kinetik momentning saqlanishi qonunini ifodalaydi: agar sistema massalar markaziga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo'lsa, u holda sistemaning massalar markaziga nisbatan kinetik momenti o'zgarmasdan qoladi.

21.17-§. Kuchning ishi va quvvati



21.20-rasm.

Aytaylik, $Oxyz$ inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektori \vec{r} ga teng M nuqta miqdor va yo'nalish jihatdan o'zga-ruvchi \vec{F} kuch ta'sirida biror egri chiziqli traektoriya bo'ylab harakatlansin (21.20-rasm). M nuqtaning dt vaqt ichidagi elementar ko'chishini $d\vec{r}$ bilan belgilasak, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (21.88)$$

Kinematika bo'limida ko'rganimizdek (8.4-§), elementar ko'chishning moduli traektoriyaning M nuqtadagi yoy uzunligi differensial ds ga yoki o'tilgan yo'l differensial $d\sigma$ ga teng:

$$|d\vec{r}| = ds = d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (21.89)$$

\vec{F} kuchning elementar ishi deb, shu kuch bilan u qo'yilgan nuqta elementar ko'chishining skalyar ko'paytmasiga teng

$$dA = \vec{F}d\vec{r} \quad (21.90)$$

kattalikka aytiladi.

(21.89) ni nazarda tutib, skalyar ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra, (21.90) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$dA = Fd\sigma \cos(\vec{F}, \vec{v}) \quad (21.91)$$

M nuqtaning traektoriyadagi holatini yoy koordinatasi bilan ham aniqlash mumkin. Sanoq boshi uchun O nuqtani olib, M nuqtada traektoriyaga o'tkazilgan urinmaning birlik vektori \vec{e}^0 ni yoy koordinatasi ortadigan tomonga yo'naltiramiz. Natijada (21.91) ni quyidagicha ham yozish mumkin.

$$dA = Fds \cos(\vec{F}, \vec{e}^0) \quad (21.92)$$

\vec{F} kuchning urinma va normaldagi proektsiyalari quyidagicha

aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} F_t &= F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0) \\ F_n &= F \cos(\vec{F}, \vec{n}^0) \end{aligned} \right\} \quad (21.93)$$

(21.93) dagi birinchi tenglikka ko'ra kuchning elementar ishi uchun yozilgan (21.92) formulani yana quyidagicha ifodalash mumkin:

$$dA = F_t ds \quad (21.94)$$

(21.94) dan ko'ramizki, ds elementar ko'chishda \vec{F} kuchning faqat urinma tashkil etuvchisi ish bajaradi; \vec{F}_n kuchning ds ko'chishdagi ishi nolga teng bo'la-di.

\vec{F} kuchning x, y, z o'qdagi proekstiyalarini X, Y, Z bilan belgilasak, (21.90) ga ko'ra elementar ish uchun

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz \quad (21.95)$$

formulani olamiz. Bu formula *kuch elementar ushining analitik ifodasi* deyiladi.

Kuchning chekli yo'ldagi ishi deb, elementar ishdan traektoriyaning yoyi bo'yicha olingan integral orqali ifodalanuvchi

$$A = \int_M^M \vec{F} d\vec{r} = \int_M^M F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0) ds \quad (21.96)$$

yoki

$$A = \int_M^M (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (21.97)$$

skalyar kattalikka aytiladi.

(21.96) formula *kuch ishining geometrik ifodasi*, (21.97) esa *kuch ishining ana-litik ifodasi* deyiladi.

SI birliklar sistemasida ish birligi uchun joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ yoki $1 \text{ N} = 0,102 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$) qabul qilingan.

Mexanikada ish tushunchasi bilan birga kuchning quvvati tushunchasi ham kiritiladi. Kuchning vaqt birligidagi ishi *kuchning quvvati* deyiladi.

Agar juda kichik dt vaqt ichidagi \vec{F} kuchning ishi $dA = \vec{F} d\vec{r}$ ga teng bo'lsa, ta'rifga ko'ra kuchning quvvati

$$N = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (21.98)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, kuchning quvvati kuch va tezlik vektorlarining

skalyar ko'payt-masiga teng.

Kuch quvvatining analitik ifodasi

$$N = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}$$

ko'rinishda yoziladi

(21.98) ga ko'ra

$$N = Fv \cos(\vec{F}, \vec{v}) \quad (21.99)$$

formula o'rinli bo'ladi.

SI birliklar sistemasida kuchning quvvati vatt (Vt) bilan o'lchanadi hamda $1 \text{ Vt} = 1 \text{ J/s}$ yoki $1 \text{ J} = 0,102 \text{ kgk m}$ bo'lgani uchun $1 \text{ Vt} = 0,102 \text{ kgk m/s}$. Texnika-da ko'pincha quvvat birligi uchun kilovatt (kVt), megavatt (MVt) va «ot kuchi» (o.k.) olinadi hamda $1 \text{ kVt} = 1000 \text{ Vt}$, $1 \text{ MVt} = 1000 \text{ 000 Vt}$, $1 \text{ o.k.} = 736 \text{ Vt}$.

21.18- §. Teng ta'sir etuvchining ishi

M moddiy nuqtaga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsa, bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (21.100)$$

ning ishi uchun quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. *Harakatlamuvchi M nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi kuchning biror chekli yo'lni o'tishdagi ishi tashkil etuvchi kuchlarning xuddi shu yo'l-ni o'tishdagi ishlarining algebratik yig'indisiga teng.*

Isbot. (21.96) ga asosan \vec{R} kuchning M_1, M_2 yo'lni o'tishdagi ishi uchun

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}$$

formula o'rinli bo'ladi. (21.100) ni nazarda tutib, bu formulani quyidagicha yozish mumkin

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_n d\vec{r} \quad (21.101)$$

Shunday qilib, teng ta'sir etuvchi kuchning ishi uchun

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

munosabatni olamiz

21.19-§. Ayrim hollarda kuchning ishini hisoblash

Quyidagi hollarda kuchning ishini hisoblashni ko'rib chiqamiz.

1. Agar $F_x = F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0)$ kattalik yoy koordinatasining funktsiyasidan iborat bo'lsa, u holda (21.96) ga ko'ra kuchning ishi uchun quyidagi munosabatni olasiz:

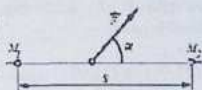
$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0) ds \quad (21.102)$$

bunda s_1, s_2 orqali M_1, M_2 nuqtalarning yoy koordinatalari belgilangan.

Xususiyl holda \vec{F} kuch miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'lsa,

$$A = F s \cos \alpha \quad (21.103)$$

formula yordamida aniqlanadi. Bunda s nuqta ko'chishini; $\alpha = \vec{F}, \vec{\tau}^0$ burchakni ifodalaydi (21.21-rasm).



21.21-rasm.

(21.103) da agar

$$\alpha = 0^\circ, A = F \cdot s,$$

$$\alpha = 180^\circ, A = -F \cdot s,$$

$$\alpha = 90^\circ, A = 0$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. Umumiy holda nuqtaga ta'sir etuvchi kuch vaqtga, nuqtaning radius-vektoriga (yoki koordinatalariga) va tezligiga bog'liq bo'ladi. Shu sababli nuqtaning chekli ko'chishdagi ishi uchun

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) d\vec{r} \quad (21.104)$$

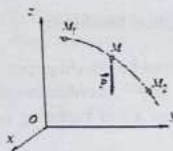
formula o'rinli bo'ladi. Bu egri chiziqli integralni hisoblash uchun nuqtaning harakat qonunini, ya'ni nuqtaning radius-vektori vaqtning funktsiyasi sifatida ifodalash kerak.

Natijada (21.104) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt \quad (21.105)$$

Bunda $\Phi(t) = \vec{F}[t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ vaqtning ma'lum funktsiyasi.

Shundan kelib chiqib, umumiy holda kuch qo'yilgan nuqtaning harakat qonunini bilmay turib, ya'ni dastlab bu kuch ta'siridagi nuqta uchun dina-mikaning ikkinchi asosiy masalasini echmasdan kuchning ishini hisoblash mumkin emas degan xulosaga kelamiz.



21.22-rasm.

Shu sababli nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar va ular qo'yilgan nuqtalarning ko'chishi asosida bu kuchlar ta'siridagi nuqtaning harakat qonunini bilmay turib ishini hisoblash mumkin bo'lgan kuchlarni aniqlash muhim ahamiyatga ega. Shunday kuchlardan ayrimlarining ishi qanday hisoblanishini ko'rib chiqamiz.

3. Og'irlik kuchining ishi. M nuqtaning \vec{P} og'irlik kuchi ta'sirida M_1 holatdan M_2 ga egri chiziq bo'ylab ko'chishidagi ishini hisoblaymiz (21.22-rasm). Buning uchun z o'qni vertikal yuqoriga yo'naltirib \vec{P} kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini hisoblaymiz:

$$X = 0, Y = 0, Z = -P = -mg$$

(21.95) va (21.97) larga ko'ra \vec{P} kuchning elementar ishi

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = -Pdz$$

chekli ko'chishdagi ishi esa

$$A = -\int_{z_1}^{z_2} Pdz$$

yoki

$$A = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Bunda $z_1 - z_2 = h$ ko'chish M nuqtaning vertikal ko'chishini ifodalaydi. Nuqtaning M_1 holati M_2 holatdan balandroq bo'lsa, $z_1 > z_2$ bo'lib, kuchning ishi musbat; pastroq bo'lsa, $z_1 < z_2$ bo'lib, \vec{P} kuchning ishi manfiy qiymatga ega bo'ladi. Binobarin, og'irlik kuchining ishi

$$A = \pm Ph \quad (21.106)$$

formula yordamida hisoblanadi. Agar nuqta yuqoriga harakatlansa, bu formulada manfiy ishora, pastga harakatlansa, musbat ishora olinadi.

(21.106) dan ko'ramizki, og'irlik kuchining ishi nuqtaning qanday traektoriya bo'ylab ko'chishiga emas, balki nuqtaning boshlang'ich va oxirgi paytdagi holat-lari orqali o'tuvchi gorizontal tekisliklar orasidagi masofaga bog'liq bo'ladi. Xu-susan nuqta gorizontal tekislikda harakatlansa, nuqtaga ta'sir etuvchi og'irlik kuchining ishi nolga teng bo'ladi.

4. Elastiklik kuchining ishi. A uchi qo'zg'almas qilib birlashtirilgan AB prujinani cho'zganda prujinani cho'zuvchi jismga elastiklik kuchi

\vec{F} taʼsir etadi (21.23-rasm). Bu kuch prujinani erkin uchidagi nuqtaning koʻchishiga qarama-qarshi yoʻnaladi hamda uning moduli prujinaning choʻzilishiga proporsional boʻladi.

Koordinatalar boshini prujina deformatsiyalanmagan holatdagi B_0 nuqtada olib, x oʻqni prujina oʻqi boʻylab vertikal pastga yoʻnaltiramiz.

Prujina elastiklik kuchining koordinata oʻqlaridagi pro-ekstiyasi $F_x = -cx, F_y = F_z = 0$ boʻladi.

(21.97) ga asosan $B_0B_2 = h$ koʻchishdagi prujina elastiklik kuchining ishi

$$A = -\int_0^h c x dx = -\frac{ch^2}{2} \quad (21.107)$$

formula yordamida hisoblanadi.

(21.107) dan koʻramizki, elastiklik kuchining ishi shu kuch qoʻyilgan nuqta-ning qanday qonun asosida harakatlanishiga emas, balki nuqtaning boshlangʻich va oxirgi holatlariga bogʻliq boʻladi.

5. Tortilish kuchining ishi. Aytaylik, massasi m_1 ga teng moddiy nuqtaga fazoda doimo qoʻzgʻalmas, massasi m_2 ga teng C nuqtaga yoʻnalgan va miqdori

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

ga teng tortilish kuchi taʼsir etsin (21.24 - rasm). Bunda f -tortilish doimiysi; r - C va M nuqtalar orasidagi masofa.

\vec{F} kuch M nuqtaning radius - vektoriga hamisha qarama-qarshi yoʻnalgani uchun

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (21.108)$$

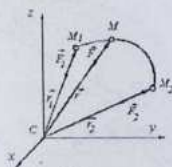
tenglik oʻrinli boʻladi.

(21.108) ni koordinata oʻqlariga proekstiyalasak,

$$X = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -f m_1 m_2 \cdot \frac{x}{r^3}, Y = -f m_1 m_2 \cdot \frac{y}{r^3}, \\ Z = -f m_1 m_2 \cdot \frac{z}{r^3}$$



21.23-rasm.



21.24-rasm.

tengliklar hosil bo'ladi.

(21.95) ga ko'ra kuchning elementar ishi

$$\begin{aligned} dA &= Xdx + Ydy + Zdz = -fm_2 \cdot \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = \\ &= -fm_2 \cdot \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2r^3} = -fm_2 \cdot \frac{dr^2}{2r^3} = -fm_2 \cdot \frac{rdr}{r^3} = \\ &= -fm_2 \cdot \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

ga teng bo'ladi.

\vec{F} kuchning M nuqta M_1 holatdan M_2 holatga ko'chishidagi ishi

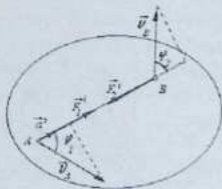
$$A = -fm_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = fm_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (21.109)$$

formula yordamida hisoblanadi.

(21.109) dan ko'ramizki, qo'zg'almas markazga tortilish kuchining ishi ham nuqtaning traektoriyasiga bog'liq bo'lmaydi.

21.20-§. Qattiq jismga qo'yilgan kuchlarning ishi

Qattiq jismni nuqtalari orasidagi masofalar o'zgarmas bo'lgan mexanik sistema deb qarab, unga qo'yilgan kuchlarning ishini hisoblaymiz.



21.25- rasm.

1. Qattiq jism ichki kuchlarining ishi va quvvati. Erkin qattiq jismning A va B nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlari \vec{F}_1 va \vec{F}_2 bilan belgilaymiz (21.25-rasm). Nyutonning uchinchi qonuniga ko'ra ichki kuchlar miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi, ya'ni

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, F_1 = F_2$$

Agar \vec{e}^0 kuch bo'yicha yo'nalgan \vec{e}^0 birlik vektorni kiritsak, u holda

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}^0, \vec{F}_2 = -F_1 = -F_1 \vec{e}^0$$

deb yozish mumkin. Bu kuchlarning elementar ishlari yig'indisini aniqlaymiz.

$$dA_1 + dA_2 = \vec{F}_1 \vec{v}_1 dt + \vec{F}_2 \vec{v}_2 dt = F_1 dt (\vec{v}_1 \vec{e}^0 - \vec{v}_2 \vec{e}^0)$$

Bunda $\vec{v}_1 \vec{a}^0 = v_1 \cos \varphi_1 = n p_{10} \vec{v}_1$; $\vec{v}_2 \vec{a}^0 = v_2 \cos \varphi_2 = n p_{20} \vec{v}_2$ ekanligini nazarda tutsak,

$$dL_1^0 + dL_2^0 = F_1^0 dt (n p_{10} \vec{v}_1 - n p_{20} \vec{v}_2) = 0$$

bo'ladi. Chunki kinematika bo'limida ko'rganimizdek (12.2-§), erkin jism ikkita nuqtasi tezliklarining shu nuqталardan o'tuvchi o'qdagi proektsiyalari o'zaro teng.

Shunday qilib, qattiq jismning ikkita ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilgan ichki kuchlar elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Qattiq jismni ichki kuchlarining yig'indisi nolga teng bo'lgan juft-juft nuqtalar to'plami-dan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Demak,

$$\sum dL_i^0 = 0 \quad (21.110)$$

bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Qattiq jismga qo'yilgan kuchning ishi qattiq jism nuqtalarining qanday harakat qilishiga bog'liq bo'ladi. Ayrim hollarda qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlarning ishi va quvvati qanday hisoblanishini ko'rib chiqamiz.

2. Erlan qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining ishi va quvvati. Erkin qattiq jismga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_x$ kuchlar sistemasi ta'sir etsin.

Dastlab \vec{F}_i kuchning quvvatini aniqlaymiz. (21.98) ga ko'ra

$$N_i = \vec{F}_i \vec{v}_i \quad (21.111)$$

bunda \vec{v}_i — qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan erkin qattiq jism nuqtasining tezligi

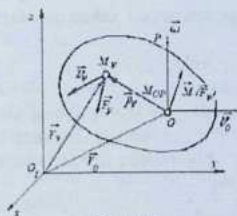
(21.26-rasm). Kinematika bo'limida ko'rganimizdek, (12.4) ga bino-an

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda \vec{v}_0 — qattiq jismda qutb uchun tanlab olingan ixtiyoriy nuqtaning tezligi; $\vec{\omega}$ — qutb atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi; $\vec{\rho}_i$ — nuqtaning O qutbga nisbatan radiusvektori. \vec{v}_i qiymatini (21.111) ga qo'ysak,

$$N_i = \vec{F}_i \vec{v}_0 + \vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

tenglik hosil bo'ladi.



21.26-rasm.

Aralash ko'paytmaning xossasiga ko'ra

$$\vec{F}_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v) = \vec{\omega} (\vec{r}_v \times \vec{F}_v)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi qavs ichidagi ko'paytma kuchning O nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi, ya'ni

$$(\vec{r}_v \times \vec{F}_v) = \vec{M}_O(\vec{F}_v)$$

Shunday qilib,

$$N_v = \vec{F}_v \cdot \vec{v}_O + \vec{\omega} \vec{M}_O(\vec{F}_v)$$

tenglikni olamiz.

Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan kuch moment-vektorining mazkur o'qdagi proekstiyasiga tengligi statika bo'limidan ma'lum. Bu o'q uchun burchak tezlik yo'nalgan OP o'qni olsak,

$$\vec{\omega} \vec{M}_O(\vec{F}_v) = \omega M_{OP}(\vec{F}_v) \cos(\vec{\omega} \wedge \vec{M}_O) = \omega M_{OP}(\vec{F}_v)$$

Shunday qilib, \vec{F}_v kuchning quvvati uchun

$$N_v = \vec{F}_v \cdot \vec{v}_O + \omega M_{OP}(\vec{F}_v) \quad (21.112)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikni dt ga ko'paytirib, \vec{F}_v kuchning elementar ishi uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$dA = N_v dt = \vec{F}_v \cdot \vec{v}_O dt + \omega dt M_{OP}(\vec{F}_v)$$

yoki

$$dA = \vec{F}_v \cdot d\vec{r}_O + M_{OP}(\vec{F}_v) d\varphi$$

bunda $\vec{v}_O dt = d\vec{r}_O$ - qutbning elementar ko'chishi; $\omega dt = d\varphi$ jismning OP o'q at-rofidagi elementar aylanma ko'chish burchagi.

Erkin qattiq jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning elementar ishi

$$dA = \vec{R} \cdot d\vec{r}_O + M_{OP} d\varphi \quad (21.113)$$

formula yordamida aniqlanadi. Bunda $\vec{R} = \sum \vec{F}_v$ — jismga qo'yilgan kuchlar sistemasining bosh vektori; $M_{OP} = \sum M_{OP}(\vec{F}_v)$ — OP o'qqa nisbatan mazkur kuchlar sistemasining bosh momenti.

(21.113) dan ko'ramizki, *erkin qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlarning elementar ishi jism qutb bilan ilgari harakat qilganda elementar ko'chi-shidagi kuchlar bosh vektorining ishi bilan kuchlarning qubdan o'tuvchi OP o'qqa nisbatan bosh momentining jism shu o'q atrofida aylanganda elementar ko'chishidagi ishlari yig'indisiga teng.*

(21.113) ni dt ga bo'lib, erkin qattiq jismga ta'sir etuvchi kuch-

larning quvvatini hisoblaymiz:

$$N = \dot{R}\vec{v}_O + \omega M_{O\varphi} \quad (21.114)$$

Erkin qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining chekli ko'chishdagi ishini aniqlash uchun (21.113) ni integrallaymiz:

$$A = \int_M \dot{R}d\vec{r}_O + \int_M M_{O\varphi}d\varphi \quad (21.115)$$

Bu formulalardan foydalanib, qattiq jismning asosiy harakatlari uchun ta'sir etuvchi kuchlarning ishi va quvvatini hisoblaymiz.

3. Ilgarilama harakatdagi jismga ta'sir etuvchi kuchlarning ishi va quvvati. Bu holda $d\varphi = 0$ bo'lgani uchun

$$dA = \dot{R}d\vec{r}_O = R_x dx + R_y dy + R_z dz \quad (21.116)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunda jism ixtiyoriy nuqtasining ko'chishini ifodalay-di.

Quvvat quyidagicha topiladi:

$$N = \dot{R}\vec{v} = R_x \dot{x} + R_y \dot{y} + R_z \dot{z} \quad (21.117)$$

Kuchlar sistemasining chekli ko'chishdagi ishi quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \int_M \dot{R}d\vec{r} \quad (21.118)$$

Binobarin, ilgarilama harakatdagi jism nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining chekli ko'chishdagi ishi kuchlar sistemasi bosh vektorining mazkur ko'chishdagi ishiga teng.

4. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qiluvchi jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining ishi va quvvati. Agar jism $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasida ta'sirida qo'zg'almas z o'qi atrofida aylanma harakatda bo'lsa, qutbni aylanish o'qida olamiz; natijada $d\vec{r}_O = 0$ hamda burchak tezlik yo'nalgan OP va z o'qlar ustma-ust tushadi (21.27-rasm). Binobarin, ko'rilayotgan holda

$$dA = M_z d\varphi \quad (21.119)$$

formula o'rinli bo'ladi, ya'ni qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qiluvchi jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining elementar ishi mazkur



21.27-rasm.

o'qqa nisbatan kuchlar bosh momentining jism o'q atrofida aylanganda elementar ko'chishdagi ishiga teng.

Bu holda kuchlar sistemasining quvvati

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega \quad (21.120)$$

chekli aylanma ko'chishdagi ishi esa

$$A = \int_{M_1}^{M_2} M_z d\varphi \quad (21.121)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

5. Tekis parallel harakatda jism nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning ishi va quvvati. Bu holda *OR* o'q tekis shaklning aylanish oniy o'qi bilan ust-ma-ust tushadi va (21.113), (21.114) hamda (21.115) ga ko'ra kuchlarning elementar ishi, quvvati va chekli ko'chishdagi ishi uchun

$$dA = \vec{R} d\vec{r}_o + M_{oz} d\varphi \quad (21.122)$$

$$N = \vec{R} \vec{v}_o + \omega M_{oz} \quad (21.123)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}_o + \int_{M_1}^{M_2} M_{oz} d\varphi \quad (21.124)$$

formulalar o'rinli bo'ladi. Bunda *OP* o'q qutb orqali harakat tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tadi.

6. Sferik harakatdagi jism nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning ishi va quvvati. Bu holda qutb uchun jismning qo'zg'almas nuqtasini olsak, $d\vec{r}_o = 0$ bo'ladi hamda *OP* o'q oniy o'q bilan ustma-ust tushadi. Shu sababli ko'rilayotgan holda kuchlar sistemasining elementar ishi, quvvati va chekli ko'chishdagi ishi

$$dA = M_{oz} d\varphi \quad (21.125)$$

$$N = \omega M_{oz} \quad (21.126)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} M_{oz} d\varphi \quad (21.127)$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Bunda ω jismning oniy burchak tezligini ifodalaydi.

21.21-§. Moddiy nuqta va sistemaning kinetik energiyasi. Kyonig teoremasi

Mexanikada moddiy nuqta mexanik harakatining skalyar o'lchovi sifatida uning kinetik energiyasi olinadi. Nuqta massasini uning tezligi kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng skalyar kattalik $\frac{mv^2}{2}$ nuqtaning kinetik energiyasi deyiladi. SI birliklar sistemasida nuqtaning kinetik energiyasi $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ yoki joulde o'lchanadi; $1 J = 1 Nm$.

Mexanik sistema barcha nuqtalarining kinetik energiyalari yig'indisiga teng

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (21.128)$$

kattalik sistemaning kinetik energiyasi deyiladi.

Nuqta yoki sistemaning kinetik energiyasi mazkur nuqtalar tezliklarining yo'nalishiga bog'liq bo'lmaydi. Faqat sistema nuqtalari tinch holatda bo'lgandagina sistemaning kinetik energiyasi nolga teng bo'ladi.

Kinetik energiya harakatning vektorli o'lchovini ifodalovchi harakat miqdori-ga nisbatan universal kattalik hisoblanadi, chunki mexanik harakat boshqa xil harakatlarga, masalan, issiqlik yoki elektrga aylanganda, mexanikada tushuniladigan harakat yo'nalishi o'z ma'nosini yo'qotadi.

Mexanik harakatning skalyar o'lchoviga kuchning quvvati, elementar ishi yo-ki chekli ko'chishdagi ishi kabi o'zaro mexanik ta'sirning skalyar o'lchovlari mos keladi. Ular orasidagi munosabatlar kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teorema vositasida o'rnatiladi.

Mexanik sistema qo'zg'almas $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin. Sistema massalar markazi orqali $O\xi\eta\zeta$ ga parallel ravishda harakatlanuvchi $Cxyz$ koordinatalar sistemasini o'tkazamiz.

Sistemaning kinetik energiyasi aniqlanadigan (21.128) formulada \bar{v} sistema M , nuqtasining absolyut tezligini ifodalaydi. Tezliklarni qo'shish haqidagi teore-maga (13.2-§) ko'ra, M , nuqtaning absolyut

tezligini

$$\vec{v}_c = \vec{v}_c + \vec{v}'_c \quad (21.129)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bunda \vec{v}_c bilan sistema massalar markazidagi C nuqtaning tezligi (ko'chirma tezlik); \vec{v}'_c bilan M_c nuqtaning C_{xyz} koordinatalar sistemasiga nisbatan tezligi (nisbiy tezlik) belgilangan.

(21.129) ni (21.128) ga qo'ysak,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i)^2 = \frac{v_c^2}{2} \sum m_i + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}'_i + \frac{1}{2} \sum m_i (v'_i)^2$$

hosil bo'ladi, bunda $\sum m_i = M$ —butun sistema massasi; $\sum m_i \vec{v}'_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}'_i = \frac{d}{dt} (M \vec{r}'_c) = 0$ (chunki koordinata boshi C nuqtada bo'lgani uchun $\vec{r}'_c = 0$), $\frac{1}{2} \sum m_i (v'_i)^2 = T'_c$ — sistemaning massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik energiyasi. Sistemaning kinetik energiyasi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + T'_c \quad (21.130)$$

(21.130) tenglik sistemaning kinetik energiyasi haqidagi *Kyoniq teoremasini* ifodalaydi: *sistema absolyut harakatining kinetik energiyasi butun sistema massasi mujassamlashgan, deb qaraladigan sistema massalar markazining kinetik energiyasi bilan sistemaning massalar markaziga nisbatan kinetik energiyalarining yig'in-disiga teng.*

21.22- §. Qattiq jismning kinetik energiyasi

Qattiq jismning asosiy harakatlari uchun kinetik energiyani hisoblashni ko'rib chiqamiz.

1. Ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasini hisoblashda uning barcha nuqtalari bir xil tezlikka ega bo'lishini e'tiborga olamiz.

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i = \frac{M v^2}{2} \quad (21.131)$$

Binobarin, *ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasi massasi butun sistema massasiga teng sistema ixtiyoriy nuqtasining kinetik energiyasiga teng.*

2. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning kinetik

energiyasini hisoblashda jism ixtiyoriy M , nuqtasining tezligi $v_i = \omega h_i$ formula yordamida aniqlanishini e'tiborga olamiz, bunda ω — jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanish burchak tezligi; h_i — jismning M , nuqtasidan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa.

Shunday qilib,

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2$$

Agar bu formulada $\sum m_i h_i^2 = I_x$ — jismning aylanish o'qiga nisbatan iner-stiya momenti ekanligini hisobga olsak, kinetik energiya uchun quyidagi for-mula hosil bo'ladi:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} I_x \omega^2 \quad (21.132)$$

(21.132) dan ko'ramizki, *qo'zg'almas o'q atrofida aylamuvchi jismning kinetik energiyasi jismning aylanish o'qiga nisbatan inerstiya momenti bilan uning burchak tezligi kvadrati ko'paytmasining yarmiga teng.*

3. Tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasini hisoblashda jismning har ondagi harakatini tezliklarning oniy markazi P orqali o'tuvchi o'q atrofidagi aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkin. Shu sa-babli bu holda ham (21.132) formulani qo'llash mumkin:

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad (21.132')$$

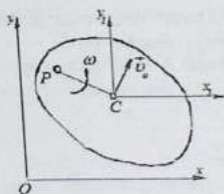
bunda I_P bilan tezliklarning oniy markazi orqali harakat tekisligiga perpendi-kulyar o'tuvchi o'qqa (aylanish oniy o'qiga) nisbatan jismning inerstiya momen-ti, ω bilan esa aylanish oniy burchak tezligi belgilangan.

Shunday qilib, *tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasi aylanish oniy o'qiga nisbatan jismning inerstiya momenti bilan oniy burchak tezligi kvadrati ko'paytmasining yarmiga teng.*

Gyuygens-Shteyner teoremasini ifodalovchi (20.21) formulaga asosan

$$I_P = I_C + M(PC)^2 \quad (21.133)$$

munosabat o'rinli bo'ladi (21.28- rasm). Bunda I_C — sistema massalar markazi or-qali aylanish oniy o'qiga parallel o'tuvchi o'qqa nisbatan jismning inerstiya momen-ti; PC — mazkur o'qlar orasidagi masofa; M — butun jism massasi.



21.28-rasm.

(21.133) ni (21.132) ga qo'yib, tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasi uchun yana quyidagi ifodani olamiz:

$$T = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 (PC)^2$$

yoki $\omega(PC) = v_c$ jism massalar markazining tezligini ifodalashini nazarda tut-sak, quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad (21.134)$$

Bu formula tekis parallel harakatdagi jism uchun *Kyoning teoremasini* ifodalaydi. tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasi butun jism massasi mujassam-lashgan deb qaraladigan sistema massalar markazining kinetik energiyasi bilan massa-lar markazi orqali harakat tekisligiga per-pendikulyar bo'lgan o'q atrofida aylanma harakat kinetik energiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Erkin qattiq jismning kinetik energiyasi uchun ham (21.134) ga o'xshash formula o'rinli bo'ladi.

4 Sferik harakatdagi jismning kinetik energiyasini hisoblashda har ondagi sferik harakatni jismning qo'zg'al-mas nuqtasidan o'tuvchi *OP* aylanish oniy o'qi atrofidagi aylanma harakatdan iborat deb qarash mumkinligidan foydalanamiz. Bu hol uchun (21.132) formulani qo'llasak,

$$T = \frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2 \quad (21.135)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda I_c — aylanish oniy o'qiga nisbatan jismning inertiya momenti; ω — oniy burchak tezligi.

Demak, *sferik harakatdagi jismning kinetik energiyasi jismning aylanish oniy o'qiga nisbatan inertiya momenti bilan oniy burchak tezligi kvadrati ko'paytmasining yarmiga teng.*

Agar mexanik sistema bir-biri bilan bog'langan bir necha jismlardan tashkil topgan bo'lsa, bunday sistemaning kinetik energiyasi sistema tarkibiga kiruvchi jismlar kinetik energiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

21.23-§. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema

Massasi t ga teng M erkin moddiy nuqta \vec{F} kuch ta'sirida qo'zg'almas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin (21.29-rasm). (16.1) ga ko'ra bunday nuqta uchun Nyutonning ikkinchi qonunini

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

ko'rinishda yozib, bu tenglamaning ikkala tomonini \vec{F} kuch qo'yilgan M nuqtaning elementar ko'chishi $d\vec{r} = \vec{v}dt$ ga skalyar ko'paytiramiz:

$$m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}d\vec{r}$$

yoki

$$d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r}$$

Bu tenglamada $\vec{v}^2 = v^2$ ekanligini e'ti-borga olsak,

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r} \quad (21.136)$$

yoki

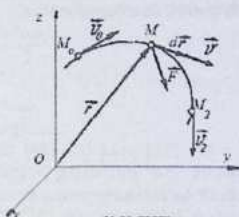
$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \quad (21.136')$$

tenglikni olamiz. Bu formula moddiy nuqtaning differensial formadagi kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: nuqta kinetik energiyasining differensial muqtaga ta'sir etuvchi kuchning elementar ishiga teng.

(21.136) ning ikkala tomonini dt ga bo'lib, $\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = N$

kuchning quvva-tini ifodalashini nazarda tutsak, nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani yana quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = N \quad (21.137)$$



21.29-TASM.

Binobarin, moddiy nuqta kinetik energiyasidan vaqt bo'yicha hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning quvvatiga teng.

(21.136) ni nuqtaning boshlang'ich va oxirgi holatlariga mos chegaralarda integrallaymiz:

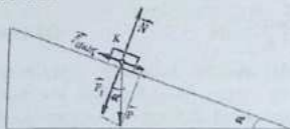
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{u_0}^{u_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (21.138)$$

yoki

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \quad (21.139)$$

(21.138) yoki (21.139) tenglamalar nuqtaning chekli formadagi kinetik ener-giyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: chekli ko'chishdagi nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi unga ta'sir etuvchi kuchning xuddi shu ko'chish-dagi ishiga teng.

Kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremadan foydalanib, asosan quyi-dagi ikki xil masalalarni Yechish mumkin. Birinchi xil masalalarda nuqtaning boshlang'ich yoki oxirgi tezligi aniqlanadi. Nuqtaning harakat qonunini aniqlamay turib, nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning ishini hisoblash mumkin bo'lgan holda maz-kur teoremani qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi, albatta. Ikkinchi xil masalalarda nuqtaning tezligi berilganda unga ta'sir etuvchi kuchlarning ishi (xususan, kuch yoki yoy koordinatasi) aniqlanadi. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning analitik ifodasi noma'lum bo'lganda yoki nuqtaning harakat qonunini aniqlamay turib bu xil ma-salalarni yechish qulay bo'ladi.



21.30 rasm.

21.11-masala. K jism (21.30-rasm) g'adir- budur qiya tekislikda tinch holatda turadi. Tekislikning qiyalik bur-chagi α va $f_0 > \operatorname{tg} \alpha$ bunda f_0 tinch holatdagi ishqalanish ko'effitsienti. Agar jismga boshlang'ich v_0 tez-

lik berilsa hamda ishqalanish ko-effitsienti f ga teng bo'lsa, jism qanday x yo'lni o'tib to'xtaydi?

Yechish. K jismni massasi uning og'irlik markazidagi M nuqtada mujas-samlashgan moddiy nuqta deb qaraymiz.

M nuqtaga uning og'irlik kuchi $\vec{P} = m\vec{g}$ ishqalanish kuchi \vec{F}^{sh} va

tekislikning normal reaksiya kuchi \bar{N} ta'sir etadi.

Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar o'zgarmas hamda nuqtaning oxirgi paytdagi tezligi $v = 0$ ekanligini nazarda tutsak, (21.139) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = (P \sin \alpha - F^{\text{ish}})s \quad (1)$$

bunda v_0 —nuqtaning boshlang'ich paytdagi tezligi; s —izlanayotgan o'tilgan yo'l. (1) da

$$m = \frac{P}{g}, \quad F^{\text{ish}} = fP \cos \alpha$$

ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$$s = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha - \sin \alpha)}$$

21.24-§. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema

Sistema kinetik energiyasi bilan sistema nuqtalariga qo'yilgan kuchlarning ishi orasidagi munosabatni aniqlaymiz. M_1, M_2, \dots, M_N nuqtalardan tashkil topgan sistemaning ixtiyoriy M_i nuqtasiga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini \vec{F}_i^e ichki kuchlamikini esa \vec{F}_i^i bilan belgilaymiz.

Sistemaning har bir nuqtasi uchun kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llaymiz. Aytaylik, sistema boshlang'ich holatdan istalgan holatga o'tganda uning ixtiyoriy nuqtasi M_{i_0} holatdan M_i holatga ko'chsin hamda bu nuqtaning tezligi \vec{v}_{i_0} dan \vec{v}_i ga o'zgarsin. U holda (21.139) ga ko'ra sistemaning har bir nuqtasi uchun

$$\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{m_i v_{i_0}^2}{2} = A_i^e + A_i^i, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

tengliklar o'rinh bo'ladi. Bunda $A_i^e + A_i^i$ tashqi va ichki kuchlarning $M_{i_0} M_i$ ko'chishlarda bajargan ishlari yig'indisi.

Yuqoridagi barcha tengliklarni qo'shsak,

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum \frac{m_i v_{i_0}^2}{2} = \sum A_i^e + \sum A_i^i$$

yoki (21.128) ga ko'ra

$$T - T_0 = A^e + A^i \quad (21.140)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda T_0 va T — sistemaning boshlang'ich va istalgan paytdagi kinetik energiyalari; $A' + A^i$ barcha tashqi va ichki kuchlar sistemasi ishlari yig'indisi.

(21.140) tenglama chekli vaqt ichida sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: sistemaning bir holatdan boshqa holatga ko'chishida kinetik energiyasining o'zgarishi sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarning mos ko'chishlardagi ishlarining yig'indisiga teng.

Sistemaning juda kichik vaqt ichidagi elementar ko'chishi uchun bu teorema

$$dT = dA' + dA^i \quad (21.141)$$

ko'rinishda yoziladi. dt ga bo'lib quyidagini hosil qilamiz:

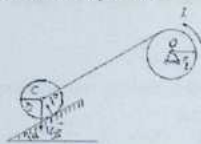
$$\frac{dT}{dt} = N' + N^i \quad (21.142)$$

(21.142) tenglama sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishini ifodalaydi: sistema kinetik energiyasidan vaqt bo'yicha olingan hosila sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha tashqi va ichki kuchlar quvvatlarining yig'indisiga teng.

Avvalgi teoremalardan farqli o'laroq (21.140) — (21.142) tenglamalarda ichki kuchlar ham qatnashadi. Agar mexanik sistema o'zgarmas sistemadan yo'ki absolyut qattiq jism bo'lsa, 21.19- § da ko'rganimizdek, bu holda ichki kuchlar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'ladi hamda (21.140) tenglama

$$T - T_0 = A' \quad (21.143)$$

ko'rinishda yoziladi.



21.31-rasm.

21.12-masala. Radiusi r_1 va massasi M_1 ga teng chig'iriq barabaniga l aylantiruvchi moment qo'yilgan. Barabanga o'ralgan tros uchiga M_2 massali C g'ildirakning o'qi birlashtirilgan (21.31-rasm). G'ildirak gorizontal bilan α burchak tashkil etuvchi qiya tekislik bo'ylab sirpanmay yuqoriga dumalaydi.

Baraban n marta aylanganda qanday burchak tezlikka ega bo'ladi? Boshlang'ich paytda sistema tinch holatda bo'lgan. Trosning mas-

sasi va ishqalanish hisobga olinmasin.

Yechish. Baraban va g'ildirakdan tashkil topgan sistemaga g'ildirakning og'irlik kuchi M_2g , qiya tekislikning normal reaksiya kuchi N va o'zgarmas L moment ta'sir etadi. Barabanning burchak tezligi ω ni aniqlash uchun sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.143) tenglamadan foydalanamiz:

$$T - T_0 = A^e \quad (1)$$

Sistemaning kinetik energiyasi

$$T = T_1 + T_2 \quad (2)$$

bunda T_1 va T_2 mos ravishda g'ildirak va barabanning kinetik energiyasini ifodalaydi.

G'ildirak tekis parallel harakatda bo'lgani uchun kinetik energiyasini (21.134) formulaga asosan aniqlaymiz:

$$T_1 = \frac{M_2 v_C^2}{2} + \frac{1}{2} J_C \omega_2^2$$

G'ildirak doiraviy silindrdan iborat bo'lgani uchun $J_C = \frac{M_2 r_2^2}{2}$, sirpanmasdan dumalagani uchun $v_C = \omega r_2$. Shu sababli

$$T_1 = \frac{M_2 v_C^2}{2} + \frac{1}{4} M_2 r_2^2 \omega_2^2 = \frac{3M_2 v_C^2}{4}$$

Tros cho'zilmagani tufayli C nuqtaning tezligi baraban gardishidagi nuqtaning chiziqli tezligiga teng bo'ladi. $v_C = \omega r_1$. Shunday qilib,

$$T_1 = \frac{3M_2 \omega^2 r_1^2}{4} \quad (3)$$

Baraban ko'zg'almas O o'q atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun uning kinetik energiyasini (21.132) formula yordamida hisoblaymiz:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{M_1 \omega^2 r_1^2}{4} \quad (4)$$

(3) va (4) ni (1) ga qo'ysak,

$$T = \frac{3M_2 \omega^2 r_1^2}{4} + \frac{M_1 \omega^2 r_1^2}{4} = \frac{1}{4} \omega^2 r_1^2 (3M_2 + M_1) \quad (5)$$

Boshlang'ich paytda sistema tinch holatda bo'lgani uchun

$$T_0 = 0 \quad (6)$$

Baraban n marta aylanganda sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning ishini hisoblaymiz. G'ildirak sirpanmay dumalagani

uchun baraban n marta aylanganda uning markazidagi C nuqta qiya tekislik bo'ylab $s = 2\pi r_1 n$ masofaga ko'chadi, ba-raban esa $\varphi = \frac{s}{r_1} = 2\pi n$

burchakka aylanadi. Normal reaksiya kuchi \vec{N} ning yo'nali-shi g'ildirakning ko'chishiga perpendikulyar bo'lgani uchun uning s ko'chishi-dagi ishi nolga teng. Shu sababh sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning ishi

$$A = A_1 + A_2$$

ga teng bo'ladi. Bunda A_1 g'ildirak og'irhk kuchi $\vec{M}_2 g$ ning qiya tekishk bo'ylab yuqoriga s masofaga ko'chishdagi ishi bo'lib, $A_1 = -M_2 g s \sin \alpha = -M_2 g \cdot 2\pi r_1 n \sin \alpha$. A_2 esa L momentning baraban $\varphi = 2\pi n$ burchakka aylangandagi ishini ifodalaydi hamda

$$A_2 = L \varphi = L \cdot 2\pi n$$

Shunday qihb,

$$A = 2\pi n(L - M_2 g \cdot r_1 \sin \alpha). \quad (7)$$

(5), (6) va (7) ni (1) ga qo'yib, izlanayotgan ω burchak tez hkni aniqlaymiz:

$$\omega = \frac{2}{r_1} \sqrt{\frac{2\pi n(L - M_2 g \cdot r_1 \sin \alpha)}{3M_2 + M_1}}$$

Kinetik energiya o'zgarishiga doir hisob-grafik ishlari variantlari 3-ilovaning 4-topshirig'ida berilgan.

21.25- §. Potensialli kuch maydoni

Kuch qo'yilgan nuqtaning harakat qonunini bilmay turib, ishni hisoblash mumkin bo'lgan yana bir turkum kuchlar haqida to'xtalamiz. Buning uchun kuch maydoni tushunchasini kiritamiz.

Fazoning biror sohasidagi moddiy nuqtaga uning koordinatalariga bog'liq, miqdor va yo'nahshi ma'lum bo'lgan kuchlar ta'sir etsa, mazkur soha *kuch may-doni* deyiladi.

Agar kuchlar vaqtga bog'liq bo'lmasa, bunday maydon *stasionar kuch may-doni* deyiladi.

Agar kuch maydoni vaqtga ham bog'liq bo'lsa, bunday maydon *stasionar bo'lmagan kuch maydoni* deyiladi.

Kuch elementar ishining analitik ifodasi bo'lmish (21.95) formula

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz$$

ning o'ng tomonidagi differensial uch had biror $U(x, y, z)$ funktsiyaning to'liq differensialiga teng bo'lsa, bu funktsiya kuchning potentsiali yoki kuch funktsiyasi deyiladi. Kuch funktsiyasi mavjud bo'lgan maydon potentsialli kuch maydoni deyiladi. Bunday maydon kuchi potentsialli kuch yoki konservativ kuch deyiladi.

Agar kuchning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari

$$X = \frac{dU}{dx}, Y = \frac{dU}{dy}, Z = \frac{dU}{dz} \quad (21.144)$$

shartlarni qanoatlantirsa,

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz = dU \quad (21.145)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ta'rifga ko'ra, bunday maydon potentsialli kuch maydonidan iborat bo'ladi hamda faqat koordinatalarga bog'liq $U(x, y, z)$ funktsiya kuchning potentsialini ifodalaydi.

Potentsialli kuch maydonida nuqtaning M_0 holatdan M_1 holatga chekli ko'chi-shidagi ishi

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{M_0}^{M_1} dU = U(x_1, y_1, z_1) - U_0(x_0, y_0, z_0)$$

yoki

$$A = U - U_0 \quad (21.146)$$

ga teng bo'ladi.

21.26-§. Teng potentsialli sirt. Kuch chiziqlari

Kuch funktsiyasining qiymatlari bir xil bo'lgan potentsialli kuch maydonidagi nuqtaning geometrik o'rni teng potentsialli sirt deyiladi. Shunday qilib, teng potentsialli sirtning tenglamasini

$$U(x, y, z) = C \quad (21.147)$$

ko'rinishda yozish mumkin. C ga turlicha qiymatlar berib, teng potentsialli sirtlar to'plamini olamiz.

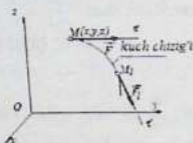
Agar nuqta $U(x, y, z) = C$ teng potentsialli sirt bo'yicha elementar ko'chish olsa, u holda $dU = 0$ tenglik bajariladi. Shu sababli

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| d\vec{r} \cos(\hat{F}, d\vec{r}) = 0 \quad (21.148)$$

ya'ni teng potentsialli sirt bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaga ta'sir

etuvchi kuch-ning elementar ishi nolga teng. (21.148) dan ko'ramizki, kuch har onda teng potentsialli sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'naladi. Shunday qilib, skalyar funktsiyaning vektor gradienti tushunchasidan foydalansak,

$$\vec{F} = \text{grad}U = \frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k} \quad (21.149)$$



21.32-tasviri.

Kuch maydonida teng potentsialli sirt bilan bir qatorda kuch chizig'i tushunchasi ham kiritiladi. *Kuch chizig'i* uchun har bir nuqtasida unga o'tkazilgan urinma berilgan maydon kuchiga kollinear bo'lgan chiziq olinadi (21.32-rasm). Kuch chizig'ining x, y, z koordinatalarga nisbatan differensial tenglamasini $d\vec{r}$ va \vec{F} vektorlarning kollinearlik shartidan foydalanib,

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad (21.150)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

21.27-§. Potensial energiya

Potentsialli kuch maydonida kuchning potentsiali U bilan bir qatorda maydonning biror nuqtasida to'plangan energiya miqdorini ifodalovchi va potentsial energiya deb ataladigan boshqa Π funktsiyani kiritish mumkin.

Moddiy nuqta biror M holatdan boshlang'ich M_0 holatga ko'chishida unga ta'sir etuvchi maydon kuchlarining ishi maydonning berilgan M nuqtadagi Π potentsial energiyasi deyiladi.

Shunday qilib,

$$\Pi = A = U_0 - U \quad (21.151)$$

bunda U_0 o'zgarmas bo'lib, harakatdagi nuqta-ning boshlang'ich holatiga bog'liq bo'ladi. Shu sababli maydonning biror nuqtasidagi potentsial energiya ixtiyoriy o'zgarmasgacha aniqlik bilan mazkur nuqtadagi manfiy ishora bilan olingan kuch funktsiyasiga teng bo'ladi.

Agar nuqtaning boshlang'ich holati $U_0 = 0$ nuqtada olinsa, $\Pi = -U$

bo'ladi. Bu tenglikni nazarda tutib, elementar ish va chekli ko'chishdagi ish uchun quyidagi ifodalarni yozish mumkin:

$$dA = dU = -d\Pi, \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi \quad (21.152)$$

Potensialli kuch maydonidagi nuqta har onda $T = mv^2/2$ ga teng kinetik energiyaga va $\Pi = -U$ potensial energiyaga ega bo'ladi. Bu energiyalarning yi-g'indisi, ya'ni

$$E = T + \Pi \quad (21.153)$$

moddiy nuqtaning to'liq mexanik energiyasi deyiladi.

21.28-§. Kuch funkstiyasini aniqlashga oid misollar

Bir jinsli og'irlik kuchi maydoni, chiziqli elastiklik kuchi va Nyuton tortilish qonuniga binoan, ta'sir etuvchi kuch maydonlarining kuch funkstiyasini hisob-laymiz. Agar kuch funkstiyasi ma'lum bo'lsa, potensial energiya (21.152) ga asosan hisoblanadi.

1. Bir jinsli og'irlik kuchi maydoni. Agar maydon kuchi miqdor va yo'na-lish jihatdan o'zgarmas bo'lsa, bunday maydon *bir jinsli* maydon deyiladi. Masalan, Yer sirtiga yaqin masofada og'irlik kuchi maydonini bir jinsli maydon deb qarash mumkin. P kuchning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -P = -mg. \quad (21.154)$$

(21.95) ga asosan P kuchning elementar ishini hisoblaymiz:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = -mgdz = d(-mgz) = dU$$

Demak, P kuchning elementar ishi $-mgz$ funkstiyaning to'liq differentsiali-ga teng bo'lgani uchun og'irlik kuchi maydoni potensialli maydondan iborat bo'ladi. Binobarin, og'irlik kuchi maydonining kuch funkstiyasi

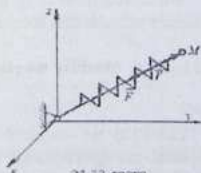
$$U = -mgz + \text{const} \quad (21.155)$$

bo'ladi. Ko'rilayotgan holda $U = C$ yoki $z = \text{const}$ tenglik bilan ifodalangan teng potensialli sirtlar gorizontal tekisliklardan iborat bo'ladi.

2. Chiziqli elastiklik kuchi maydoni. Prujinaning chiziqli elastiklik kuchi

$$\vec{F} = -c\vec{r}$$

formuladan aniqlanadi (21.33-rasm). Bunda c — prujinaning bikirlik



21.33-rasm.

koeffitsienti; \vec{r} — prujina-ning erkin uchidagi nuqtaning radius-vektori.

Prujinaning mahkamlangan O uchida koor-dinatalar boshini olib, x, y, z o'qlarga F kuchni proekstiyalaymiz.

$$X = -cx, Y = -cy, Z = -cz.$$

Binobarin, kuchning elementar ishi

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = -c(xdx + ydy + zdz)$$

formuladan aniqlanadi. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ tenglikni differentsiallab,

$$rdr = d(r^2)/2 = xdx + ydy + zdz$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$dA = -crdr = d(-cr^2/2) = dU$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni integrallab, kuch funktsiyasini aniqlaymiz:

$$U = -cr^2/2 + const = -c(x^2 + y^2 + z^2)/2 + const. \quad (21.155)$$

Ko'rilayotgan holda $U = C$ teng potentsialli sirtlar $r = const$ bo'lgan sfera-lardan iborat.

3. Nyuton tortilish kuchi maydoni. Massasi m_1 ga teng M nuqtaga doimo qo'zg'almas C markazga yo'nalgan va (21.108) formula yordamida aniqlanadi-gan

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Nyuton tortilish kuchi ta'sir etsin (21.24-rasmga qarang). (11.109) ga ko'ra F kuchning elementar ishi uchun

$$dA = -f m_1 m_2 \frac{dr}{r^2} \quad (21.156)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu tenglamani integrallab, kuch funktsiyasini aniqlaymiz:

$$U = f \frac{m_1 m_2}{r} + const. \quad (21.157)$$

Bu holda ham teng potentsialli sirtlar markazi koordinatalar bo'shidagi sferalardan iborat bo'ladi.

21.29- §. Moddiy nuqta va mexanik sistema uchun energiyaning saqlanish qonuni

(21.152) ga ko'ra $A = H_0 - H$ bo'lgani uchun moddiy nuqta kinetik energi-yasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.139) formulani quyidagi-cha yozish mumkin:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi$$

yoki

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi - \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h$$

bunda h — o'zgarimas bo'lib, boshlang'ich paytdagi to'liq mexanik energiya-ni ifodalaydi.

(21.153) ga ko'ra $T + \Pi = E$ to'liq mexanik energiyani ifodalaydi. Binobarin, *energiya integrali* deb ataladigan

$$E = T + \Pi = h \quad (21.158)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(21.158) formula moddiy nuqta mexanik energiyasining saqlanish qonunini ifodalaydi: potentsialli kuch maydonida harakatlanayotgan nuqtaning to'liq mexanik energiyasi o'zgarimasdan qoladi.

Agar mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlar potentsialga ega bo'lsa, u holda sistemaning har bir nuqtasiga qo'yilgan kuchlarning ishi (21.152) ga ko'ra

$$A_i = \Pi_{i_0} - \Pi_i \quad (21.159)$$

formuladan aniqlanadi. Shu sababli sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha tashqi va ichki kuchlar ishlarining yig'indisi quyidagiga teng bo'ladi:

$$A = \sum A_i = \sum \Pi_{i_0} - \sum \Pi_i = \Pi_0 - \Pi \quad (21.160)$$

(21.160) ni sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.140) formulaga qo'ysak,

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

yoki

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 \quad (21.161)$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bu tenglama mexanik sistema energiyasining saqlanish qonunini ifodalaydi. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni o'rinli bo'lgan mexanik sistema *konservativ sistema* deyiladi.

Moddiy nuqta yoki sistema nuqtalariga potentsialga ega bo'lmagan qarshilik kuchlari (masalan, ishqalanish kuchi) ta'sir etsa, mexanik energiyaning bir qismi issiqlik, elektr va boshqa energiyalarga aylanish natijasida mexanik energiya kamaya boradi. Binobarin, bu holda mexanik energiyaning saqlanish qonuni o'rinli bulmaydi.

Lekin barcha ko'rinishdagi (mexanik, issiqlik, elektr va boshqa) energiyalardan tashkil topgan to'liq energiya, mexanik sistema har qanday kuch maydonida harakatlansa ham, o'zgarimasdan qoladi.

Nazorat savollari:

1. Moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat miqdori
2. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.
3. Moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni .
4. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani isbotlang.
5. Mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni.
6. Moddiy nuqta harakat miqdorining momenti
7. Mexanik sisteman kinetik momenti qanday yoziladi.
8. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqida teorema ayting.
9. Mexanik sistema kinetik energiyani o'zgarishi haqida teorema ayting.
10. Kushning ishiga ta'rif keltiring.
11. Quvvat nima va u qaysi birliklarda o'lchanadi?
12. Teng ta'sir etuvchining ishi nimaga teng?
13. Elastiklik kuchining bajargan ishi nimaga teng?
14. Aylantiruvchi momentning ishi nimaga teng?
15. Og'irlik kuchining bajargan ishi.
16. Nuqta va sistemaning kinetik energiyasi.
17. Qattiq jismning kinetik energiyasini aniqlash formulalari.
18. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ayting.
19. Mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema ayting.
20. Potensial energiya.

22-BOB. QATTIQ JISM DINAMIKASI

Tayanch soʻzlar: qattiq jism dinamikasining asosiy masalalari, fizik tebran-gich, jismlarning inerstiya momentlarini tajriba usuli bilan aniqlash, Eyleming dinamik tenglamalari, erkin giroskopning harakati, Rezal teoremasi

22.1-§. Qattiq jism dinamikasining asosiy masalalari

Statika boʻlimida kuchlar sistemasi taʼsirida qattiq jismning muvozanat shart-lari oʻrganilgan edi. Kinematika boʻlimida esa qattiq jismning harakatini aniqlash usullari, ixtiyoriy nuqtasining tezligi va tezlanishini aniqlash ustida toʻxtalgan edik. Qattiq jism dinamikasida uchraydigan masalalarni asosan quyidagi ikki gruppaga ajratish mumkin: birinchi gruppada masalalarda harakati berilgan qattiq jismning qanday kuchlar sistemasi taʼsirida boʻlishi aniqlanadi; ikkinchi gruppaga oid masalalarda berilgan kuchlar taʼsirida maʼlum boshlangʻich shartlarga koʻra qattiq jism qanday harakat qilishi, bogʻlanishdagi jism uchun esa bogʻlanish reak-stiya kuchlari ham aniqlanadi.

Qattiq jism harakatini oʻrganishda sistema dinamikasining umumiy teorema-laridan foydalaniladi. Kinematika boʻlimida koʻrganimizdek, erkin qattiq jismning harakatini murakkab harakatdan iborat deb qarash mumkin (12.1-§). Bunday murakkab harakatni qutb uchun tanlab olingan jism ixtiyoriy nuqtasining ilgarilama harakati (koʻchirma harakat) va qutb atrofidagi aylanma harakat (nisbiy harakat) dan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Dinamika boʻlimida qutb uchun odatda jismning massalar markazi olinadi. Shu sababli massalar markazining harakati haqidagi teoremadan (21.5-§) foydalanib, jismning ilgarilama harakat differensial tenglamasi tuziladi. Bu teoremani ifodalovchi (21.31) tenglamaga koʻra

$$M\ddot{a}_c = \vec{R}^e \quad (22.1)$$

bu erda M — butun jism massasi; \ddot{a}_c — qattiq jism massalar markazining tezlanishi; \vec{R}^e — tashqi kuchlarning bosh vektori.

Sistema massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momentining oʻzgarishi haqidagi teorema vositasida jismning mas-

salar markazi atrofida aylanma harakat differentsial tenglamasi tuziladi. Bu teoremani ifodalovchi (21.86) tenglamaga ko'ra

$$\frac{d\vec{K}'_c}{dt} = \vec{M}'_c \quad (22.2)$$

Bunda \vec{K}'_c —qattiq jismning massalar markaziga nisbatan kinetik momenti; \vec{M}'_c —tashqi kuchlarning massalar markaziga nisbatan bosh momenti.

(22.1) va (22.2) tenglamalar vositasida qattiq jism dinamikasining yuqorida bayon etilgan ikkita asosiy masalasini Yechish mumkin.

Bu bobda qattiq jismning oddiy harakatlari uchun qattiq jism dinamikasining asosiy masalalari qanday echilishini ko'rib chiqamiz.

22.2-§. Qattiq jismning ilgari lama harakat differentsial tenglamalari

Ilgari lama harakatdagi qattiq jismning barcha nuqtalari xuddi jismning massalar markazi kabi harakatlanadi. Shu sababli ilgari lama harakatdagi jismning harakat differentsial tenglamasini (22.1) ko'rinishda olish mumkin. (22.1) da $\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c$ ekanligini e'tiborga olsak, jismning ilgari lama harakatini quyidagi bitta ikkinchi tartibli vektorli tenglama bilan aniqlash mumkin:

$$M\ddot{\vec{r}}_c = \vec{R}' \quad (22.3)$$

(22.3) ni ikkala tomonini qo'zg'almas koordinata o'qlariga proektsiyalab, qattiq jismning ilgari lama harakatini ifodalovchi skalyar formadagi uchta ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$M\ddot{x}_c = R'_x, M\ddot{y}_c = R'_y, M\ddot{z}_c = R'_z \quad (22.4)$$

Ilgari lama harakatdagi qattiq jism uchun dinamikaning ikki asosiy masalasi xuddi moddiy nuqta dinamikasidagi kabi echiladi.

Ko'zg'almas $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgari lama harakatdagi jism uning massalar markaziga birlashtirilgan $Cxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanmaydi. Shu sababli ilgari lama harakatdagi jismning massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momenti

$$\vec{K}'_c = 0 \quad (22.5)$$

bo'ladi.

(22.5) ni (22.2) ga qo'yib, ilgari lama harakatdagi jism uchun

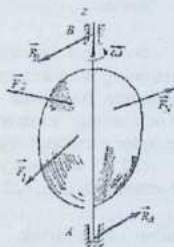
$$\vec{M}'_c = 0 \quad (22.6)$$

bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

(22.6) tenglik jism ilgari lama harakatda bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi. Chunki $\vec{M}'_c = 0$ bo'lishiga qaramay, jism massalar markazi atrofida aylanma harakatda bo'lishi mumkin.

22.3-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning harakat differensial tenglamasi

Ko'zg'almas z o'q atrofida aylanma harakatdagi jism bog'lanishdagi jism-dan iborat bo'ladi. Bunday jismning harakatini o'rganish uchun bog'lanishdan bo'shatish printsiptidan foydalanamiz. Agar ishqalanish hisobga olinmasa, A va B podshipniklarning tayanch kuchlarini \vec{R}_A , \vec{R}_B bilan almashtirish mumkin (22.1-rasm). Natijada mazkur jismni $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'siridagi erkin jism deb qarash mumkin.



22.1-rasm.

Qo'zg'almas z o'q atrofida burchak tezlik bilan aylanma harakat qiluvchi jismning harakat differensial tenglamasini tuzish uchun z o'qqa nisbatan jism kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.73) ning uchinchi tenglamasidan foydalanamiz:

$$\frac{dK_z}{dt} = M'_z \quad (22.7)$$

\vec{R}_A , \vec{R}_B reaksiya kuchlari o'qni kesib o'tgani tufayli ularning shu o'qqa nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi.

Ishqalanish kuchi mavjud bo'lganda M'_z tarkibiga ishqalanish kuchlarining momentini ham qo'shish kerak.

(21.54) ga ko'ra $K_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi}$ bo'lgani uchun $\frac{dK_z}{dt} = I_z \ddot{\varphi}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shu sababli (22.7) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \ddot{\varphi} = M_z' \quad (22.8)$$

yoki

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z'(F_z') \quad (22.8')$$

(22.8) yoki (22.8') tenglamalar jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakati differensial tenglamasini ifodalaydi.

Agar aylanish o'qiga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo'lsa, u holda jismning z o'qqa nisbatan kinetik momenti o'zgarmas bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $M_z' = 0$ bo'lsa, (22.8) ga ko'ra

$$I_z \ddot{\varphi} = 0$$

bundan

$$K_z = I_z \dot{\omega} = I_z \omega_0 = \text{const} \quad (22.9)$$

bo'lishini ko'ramiz. Bu hol inerstitiyasi bo'yicha aylanayotgan jismning harakatiga mos keladi. Agar biror mashinaning vah tekis aylanma harakatda bo'lsa, bu holda valni harakatga keltiruvchi kuchlarning momenti bilan ishqalanish kuchlarining momenti miqdor jihatdan teng, yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi.

(22.8') ni qattiq jismning ilgarilama harakat tenglamalaridan birortasi, masalan, (22.4) ning birinchi tenglamasi

$$M\ddot{x}_c = R_z' \quad (22.10)$$

bilan solishtirsak, aylanma harakatdagi qattiq jism inerstiya momenti xuddi ilgarilama harakatdagi jism massasigao'xshash funkstiyani bajaradi, ya'ni *iner-stiya momenti aylanma harakatdagi jismning inertlik o'lchovini ifodalaydi.*

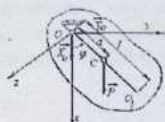
Agar tashqi kuchlarning bosh momenti M_z' va $\ddot{\varphi}$ ma'lum bo'lsa, (22.8) dan foydalanib, jismning aylanish o'qiga nisbatan inerstiya momentini aniqlash mumkin.

22.4-§. Fizik tebrangich

Massalar markazi orqali o'tmaydigan gorizontaal o'q atrofida o'zining og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanuvchi jismga *fizik tebrangich* deyiladi.

Fizik tebrangichning aylanish o'qi tebrangichning *osilish o'qi* deyiladi. *OC* masofani *a* bilan belgilasak, tebrangichning holati *OC* chiziqning vertikalidan og'ish burchagi φ bilan aniqlanadi.

Horizantal z o'qni tebrangichning aylanish o'qi bo'ylab yo'naltiramiz (22.2-rasm). O'y tekislikni tebrangichning og'irlik markazi C orqali o'tkazib, bu tekislik uchun rasm tekisligini olamiz. Tinch holatdan φ burchakka og'dirilgan tebrangichga uning og'irlik kuchi \vec{P} va O nuqtadagi silindrik sharnir reaksiya kuchining \vec{X}_o, \vec{Y}_o tashkil etuvchilari ta'sir etadi. Ishqalanish kuchini hisobga olmaymiz.



22.2-rasm.

Tebrangichga ta'sir etuvchi kuchlarning o'qqa nisbatan bosh momenti

$$M'_z = M_z(\vec{X}_o) + M_z(\vec{Y}_o) + M_z(\vec{P}) = Pa \sin \varphi$$

bo'lgani uchun (22.8) ga ko'ra

$$I_z \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi$$

yoki

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pa}{I_z} \sin \varphi = 0 \quad (22.11)$$

tenglamani olamiz. Bunda I_z tebrangichning osilish o'qiga nisbatan inertiya momentini ifodalaydi.

(22.11) tenglama fizik tebrangichning harakat differensial tenglamasi de-yiladi. $\sin \varphi \approx \varphi$ munosabat o'rinli bo'ladigan fizik tebrangichning kichik tebranma harakat differensial tenglamasini

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \varphi = 0 \quad (22.12)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu differensial tenglamaning umumiy echimi quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi = A \sin \left(\sqrt{\frac{Mga}{I_z}} t + \nu \right) \quad (22.13)$$

(22.13) dan φ burchak tebranish davri

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}} \quad (22.14)$$

bo'lgan garmonik tebranma harakat qonuni asosida o'zgaradi.

(22.11) tenglama matematik tebrangichning harakat differensial tenglamasi (18.17) dan faqat $\sin \varphi$ oldidagi o'zgaras koeffitsientlari bilan farq qiladi.

Tebranish davri fizik tebrangichning tebranish davriga teng

bo'lgan matema-tik tebrangichning uzunligini aniqlaymiz. Buning uchun fizik va matematik tebrangichlar tenglamalarida $\sin \varphi$ lar oldidagi koeffisientlarni tenglaymiz:

$$\frac{Pa}{I_z} = \frac{g}{l}$$

bundan

$$l = \frac{I_z g}{Pa} = \frac{I_z}{Ma} \quad (22.15)$$

formula yordamida aniqlanadigan l kattalikka *fizik tebrangichning keltirilgan uzunligi* deyiladi.

(20.21) tenglik bilan ifodalanadigan Gyuygens-Shteyner teoremasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$I_z = I_c + Ma^2 \quad (22.16)$$

bunda I_c bilan tebrangichning og'irlik markazi orqali z o'qqa parallel ravish-da o'tuvchi o'qqa nisbatan inerstiya momenti belgilangan.

(22.16) ni (22.15) ga qo'yib, fizik tebrangichning keltirilgan uzunligi uchun

$$l = \frac{I_c}{Ma} + a \quad (22.17)$$

ifodani olamiz.

O nuqtadan og'irlik markazi yo'nalishida bu kattalikni qo'yib, O_1 nuqtani olamiz (22.2-rasm). O_1 nuqta *fizik tebrangichning silkinish markazi* deyiladi. Og'irlik markazidan silkinish markazigacha bo'lgan masofa uchun

$$a_1 = \frac{I_c}{Ma} \quad (22.18)$$

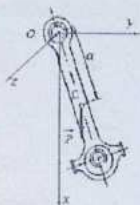
tenglik o'rinli bo'ladi.

22.5-§. Jismlarning inerstiya momentlarini tajriba usuli bilan aniqlash

Texnikada ixtiyoriy shakldagi bir jinsli yoki bir jinssiz jismlarning o'qqa nisbatan inerstiya momentini aniqlashda tajriba usulidan foydalaniladi. Tebratish usuli va buralma tebranish usuli ana shunday usullar jumlasidandir.

1. Tebratish usuli. Aytaylik, og'irligi P ga teng shatunning

og'irlik markazi C dan o'tuvchi, Oz ga parallel gozizontal o'qqa nisbatan inerstiya momentini aniqlash kerak bo'lsin. Buning uchun dastlab shatunning og'irlik markazini aniqlaymiz (7.3-§). So'ngra shatunni O vtulka orqali o'tuvchi qo'zg'almas Oz gozizontal o'qqa osamiz (22.3-rasm) va $\sin \varphi \approx \varphi$ munosabat o'rinli bo'ladigan kichik bur-chakka og'dirib tebratamiz. Tebranish boshlangandan keyin shatunning τ vaqt ichidagi tebranishlar soni n ni aniqlaymiz. U holda kichik tebranish davri $T = \frac{\tau}{n}$ formula yordamida aniqlanadi.



22.3-rasm.

Bunday shatunni osilish o'qi Oz bilan ustma-ust tushuvchi fizik tebrangich deb qarash mumkin.

(22.14) ga asosan fizik tebrangichning kichik tebranishlar davri uchun

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Pa}} \quad (22.19)$$

o'rinli bo'ladi. Bunda P — shatunning og'irlik kuchi; a — og'irlik markazi-dan osilish o'qi Oz gacha bo'lgan ma-sofa.

Shunday qilib shatunning tebranish davri T , og'irligi P va og'irlik markazidan osilish o'qigacha bo'lgan a masofa ma'lum bo'lsa, shatunning osilish o'qi-ga nisbatan inerstiya momenti (22.19) ga ko'ra

$$I_z = \frac{T^2 Pa}{4\pi^2} \quad (22.20)$$

tenglik vositasida aniqlanadi. Oz o'qqa parallel ravishda shatunning og'irlik markazidan o'tuvchi Cz_1 o'qqa nisbatan inerstiya momentini hisoblash uchun Gyuygens-Shteyner teoremasini ifodalovchi (20.21) formuladan foydalanamiz:

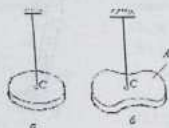
$$I_z = I_{z_1} + Ma^2$$

Bundan

$$I_{z_1} = I_z - Ma^2 = \frac{T^2 Pa}{4\pi^2} - \frac{Pa^2}{g} \quad (22.21)$$

(20.19) ga binoan shatunning Cz_1 o'qqa nisbatan inerstiya radiusini aniqlash mumkin:

$$\rho_s = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{gaT^2}{4\pi^2} - a^2} \quad (22.22)$$



22.4-rasm.

2. Buralma tebranish usuli. Bu usulda ixtiyoriy shakldagi A jismning inerstiya momentini aniqlash uchun dastlab yuqori uchi qo'zg'almas qilib mah-kamlangan simning pastki uchiga inerstiya momenti I_c ma'lum bo'lgan etalon jism (masalan, bir jinsli disk) osiladi va uni kichik φ burchakka burib qo'yib yuboriladi (22.4-rasm, a). Buralgan simning elastiklik kuchi ta'sirida etalon jism buralma tebranma harakatda bo'ladi. Burchak kichik bo'lganda elastiklik kuchining momenti buralish burchagiga proporsional bo'lgani uchun buralma tebranish harakat differentsial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$I_c \ddot{\varphi} = -k\varphi$$

yoki

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I_c} \varphi = 0$$

bunda k — o'zgarmas koeffitsient bo'lib, simning elastiklik xususiyatini ifodalaydi. Etalon jismning tebranish davri uchun

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{k}} \quad (22.23)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Xuddi shuningdek, etalon jism o'miga berilgan A jismni osib (22.4-rasm, b), bu jismning tebranish davri uchun

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{k}} \quad (22.24)$$

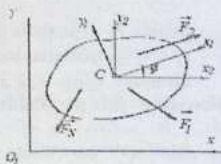
munosabatni olamiz. (22.23) va (22.24) tengliklardan k koeffitsientni yo'qotib, A jismning inerstiya momenti uchun

$$I_c = I_c \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \quad (22.25)$$

formulani olamiz.

22.6-§. Qattiq jismning tekis parallel harakat differensial tenglamalari

Aytaylik, qattiq jismning massasi biror O,xy tekislikka nisbatan simmetrik joy-lashgan bo'lsin; qattiq jismga ta'sir etuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar esa shu tekislik-da yotsin hamda jism nuqtalarining boshlang'ich tezligi mazkur tekislikka parallel bo'lsin. Ushbu shartlar bajarilsa, qattiq jism tekis parallel harakatda bo'ladi hamda bunday harakatni o'rganish uchun jismni O,xy tekislik bilan kesish natijasida qir-qimda hosil bo'lgan tekis shaklning harakatini o'rganish kifoya (22.5- rasm).



22.5-rasm.

Kinematika bo'limida ko'rganimizdek, bunday tekis shaklning holatini uning biror C nuqtasining koordinatalari x_c, y_c va bu nuqtada jismga birkiritilgan Cx_1y_1 koordinatalar sistemasi x_1 o'qining x o'q bilan tashkil qilgan burchagi yordamida aniqlash mumkin.

Massalar markazining harakati haqidagi teoremani ifodalovchi (22.1) tengla-mani qo'zg'almas x va y o'qlarga proekstiyalab, x_c, y_c aniqlanadigan quyidagi ikkita differensial tenglamani olamiz:

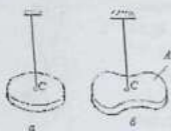
$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= R'_x \\ M\ddot{y}_c &= R'_y \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

bunda M — jismning massasi; R'_x, R'_y — bosh vektorning x va y o'qlardagi pro-ekstiyalari.

Massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momentin-ing o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (22.2) tenglamadan foydalanib, φ burchak aniqlanadigan differensial tenglamani olish mumkin.

Agar C nuqtada O,xy ga parallel ravishda harakatlanuvchi Cx_1y_1 koordina-talar sistemasini o'tkazsak, tekis shaklning Cx_1y_1 koordi-natalar sistemasiga nis-batan nisbiy harakati C nuqtada shakl tekis-ligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi z_2 o'q atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'ladi. Shu sababli (21.54) ga asosan z_2 o'qqa

$$\rho_a = \sqrt{\frac{I_c}{M}} = \sqrt{\frac{gaT^2}{4\pi^2} - a^2} \quad (22.22)$$



22.4-rasm.

2. Buralma tebranish usuli. Bu usulda ixtiyoriy shakldagi A jismning inertiya momentini aniqlash uchun dastlab yuqori uchi qo'zg'almas qilib mah-kamlangan simning pastki uchiga inertiya momenti I_c ma'lum bo'lgan etalon jism (masalan, bir jinsli disk) osiladi va uni kichik φ burchakka burib qo'yib yuboriladi (22.4-rasm, a). Buralgan simning elastiklik kuchi ta'sirida etalon jism buralma tebranma harakatda bo'ladi. Burchak kichik bo'lganda elastiklik kuchining momenti buralish burchagiga proporsional bo'lgani uchun buralma tebranish harakat differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$I_c \ddot{\varphi} = -k\varphi$$

yoki

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I_c} \varphi = 0$$

bunda k — o'zgarmas koeffitsient bo'lib, simning elastiklik ususiyatini ifodalaydi. Etalon jismning tebranish davri uchun

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{k}} \quad (22.23)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Xuddi shuningdek, etalon jism o'miga berilgan A jismni osib (22.4-rasm, b), bu jismning tebranish davri uchun

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{k}} \quad (22.24)$$

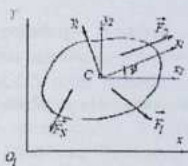
munosabatni olamiz. (22.23) va (22.24) tengliklardan k koeffitsientni yo'qotib, A jismning inertiya momenti uchun

$$I_c = I_c \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \quad (22.25)$$

formulani olamiz.

22.6-§. Qattiq jismning tekis parallel harakat differensial tenglamalari

Aytaylik, qattiq jismning massasi biror O_1xy tekislikka nisbatan simmetrik joy-lashgan bo'lsin; qattiq jismga ta'sir etuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar esa shu tekislik-da yotsin hamda jism nuqtalarining boshlang'ich tezligi mazkur tekislikka parallel bo'lsin. Ushbu shartlar bajarilsa, qattiq jism tekis parallel harakatda bo'ladi hamda bunday harakatni o'rganish uchun jismni O_1xy tekislik bilan kesish natijasida qir-qimda hosil bo'lgan tekis shaklning harakatini o'rganish kifoya (22.5- rasm).



22.5-rasm.

Kinematika bo'limida ko'rganimizdek, bunday tekis shaklning holatini uning biror C nuqtasining koordinatalari x_c, y_c va bu nuqtada jismga birlashtirilgan Cx_1y_1 koordinatalar sistemasini x_1 o'qining x o'q bilan tashkil qilgan burchagi yordamida aniqlash mumkin.

Massalar markazining harakati haqidagi teoremani ifodalovchi (22.1) tengla-mani qo'zg'almas x va y o'qlarga proekstiyalab, x_c, y_c aniqlanadigan quyidagi ikkita differensial tenglamani olamiz:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= R_x' \\ M\ddot{y}_c &= R_y' \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

bunda M — jismning massasi; R_x', R_y' — bosh vektorning x va y o'qlardagi pro-ekstiyalari.

Massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (22.2) tenglamadan foydalanib, φ burchak aniqlanadigan differensial tenglamani olish mumkin.

Agar C nuqtada O_1xy ga parallel ravishda harakatlanuvchi Cx_1y_1 koordina-talar sistemasini o'tkazsak, tekis shaklning Cx_1y_1 koordi-natalar sistemasiga nis-batan nisbiy harakati C nuqtada shakl tekis-ligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi z_1 o'q atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'ladi. Shu sababli (21.5.4) ga asosan z_1 o'qqa

nisbatan tekis shaklning nisbiy harakat kinetik momenti $K_c = I_c \omega = I_c \dot{\varphi}$ munosabat yordamida aniqlanadi. Binobarin, (22.2) ga binoan quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$$I_c \ddot{\varphi} = M_c^* \quad (22.27)$$

bunda I_c — jismning z_2 o'qqa nisbatan iner-stiya momenti; M_c^* — z_2 o'q-qa nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti.

Shunday qilib, (22.26) va (22.27) tenglamalar sistemasi qattiq jismning tekis parallel harakat differensial tenglamalarini ifodalaydi.

Agar qattiq jismning tekis parallel harakat qonunini ifodalovchi

$$x_c = f_1(t), y_c = f_2(t), \varphi = f_3(t) \quad (22.28)$$

tenglamalar ma'lum bo'lsa, ya'ni massalar markazi koordinatalari x_c, y_c va φ burchak vaqtning funkstiyasi sifatida ma'lum bo'lsa, u holda bu funkstiyalar-ning vaqt bo'yicha ikkinchi hosilasini aniqlab, (22.26) va (22.27) ga qo'yish natijasida jism nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning bosh vektorini aniqlash mumkin.

Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlar berilgan bo'lsa, u holda (22.26) va (22.27) tenglamalar sistemasini integrallab, integrallash doimiylarini harakat-ning boshlang'ich shartlaridan aniqlash natijasida jismning tekis parallel harakat qonunini ifodalovchi (22.28) tenglamalarni olish mumkin.

Agar kuchlar ta'sirida tekis parallel harakat qilayotgan jism bog'lanishda bo'lsa, u holda jismga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar qatoriga bog'lanish reakstiya kuchlarini ham qo'shish kerak. Natijada bog'lanishdagi jismning tekis parallel harakat differensial tenglamalari

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= R_x^* + R_x \\ M\ddot{y}_c &= R_y^* + R_y \\ I_c \ddot{\varphi} &= M_c^* + M_c^* \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

ko'rinishda yoziladi. Bunda R_x, R_y — bog'lanish reakstiya kuchlarining koordinata o'qlaridagi proekstiyalarining yig'indisi; M_c^* — massalar markaziga nisbatan reakstiya kuchlarining bosh momenti.

(22.29) tenglamalar qatoriga bog'lanish tenglamalarini ham qo'shish kerak. Agar tekis parallel harakat qiluvchi bog'lanishdagi

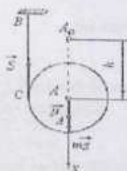
jism massalar markazining traektoriyasi ma'lum bo'lsa, u holda tenglamalarning birinchi ikkitasi o'rniga bu tenglamalar-ning tabiiy koordinata o'qlaridagi quyidagi ifodalaridan foydalanish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dv_c}{dt} &= R'_t + R_t \\ M \frac{v_c^2}{\rho} &= R'_n + R_n \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

bunda v_c — massalar markazining tezligi; ρ — massalar markazi traektoriya-sining berilgan ondagi egrilik radiusi; R'_t, R'_n — tashqi kuchlar bosh vektorining urinma va normaldagi proektsiyalari, R_t, R_n — bog'lanish reaksiya kuch-larining urinma va normaldagi proektsiyalarining yig'indisi.

Ba'zan (22.26) va (22.27) tenglamalarning birortasi o'rniga kinetik energiya-ning o'zgarishi xaqidagi teoremdan ham foydalanish mumkin.

22.1- masala. Massasi t ga teng A disk gardishga B uchi qo'zg'almaydigan qilib bog'langan ingichka ip o'ralgan. Disk ipni chuvatib, boshlang'ich tezleksiz pastga tushadi (22.6- rasm). Diskning A nuqtadan disk tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi o'qi h balandlikdan tushganda uning tezligi aniqlansin va ip-ning tortilish kuchi topilsin.



22.6-rasm.

Yechish. Disk bog'lanishdagi jismdan iborat. Ipni fikran kesib, uning diskka ta'sirini taranglik kuchi \bar{S} bilan almashtirsak, diskni og'irlik kuchi $m\vec{g}$ va taranglik kuchi \bar{S} ta'siridagi erkin jism deb qarash mumkin. Diskning massalar markazidagi A nuqta x o'q bo'ylab to'g'ri chiziqli harakatda bo'ladi. Shu sababli massalar markazining harakatini aniqlash uchun (22.26) ning birinchi tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}_A = mg - S$$

yoki

$$m\ddot{x}_A = mg - S \quad (1)$$

(1) dan S ni aniqlaymiz:

$$S = m(g - \ddot{x}_A) \quad (2)$$

Disk uchun (22.27) tenglamani tuzish o'rniga kinetik energiya-ning o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.143) tenglamadan foydalanamiz:

Agar koordinatalar sistemasini jismga mahkam biriktirilgan deb qarash, \vec{K}_O ning qo'zg'aluvchi Ox o'qdagi proektsiyasi quyidagicha hisoblanadi:

$$K_x = \omega_x \sum m_i (z_i^2 + y_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i$$

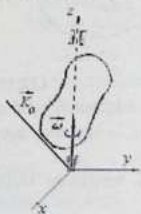
Bunda $\sum m_i (z_i^2 + y_i^2) = I_x$, orqali x o'qqa nisbatan jismning inerstiya momen-ti: $\sum m_i x_i y_i = I_{xy}$ va $\sum m_i x_i z_i = I_{xz}$ lar bilan esa markazdan qochirma inerstiya momentlari belgilanishini nazarda tutsak quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz} \\ K_y &= -\omega_x I_{xy} + \omega_y I_y - \omega_z I_{yz} \\ K_z &= -\omega_x I_{xz} - \omega_y I_{yz} + \omega_z I_z \end{aligned} \right\} \quad (22.35)$$

Agar x, y, z o'qlarni jismning qo'zg'almas O nuqtasi uchun yasalgan inerstiya ellipsoidining bosh o'qlari bo'yicha yo'naltirsak, u holda 20.8-§ da ko'rganimizdek, markazdan qochirma inerstiya momentlari nolga teng bo'ladi, binobarin, inerstiya bosh o'qlari uchun

$$K_x = \omega_x I_x, K_y = \omega_y I_y, K_z = \omega_z I_z \quad (22.36)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.



22.8-rasm.

Jism qo'zg'almas z o'q atrofida aylanma harakatda bo'lsa (22.8-rasm), $\vec{\omega}$ bur-chak tezlik vektori aylanish o'qi bo'ylab yo'naladi va $\omega_x = \omega_y = 0$ bo'ladi. Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakatning xususiy holidan iborat bo'lgani tufayli bunday jism uchun (22.36) ni

$$K_x = -\omega_z I_{xz}, K_y = -\omega_z I_{yz}, K_z = \omega_z I_z \quad (22.37)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar z o'q O nuqta uchun yasalgan inerstiya ellipsoidining bosh o'qidan iborat bo'lsa, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ bo'ladi

va (22.37) dan

$$K_x = K_y = 0, K_z = \omega_z I_z \quad (22.38)$$

munosabatlarni olamiz.

2. Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning kinetik energiyasi. (21.128) ga ko'ra jismning kinetik energiyasi uchun

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad (22.39)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jism nuqtasining tezligi uchun (22.32) for-mula o'rinli bo'lishini e'tiborga olsak,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

hosil bo'ladi. Bunda $\vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$ bo'lishini nazarda tutsak,

$$T = \frac{1}{2} \sum \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \vec{K}_o) \quad (22.40)$$

Shunday qilib, qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning kinetik energiyasi jismning aylanish burchak tezligini qo'zg'almas nuqtaga nisbatan kinetik mo-ment vektoriga skalyar ko'paytmasining yarmiga teng.

Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning kinetik energiyasi uchun yana qu-yidagi formulani yozish mumkin:

$$T = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \vec{K}_o) = \frac{1}{2} K_o \cos(\vec{\omega} \wedge \vec{K}_o) = \frac{1}{2} (\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z) \quad (22.41)$$

(22.35) ni (22.41) ga qo'ysak,

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z) - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{zx} \omega_z \omega_x \quad (22.42)$$

formulani olamiz. Demak, qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning kinetik energiyasi burchak tezlikning koordinata o'qlaridagi proektsiyalarining kvadratik formasidan iborat bo'ladi.

Agar Oxyz koordinata sistemasining o'qlari inerstiya bosh o'qlaridan iborat bo'lsa, u holda markazdan qochirma inerstiya momentlari bo'ladi va (22.42) ni

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z) \quad (22.43)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar (22.42) dan $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ lar bo'yicha xususiy hosila olib, (22.35) ni e'ti-borga olsak,

$$K_x = \frac{dT}{d\omega_x}, K_y = \frac{dT}{d\omega_y}, K_z = \frac{dT}{d\omega_z} \quad (22.44)$$

formulalar o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

22.8-§. Eylerning dinamik tenglamalari

Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning harakat differensial tenglamalari chiqarish uchun qo'zg'almas O nuqtada $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasi va jism bilan birgalikda harakatlanuvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasini o'tkazamiz.

Qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan kinetik momentning o'zgari-shi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.72) formulaga ko'ra

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}'_O \quad (22.45)$$

bunda \vec{K}_O - jismning O nuqtaga nisbatan kinetik momenti; \vec{M}'_O - mazkur nuqtaga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti.

$Oxyz$ koordinatalar sistemasi o'qlarining birlik vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilasak, \vec{K}_O ni x, y, z o'qlari bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish mumkin.

$$\vec{K}_O = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k} \quad (22.46)$$

Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning dinamik tenglamalarini chiqarishda Euler ikkita soddalashtirish kiritadi. Ulardan birinchisi shundan iboratki, (22.45) tenglamalarni qo'zg'aluvchi koordinata o'qlariga proekstiyalanadi. Buning uchun dastlab $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ ning qo'zg'aluvchi koordinata o'qlaridagi ifodasini aniqlaymiz:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + K_x \frac{d\vec{i}}{dt} + K_y \frac{d\vec{j}}{dt} + K_z \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (22.47)$$

Kinematika bo'limida ko'rganimizdek, (13.13) ga asosan

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k} \quad (22.48)$$

(22.48) va (22.46) ni nazarda tutib, (22.47) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} = & \vec{i} \left(\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y \right) + \vec{j} \left(\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z \right) \\ & + \vec{k} \left(\frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x \right) \end{aligned} \quad (22.49)$$

Tashqi kuchlarning bosh momenti uchun

$$\vec{M}'_O = M'_x \vec{i} + M'_y \vec{j} + M'_z \vec{k} \quad (22.50)$$

tenglik o'rinli bo'lishini nazarda tutsak, (22.49) va (22.50) ga asosan (22.45) tenglama quyidagi uchta skalyar tenglamaga ekvivalent bo'lishini ko'ramiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= M_x^e, \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= M_y^e, \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= M_z^e \end{aligned} \right\} \quad (22.51)$$

Eyler ikkinchi soddalashtirish sifatida qo'zg'aluvchi koordinata o'qlari uchun O nuqtadagi inerstiya bosh o'qlarini oladi. Natijada (22.36) ga ko'ra

$$K_x = \omega_x I_x, K_y = \omega_y I_y, K_z = \omega_z I_z$$

bo'ladi. Bu holda (22.51) tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_x - I_y) &= M_x^e, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_y - I_z) &= M_y^e, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_z - I_x) &= M_z^e \end{aligned} \right\} \quad (22.52)$$

(22.52) tenglamalar Eylearning dinamik tenglamalari deyiladi. Bu tenglamalarni Eylearning kinematik tenglamalari (11.29)

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (22.53)$$

bilan birgalikda echish kerak.

22.9-§. Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jism uchun dinamikaning asosiy masalalari

Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jism uchun dinamikaning asosiy masalalari: a) jismning

$$\varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t), \psi = \psi(t)$$

tenglamalar bilan ifodalangan harakat tenglamalari berilganda tashqi kuchlarning bosh momentini aniqlash va b) jismga ta'sir etuvchi kuchlarning momenti ma'lum bo'lganda jismning harakat tenglamalarini aniqlashdan iborat. Dinamikaning birinchi masalasini echish ψ, θ, φ larning hosilalarini topishga keltiriladi; dinamikaning ikkinchi masalasini echish esa (22.52) va (22.53) tenglamalarni echishga keltiriladi.

Bu tenglamalarning aniq echimini jismga qo'yilgan kuchlarning momenti, inerstiya momentlari va boshlang'ich shartlarga ma'lum cheklashlar qo'yilgandagina aniqlash mumkin.

Agar boshlang'ich shartlarga hech qanday chek qo'yilmagan bo'lsa, faqat og'irlik kuchi ta'siridagi qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning harakati haqidagi masalaning aniq echimini quyidagi uchta holdagina aniqlash mumkin.

1. Eyler- Puanso holi. Bu holda ixtiyoriy shakldagi jismning og'irlik markazi qo'zg'almas nuqta bilan ustma-ust tushadi va Eyler burchaklari maxsus elliptik funkstiyalar orqali ifodalanadi.

2. Lagranj-Puasson holi. Bu holda jism simmetriya o'qiga ega bo'ladi. Agar jismning simmetriya o'qi uchun z o'qni olsak $I_x = I_y$ bo'ladi, ya'ni O nuqta uchun yasalgan inerstiya ellipsoidi aylanma ellipsoiddan iborat bo'ladi. Ko'rilayotgan holda qo'zg'almas O nuqta va jismning massalar markazi simmetriya o'qida yotadi. Bu holda Eyler burchaklari kvadratura orqali aniqlanadi.

3. S.V.Kovalevskaya holi. Kovalevskaya holida $I_x = I_y = 2I_z$ bo'ladi, ya'ni O nuqta uchun yasalgan inerstiya ellipsoidi cho'ziq aylanma ellipsoiddan iborat bo'ladi. Jismning qo'zg'almas nuqtasi simmetriya o'qida yotadi hamda uning og'irlik markazi inerstiya ellipsoidining ekvatorial tekisligida yotadi. Bu holda Eyler burchaklarini aniqlash giperelliptik funkstiyalar orqali ifodalanadi.

Giroskoplar nazariyasida asosan Lagranj-Puasson holidan samarali foydalani-ladi.

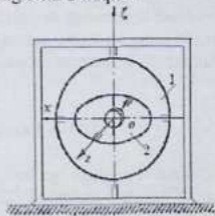
22.10- §. Erkin giroskopning harakati

O'zining simmetriya o'qi atrofida tez aylanadigan va simmetriya o'qidagi qo'zg'almas nuqta atrofida harakatlana oladigan jism giroskop deyiladi.

Giroskopga oddiy misol tariqasida bir uchi gorizontal tekislikka tayangan va simmetriya o'qi atrofida tez aylanuvchi pirildoqni olish mumkin (22.9-rasm). Tex-nikada turli giroskopik asboblarda giroskop rotori 22.10- rasmda sxematik tasvirlangan kardan osmasiga o'rnatiladi. Kardan osmasi odatda qo'zg'almas Oz o'q atrofida aylana oladigan tashqi 1 dumaloq halqadan va unga podshipniklar vositasida birlashtirilgan va gorizontal Ox o'q atrofida aylana oladigan ichki 2 dumaloq halqadan iborat bo'ladi. Ox o'q tashqi halqaga, Oz esa ichki halqaga podshipniklar vositasida o'rnatiladi. Giroskop Oz o'qining bu tarzda o'rnatilishi uning bitta O nuqtasi



22.9-rasm.



22.10-rasm.

qo'zg'almas bo'lishini ta'minlash bilan birga mazkur o'qning fazoda ixtiyoriy yo'nalishni egallashiga ham imkon beradi.

Kardan osmasiga o'rnatilgan giroskopning holati Oz , Oz va Ox o'qlari atrofidagi uchta aylanish burchaklari ψ, θ, φ bilan aniqlanadi. Shu sababli bunday giroskopning erkinlik darajasi 3 ga teng bo'ladi.

Agar giroskopga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lsa, bunday giroskop erkin giroskop deyiladi. Erkin giroskopni ba'zida muvozanatlashgan yoki astatik giroskop deb ataladi.

Kardan osmasiga o'rnatilgan va og'irlik markazi qo'zg'almas O

nuqta bilan

ustma-ust tushuvchi giroskop erkin giroskopga misol bo'la oladi.

Erkin giroskopni Eyler — Puanso va Langranj — Puasson hollarining majmuidan iborat deb qarash mumkin.

Erkin giroskopga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh momenti bo'lgani uchun giroskopning absolyut harakat kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema ko'ra

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0 \quad (22.54)$$

bo'ladi. Binobarin, qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan giroskopning kinetik momenti \vec{K}_O miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'ladi:

$$\vec{K}_O = \overline{\text{const}} \quad (22.55)$$

Giroskopning elementar nazariyasida \vec{K}_O vektori giroskopning O_z o'qi bo'y-lab yo'nalgan deb qaraladi. Binobarin, giroskopning o'qi inertial hisoblash sistemasiga nisbatan o'zgarmas yo'nalishini saqlaydi. Erkin giroskopning bu asosiy xususiyatidan turli navigatsiya asboblari yordamida fazoda o'zgarmas yo'nalishni ta'minlashda keng foydalaniladi.

22.11-§. Rezal teoremasi

Qo'zg'almas O nuqtaga ega bo'lgan jism uchun kinetik momentning o'zgarishi haqidagi teoremani (22.45)

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}'_O$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda \vec{M}'_O — jismga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan bosh momenti.

\vec{K}_O vektordan vaqt bo'yicha ohngan hosila bu vektor uchining tezligini ifodalaydi, ya'ni

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{u}$$

Bunda \vec{u} vektori \vec{K}_O vektori godografiga o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi. Shunday qilib, (22.45) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\vec{u} = \vec{M}'_O \quad (22.56)$$

Bu formula Rezal teoremasini ifodalaydi: jismning qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan kinetik momenti vektori uchining tezligi barcha tashqi kuchlarning shu nuq-taga nisbatan bosh momentiga teng.

22.12-§. Giroskopning elementar nazariyasi

Texnikada qo'llaniladigan giroskop rotorining o'z o'qi atrofida aylanish bur-chak tezligi 20000 — 60000 ayl/min ga to'g'ri keladi. Giroskoplar kema, samol-yot, raketa va kosmik kemalarni boshqarishda keng qo'llaniladi.

Giroskopning harakatini o'rganishda ko'pincha uning rotori harakatini aniqlash alohida ahamiyatga ega.

Agar giroskop rotori faqat o'zining Oz simmetriya o'qi atrofida $\vec{\omega}$ burchak tez-lik bilan aylansa, uning \vec{K}_O kinetik momenti Oz o'q bo'ylab $\vec{\omega}$ bilan bir xil yo'na-ladi (22.11-rasm, a) hamda (21.54) ga ko'ra

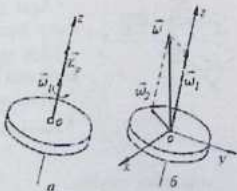
$$K_z = I_z \omega_z$$

tenglik o'rinli bo'ladi. z o'qni $\vec{\omega}_1$ bilan bir xil yo'nalishda olsak, $K_O = K_z$ bo'lib,

$$\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$$

Aytaylik, giroskop rotori o'z o'qi Oz atrofida $\vec{\omega}_1$ burchak tezlik bilan aylansin; Oz o'q esa, O nuqta atrofida $\vec{\omega}_2$ burchak tezlik bilan aylansin. U holda qattiq jism-ning aylanma harakatlarini qo'shish haqidagi teoremaga asosan giroskop rotori-ning absolyut burchak tezligi $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ burchak tezliklarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi (22.11-rasm, b).

Oxyz koordinatalar sistemasining z o'qini giroskop rotori o'qi bo'ylab yo'nal-tirsak, bu koordinatalar sistemasining o'qlari O nuqta uchun yasalgan inerstiya ellipsoidining bosh o'qlaridan iborat bo'ladi, binobarin, (22.36) ga asosan kinetik mo-mentning x, y, z o'qlardagi proekstiyalari uchun



22.11- rasm.

$$K_x = \omega_{2x} I_x, K_y = \omega_{2y} I_y, K_z = I_z (\omega_1 + \omega_2) \quad (22.57)$$

munosabatlarni olamiz. Bunda giroskop z o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $I_x = I_y$.

Zamonaviy giroskoplarda $\omega_1 = 6000 \text{ s}^{-1}$ yoki $n = 60000 \text{ ayl/min}$ gacha bo'lgan qiy-matga erishadi; ω_2 esa odatda $0,01 \text{ s}^{-1}$ dan oshmaydi. Birinchi yaqinlashishda $\vec{\omega}_2$ ni e'tiborga olmasak, (22.57) ni $K_x = 0, K_y = 0, K_z = I_z \omega_1$

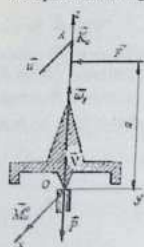
ko'rishda yozish mumkin. Natijada

$$\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1 \quad (22.58)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, elementar nazariyada giroskopning kinetik momenti uning simmetriya o'qi Oz bo'ylab yo'nalgan va moduli esa giroskopning simmetriya o'qi Oz ga nisbatan uning inertiya momenti bilan mazkur o'q atrofidagi aylanish burchak tezligi ko'paytmasiga teng deb qaraladi. Bunday giroskopning ayrim xususiyatlarini ko'rib chiqamiz.

1. Kuchning giroskop o'qiga ta'siri. Shu paytgacha giroskopning qo'zg'almas nuqtaga nisbatan harakatini tashqi kuchlarning momenti nolga teng bo'lgan holda tekshirdik. Endi giroskopga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning momenti noldan farqli bo'lgan holni ko'ramiz.



22.12-rasm.

Aytaylik, og'irlik markazi O nuqtada bo'lgan giroskop rotori o'qiga unga tik ravishda yo'nalgan \vec{F} kuch ta'sir etsin (22.12-rasm). Agar giroskop rotori o'z o'qi atrofida aylanmasa, u \vec{F} kuch ta'sirida O nuqta atrofida mazkur kuch yo'nalishida ko'chadi.

Agar giroskop rotori o'z o'qi atrofida juda katta burchak tezlik bilan aylansa, u holda \vec{F} kuch ta'sirida giroskop butunlay boshqacha harakatda bo'ladi.

Haqiqatan ham Rezal teoremasiga asosan \vec{K}_O vektorining tezligi

$$\vec{u} = \vec{M}_O^* \quad (22.59)$$

yoki uning miqdori

$$u = M_O^* = F \cdot a \quad (22.59')$$

formuladan aniqlanadi. Shunday qilib, $\vec{\omega}_1$ burchak tezlik bilan aylanuvchi giros-kop o'qi \vec{F} kuch ta'siridan shu kuch yo'nalishida emas, balki uning moment vektori \vec{M}_O' yo'nalishida, ya'ni kuchning yo'nalishiga perpendikulyar tekislikda ko'chadi.

(22.59') formuladan ko'ramizki, \vec{F} kuchning ta'siri to'xtashi bilan $\vec{u} = 0$ bo'ladi. Demak, rotori tez aylanayotgan giroskop o'qi inerston xususiyatga ega bo'lmaydi.

Agar giroskop o'qiga oniy kuch ta'sir etsa (ya'ni zarba berilsa), u holda kinetik moment vektori uchidagi A nuqta juda kichik τ vaqt ichida $\vec{u} \cdot \tau$ ga teng ko'chish oladi hamda giroskop o'qi deyarli boshlang'ich holatini saqlaydi. Bu natija giros-kopning asosiy xossalardan biri bo'lib giroskop o'qining ustuvorlik xususiyatini ifodalaydi.

Aytaylik, oniy \vec{F} kuch giroskop o'qiga juda kichik vaqt $t = \tau$ davomida ta'sir etsin, u holda giroskop o'qidagi A nuqta Ox o'qi yo'nalishida $u \cdot \tau = Fa\tau$ masofaga ko'chadi. Bunda giroskop o'qi

$$\alpha = \frac{u \cdot \tau}{K_0} = \frac{Fa\tau}{I\omega_1} \quad (22.60)$$

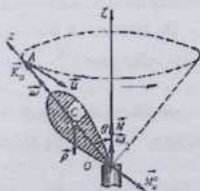
burchakka og'adi.

(22.60) formuladan ko'ramizki, ω_1 burchak tezlik orta borgan sari α burchak kamaya boradi. Masalan, og'irligi $P = 50$ N, inerstiya radiusi $\rho = 0,1$ m bo'lgan giroskop rotori $n = 60000$ ayl/min burchak tezlik bilan aylansin. Agar giroskop o'qiga perpendikulyar yo'nalgan va O nuqtadan $a = 0,2$ m masofaga qo'yilgan $F = 100$ N kuch $\tau = 0,1$ s davomida ta'sir etsa, shu vaqt ichida giroskop o'qi \vec{F} kuchiga perpendikulyar yo'nalishda

$$\alpha = \frac{Fa\tau}{I\omega_1} = \frac{100 \cdot 0,2 \cdot 0,1}{\frac{P}{g} \rho^2 \cdot \frac{2\pi n}{60}} = 0,36^\circ$$

burchakka og'adi, ya'ni giroskop o'qi deyarli ko'chishga ulgurmaydi.

2. Giroskop o'qining prestessiyasi. Pirdoq harakatlanganda, prestessiya qanday sodir bo'lishini ko'rib chiqamiz. Yuqorida chiqarilgan formulalarni o'tkir uchi silliq yarim sferik sirtga tayangan va simmetriya o'qi



22.13- rasm.

atrofida o'zgarmas $\vec{\omega}_1$ burchak tezlik bilan aylanuvchi pirildoq uchun qo'llaymiz (22.13-rasm). Giros-kopning elementar nazariyasiga ko'ra, pirildoqning O nuqtaga nisbatan kinetik momenti miqdor jihatdan $K_o = I_z \vec{\omega}_1$ ga teng bo'lib, pirildoqning simmetriya o'qi Oz bo'ylab yo'naladi, bunda I_z — pirildoqning Oz o'qqa nisbatan inerstiya momenti. Normal reaktsiya kuchi \vec{N} ning O nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'lgani uchun tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan momenti \vec{M}'_o og'irlik kuchi \vec{P} ning shu nuqtaga nisbatan momentigagina teng bo'ladi. Qo'zg'almas O nuqtadan pirildoqning og'irlik markazi C nuqtagacha bo'lgan masofani $OC = a$ va simmetriya o'qi Oz bilan vertikal Oz' o'q orasidagi burchakni θ bilan belgilasak,

$$M'_o = Pa \sin \theta \quad (22.61)$$

bo'ladi hamda \vec{M}'_o vektori simmetriya o'qi yotgan vertikal tekislikka perpendikulyar yo'naladi.

(22.61) ni e'tiborga olsak, Rezal teorema-siga ko'ra quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$u = Pa \sin \theta \quad (22.62)$$

bunda \vec{u} vektori Oz o'q yotgan vertikal tekislikka perpendikulyar bo'lib, \vec{M}'_o bilan bir xil yo'nalishga ega bo'ladi. A nuqta pirildoqning simmetriya o'qida yotgani tufayli, bu o'qning harakati A nuqtaning harakati bilan aniqlanadi.

Binobarin pirildoqning simmetriya o'qi og'irlik kuchi yotgan vertikal tekislikka perpendikulyar ravishda harakatlanadi. Bunda θ burchak o'zgarmay, mazkur o'q doiraviy konus sirti bo'ylab, 22.13-rasmda tasvirlangan strelka yo'nalishida aylanadi. Pirildoq o'qining bunday harakati prestessiya deyiladi.

Oz simmetriya o'qi vertikal Oz' o'q atrofida $\vec{\omega}_2$ burchak tezlik bilan aylan-ganda \vec{K}_o vektori uchidagi A nuqtaning tezligi

$$\vec{u} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_o \quad (22.63)$$

tenglikdan aniqlanadi. Shuningdek, giroskopning elementar nazariyasida $\vec{K}_o = I_z \vec{\omega}_1$ deb olinishini nazarda tutsak,

$$\vec{u} = I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) \quad (22.64)$$

uning miqdori esa

$$u = I_2 \omega_2 \omega_1 \sin \theta \quad (22.65)$$

formuladan aniqlanadi. (22.62) va (22.65) formulalarni solishtirib, $I_2 \omega_2 \omega_1 \sin \theta = Pa \sin \theta$

tenglikni olamiz. Bundan pirildoqning prestessiya burchak tezligini aniqlaymiz:

$$\omega_2 = \frac{Pa}{I_2 \omega_1}$$

Bu tenglikdan ko'ramizki, ω_2 ortgan sari prestessiya burchak tezligi kamaya boradi.

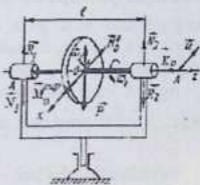
3. Giroskopik moment. Giroskop o'qining harakati ma'lum bo'lganda bu o'q tayangan nuqtalarda hosil bo'ladigan kuchlarni aniqlaymiz.

Aytaylik, A va B podshipniklarga o'rnatilgan giroskop rotori simmetriya o'qi atrofida ω_1 burchak tezlik bilan aylansin (22.14- rasm). A va B podshipniklar esa vertikal o'q atrofida o'zgarimas ω_2 burchak tezlik bilan aylanuvchi ramkaga o'rnatilgan bo'lsin.

$\omega_1 \gg \omega_2$ bo'lgan holda giroskopning elementar nazariyasini qo'llash mumkin. Giroskop o'qi ω_2 burchak tezlik bilan vertikal o'q atrofida prestessiya harakatida bo'lgan uchun Oz o'q bo'ylab yo'nalgan $\vec{K}_o = I_2 \omega_2$ vektori uchining tezligi uchun (22.59) formula o'rinli. $\vec{u} = I_2 (\omega_2 \times \omega_1) = \omega_2 \times \vec{K}_o$ bo'l-gani tufayli

$$\vec{M}_o^* = I_2 (\omega_2 \times \omega_1) \quad (22.66)$$

\vec{M}_o^* moment A va B podshipniklarning giroskop o'qiga bosimi natijasida hosil bo'ladi. Ta'sir aks ta'sirga tengligi qonuniga ko'ra o'z navbatida giroskop o'qi A va B podshipniklarga miqdor jihatdan mazkur reaksiya kuchlariga teng, yo'nalishi esa ularga qarama-qarshi yo'nalgan (\vec{N}_1, \vec{N}_2) juft kuch bilan aks ta'sir ko'rsatadi. Bu juft kuch giroskopik juft deyiladi. Uning momenti esa giroskopik moment deyiladi va \vec{M}_o^{gp} bilan belgilanadi. Giroskopik moment miqdor jihatdan



22.14-rasm.

tashqi kuchlarning bosh momentiga teng va yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'lgani uchun

$$\vec{M}_O^{\text{sh}} = -\vec{M}'_O$$

yoki (22.66) ni e'tiborga olsak,

$$\vec{M}_O^{\text{sh}} = -I_z(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) = I_z(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \quad (22.67)$$

Bundan giroskopik momentning modulini aniqlaymiz:

$$M_O^{\text{sh}} = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta \quad (22.68)$$

Ko'rilayotgan holda $\theta = 90^\circ$ bo'lgani uchun

$$M_O^{\text{sh}} = I_z \omega_1 \omega_2 \quad (22.68')$$

(22.67) tenglik Jukovskiy qoidasini ifodalaydi: agar giroskop o'qi majburiy prestessiya harakatida ishtirok etsa, u holda giroskop o'qi o'rnatilgan podshipnik-larga momenti giroskopik moment M_O^{sh} teng juft kuch ta'sir etadi va bu juft kuch $\vec{\omega}_1$ vektori $\vec{\omega}_2$ ustiga eng qisqa yo'l bilan tushadigan yo'nahshda giroskop-ning simmetriya o'qini prestessiya o'qi bilan ustma-ust tushirishga intiladi.

Agar A va B podshipniklar orasidagi masofa l ga teng bo'lsa, u holda (\vec{N}_1, \vec{N}_2) giroskopik juft momentining miqdori uchun

$$M_O^{\text{sh}} = N_1 \cdot l = N_2 \cdot l \quad (22.69)$$

formula o'rinni bo'ladi.

(22.68') va (22.69) ni solishtirib, quyidagi tenglikni olamiz:

$$I_z \omega_1 \omega_2 = N_1 \cdot l = N_2 \cdot l$$

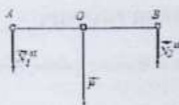
Bundan giroskopik bosim kuchlarini aniqlaymiz:

$$N_1 = N_2 = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{l} \quad (22.69')$$

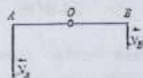
A va B podshipniklarga N_1 va N_2 kuchlaridan tashqari $(\vec{N}_1^{\text{st}}, \vec{N}_2^{\text{st}})$ statik bosim kuchlari ham ta'sir etadi (22.15-rasm) hamda bu kuchlar giroskop og'irlik kuchi P ning yarmiga teng bo'ladi:

$$N_{1\text{st}} = N_{2\text{st}} = P/2 \quad (22.70)$$

Shunday qilib, A va B nuqtalarning to'liq reaktsiya kuchi statik va giroskopik tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi. 22.14 va 22.15-raslarda tasvirlangan (\vec{N}_1, \vec{N}_2) va $(\vec{N}_1^{\text{st}}, \vec{N}_2^{\text{st}})$ kuchlarning yo'nahshini e'tiborga olib,



22.15- rasm.



22.16- rasm.

(22.69) va (22.70) ga asosan N_A va N_B to'liq bosim kuchlarining miqdorlarini

$$N_A = N_1 + N_1^a = \frac{I_x \omega_1 \omega_2}{l} + \frac{1}{2} P, N_B = N_2 - N_2^a = \frac{I_x \omega_1 \omega_2}{l} - \frac{1}{2} P$$

formulalar yordamida aniqlaymiz (22.16-rasm). Giroskoplar vositasida snaryad, samolyot yoki raketa kabi turli uchuvchi apparatlarning prestessiya burchak tezligini aniqlashda yoki ularning stabil holatini ta'minlashda samarali foydalaniladi.

Nazorat savollari:

1. Qattiq jism dinamikasining asosiy masalalari
2. Fizik tebrangich
3. Jismlarning inerstiya momentlarini tajriba usuli bilan aniqlash
4. Eyleming dinamik tenglamalari
5. Erkin giroskopning harakati
6. Rezal teoremasi
7. Giroskopning elementar nazariyasi.

23-BOB. DALAMBER PRINSIPI

Tayanch soʻzlar: prinsip, mexanikaning prinsiplari, Dalamber prinsipi, bosh vector, bosh moment

23.1-§. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Nyuton qonunlaridan ilk bor erkin moddiy nuqta yoki erkin qattiq jismning harakatini oʻrganishda foydalanilgan. Bogʻlanishlar aksiomasining qabul qilinishi natijasida bu qonunlar ixtiyoriy mexanik sistema uchun qoʻllana boshlandi. Bogʻlanishdagi moddiy nuqta yoki sistemalarning harakatini oʻrganishda J. Dalamber tomonidan kashf qilingan va «Dalamber prinsipi» deb ataladigan maxsus prinsip-dan foydalaniladi. Erkin moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi dinamikaning asosiy qonuniga ekvivalentdir. Bogʻlanishdagi nuqta uchun bu prinsip bogʻlanishlar aksiomasi bilan birgalikda olingan dinamikaning asosiy qonuniga ekvivalent boʻladi.

Massasi m ga teng bogʻlanishdagi M nuqta uchun (18.1) ga koʻra dinamikaning asosiy qonunini

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \quad (23.1)$$

koʻrinishda yozish mumkin. Bunda \vec{R} bogʻlanish reakstiya kuchi.

(23.1) ni $\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0$ koʻrinishda yozib,

$$-m\vec{a} = \vec{\Phi} \quad (23.2)$$

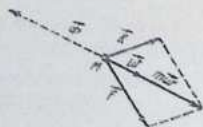
belgilash kiritsak,

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0 \quad (23.3)$$

tenglamani olamiz.

Miqdor jihatdan nuqtaning massasi bilan uning tezlanishi koʻpaytmasiga teng va nuqtaning tezlanishiga qarama-qarshi yoʻnalgan kuch nuqtaning inerstiya kuchi deyiladi.

(23.3) tenglik bogʻlanishdagi nuqta uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi. agar moddiy nuqtaga taʼsir etuvchi barcha aktiv va bogʻlanish reakstiya kuchlari qatoriga inerstiya kuchini qoʻshsak, u holda har onda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini olamiz (23.1- rasm).



23.1- rasm.

Xususan, erkin moddiy nuqta uchun (23.3) da $\vec{R}=0$ deb olinadi:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \quad (23.4)$$

bu tenglik *erkin moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipini* ifodalaydi: *erkin moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar qatoriga har onda inerstiya kuchini qo'shsak, bu kuchlar o'zaro muvozanatda bo'ladi.*

Aslida inerstiya kuchi moddiy nuqtaga qo'yilgan bo'lmaydi. Shu sababli Dalamber prinsipida kiritiladigan muvozanat tushunchasi shartli tushunchadir. Dalamber prinsipida nuqtaga har onda inerstiya kuchi qo'yilgan deb qarashdan maqsad, dinamikaning asosiy qonunini formal ravishda statikaning muvozanat tenglamasiga o'xshash tenglamalarga keltirib, dinamika masalalariga statikadagi muvozanat shartlarini qo'llashdan iborat. Shu boisdan bu usulga *kinetostatika usuli* de-yiladi.

Inerstiya kuchining aktiv kuch va bog'lanish reakstiya kuchlaridan prinsipial farqi shundan iboratki, inerstiya kuchlari aks ta'sir etuvchiga ega emas. Boshqacha aytganda, inerstiya kuchining berilgan nuqtaga ta'sirini vujudga keltiradigan jismni ko'rsata olmaymiz. Shuning uchun ham ba'zi-da inerstiya kuchini «soxta kuch» ham deyiladi.

(23.3) ni Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalab,

$$\left. \begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0 \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

tenglamalarni olamiz. Bunda $\Phi_x = -m\ddot{x}$, $\Phi_y = -m\ddot{y}$, $\Phi_z = -m\ddot{z}$ inerstiya kuchlarining Dekart koordinata o'qlaridagi proekstiyalarini ifodalaydi.

Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, \hat{a} mazkur chiziq bo'ylab yo'naladi. Bu holda inerstiya kuchining miqdori uchun $F = m\ddot{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning inerstiya kuchini \hat{a}_t urinma tezlanishga qara-ma-qarshi yo'nalgan $\hat{\Phi}_t$ urinma inerstiya kuchi va \hat{a}_n normal tezlanishga qara-ma-qarshi yo'nalgan $\hat{\Phi}_n$ normal (markazdan qochirma) inerstiya kuchlariga ajratish mumkin.

$$\hat{\Phi}_t = -m\hat{a}_t, \hat{\Phi}_n = -m\hat{a}_n \quad (23.6)$$

Xususan nuqta r radiusli aylana bo'ylab ω burchak tezlik va ε burchak tezlanish bilan harakatlangan, inerstiya kuchining urinma va

normaldagi proekstiyalari uchun

$$|\Phi_n| = mr^2\epsilon, \Phi_n = mr\omega^2 \quad (23.7)$$

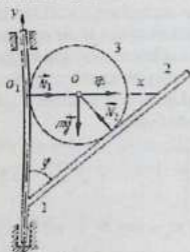
formulalar o'rinli bo'ladi. Bu holda nuqtaning urinma va normal inerstiya kuchlari mos ravishda *aylanma va markazdan qochirma inerstiya kuch-lari* deyiladi.

Dalamber prinsipini tenglamasini M nuqtadan o'tkazilgan tabiiy koordinata o'qlariga proekstiyalab,

$$\left. \begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0 \\ F_z + R_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.8)$$

tenglamalarni olamiz.

Dalamber prinsipidan noma'lum reaksiya kuchlarini aniqlashda samarali foydalaniladi.



23.2-rasm.

23.1-masala. Val 1 vertikal o'q atrofi-da o'zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanadi. Valga φ burchak ostida sterjen 2 payvandlangan. Ular orasiga radiusi r ga teng bir jinsli disk 3 qo'yilgan (23.2-rasm). ω qanday qiymatga erishganda diskning valga bosimi nolga teng bo'ladi. Valning yo'g'onligi hisobga olinmasin.

Yechish. O_1y o'qni val bo'ylab, O_1x o'qni esa diskning markazi orqali o'tka-zamiz. Diskka uning og'irlik kuchi, val va sterjenlarning normal reaksiya kuch-lari N_1, N_2 ta'sir etadi. Diskning valga

bosimi miqdor jihatdan N_2 ga teng bo'ladi.

Val o'zgarmas burchak tezlik bilan aylangani uchun diskning inerstiya kuchi

$$\Phi_n = mr\omega^2 \quad (1)$$

normal tashkil etuvchidan iborat bo'ladi. Agar diskning markaziga inerstiya kuchini qo'ysak, Dalamber prinsipiga asosan disk muvozanatda bo'ladi.

Disk uchun (23.5) tenglamalarning birinchi ikkitasini tuzamiz:

$$N_1 - N_2 \cos \varphi + \Phi = 0 \quad (2)$$

$$N_2 \sin \varphi - mg = 0 \quad (3)$$

Bu tenglamalardan N_1 va N_2 larni aniqlaymiz:

$$N_2 = \frac{mg}{\sin \varphi}$$

$$N_1 = N_2 \cos \varphi - \Phi = mg \operatorname{ctg} \varphi - mrv^2$$

Oxirgi tenglamadan ko'ramizki, $N_1 = 0$ bo'lishi uchun

$$v = \frac{g}{r} \operatorname{ctg} \varphi$$

shart bajarilishi kerak.

23.2-§. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipini

M_1, M_2, \dots, M_N moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemaga geometrik bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin. Sistema nuqtalarining massalarini m_1, m_2, \dots, m_N bilan belgilaymiz. Sistemaning biror M_v nuqtasiga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisini \vec{F}_v bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisini \vec{R}_v va bu nuqtaning inerstiya kuchini $\vec{\Phi}_v$ bilan belgilasak, nuqta uchun bayon etilgan Dalamber prinsipiga ko'ra \vec{F}_v, \vec{R}_v va $\vec{\Phi}_v$ kuchlar har onda o'zaro muvozanatlashadi. Shu sababli sistemaning har bir nuqtasi uchun

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.9)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(23.9) tengliklar sistema uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi: agar aktiv va bog'lanish reaksiya kuchlari ta'siridagi sistemaning har bir nuqtasiga inerstiya kuchini qo'ysak, bu kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi.

Sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarni aktiv va reaksiya kuchlariga ajratmay, balki ichki va tashqi kuchlardan iborat deb qarash.

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v = \vec{F}_v^* + \vec{F}_v^i$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Oxirgi tenglikni nazarda tutib, sistema uchun Dalamber prinsipini

$$\vec{F}_v^* + \vec{F}_v^i + \vec{\Phi}_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.10)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Binobarin, tashqi va ichki kuchlar ta'siridagi sistemaning har bir nuqtasiga har onda inerstiya kuchini qo'ysak, bu kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi.

(23.9) tenglamalarni qo'shib, sistema uchun

$$\sum(\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v) = 0 \quad (23.9)$$

ifodani olamiz.

(23.9') tenglamalarning har birini M_v ($v = 1, 2, \dots, N$) nuqtalarning radius-vektorlari \vec{r}_v ga vektorli ko'paytirib qo'shsak,

$$\sum(\vec{r}_v \times \vec{F}_v) + \sum(\vec{r}_v \times \vec{R}_v) + \sum(\vec{r}_v \times \vec{\Phi}_v) = 0$$

yoki

$$\sum[\vec{M}_o(\vec{F}_v) + \vec{M}_o(\vec{R}_v) + \vec{M}_o(\vec{\Phi}_v)] = 0 \quad (23.11)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(23.9') va (23.11) tenglamalarni koordinata o'qlariga proektsiyalab, oltita kine-tostatika tenglamalarini olamiz:

$$\left. \begin{aligned} \sum(X_v + R_{xv} + \Phi_{xv}) &= 0, \\ \sum(Y_v + R_{yv} + \Phi_{yv}) &= 0, \\ \sum(Z_v + R_{zv} + \Phi_{zv}) &= 0 \\ \sum[M_x(\vec{F}_v) + M_x(\vec{R}_v) + M_x(\vec{\Phi}_v)] &= 0, \\ \sum[M_y(\vec{F}_v) + M_y(\vec{R}_v) + M_y(\vec{\Phi}_v)] &= 0, \\ \sum[M_z(\vec{F}_v) + M_z(\vec{R}_v) + M_z(\vec{\Phi}_v)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

Agar sistema nuqtalariga qo'yilgan kuchlarni ichki va tashqi uchlarga ajrat-sak, ichki kuchlar xossasiga ko'ra $\sum \vec{F}_v^i = 0$, $\sum \vec{M}_o(\vec{F}_v^i) = 0$ bo'lgani uchun (23.9') va (23.11) dan

$$\left. \begin{aligned} \sum(\vec{F}_v^e + \vec{\Phi}_v) &= 0 \\ \sum[\vec{M}_o(\vec{F}_v^e) + \vec{M}_o(\vec{\Phi}_v)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.13)$$

tenglamalarni olamiz.

(23.13) da $\sum \vec{F}_v^e = \vec{R}^e$; $\sum \vec{\Phi}_v = \vec{\Phi}$ —inerstiya kuchlari bosh vektori, $\sum \vec{M}_o(\vec{F}_v^e) = \vec{M}_o^e$ — va $\sum \vec{M}_o(\vec{\Phi}_v) = \vec{M}_o^e$ —inerstiya kuchlarining O markazga nisbatan bosh momentini ifodalashini e'tiborga olsak,

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}^e + \vec{\Phi} &= 0 \\ \vec{M}_o^e + \vec{M}_o^e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.14)$$

tenglamalar o'rinli bo'ladi.

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.23) va sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (21.72) tenglamalarni

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}' - \frac{d\vec{Q}}{dt} &= 0 \\ \vec{M}'_o - \frac{d\vec{K}_o}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.15)$$

ko'rinishda yozib, (23.14) va (23.15) tenglamalarni solishtirsak, sistema inerstiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti uchun

$$\vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (23.16)$$

$$\vec{M}'_o = -\frac{d\vec{K}_o}{dt} \quad (23.17)$$

ifodalarni olamiz.

Demak, sistema inerstiya kuchlarining bosh vektori sistemaning harakat miq-doridan vaqt bo'yicha olingan hosilaning -1 ga ko'paytmasiga teng; sistema iner-stiya kuchlarining biror O markazga nisbatan bosh momenti esa mazkur markazga nisbatan sistemaning kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan hosilaning -1 ga ko'paytmasiga teng.

23.3-§. Qattiq jism inerstiya kuchlarining bosh vektori va bosh moment

(23.6) ga ko'ra ixtiyoriy harakatdagi qattiq jismning harakat miq-dori $\vec{Q} = M\vec{a}_c$ formula yordamida aniqlanadi. Shu sababli bunday sistema inerstiya kuchlarining bosh vektori uchun quyidagi formula o'rinh bo'ladi:

$$\vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M\vec{a}_c \quad (23.18)$$

bunda M —jism massasi.

Ixtiyoriy harakatdagi qattiq jism inerstiya kuchlarining bosh momentini hisob-lashda qutb uchun odatda jism massalar markazidagi C nuqta olinadi. U holda (23.17) ni

$$\vec{M}'_c = -\frac{d\vec{K}_c}{dt} \quad (23.19)$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar $Cxyz$ koordinatalar sistemasi jismga mahkam birlashtirilgan bo'lsa, (22.49) ga ko'ra

$$\frac{d\vec{k}_c}{dt} = i \left(\frac{dK_{\alpha}}{dt} + \omega_y K_{\alpha} - \omega_z K_{\beta} \right) + j \left(\frac{dK_{\beta}}{dt} + \omega_z K_{\alpha} - \omega_x K_{\beta} \right) + k \left(\frac{dK_{\gamma}}{dt} + \omega_x K_{\beta} - \omega_y K_{\gamma} \right) \quad (23.20)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

(23.19) ga ko'ra inerstiya kuchlari bosh momentining koordinata o'qlarida-gi proektsiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha}^o &= -I_x \varepsilon_x + I_y (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_z (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2) - \\ &\quad - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\ M_{\beta}^o &= -I_y \varepsilon_y + I_x (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_z (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - \\ &\quad - (I_x - I_z) \omega_x \omega_z, \\ M_{\gamma}^o &= -I_z \varepsilon_z + I_x (\varepsilon_z - \omega_x \omega_y) + I_y (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - \\ &\quad - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y \end{aligned} \right\} \quad (23.21)$$

Xususiylarda qattiq jism inerstiya kuchlarining bosh momenti qanday hisoblanishini ko'rib chiqamiz.

1. Moddiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan qattiq jismning tekis parallel harakati. Agar Cz o'q harakat tekisligi bilan ustma-ust ishuvchi moddiy simmetriya tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, u holda bu o'q inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi hamda

$$I_x = I_y = 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \omega_x = \omega_y = 0$$

Natijada (23.21) ga asosan ko'rilayotgan tekis parallel harakatdagi jismning inerstiya kuchlari bosh momenti uchun

$$M_{\alpha}^o = 0, M_{\beta}^o = 0, M_{\gamma}^o = -I_z \varepsilon_z \quad (23.22)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

2. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati. Bu holda qutb uchun aylanish o'qida yotuvchi ixtiyoriy nuqtani olib, z o'qni aylanish o'qi bo'ylab yo'naltiramiz; x, y o'qlari esa jismga birlashtirilgan deb qaraymiz. $\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}$ vektorlari aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgani tufayli $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \omega_x = \omega_y = 0$ bo'ladi.

Bundan tashqari $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega^2$ bo'lishini e'tiborga olib, (23.21) ni quyidagicha yo-zish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} M_x^o &= I_{yz} \varepsilon_z - I_{yz} \omega^2, \\ M_y^o &= I_{xz} \varepsilon_z + I_{xz} \omega^2, \\ M_z^o &= -I_z \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (23.23)$$

3. Ilgarilama harakat. Bu harakatda $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ bo'lganidan $M_{Ox}^o = 0, M_{Oy}^o = 0, M_{Oz}^o = 0$ bo'ladi.

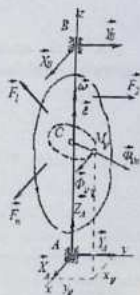
23.4-§. Jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanganda podshipniklarning dinamik reaksiya kuchlarini aniqlash

Aytaylik $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'siridagi qattiq jism B nuqtada silindrik podshipnik va A nuqtada podpyatnik (tayanch podshipnik) ka o'rnatilgan z o'q atrofida ω burchak tezlik va ε burchak tezlanish bilan aylanma harakatda bo'lsin (23.3-rasm). Agar tayanch nuqtalarida hosil bo'ladigan ishqalanishni hisobga olmasak, bog'lanishdan bo'shatish aksiomaga ko'ra A podpyatnik va B podshipnikni \vec{R}_1 va \vec{R}_2 reaksiya kuchlari bilan almashirish mumkin.

A va B tayanch nuqtalari orasidagi masofani h bilan belgilaymiz. Bunday jismga Dalamber prinsipini qo'llash uchun keltirish markazini A nuqtada olib, jismning har bir nuqtasiga $\vec{\Phi}_i$ inerstiya kuchini qo'yamiz hamda (23.10) va (23.11) tenglamalarni tuzamiz:

$$\left. \begin{aligned} \sum \vec{F}_i + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \sum \vec{\Phi}_i &= 0 \\ \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) + \vec{M}_A(\vec{R}_1) + \vec{M}_A(\vec{R}_2) + \sum \vec{M}_A(\vec{\Phi}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.24)$$

bunda $\vec{M}_A(\vec{R}_1) = 0$. (23.24) dan reaksiya kuchlarini aniqlash uchun inerstiya kuchlarining bosh vektori va bosh momentini hisoblash kerak. Shu maqsadda inerstiya kuchlarini aylanma va markazga intilma tezlanishlarga qarama-qarshi yo'nalgan tashkil etuvchilarga, reaksiya kuchlarini esa $\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1, \vec{X}_2, \vec{Y}_2$ tashkil etuvchilarga ajratib, (23.24) ni jismga birlashtirilgan qo'zg'aluvchi koordinata o'qlariga proektsiyalaymiz:



23.3-rasm.

$$\left. \begin{aligned}
 \sum X_i + X_A + X_B + \sum \Phi_{\alpha} &= 0, \\
 \sum Y_i + Y_A + Y_B + \sum \Phi_{\alpha} &= 0, \\
 \sum Z_i + Z_A &= 0, \\
 \sum M_i(\vec{F}_i) - Y_B h + \sum M_i(\vec{\Phi}_i) &= 0, \\
 \sum M_i(\vec{F}_i) + X_B h + \sum M_i(\vec{\Phi}_i) &= 0, \\
 \sum M_i(\vec{F}_i) + \sum M_i(\vec{\Phi}_i) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (23.25)$$

(23.7) ni nazarda tutib, inerstiya kuchlarining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari uchun quyidagi munosabatlarni olamiz.

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\alpha} &= \Phi_{\alpha x} \cos(\vec{\Phi}_{\alpha}, \hat{x}) + \Phi_{\alpha y} \cos(\vec{\Phi}_{\alpha}, \hat{y}) + \Phi_{\alpha z} \cos(\vec{\Phi}_{\alpha}, \hat{z}) = \\
 &= m_x r_x \varepsilon \frac{v_x}{r_x} + m_x r_x \omega^2 \frac{x_x}{r_x} = m_x y_x \varepsilon + m_x x_x \omega^2, \\
 \Phi_{\alpha} &= \Phi_{\alpha x} \cos(\vec{\Phi}_{\alpha}, \hat{y}) + \Phi_{\alpha y} \cos(\vec{\Phi}_{\alpha}, \hat{y}) + \Phi_{\alpha z} \cos(\vec{\Phi}_{\alpha}, \hat{z}) = \\
 &= -m_x r_x \varepsilon \frac{x_x}{r_x} + m_x r_x \omega^2 \frac{v_x}{r_x} = -m_x x_x \varepsilon + m_x y_x \omega^2
 \end{aligned}$$

Binobarin,

$$\left. \begin{aligned}
 \sum \Phi_{\alpha} &= \varepsilon \sum m_x y_x + \omega^2 \sum m_x x_x = M y_c \varepsilon + M x_c \omega^2, \\
 \sum \Phi_{\alpha} &= -\varepsilon \sum m_x x_x + \omega^2 \sum m_x y_x = -M x_c \varepsilon + M y_c \omega^2
 \end{aligned} \right\} \quad (23.26)$$

Ko'rilayotgan holda $\varepsilon_x = \varepsilon$ bo'lgani tufayli, (23.23) ga ko'ra inerstiya kuchlari bosh momentining koordinata o'qlaridagi proekstiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned}
 M_x^* &= \sum M_i(\vec{\Phi}_i) = I_{\alpha x} \varepsilon - I_{\alpha y} \omega^2, \\
 M_y^* &= \sum M_i(\vec{\Phi}_i) = I_{\alpha y} \varepsilon + I_{\alpha x} \omega^2
 \end{aligned} \right\} \quad (23.27)$$

(23.26) va (23.27) ni (23.25) ga qo'ysak,

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_A + X_B + My_c \varepsilon + Mx_c \omega^2 &= 0, \\ \sum Y_v + Y_A + Y_B - Mx_c \varepsilon + My_c \omega^2 &= 0, \\ \sum Z_v + Z_A &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B h + I_{xx} \varepsilon - I_{xx} \omega^2 &= 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B h + I_{yy} \varepsilon + I_{yy} \omega^2 &= 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_v) - I_{zz} \varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.28)$$

(23.28) tenglamalarning birinchi beshtasidan X_v, Y_v, Z_v, X_A, Y_A larni aniqlaymiz.

(23.28) ning oltinchi tenglamasida tayanch reaksiyalari qatnashmaydi va bu tenglama qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat differensial tenglamasi (22.8) ga ekvivalentdir.

Reaksiya kuchlarini quyidagi tartibda aniqlash mumkin. Dastlab

$$x_c, y_c, M, I_{xx}, I_{yy}, \sum X_v, \sum Y_v, \sum Z_v, \sum M_x(\vec{F}_v), \sum M_y(\vec{F}_v), \sum M_z(\vec{F}_v)$$

larni aniqlaymiz; (23.28) ning olinchi tenglamasi yordamida ε burchak tezlanish-ni, so'ngra integrallash yo'li bilan ω burchak tezlikni hisoblaymiz. ω va ε lar-ning topilgan qiymatlarini (23.28) ga qo'yib, A podpyatnik va B podshipnikning reaksiya kuchlarini topamiz.

23.5-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismni statik va dinamik muvozanatlash

A va B tayanch nuqtalarining reaksiya kuchlarini statik va dinamik tashkil etuvchilarga ajratamiz.

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i^s + \vec{R}_i^d, \vec{R}_B = \vec{R}_B^s + \vec{R}_B^d$$

Jismga ta'sir etuvchi berilgan kuchlarni muvozanatlovchi reaksiya kuchlarining \vec{R}_i^s, \vec{R}_B^s tashkil etuvchilari statik reaksiya kuchlari deyiladi. Statik reaksiya kuchlarini aniqlash uchun (23.28) ning birinchi beshtasida $\varepsilon = 0, \omega = 0$ deb olamiz. U holda quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_A^s + X_B^s &= 0, \sum Y_v + Y_A^s + Y_B^s = 0, \sum Z_v + Z_A^s = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B^s h &= 0, \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B^s h = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.29)$$

Berilgan kuchlar ta'sirida jism z o'q atrofida aylansa inerstiya kuchlari hosil bo'ladi. Bu inerstiya kuchlarini muvozanatlovchi reaks-

tiya kuchlarining \vec{R}_x^d, \vec{R}_y^d tashkil etuvchilari dinamik reakstiya kuchlari deyiladi.

Jisimga ta'sir etuvchi berilgan kuchlar statik reakstiya kuchlari bilan muvozanatlashgani tufayli, (23.28) dan dinamik reakstiya kuchlari aniqlanadigan quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} X_1^d + X_2^d + My_c \varepsilon + Mx_c \omega^2 &= 0, \\ Y_1^d + Y_2^d - Mx_c \varepsilon + My_c \omega^2 &= 0, \\ -Y_1^d h + I_w \varepsilon - I_w \omega^2 &= 0, \\ X_1^d h + I_w \varepsilon + I_w \omega^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.30)$$

Aylanish o'qi z bo'ylab yo'nalgan inerstiya kuchlari mavjud bo'lmagani tufayli, bu o'q bo'yicha yo'nalgan dinamik reakstiya kuchlari ham bo'lmaydi.

Qo'zg'almas aylanish o'qiga ega bo'lgan va og'irlik markazi aylanish o'qida yotuvchi jism *statik muvozanatlashgan jism* deyiladi. Oz aylanish o'qiga ega bo'lgan statik muvozanatlashgan jismning massalar markazi uchun $x_c = y_c = 0$ bo'ladi. Bu holda (23.30) ning birinchi ikkita tenglamasidan

$$X_1^d + X_2^d = 0, Y_1^d + Y_2^d = 0 \quad (23.31)$$

ya'ni

$$\vec{R}_1^d = -\vec{R}_2^d$$

munosabatni olamiz. Binobarin, statik muvozanatlashgan jismning dinamik reakstiya kuchlari juft kuchni tashkil etadi. Bunday juftni faqat juft kuch bilan muvozanatlash mumkin bo'lgani tufayli dinamik reakstiya kuchlarini muvozanatlovchi jisim nuqtalarining inerstiya kuchlari ham juft kuchga keltiriladi.

(23.31) ni nazarda tutib, (23.30) ning oxirgi ikkita tenglamasidan dinamik reakstiya kuchlarining tashkil etuvchilarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} X_1^d = -X_2^d &= \frac{I_w \varepsilon + I_w \omega^2}{h} \\ -Y_1^d = Y_2^d &= \frac{I_w \varepsilon - I_w \omega^2}{h} \end{aligned}$$

Dinamik reakstiya kuchlarining miqdori

$$R_1^d = R_2^d = \sqrt{(I_w^2 \varepsilon + I_w^2 \omega^2)(\varepsilon^2 + \omega^2)} \quad (23.32)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(23.32) dan ko'ramizki, dinamik reakstiya kuchlari faqatgina bur-

chak tezlantirishga bog'liq bo'lmay, burchak tezlikka ham bog'liq bo'ladi. Demak, jism faqat inerstiya bo'yicha o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanganda ham dinamik reakstiya kuchlari hosil bo'ladi.

Dinamik reakstiya kuchlari nolga teng bo'lgan jism *dinamik muvozanatlashgan jism* deyiladi.

(23.32) dan ko'ramizki, markazdan qochirma inerstiya momentlari I_x, I_y nolga teng bo'lgandagina dinamik reakstiya kuchlari nolga teng bo'ladi. Buning uchun dinamik muvozanatlashgan jismning aylanish o'qi inerstiya bosh o'qidan iborat bo'lishi kerak. Ko'rilayotgan holda jismning og'irlik markazi aylanish o'qi-da yotgani tufayli *dinamik muvozanatlashgan jismning aylanish o'qi markaziy inerstiya bosh o'qidan iborat bo'ladi*.

Dinamik reakstiya kuchi ta'sir etmaydigan markaziy inerstiya bosh o'qi erkin aylanish o'qi deyiladi.

Aylanish o'qi erkin bo'lishi uchun texnikada maxsus balanslash qurilmasidan foydalaniladi. Buning uchun jismlarni parralab o'yish yoki ma'lum qismiga qo'shimcha yuk birlashtirish usulidan foydalaniladi.

Jismda o'tkazilgan ixtiyoriy o'qni ikkita nuqtaviy massa qo'shish yo'li bilan erkin aylanish o'qiga aylantirish mumkinligini isbotlaymiz.

Massasi M ga teng bo'lgan jism uchun x_c, y_c, I_x, I_y lar ma'lum va noldan farqli bo'lsin. Bunday jismga koordinatalari (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) ga teng m_1, m_2 massah nuqtalarni birlashtiramiz. U holda (20.2 va (20.36) tengliklarga ko'ra

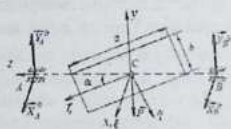
$$\left. \begin{aligned} Mx_c + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, \\ My_c + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, \\ I_x + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0, \\ I_y + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.33)$$

shartlar bajarilsa, $x_c = y_c = I_x = I_y = 0$ bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. (23.33) shartlarni qanoatlantiruvchi m_1, m_2 massalarni va ular qo'yilgan nuqtalarning koordinatalarini tanlash usuli bilan qo'yilgan masalani echish mumkin. Buning uchun ayrim kattaliklarni oldindan berilgan deb qarash mumkin. Masalan, m_1, m_2 va z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$) lar berilgan deb, x_1, y_1, x_2, y_2 larni (23.33) dan aniqlash mumkin.

Texnikada bu usuldan tirsakli val, krivoship hamda o'zaro

biriktirilgan qo'sha-loq g'ildiraklarni dinamik muvozanatlashda keng foydalaniladi.

Odatda aylanish o'qiga bosimni aniqlashda (23.30) formulalardan foydalan-may, balki har bir masala uchun Dalamber prinsipi qo'llaniladi.



23.4- rasm.

23.2- masala. Og'irligi P bo'lgan bir jinsli to'g'ri burchakli plastinka o'zining AB diagonali atrofida ω burchak tezlik bilan aylanadi. Agar tomonlarining uzunligi a va b bo'lsa, plastinkadan A va B tayanchlarga tushadigan dinamik bosim aniqlansin (23.4- rasm).

Yechish. Jism bilan birgalikda harakatlanuvchi $Cxyz$ koordinatalar sistemasini rasmdagidek yo'naltiramiz.

Aylanish o'qiga qo'yilgan bog'lanishlarni $\bar{X}_A^e, \bar{X}_B^e, \bar{Y}_A^e, \bar{Y}_B^e$ dinamik reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. U holda $Cxyz$ koordinatalar sistemasining o'qlari markaziy o'qlardan iborat ekanligini va plastinkaning z o'q atrofida o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanishini \bar{y} tiborga olib, (23.30) ga o'xshash tenglamalarni tuzamiz.

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_A^e + \bar{X}_B^e &= 0 \\ \bar{Y}_A^e + \bar{Y}_B^e &= 0 \\ \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (\bar{Y}_A^e - \bar{Y}_B^e) - I_{zz}\omega^2 &= 0 \\ \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (\bar{X}_A^e - \bar{X}_B^e) - I_{zz}\omega^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Cx o'q plastinka tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan holni, ya'ni bu o'q markaziy inerstiya bosh o'qidan iborat bo'lgan holni ko'ramiz. Bu holda

$$I_{zz} = 0 \quad (2)$$

Markazdan qochirma inerstiya momentini hisoblash uchun $C\xi\eta$ markaziy va bosh koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, Cx o'q $C\xi$ bilan ustma-ust tushsin; $C\xi$ o'q plastinkaning a tomoniga parallel, $C\eta$ esa unga perpendikulyar yo'nalsin.

$C\xi$ va $C\xi$ o'qlari orasidagi α burchak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

tenglamadan aniqlanadi.

Koordinata o'qlarini burish formulalari vositasida markazdan qochirma inerstiya momenti aniqlanadigan

$$I_{xz} = \int_{(M)} xz \, dm$$

integral ostidagi z , y kattaliklardan ζ , η kattaliklarga o'tamiz:

$$\left. \begin{aligned} y &= \zeta \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ z &= \zeta \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

z va y larning bu qiymatlarini I_{xz} ga qo'ysak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\int_{(M)} \zeta^2 \, dm - \int_{(M)} \eta^2 \, dm \right] + \cos 2\alpha \int_{(M)} \eta \zeta \, dm$$

$C_{\zeta\eta\zeta}$ bosh koordinatalar sistemasidan iborat bo'lgani uchun

$$\int_{(M)} \eta \zeta \, dm = 0$$

$C_{\zeta\eta}$ va $C_{\zeta\zeta}$ tekisliklarga nisbatan inerstiya momentlarini hisoblaymiz ($M = P \cdot g$):

$$\int_{(M)} \zeta^2 \, dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \zeta^2 \, d\zeta \, d\eta = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\int_{(M)} \eta^2 \, dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 \, d\eta \, d\zeta = \frac{Mb^2}{12}$$

Shunday qilib,

$$I_{xz} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{M}{12} (a^2 - b^2) = \frac{Mab}{12} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (3)$$

(2) va (3) ga asosan (1) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left. \begin{aligned} X_a^d + X_b^d &= 0, \\ Y_a^d + Y_b^d &= 0, \\ \frac{Mab\omega^2}{6} \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} &= (Y_a^d - Y_b^d), \\ (X_a^d - X_b^d) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) tenglamalar sistemasidan izlanayotgan noma'lumlarni aniqlaymiz.

$$X_A^d = X_B^d = 0, Y_A^d = \frac{-Mab\omega^2}{12} \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$Y_B^d = \frac{Mab\omega^2}{12} \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Nazorat savollari:

1. Mexanikaning prinsiplari.
2. Nuqta ushun Dalamber prinsipini ayting.
3. Mexanik sistema ushun Dalamber prinsipini ayting.
4. Inersiya kushlarining bosh vektori deganda nimani tushunasiz.
5. Inersiya kushlarining bosh momenti deganda nimani tushunasiz.

24-BOB. ANALITIK MEXANIKA

Tayanch soʻzlar: bogʻlanish, klassifikatsiya, mumkin boʻlgan koʻchish, analitik mexanika, erkinlik darajasi, ideal bogʻlanishlar, mumkin boʻlgan koʻchish prinsipi, umumlashgan koordinatalar, umumlashgan kuchlar, Lagranjning ikkinchi xil teng-lamalari, Gamilton—Ostrogradskiy prinsipi, kanonik tenglamalar, ustuvor muvo-zanat, Lagranj—Dirixle teoremasi, ustivor harakat, Lyapunov teoremlari, hara-katni optimal boshqarish

Analitik mexanikada mexanik sistemalarning muvozanati va harakati oʻrganila-di. Mexanikaning asosiy prinsiplarini bayon etish, ulardan harakat differensial tenglamalarini chiqarish, mazkur tenglamalarni izohlash va integrallash usullari analitik mexanikaning asosiy mavzuini tashkil etadi. Analitik mexanikada qoʻllani-ladigan umumiy usullarni mexanik sistemalarga tatbiq etish bilan birga bu usullardan elektr va elektromexanik hodisalarni tadqiq qilishda ham samarali foydalanish mumkin.

24.1-§. Bogʻlanishlar va uning klassifikatsiyasi

18-bobda bitta moddiy nuqtaga qoʻyilgan bogʻlanishlar ustida toʻxtalgan edik. Bu tushunchalarni mexanik sistema uchun umumlashtiramiz.

Sistema nuqtalarining harakatini ularning harakat qonuniga bogʻliq boʻlmagan va oldindan berilgan geometrik yoki kinematik shartlar bilan cheklovchi jismlarga bogʻlanishlar yoki analitik bogʻlanishlar deyiladi.

Bu taʼrifga koʻra sistema nuqtalarining harakatini cheklovchi har qanday jism analitik bogʻlanishdan iborat boʻla olmasligini alohida taʼkidlab oʻtarniz. Masalan, yuk osilgan prujina analitik bogʻlanishdan iborat boʻlmaydi, chunki yukning hara-katiga prujina tomonidan qoʻyiladigan cheklash yukning harakat qonuniga bogʻliq boʻladi.

Agar sistema nuqtalariga bogʻlanishlar qoʻyilmagan boʻlsa, bunday sistema *erkin sistema* deyiladi. Aks holda sistema *bogʻlanishdagi sistema* deyiladi.

Quyosh sistemasiga kiruvchi planetalar erkin sistemani tashkil eta-di. Bu planetalar bir-biriga butun olam tortishish qonuni asosida taʼsir

etadi. Planetalarning harakati oldindan berilgan biror shartlar bilan kinematik cheklanmaydi.

Istalgan mashina yoki mexanizm bog'lanishdagi sistemaga misol bo'la oladi. Masalan, teplovozni bog'lanishdagi mexanik sistema deb qarash, u holda temir yo'l bog'lanish vazifasini o'taydi.

N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlarning matematik ifodasi vaqt, sistema nuqtalarining koordinatalari va ularning hosilalariga bog'liq tenglamalar yoki tengsizliklar bilan aniqlanadi:

$$f_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}, \dot{x}_{\mu}, \dot{y}_{\mu}, \dot{z}_{\mu}, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.1)$$

yoki

$$f_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}, \dot{x}_{\mu}, \dot{y}_{\mu}, \dot{z}_{\mu}, t) \geq 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.2)$$

Bu erda va kelgusida $f_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}, \dot{x}_{\mu}, \dot{y}_{\mu}, \dot{z}_{\mu}, t)$ ifodada $x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}, \dot{x}_{\mu}, \dot{y}_{\mu}, \dot{z}_{\mu}$ lar o'rnida barcha $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ lar qatnashadi hamda f_{μ} funktsiya va uning hosilalari uzluksiz funktsiyalardan iborat deb qaraladi.

Tenglamalar bilan ifodalanadigan bog'lanishlar *bo'shatmaydigan bog'lanish-lar*, tengsizliklar bilan ifodalanadigan bog'lanishlar esa *bo'shatadigan bog'lanish-lar* deyiladi.

Masalan, ikkita moddiy nuqta o'zgarmas uzunlikka ega bo'lgan terjen bilan tutashtirilgan bo'lsa, bunday bog'lanish

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 \quad (1)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Agar ikkita moddiy nuqta egiluvchan, cho'zilmaydigan va uzunligi l ga teng ip bilan tutashtirilgan bo'lsa, bog'lanish

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \geq 0 \quad (2)$$

tengsizlik bilan ifodalanadi. Ip tarang holatda bo'lgan-da, tenglik ishorasi, aks holda tengsizlik ishorasi olinadi.

Agar bog'lanishlar faqat sistema nuqtalarining koordinatalariga chek qo'ysa, bunday bog'lanishlar *geometrik bog'lanishlar* deyiladi. Geometrik bog'lanishlarning tenglamasi

$$f(x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}, t) = 0 \quad (24.3)$$

ko'rinishda yoziladi.

(1) yoki (2) munosabatlar bilan ifodalangan bog'lanishlar geometrik bog'lanishlarga misol bo'la oladi.

Agar bog'lanishlar sistema nuqtalarining koordinatalaridan

tashqari tezligiga ham chek qo'ysa, ularga kinematik yoki differentsial bog'lanishlar deyiladi. Ki-nematik bog'lanishlarning analitik ifodasi (24.1) yoki (24.2) ko'rinishda yoziladi.

Agar bog'lanish tenglamalari (24.1) integrallanadigan bo'lsa, bog'lanish golonimli bog'lanish; integrallanmaydigan bo'lsa, begolonom bog'lanish deyiladi.

Masalan, radiusi R ga teng g'ildirak to'g'ri chiziqli rels bo'ylab sirpanmay harakatlansin (24.1 rasm). Bunday g'ildirakning O_1 harakat tekisligidagi holati g'ildirak O markazining koordinatalari va bu markaz atrofidagi aylanish burchagi φ bilan aniqlanadi. Agar x o'qni rels bo'ylab yo'naltirsak, u holda

$$y_0 = R \quad (3)$$

munosabat geometrik bog'lanishni ifodalaydi. Bundan tashqari, g'ildirak sirpan-masdan harakatlangani uchun g'ildirakning relsiga tegib turgan C nuqtasining tez-ligi nolga teng bo'ladi. Bu shart

$$\dot{x}_0 - R\dot{\varphi} = 0 \quad (4)$$

kinematik bog'lanish bilan ifodalanadi. (4) ni integrallab, x_0 va φ orasidagi munosabatni aniqlaymiz:

$$x_0 - R\varphi = \text{const}$$

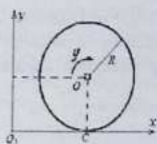
Binobarin, (4) tenglama bilan ifodalanadigan bog'lanish golonimli bog'lanishdan iborat bo'ladi.

Begolonom bog'lanish qo'yilgan jismga misol tariqasida gorizontall tekislik bo'ylab sirpanmasdan harakatlantiruvchi radiusi R ga teng sharni olish mumkin (24.2-rasm). Sharga qo'yilgan bog'lanishlar sharning markazidan tekislikkacha bo'lgan masofaning o'zgarmasligini ifodalovchi

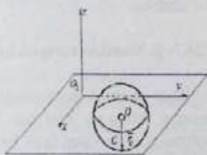
$z_0 = R$ geometrik bog'lanish va sharning tekislikka tegib turgan C nuqtasining tezligi nolga tengligini ifodalovchi $\vec{v}_C = 0$ yoki

$$\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_C = 0 \quad (5)$$

kinematik bog'lanish bilan ifodalanadi.



24.1-rasm.



24.2-rasm.

(5) ni Eyleming kinematik tenglamalari (11.29) dan foydalanib yozamiz va ho-sil bo'lgan vektorli tenglamani koordinata o'qlariga proekstiyalab, quyidagi uch-ta skalyar tenglamalarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_o - R(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) &= 0, \\ \dot{y}_o + R(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) &= 0, \\ \dot{z}_o &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) tenglamalarning birinchi ikkitasi in-tegrallanmaydi, shuning uchun bu tenglamalar begonom bog'lanish tenglamalarini ifodalaydi.

Agar bog'lanishning analitik ifodasi va-qtga oshkor ravishda bog'liq bo'lsa, unga *stasionar bo'lmagan bog'lanish* deyiladi. Stasionar bo'lmagan gonomli va bo'shatmaydigan bog'lanish tenglamalari umumiy holda

$$\varphi_\mu(x, y, z, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar bog'lanishning analitik ifodasi vaqtga oshkor ravishda bog'liq bo'lmasa, bunday bog'lanish *stasionar bog'lanish* deyiladi. Gonomli stasionar va bo'shatmaydigan bog'lanishlar tenglamasi umumiy holda

$$\varphi_\mu(x, y, z, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

ko'rinishda yoziladi. (1) — (4) tenglamalar ham stasionar bog'lanish tenglamalarini ifodalaydi.

Kelgusida faqat gonomli bo'shatmaydigan bog'lanishlar ustida to'xtalamiz.

24.2- §. Mumkin bo'lgan ko'chish. Sistemaning erkinlik darajasi

Agar mexanik sistemaga bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, bunday sistema ixtiyoriy ravishda ko'cha olmaydi, chunki bog'lanishlar sistema nuqtalarining faqat ba'zi ko'chishlarigagina yo'l qo'yadi.

Bog'lanishdagi mexanik sistema uchun mumkin bo'lgan ko'chish tushuncha-sini kiritamiz.

Sistemaga qo'yilgan bog'lanishni qanoatlantirgan holda sistema nuqtalarining berilgan onda tasavvur qilinadigan cheksiz kichik ko'chishlari *mexanik sistema-ning mumkin bo'lgan ko'chishi* deyiladi.

Xuddi shuningdek, bog'lanishdagi nuqta uchun mumkin bo'lgan ko'chish tu-shunchasi kiritiladi.

Mumkin bo'lgan ko'chishlar vaqtning qayd qilingan payti uchun sodir bo'ladi deb qaralgani tufayli sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlar ham umumiy holda vaqtga bog'liq bo'lishiga qaramay, xuddi shu qayd qilingan payt uchun o'zgarmas deb qaraladi. Shuningdek, sistema nuqtalarga mumkin bo'lgan ko'chish berilgan paytda stasionar bo'lmagan bog'lanish tenglamalarida vaqtning o'zgarishi hisoblanadi.

Misol tariqasida

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (24.4)$$

ko'rinishdagi stasionar bo'lmagan, bo'shatmaydigan golonomli bog'lanish qo'yilgan bitta moddiy nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi qanday aniqlanishini ko'rib chiqamiz.

Aytaylik, vaqtning qayd qilingan t paytida nuqta $M_0(x_0, y_0, z_0)$ holatni egallasin va uning radius-vektori \vec{r}_0 bo'lsin. Xuddi shu qayd qilingan vaqt uchun nuqta-ga fikran $\delta\vec{r}$ kichik ko'chish beramiz. Qanday shart bajarilganda $\delta\vec{r}$ bog'lanishni qanoatlantirishini aniqlaymiz. Nuqta $\delta\vec{r}$ ga ko'chgandan so'ng $M_1(x_1, y_1, z_1)$ holatni egallaydi va uning radius-vektori $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}$ ga teng bo'ladi. M_1 nuqtaning ko-ordinatalari uchun quyidagi tengliklar o'rinni bo'ladi:

$$x_1 = x_0 + \delta x, y_1 = y_0 + \delta y, z_1 = z_0 + \delta z,$$

bunda $\delta x, \delta y, \delta z$ bilan $\delta\vec{r}$ vektorning proekstiyalari

bo'lib, ular koordinatalarning variatsiyalari deyiladi.

M_1 nuqta ham bog'lanish tenglamasini qanoatlantirishi kerak:

$$f(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y, z_1 + \delta z, t) = 0$$

munosabat o'rinni bo'ladi. Bu ifodani Teylor qatoriga yoysak,

$$f(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \delta x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \delta y + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 \delta z + \dots = 0$$

Bunda uch nuqta bilan yuqori tartibli hadlar belgilangan.

M_1 nuqtaning ko-ordinatalari bog'lanish tenglamasi (24.4) ni qanoatlantirgani tufayli $f(x_0, y_0, z_0, t) = 0$ bo'ladi. Binobarin, yuqori tartibli hadlarni e'tiborga olmasak, $\delta\vec{r}$ mumkin bo'lgan ko'chishning koordinata o'qlaridagi proekstiyalari quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \delta x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \delta y + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 \delta z = 0 \quad (24.5)$$

Agar qayd qilingan t vaqt uchun funkstiyaning M_0 nuqtadagi

gradienti

$$(\text{grad}f) = \left(\frac{df}{dx}\right)_n \vec{i} + \left(\frac{df}{dy}\right)_n \vec{j} + \left(\frac{df}{dz}\right)_n \vec{k} = 0$$

ni kiritsak, (24.5) ning chap tomonini $(\text{grad}f)_n$ va $\vec{\delta r}$ vektorlarning skalyar ko'payt-masi tarzida ifodalash mumkin:

$$(\text{grad}f)_n \cdot \vec{\delta r} = 0 \quad (24.6)$$

(24.6) dan foydalanib, mumkin bo'lgan ko'chishga qo'yilgan chekni quyidagicha geometrik izohlay olamiz. Qayd qilingan t vaqtda (24.4) bog'lanish tenglamasi fazoda biror sirtni ifodalaydi. Ma'lumki, funkstiyaning M_0 nuqtadagi gradienti shu nuqtada sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'naladi. (24.6) dan ko'ramizki, har qanday mumkin bo'lgan ko'chish $\vec{\delta r}$ sirt ga o'tkazilgan normalga perpendikulyar yo'naladi, ya'ni qayd qilingan t vaqtda nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi (24.4) sirtga M_0 nuqtada o'tkazilgank urinma tekislikda yotadi (24.3-rasm, a).

Agar nuqtaning haqiqiy ko'chishini $d\vec{r}$ bilan belgilasak, bu ko'chish nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi $\vec{\delta r}$ dan farqli ravishda dt vaqt ichida nuqtaga ta'sir

etuvchi kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi hamda nuqtaning raektoriyasiga urinma bo'yicha yo'naladi, chunki $d\vec{r} = \vec{v}dt$ (24.3-asm, b). Binobarin, nuqtaga (24.4) ko'rinishdagi stasionar bo'lmagan bog'lanish qo'yilsa, nuqta traektoriyasi sirt



24.3-rasm.

bilan ustma-ust tushmagani uchun uning haqiqiy ko'chishi $d\vec{r}$ birorta ham mumkin bo'lgan ko'chish $\vec{\delta r}$ bilan ustma-ust tushmaydi.

Xususan, nuqtaga $f(x, y, z) = 0$ ko'rinishdagi stasionar bog'lanish qo'yilsa, u holda nuqtaning traektoriyasi $f(x, y, z) = 0$ sirt ustida yotadi (24.3- rasm, a), de-mak, bu holda doimo nuqtaning haqiqiy ko'chishi $d\vec{r}$ bilan ustma-ust tushadigan biror $\vec{\delta r}$ mumkin bo'lgan ko'chishni ko'rsata olamiz.

Shunday qilib, nuqtaga stasionar bog'lanish qo'yilsa, uning haqiqiy ko'chishi $d\vec{r}$ birorta mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta\vec{r}$ bilan ustma-ust tushadi.

Agar mexanik sistemaga

$$f_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, t) = 0, (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.7)$$

ko'rinishdagi l ta ($l < 3N$) stasionar bo'lmagan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, xuddi (24.5) kabi sistema nuqtalarining $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_N$ mumkin bo'lgan ko'chishlari quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\sum \left[\left(\frac{df_{\mu}}{dx_{\nu}} \right)_{\nu} \delta x_{\nu} + \left(\frac{df_{\mu}}{dy_{\nu}} \right)_{\nu} \delta y_{\nu} + \left(\frac{df_{\mu}}{dz_{\nu}} \right)_{\nu} \delta z_{\nu} \right] = 0, (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.8)$$

(24.8) ni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\sum (\text{grad} f_{\mu})_{\nu} \cdot \delta\vec{r}_{\nu} = 0, (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.9)$$

Shunday qilib, berilgan mexanik sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishi (24.8) yoki (24.9) tenglamalarni qanoatlantiradigan $\delta x, \delta y, \delta z$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$) variastiyalarning qiymatlari bilan anahtik aniqlanadi. $l < 3N$ bo'lgani uchun (24.8) tenglamalardagi $3N$ ta variastiyalardan l tasi qolgan $3N - l$ tasi orqah ifodalaniishi mumkin. Demak, $3N - l = n$ ta variastiyalar erkin bo'lib, qolgan l tasi esa (24.8) tenglamalar vositasida aniqlanadi. Mumkin bo'lgan erkin ko'chishlar soni sistemaning erkinlik darajasi deyiladi.

Erkin moddiy nuqtaning erkinlik darajasi 3 ga teng bo'ladi. Agar nuqta (24.4) tenglama bilan ifodalanadigan sirt ustida harakatlansa, $\delta x, \delta y, \delta z$ orasida (24.5) ko'rinishidagi bitta munosabat mavjud bo'ladi. Shu sababli sirt bo'ylab harakatlana-yotgan nuqtaning erkinlik darajasi 2 ga teng bo'ladi. Agar nuqta egri chiziq bo'ylab harakatlansa, egri chiziqni ikkita sirtning kesishgan chizig'i deb qarash mumkin bo'lganidan, bunday nuqtaning erkinlik darajasi bitta bo'ladi.

24.3-§. Kuchning mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishi. Ideal bog'lanishlar

Nuqtaga ta'sir etuvchi \vec{F} kuchning $\delta\vec{r}$ mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishini δA bilan belgilasak, elementar ish hisoblanadigan (21.90) va (21.95) for-mulalarga asosan

$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \quad (24.10)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek, N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishi

$$\sum \delta A_i = \sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \quad (24.11)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanish reakstiya kuchlarini \vec{R}_i bilan belgilaymiz.

Agar sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanish reakstiya kuchlarining sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishlari yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday bog'lanishlar ideal bog'lanishlar deyiladi. Binobarin, ideal bog'lanishlar uchun

$$\sum \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (24.12)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$f(x, y, z) = 0$ bog'lanish qo'yilgan bitta nuqta uchun (24.12) ni

$$\vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (24.13)$$

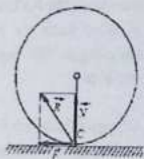
ko'rinishda yozish mumkin. Demak, ideal bog'lanish reakstiya kuchi \vec{R}_i nuqtaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta \vec{r}_i$ ga perpendikulyar bo'yicha, ya'ni mazkur nuqtada $f(x, y, z) = 0$ sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'naladi.

Ideal bog'lanishlarning ayrim turlari ustida to'xtalamiz.

1. Absolyut qattiq jism nuqtalari orasidagi bog'lanishni ideal bog'lanishdan iborat deb qarash mumkin. Bu holda bog'lanish reakstiya kuchlari ichki kuchlardan iborat bo'ladi hamda xuddi (21.110) dagi kabi ichki kuchlarning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'ladi.

2. Sistema mahkamlangan nuqtalarining har biri ideal bog'lanishdan iborat bo'ladi, chunki bu nuqtalarning mumkin bo'lgan ko'chishi nolga teng.

3 Absolyut qattiq jism boshqa qattiq jism ustida sirpanmasdan dumalasa, bunday bog'lanish ham ideal bog'lanishdan iborat bo'ladi (24.4-rasm). Haqiqatan ham bu holda dumalashdagi ishqalanish mavjud bo'lmaydi. Absolyut silliq bo'lmagan sirtning reaksiya kuchi \vec{R} qo'yilgan C nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta\vec{r}_C = 0$ bo'ladi. Binobarin, \vec{R} kuchning mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishi $\delta A = \vec{R} \delta\vec{r}_C = 0$ bo'ladi hamda ta'rifga ko'ra bunday bog'lanish ideal bog'lanishdan iborat bo'ladi.



24.4-rasm.

24.4-§. Mumkin bo'lgan ko'chish printipi

Bu paragrafda moddiy nuqtalar sistemasining muvozanatini tekshiramiz. Avvalo «muvozanat» so'zi «tinch holat» ga ekvivalent bo'lmay, moddiy nuqtalar sistemasiga qaraganda ko'proq unga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasiga taalluqlidir. Haqiqatan ham moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar o'zaro muvozanatlashgan bo'lishiga qaramay, moddiy nuqta tinch holatda bo'lmay, to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'lishi mumkin.

1788 yilda Lagranj ideal, stasionar va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan moddiy nuqtalar sistemasining muvozanat haqidagi mumkin bo'lgan ko'chish printipini bayon etdi. Bu printipni Nyuton qonunlaridan foydalanib isbotlash mumkin. Shu sababli printipni teorema tarzida bayon etamiz.

Teorema (*mumkin bo'lgan ko'chish printipi*). *Ideal, stasionar va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan moddiy nuqtalar sistemasini muvozanatda bo'lishi uchun sistema nuqtalariga qo'yilgan barcha aktiv kuchlarning sistema nuqtalarining har qanday mumkin bo'lgan ko'chishidagi elementar ishlari yig'indisi nolga teng bo'lishi, ya'ni*

$$\sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0 \quad (24.14)$$

hamda sistema barcha nuqtalarining berilgan ondagi tezliklari nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. Agar mexanik sistema muvozanatda bo'lsa, u holda sistema nuqtalariga qo'yilgan aktiv kuchlar (24.14) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Haqiqatan ham, agar mexanik sistema

muvozanatda bo'lsa, mazkur sistema-ning har bir nuqtasiga qo'yilgan \vec{F}_v aktiv kuch va \vec{R}_v bog'lanish reaksiya kuchlari statika bo'limida chiqarilgan bir nuqtaga qo'yilgan kuchlarning muvozanat tenglamalarini

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

qanoatlantiradi.

Berilgan holatdan sistema nuqtalariga $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_N$ mumkin bo'lgan ko'chish-lar beramiz va muvozanat tenglamalarining har birini $\delta\vec{r}_v$ ga ko'paytirib qo'shamiz:

$$\sum (\vec{F}_v + \vec{R}_v) \delta\vec{r}_v = 0$$

yoki

$$\sum \vec{F}_v \delta\vec{r}_v + \sum \vec{R}_v \delta\vec{r}_v = 0 \quad (24.15)$$

Sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bog'lanishlardan iborat bo'l-gani uchun $\sum \vec{R}_v \delta\vec{r}_v = 0$. Shunday qilib, (24.15) dan isbot qilinishi zarur bo'lgan

$$\sum \vec{F}_v \delta\vec{r}_v = 0$$

tenglikni olamiz.

Y e t a r l i l i g i. (24.14) bajarilsa, sistema muvozanatda bo'lishini botlash uchun mulohazani teskaridan boshlaymiz. Aytaylik, teoremaning barcha shartlari bajarilishiga qaramay, sistema nuqtalari muvozanatda bo'lmasin. Bu holda sistemaning kamida bitta nuqtasi uchun kuchlarning muvozanat shartlari bajarilmaydi, ya'ni

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v \neq 0$$

Sistema nuqtalariga mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlar stasionar bog'lanishdan iborat bo'lgani uchun sistema har bir nuqtasining nolga teng bo'lmagan teng ta'sir etuvchi kuchdan olgan haqiqiy elementar ko'chishi mumkin bo'lgan ko'chishlarning birortasi bilan ustma-ust tushadi. Teorema shartiga ko'ra sistema har bir nuqtasining berilgan ondagi tezligi nolga teng bo'lgani uchun haqiqiy elementar ko'chishlar mazkur nuqtaning tezlaniishi yoki teng ta'sir etuvchi kuch bo'ylab yo'naladi. Oxirgi tenglikni $\delta\vec{r}_v = d\vec{r}$ ga skalyar ko'paytirsak, sistemaning muvozanat holatidan chiqarilgan biror nuqtasi uchun

$$(\vec{F}_v + \vec{R}_v) \delta\vec{r}_v > 0$$

bo'ladi. Bunday tengsizliklarni sistemaning barcha nuqtalari uchun yozib, ularni qo'shsak,

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \delta \vec{r}_i > 0 \quad (24.16)$$

munosabatni olamiz.

Ideal bog'lanishlar uchun $\sum \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$ bo'lgani tufayli (24.16) dan quyidagi tengsizlikni olamiz:

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i > 0$$

Bu natija (24.14) shartga ziddir. Binobarin, (24.14) shart bajarilsa, sistema muvozanat holatida qolishi kerak. Shunday qilib, (24.14) shart mexanik sistema muvozanatining zarur va etarli shartini ifodalashini isbotladik.

Agar berilgan onda sistema nuqtalarining tezligi nolga tengligini ifodalovchi qo'shimcha shart kiritilmasa, mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi faqat sistema nuqtalarining tezlanishi nolga tengligini ifodalaydi. (24.14) shart bajarilgan onda u bilan birga sistema nuqtalarining tezligi nolga teng bo'lsa, sistema muvozanatda bo'ladi.

Elementar ishning analitik ifodasidan foydalanib, mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini

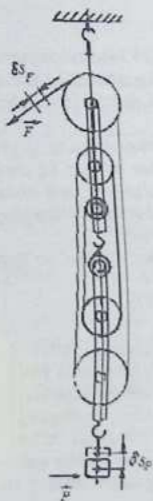
$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \quad (24.17)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini ifodalovchi (24.14) da bog'lanish reaksiya kuchlari qatnashmaydi. Lekin bu prinsip yordamida noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlarini ham aniqlash mumkin. Buning uchun sistemani reaksiya kuchi aniqlanadigan bog'lanishdan bo'shatib, uning sistemaga ko'rsatadigan ta'sir reaksiya kuchi bilan almashtiramiz va bu kuchni aktiv kuchlar qatoriga qo'shamiz. Qolgan bog'lanishlar esa ideal bog'lanishlardan iborat bo'lishi kerak.

Ba'zan mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini ideal bo'lmagan bog'lanish qo'yilgan sistema uchun ham qo'llaniladi. Buning uchun bog'lanishning noideallik shartini mos reaksiya kuchi bilan almashtirib, bu kuchni aktiv kuchlar qatoriga qo'shish kerak. Masalan, bog'lanish silliq bo'lmagan sirdan iborat bo'lsa, aktiv kuchlar qatoriga sirpanishdagi ishqalanish kuchi yoki umumiy holda bundan tashqari dumalashdagi ishqalanish juftini qo'shib, bog'lanishni ideal bog'lanishga keltiriladi.

24.5-§. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini oddiy mashinalarga qo'llash



24.5-rasm.

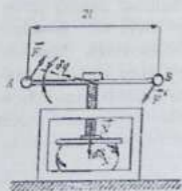
1. Polispast. Polispast ikkita oboymaga o'rnatilgan bloklar sistemasidan tashkil topadi (24.5-rasm). Oboymalardan biri qo'zg'almaydi, ikkinchisi esa bloklar orqali o'tkazilgan ip vositasida harakatlanadi.

Bloklarda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchini hisobga olmay, muvozanat holatida \vec{F} va \vec{P} kuchlar orasidagi munosabatni aniqlaymiz. Polispastga mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Agar \vec{F} kuch qo'yilgan nuqta δs_r ga ko'chsa, bloklar orasidagi oltita ip bo'lagining har biri $\frac{1}{6} \delta s_r$ ga qisqaradi. Shu sababli \vec{P} kuch qo'yilgan nuqta $\delta s_p = \frac{1}{6} \delta s_r$ masofaga yuqoriga ko'chadi.

Polispast uchun mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llasak, $F \delta s_r - P \delta s_p = 0$ yoki $F \delta s_r - P \frac{1}{6} \delta s_r = 0$.

Bundan $F = \frac{1}{6} P$ bo'lishini aniqlaymiz.

Demak, harakatlantiruvchi \vec{F} kuchning miqdori ko'tarilayotgan yukning og'irligidan polispast



24.6-rasm.

g'ildiraklarining soni qancha bo'lsa, shuncha marta kam bo'ladi.

2. Vintli press. 24.6-rasmda vintli press sxemasi tasvirlangan. Pressning jismga bosi (\vec{F}, \vec{F}') juft kuch ta'sirida hosil bo'ladi. Siqiluvchi jismning reaksiya kuchi \vec{V} bilan mazkur juftning momenti orasidagi bog'lanishni mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi vositasida aniqlaymiz.

AB dastaga (\vec{F}, \vec{F}') juft yo'nalishida $\delta\varphi$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. U holda N kuch qo'yilgan nuqta bu kuchning yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda δs_N ko'chish oladi. Vintli press uchun mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini ifodalovchi

$$M\delta\varphi - N\delta s_N = 0 \quad (1)$$

tenglikni tuzamiz.

Dasta to'liq bir marta aylanganda vint o'qi (vint qadami deb ataluvchi) h ma-sofaga ko'chadi. $\delta\varphi$ va δs_N orasidagi munosabatni aniqlash uchun vint o'qining bo'ylama ko'chishi δs_N ning vint qadami h ga nisbati $\delta\varphi$ ko'chishning 2π bur-chakka nisbatiga tengligidan foydalanamiz:

$$\frac{\delta s_N}{h} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}$$

Bundan $\delta s_N = h \frac{\delta\varphi}{2\pi}$ ni (1) ga qo'ysak,

$$2F \cdot l \cdot \delta\varphi - Nh \frac{\delta\varphi}{2\pi} = 0$$

Bundan $N = 4\pi F \frac{l}{h}$ bo'lishini aniqlaymiz.

24.6- §. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llashga oid masalalar

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga oid masalalarni quyidagi uch gruppaga bo'lish mumkin:

1. Berilgan onda muvozanatda bo'lgan sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni yoki bu kuchlar orasidagi munosabatlarni aniqlash.

2. Ta'sir etuvchi kuchlar berilgan holda sistemaning muvozanat holatini aniqlash.

3. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llab, bog'lanish reaksiya kuchlarini aniqlash.

24.1-masala. Sistema 24.7-rasm, a da tasvirlangan muvozanat holatini egallagan. \vec{F} kuchning ta'sir chizig'i BC sterjenga perpendikulyar yo'nalgan; tekis taq-simlangan kuchlarning intensivligi q teng bo'lib, AC sterjenga to'g'ri burchak ostida qo'yilgan. Agar $F = 10$ kN, $q = 2$ kN/m bo'lsa, sterjenlarning og'irligini hi-sobga olmay, A nuqtaning reaksiya momenti aniqlansin.

Yechish. Tekis taqsimlangan kuchlarni ular ta'sir etuvchi uchastkaning o'r-tasidagi D nuqtaga qo'yilgan $Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$ kN bitta kuch bilan almashtiramiz.

F kuchni gorizontal va vertikal tashkil etuvchilarga ajratamiz;

$$F_1 = F \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ kN.}$$

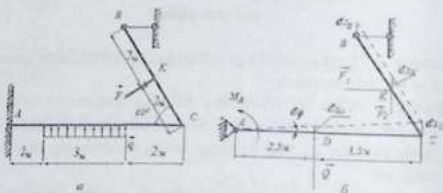
$$F_2 = F \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ kN.}$$

Dastlab A nuqtadagi reaksiya momenti M_A ni aniqlaymiz. Buning uchun A nuqtadagi bog'lanishni qo'zg'almas sharmirli tayanch bilan almashtiramiz va sistemani A nuqta atrofida aylanishiga to'sqinlik qiluvchi bog'lanishdan bo'shatamiz va uning ta'sirini M_A reaktiv moment bilan almashtiramiz (24.7-rasm, δ).

Sistemani A nuqta atrofida δ_φ burchakka burib, unga mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Aytaylik, bu ko'chish soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda bo'lsin. U holda sistema tekis parallel harakatda bo'ladi. C nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishini δ_C bilan belgilasak,

$$AC \cdot \delta_\varphi = \delta_C.$$

AC sterjen A nuqta atrofida δ_φ ga burilganda Q kuch qo'yilgan D nuqta δ_C ga parallel ra vishda δ_C ga ko'chadi hamda



24.7-rasm.

$$\frac{\delta_C}{\delta_\varphi} = \frac{AD}{AC}$$

yoki

$$\delta_C = \frac{AD}{AC} \delta_\varphi = \frac{AD}{AC} AC \cdot \delta_\varphi = AD \cdot \delta_\varphi$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

C va B nuqtalarning ko'chishi parallel bo'lgani uchun CB ilgari lama harakatda bo'ladi. Binobarin, \vec{F} kuch qo'yilgan K nuqtaning ko'chishi ham δx_c ga parallel bo'ladi va

$$\delta x_k = \delta x_c = AC \cdot \delta \varphi$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

24.9- rasm, b da tasvirlangan sistema uchun mumkin bo'lgan ko'chish prinsti-pini qo'llaymiz:

$$M_A \cdot \delta \varphi + Q \delta y_D + F_2 \delta x_k = 0$$

yoki $\delta y_D, \delta x_k$ larning $\delta \varphi$ orqali ifodasini qo'ysak,

$$M_A = -Q \cdot AD - F_2 \cdot AC = -45 \text{ kNm}$$

Bu erda manfiy ishora M_A reaktiv moment aslida soat strelkasi harakati bo'yicha yo'nalganligini bildiradi.

24.7- §. Sistemaning umumlashgan koordinatalari

Agar mexanik sistema N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, uning holatini $Oxyz$ inerstial hisoblash sistemasiga nisbatan $3N$ ta x, y, z , Dekart koor-dinatalari bilan aniqlash mumkin. Aytaylik, mexanik sistemaga

$$f_\mu(x, y, z, t) = 0, (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

ko'rinishdagi gonomli, stasionar bo'lmagan, ideal bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin.

U holda sistemaning $3N$ ta x, y, z , koordinatalari l ta bog'lanis tenglamalari qanoatlantirgani tufayli, ular erkin bo'la olmaydi. $3N$ koordinatalardan faqat $n = 3N - l$ tasi erkin koordinatalardan iborat bo'ladi. Sistemaning holatini mazkur n ta erkin koordinatalar vositasida, qolgan koordinatalarni esa bog'lanish tenglamalari vositasida aniqlash mumkin. Biroq ko'pincha erkin koordinatalarni bunday tanlash maqsadga muvofiq bo'lmaydi, chunki bu usulda sistemaning holatini aniqlash ancha murakkab bo'ladi. Analitik mexanikada bunday sistemaning holatini bir qiymatli aniqlash uchun umumlashgan koordinatalar deb ataladigan n ta maqsadga muvofiq ravishda tanlab olingan q_1, q_2, \dots, q_n erkin parametrlar olinadi. Bunday ko-ordinatalar uchun uzunlik yoki burchak kattaliklari o'lchoviga ega bo'lgan parametrlarni olish mumkin. Ko'pincha bunday koordinatalar uchun qutb koordinatalari, silindrik yoki sferik koordinatalar olinadi. Umumlashgan koordinatalar q_i bilan belgilanadi.

Masalan, qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning holatini aniqlashda umumlashgan koordinata sifatida aylanish burchagi φ ni, sferik harakatdagi jism uchun esa Eylar burchaklarini olish mumkin. Umumiy xolda tekis parallel harakatdagi jismning holatini aniqlash uchun qutb koordinatalari va bitta aylanish burchagini olish mumkin.

Aytaylik, mexanik sistemaning holati n ta q_1, q_2, \dots, q_n umumlashgan koordinatalar vositasida aniqlansin. Bunday sistemaning har bir nuqtasi holatini uning radius vektori \vec{r}_v orqali aniqlash mumkin bo'lgani tufayli, \vec{r}_v larni umumlashgan ko-ordinatalar va vaqtning funktsiyasi sifatida ifodalash mumkin:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (24.18)$$

U holda sistema nuqtalarining koordinatalari quyidagicha ifodalaniadi:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= x_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ y_v &= y_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ z_v &= z_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{aligned} \right\} (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.19)$$

Agar sistema nuqtalariga golonimli, stasionar bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, umumlashgan koordinatalarni (24.19) da vaqt oshkor ravishda qat-nashmaydigan qilib tanlab olish mumkin.

Umumlashgan koordinatalarning afzalligi shundan iboratki, bu koordinatalar erkin bo'lishi bilan birga ularni kiritish natijasida golonimli bog'lanishlarni e'ti-borga olish zarurati tug'ilmaydi. Chunki umumlashgan koordinatalarni tanlash ja-rayonida bog'lanish tenglamalari avtomatik tarzda qanoatlantiriladi. Yuqorida ko'rganimizdek (24.2-§), mumkin bo'lgan erkin ko'chishlar (yoki erkin koordinatalar variatsiyasi) soniga sistemaning erkinlik darajasi deyiladi. Binobarin, golonimli bog'lanishlar qo'yilgan sistemaning erkinlik darajasi erkin koordinatalar soniga teng bo'ladi.

(24.18) ga ko'ra sistema nuqtalarining dt vaqt ichidagi haqiqiy ko'chishi $d\vec{r}_v$ quyidagicha aniqlanadi:

$$d\vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} dt \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (24.20)$$

Ma'lumki, mumkin bo'lgan ko'chishni aniqlashda bog'lanish tenglamasida vaqt o'zgarmas deb qaraladi. Shu sababli (24.18) yordamida mumkin bo'lgan ko'chishni hisoblashda $\delta t = 0$ deb olinadi.

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i \quad (24.21)$$

21.8-§. Umumlashgan kuchlar

Yuqorida ko'rganimizdek, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishlarining yig'indisi (24.11) formula yordamida aniqlanadi. (24.21) ni nazarda tutib, (24.11) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum \delta A_v = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i$$

yoki yig'indilarning tartibini almashtirsak,

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

tenglik hosil bo'ladi. Agar

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \quad (24.22)$$

belgilash kiritsak, oxirgi tenglikni

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (24.23)$$

ko'rinishda yoza olamiz.

Q_i kattalikka q_i umumlashgan koordinataga mos bo'lgan umumlashgan kuch deyiladi.

Umumlashgan kuchning o'lchovi unga mos bo'lgan umumlashgan koordinata-ning o'lchoviga bog'liq bo'ladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$[Q_i] = \left[\frac{A}{q_i} \right]$$

Agar umumlashgan koordinata uzunlik birligida o'lchansa, umumlashgan kuch birligi (N) da o'lchanadi; agar umumlashgan koordinata burchak o'lchoviga ega bo'lsa, umumlashgan kuch kuchning momenti birligi (N.m) da o'lchanadi.

Umumlashgan kuchlarni hisoblash usullari ustida to'xtalamiz.

1. Umumlashgan kuchlarni (24.22) formula vositasida hisoblash mumkin. Bu formuladagi ikkita vektorning skalyar ko'paytmasini ularning koordinata o'qlari-dagi proekstiyalari orqali ifodalasak, umumlashgan kuch uchun

$$Q_i = \sum_{s=1}^N \left(X_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} + Y_s \frac{\partial y_s}{\partial q_i} + Z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_i} \right) \quad (24.24)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

2. Umumlashgan kuchni, masalan Q_1 ni, hisoblash uchun sistemaga shunday mumkin bo'lgan ko'chish beramizki, natijada faqat δq_1 noldan farqli bo'lsin:

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_n = 0.$$

Bu ko'chishdagi sistema nuqtalariga qo'yilgan barcha kuchlarning mumkin bo'lgan ishi $(\delta l)_e$ ni (24.23) ga ko'ra hisoblaymiz:

$$(\delta l)_e = Q_1 \delta q_1$$

Bundan

$$Q_1 = \frac{(\delta l)_e}{\delta q_1} \quad (24.25)$$

bo'ladi.

Qolgan umumlashgan kuchlar ham xuddi shuningdek hisoblanadi.

3. Agar sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlar potentsialli bo'lsa, u holda

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (24.26)$$

Shunday qilib, *potentsialli kuchlar ta'siridagi sistemaning umumlashgan ku-chi, kuchning potentsialidan mos umumlashgan koordinata bo'yicha olingan xu-susiy hosilaga teng bo'ladi.*

Sistemaning potentsial energiyasi $\Pi = -U$ bo'lgani uchun

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (24.27)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Agar ishqalanish kuchi mavjud bo'lsa, u holda bu kuchlarni aktiv kuchlar qato-riga qo'shib, unga mos umumlashgan kuchlar hisoblanadi.

24.9-§. Sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanat shartlari

Yuqorida ko'rganimizdek, N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemaga l ta golonimli bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, bunday sistemaning hola-tini $p=3N - l$ ta q_1, q_2, \dots, q_n umumlashgan

koordinatalar orqali aniqlash mumkin.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga asosan gonomli, ideal, stasionar va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan sistemaning berilgan onda barcha nuqta-larining tezliklari nolga teng bo'lishi bilan birga $\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$ bo'lishi, ya'ni barcha aktiv kuchlarning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

(24.11) va (24.23) ga asosan (24.14) ni

$$\sum Q_i q_i = 0$$

yoki

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = 0 \quad (24.28)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Barcha q_1, q_2, \dots, q_n umumlashgan koordinatalar erkin bo'lgani uchun gonomli bog'lanishlar qo'yilgan sistema uchun ularning variastiyalari ham erkin bo'ladi. Shu sababli $\delta q_1 = 0$, qolgan barcha variastiyalar $\delta q_2 = 0, \dots, \delta q_n = 0$ deb qabul qilish mumkin. U holda (24.28) dan $Q_1 = 0$ shartni olamiz. Xuddi shuningdek $\delta q_2 = 0$ hamda $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ deb qarab, $Q_2 = 0$ va hokazo shartlarni olamiz. Shunday qilib, (24.28) dan quyidagi muvozanat shartlarini olamiz:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_n = 0 \quad (24.29)$$

(24.29) tengliklar gonomli sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi muvozanat shartlarini ifodalaydi: *gonomli, ideal, stasionar va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan sistema muvozanatda bo'lishi uchun q_1, q_2, \dots, q_n umumlashgan koordinatalarga mos umumlashgan kuchlarning nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir* (boshlang'ich paytda sistema barcha nuqtalarining tezligi nolga teng deb qaraymiz).

Agar sistema nuqtalariga qo'yilgan kuchlar potensialga ega bo'lsa, u holda (24.26) ni nazarda tutib, sistemaning muvozanat shartlari (24.29)ni

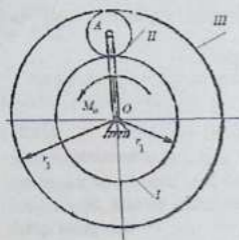
$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \quad (24.30)$$

yoki (24.27) ga ko'ra

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial H}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \quad (24.30')$$

ko'rinishda yozish mumkin. (24.30) yoki (24.30') shartlar kuch

funktsiyasi (yoki potentsial energiya) ekstremumga ega bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi. Shunday qilib, potentsialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistemaning muvozanat ho-latida kuch funktsiyasi yoki potentsial energiya ekstremumga erishishi mumkin.



24.8-rasm.

Mexanizm muvozanatda bo'lishi uchun I va III tishli g'ildiraklarga o'yiladigan juftlarning momenti M_1 va M_3 qanday qiymatga ega bo'lishi aniqlansin.

Yechish. Sistemaning holati OA dastaning aylanish burchagi φ_0 hamda I tishli g'ildirakning aylanish burchagi φ_1 bilan bir qiymatli aniqlanadi. Haqiqatan ham, agar OA dasta va I tishli g'ildirakni qo'zg'almas deb qarasaq, u holda sistema qo'z-g'almas bo'ladi. Binobarin, sistemaning erkinlik darajasi 2 ga teng bo'ladi. φ_0 va φ_1 burchaklarni umumlashgan koordinatalar uchun qabul qilamiz:

$$\varphi_1 = \varphi_0, \varphi_2 = \varphi_1$$

Sistemaga momenti M_0 ga teng bo'lgan juft kuch ta'siri yo'nalishida $\delta\varphi_0, \delta\varphi_1$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. U holda II tishli g'ildirak $\delta\varphi_2$, III tishli g'ildirak esa $\delta\varphi_3$ mumkin bo'lgan ko'chishlarni oladi. Bu ko'chishlar yo'nalishi $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3$ larga bog'liq bo'ladi.

Aytaylik, momentlari M_1 va M_3 ga teng juft kuchlar I va III tishli g'ildiraklarni $\delta\varphi_1, \delta\varphi_3$ mumkin bo'lgan burchak ko'chish yo'nalishida aylantirsin. U holda sistema muvozanatda bo'lishi uchun mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga asosan

24.2-masala.

Differentsial uzatma O o'q atrofida aylanadigan ikkita I va III tishli g'ildiraklardan hamda OA dasta yordamida harakatga keltiriladigan va unga erkin o'rnatilgan II tishli yugurdak g'ildirakdan tashkil topgan (24.8-rasm). Dastaga momenti M_0 ga teng juft kuch qo'yilgan. I va III g'ildiraklarning radiuslari mos ravishda r_1 va r_3 ga teng. Mexanizm gorizontal tekislikda joylashgan. Ishqala-nishni e'tiborga olmay.

$$\sum \delta \lambda = M_0 \delta \varphi_0 + M_1 \delta \varphi_1 + M_2 \delta \varphi_2 = 0 \quad (1)$$

tenglama o'rinli bo'lishi kerak.

$\delta \varphi_2$ ni $\delta \varphi_0, \delta \varphi_1$ orqali ifodalash uchun dastlab Villis usulidan foydalanib, III tishli g'ildirakning burchak tezligi ω_3 ni ω_0 va ω_1 orqali ifodalaymiz.

	OA dasta	Tishli g'ildiraklar		
		I	II	III
To'xtaguncha burchak tezligi	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3
To'xtagandan keyingi burchak tezligi	0	$\omega_1 - \omega_0$	$\omega_2 - \omega_0$	$\omega_3 - \omega_0$
Tishlashish turi				

Jadvaldan foydalanib, (14.12) ga asosan quyidagi tengliklarni yozamiz:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = \frac{r_1}{r_2}$$

Bu tengliklarni ko'paytirib, quyidagilarni

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) - \omega_3 \frac{r_2}{r_1} \quad (2)$$

Bog'lanishlar stasionar bo'lganda burchak tezliklar ularga mos mumkin bo'lgan burchak ko'chishlarga proporsional bo'lishini e'tiborga olsak, (2) dan

$$\delta \varphi_1 = \delta \varphi_0 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) - \delta \varphi_3 \frac{r_2}{r_1} \quad (3)$$

munosabatni olamiz.

(3) ni (1) ga qo'ysak,

$$\sum \delta \lambda = \left[M_0 + M_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \delta \varphi_0 + \left[M_1 - M_2 \frac{r_2}{r_1} \right] \delta \varphi_3 = 0$$

(24.25) ga asosan φ_0 va φ_3 burchaklarga mos umumlashgan kuchlarni aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \frac{(\sum \delta \lambda) \varphi_0}{\delta \varphi_0} = M_0 + M_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \\ Q_3 &= \frac{(\sum \delta \lambda) \varphi_3}{\delta \varphi_3} = M_1 - M_2 \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(24.29) ga ko'ra sistemaning muvozanat shartlarini, ya'ni $Q_i = 0$,

$Q_2 = 0$ tenglamalarni hisobga olib, (4) dan M_1 va M_2 larni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} M_2 + M_3 \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) &= 0, M_1 - M_3 \frac{r_2}{r_1} = 0, \Rightarrow \\ M_1 &= -\frac{M_3 r_2}{r_1 + r_2}, M_2 = -\frac{M_3 r_1}{r_1 + r_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Bu ifodalardagi manfiy ishora I va III g'ildiraklarga qo'yilgan juftlar ta'siri dastaga qo'yilgan juft kuch ta'siriga qarama-qarshi yo'nalganligini ifodalaydi.

24.10-§. Dinamikaning umumiy tenglamasi Dalamber-Lagranj prinsipi

N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema nuqtalariga l ta ideal va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin. Dalamber prinsipiga ko'ra sistemaning biror M_i nuqtasiga ta'sir etuvchi \vec{F}_i aktiv va \vec{R}_i bog'lanish reaksiya kuchlari $\vec{\Phi}_i$ inerstiya kuchi bilan birgalikda har onda

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

muvozanat shartlarini qanoatlantiradi. Vaqtning qayd qilingan Δt orar payti uchun sistema nuqtalariga $\delta \vec{r}_i$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz va har birini $\delta \vec{r}_i$ mumkin bo'lgan ko'chishga ko'paytirib, qo'shsak,

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \delta \vec{r}_i + \sum \vec{\Phi}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

hosil bo'ladi.

Ideal bog'lanishlarning ta'rifiga ko'ra $\sum \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$ bo'lgani uchun

$$\sum (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (24.31)$$

yoki

$$\sum (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (24.32)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglama *dinamikaning umumiy tenglamasi* deyiladi.

(24.32) ga asosan, *ideal va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan harakatdagi sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha aktiv hamda inerstiya kuchlarining har qanday mumkin bulgan ko'chishdagi elementar ishlarining yig'indisi har onda nolga teng bo'ladi.*

(24.31) yoki (24.32) tenglamalar Dalamber va Lagranj prinsiplarining majmuasidan iborat bo'lgani uchun *Dalamber - Lagranj prins-*

tipi deb ataladi.

(24.31) ning Dekart koordinatalaridagi ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

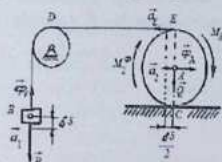
$$\sum[(X_i + \Phi_{ix})\delta x_i + (Y_i + \Phi_{iy})\delta y_i + (Z_i + \Phi_{iz})\delta z_i] = 0 \quad (24.33)$$

yoki

$$\sum[(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \quad (24.34)$$

Bunda x_i, y_i, z_i bilan M_i nuqtaning koordinatalari belgilangan.

24.3-masala. Og'irligi P ga teng B yuk D blok orqali o'tkazilgan cho'zilmay-digan ip vosi-tasida radiusi r va og'irligi Q ga teng silindrik A g'altakni harakatga kel-tiradi (24.9-rasm). G'altak sirpanmay g'ildiraydi va dumalashdagi ishqalanish ko'effitsienti f_s ga teng D



24.9-rasm.

blokning massasini e'tiborga olmay, B yukning tezlanishi aniqlansin.

Yechish. Berilgan B yukning og'irlik kuchi P g'altakning og'irlik kuchi Q va dumalashdagi ishqalanish juftining mo-menti M_s larni rasmda ko'rsatilgandek tas-virlaymiz.

Inerstiya kuchlarini topamiz. \ddot{a}_1 tezlanish bilan to'g'ri chizib harakat qiluvchi B yukning inerstiya kuchi $\Phi_1 = \frac{P}{g} \ddot{a}_1$ - vektor bilan ifodalanadi.

Tekis parallel harakatdagi g'altakning inerstiya kuchlari g'altak markaziga qo'yilgan $\Phi_2 = -\frac{Q}{g} \ddot{a}_2$ - vektorga (bunda \ddot{a}_2 - g'altak markazining tezlanishi) hamda mo-menti $M_s^e = -I_s \ddot{\epsilon}_2$ ga teng juft kuchga keltiriladi. Bunda I_s — g'altakning O nuqta-dan g'altak tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi o'qqa nisbatan inerstiya momenti; ϵ_2 - g'altakning burchak tezlanishi.

B yuk δs mumkin bo'lgan ko'chish olsa, E nuqta ham δs mumkin bo'lgan ko'chish oladi. Dinamikaning umumiy tenglamasini tuzamiz:

$$P \delta s - \Phi_1 \delta s - M_s \delta \varphi - M_s^e \delta \varphi - \Phi_2 \frac{\delta s}{2} = 0 \quad (1)$$

Bunda $\delta \varphi = \frac{\delta s}{2r}$ g'altakning mumkin bo'lgan burchak ko'chishini

ifodalaydi.

Ip cho'zilmasligi sabab $a_1 = a_2 = a$. $\ddot{\alpha}_2$ tezlanish, E nuqtaning tezlanishi $\ddot{\alpha}_x$ ga parallel bo'lganidan $a_2 = \frac{a}{2}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Binobarin,

$$\Phi_1 = \frac{P}{g} a, \quad M_z^E = I_{zz} \ddot{\alpha}_2 = \frac{Q r^2}{g} \frac{a}{2r} = \frac{Q r}{g} \frac{a}{4}, \quad \Phi_2 = \frac{Q}{g} a_2 = \frac{Q a}{g 2}$$

Dumalashdagi ishqalanish juftining momenti $M_o = f_0 Q$ formula yordamida aniqlanadi. Natijada (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$P \ddot{\alpha}_x - \frac{P}{g} a \ddot{\alpha}_x - f_0 Q \frac{\ddot{\alpha}_x}{2r} - \frac{Q r}{g} \frac{\ddot{\alpha}_x}{4} - \frac{Q a}{2r} \frac{\ddot{\alpha}_x}{g} = 0$$

bundan

$$a = 8g \frac{P - f_0 Q}{3Q + 8P}$$

24.11 - §. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari

Dinamikaning umumiy tenglamasi vositasida ideal bog'lanish reaktsiya kuchlari qatnashmaydigan harakat differensial tenglamalarini chiqarish mumkin. Buning uchun dinamikaning umumiy tenglamasini ifodalovchi (24.32) tenglamada $\ddot{\alpha}_i = \frac{d\dot{v}_i}{dt}$ bo'lishini e'tiborga olib, uni quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \frac{d\dot{v}_i}{dt}) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (24.35)$$

(24.21) ga ko'ra radius-vektorning variastiyasi

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

tenglikdan aniqlanishini nazarda tutib (24.35) da yig'indilar tartibini o'zgartirsak,

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\dot{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j = 0$$

hosil bo'ladi. Bu tenglamada (24.22) ga asosan

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

umumlashgan kuchlarni ifodalaydi. Shuning uchun

$$\sum_{i=1}^n \left(Q_i - \sum_{j=1}^n m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i = 0 \quad (24.36)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(24.36) da $B = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$ ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$B = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \quad (24.37)$$

(24.37) dagi $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$ hadlarning faqat gonomli sistema uchun

o'rinli bo'lgan boshqa ko'rinishdagi ifodasini aniqlaymiz. Buning uchun nuqtaning tezligi uning radius - vektoridan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'lishini hamda t vaqtning radius-vektor \vec{r}_i ifodasiga faqat oshkor ravishda qatnashibgina qolmay, balki umumlashgan koordinatalar orqali ham qatnashishini e'tiborga olsak,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (24.38)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bunda $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

umumlashgan tezlik deyiladi.

(24.38) ning har ikkala tomonidan umumlashgan tezlik bo'yida xususiy xosi-la olamiz:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \quad (24.39)$$

Bu formula yordamida $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$ aniqlanadi.

(24.38)ning ikkala tomonidan q_i bo'yicha xususiy hosila olsak,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_i \partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_i} \quad (24.40)$$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$ ni hisoblash uchun $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$ kattalik umumlashgan koordinatalar

va vaqtning funktsiyasidan iborat ekanligini e'tiborga olib, uning vaqt bo'yicha to'liq hosilasini topamiz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_i \partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_i \partial t} \quad (24.41)$$

(24.40) va (24.41) ni solishtirib, ikkita o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilalar differensiallash tartibiga bog'liq bo'lmasligini nazarda tutsak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_i} \quad (24.42)$$

tenglikni olamiz.

Shunday qilib, $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i}$ ning qiymatini (24.39) va $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_i}$ ning qiymatini (24.42) dan (24.37) ga keltirib qo'ysak, B uchun

$$B = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_i}$$

ifoda o'rinli bo'ladi. Bunda $\vec{v}_i^2 = v_i^2$ hamda

$$m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right), \quad m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right)$$

tengliklarni nazarda tutib, B uchun yana quyidagi ifodani olamiz:

$$B = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right)$$

B ning bu qiymatini (24.36) ga qo'yib, hosilani yig'indidan shqarida yozsak, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right] \cdot \delta q_i = 0 \quad (24.43)$$

(24.43)da

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (24.44)$$

sistemaning kinetik energiyasini ifodalaydi. Shu sababli bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \cdot \delta q_i = 0 \quad (24.45)$$

tenglama *umumlashgan koordinatalar orqali ifodalangan dinamikaning umumiy tenglamasidir*. Bu tenglamada

$$-\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i$$

had sistemaning $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ mumkin bo'lgan ko'chishidagi barcha inertiya kuchlari ishlarining yig'indisini ifodalaydi.

Golonom bog'lanishlar qo'yilgan sistema uchun barcha $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ lar erkin bo'lgani uchun ular oldidagi ifodalarni alohida-alohida nolga tenglash mumkin:

$$Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

yoki

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.46)$$

(24.46) tenglamalar *Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari* yoki *mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi harakat differentsial tenglamalari* deyiladi. Bu tenglamalarning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo'ladi. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarida ideal bog'lanish reaksiya kuchlari qatnashmaydi.

(24.38) va (24.44) lardan ko'ramizki, sistemaning kinetik energiyasi aniqlanadigan ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C \quad (24.47)$$

ya'ni sistemaning kinetik energiyasi umumlashgan tezliklarning kvadratik funktsiyasidan iborat bo'ladi.

(24.47)da

$$A_i = \sum_{j=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad B_i = \sum_{j=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad C = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

bo'lib, A_i, B_i, C kattaliklar umumlashgan koordinatalar va vaqtga bog'liq, lekin

umumlashgan tezlikka bog'liq emas. Shu sababli

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

va

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(A_{ij} \ddot{q}_j + \frac{dA_{ij}}{dt} \dot{q}_j \right) + \frac{dB_i}{dt}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Oxirgi ifodada umumlashgan koordinatalarning ikkinchi hosilasi qatnashadi. Lagranjning ikkinchi xil tenglamasidagi boshqa hadlar umumlashgan koordinatalarning birinchi darajadan yuqori bo'lmagan hosilalarini o'z ichiga oladi.

24.12-§. Potensialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari

Agar mexanik sistema nuqtalariga potensialli kuchlar ta'sir etsa, u holda (24.27) ga ko'ra

$$Q_i = -\frac{\partial II}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Shu sababli bu sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial II}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar Lagranj funktsiyasi deb ataladigan

$$L = T + U = T - II$$

funktsiyani kiritsak, $\frac{\partial II}{\partial q_i} = 0$ bo'lgani uchun Lagranjning ikkinchi

xil tenglamalarini quyidagicha yoza olamiz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.48)$$

(24.48) tenglamalar *potensialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini* ifodalaydi.

24.13-§. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini qo'llashga oid masalalar

Lagranjning ikkinchi xil tenglamalariga doir masalalar quyidagi tartibda echi-ladi.

1. Sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi va umumlashgan koordinatalar tan-lab olinadi.

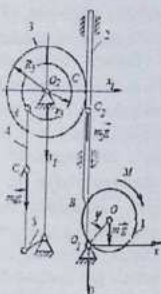
2. Sistemaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar rasmda tasvirlanadi va umumlashgan kuchlar 24.8-§ da bayon qilingan usullardan biri bilan hisoblanadi.

3. Sistemaning kinetik energiyasi umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklarning funktsiyasi sifatida aniqlanadi.

4. Lagranj tenglamalarini tuzish uchun zarur bo'lgan kinetik energiya va uning hosilalari topiladi.

5. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari tuziladi va bu tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarda integrallab izlanayotgan noma'lumlar aniqlanadi.

24.4- masala. Vertikal tekislikda joylashgan kulakli mexanizmدا kulak 1 O_1 nuqtadan o'tuvchi gorizontaal o'q atrofida aylanuvchi r radiusli, massasi m ga teng bir jinsli diskdan iborat. Kulakka momenti M juft kuch ta'sir etadi. Tishli reyka 2 vertikal yo'naltiruvchi bo'ylab harakatlanadi va tishli blok 3 ni aylantiradi. Blok 3 bilan spamik 4 shamir vositasida bog'langan (24.10-rasm). Tishli reyka va spamikning massasi mos ravishda m_2 va m_3 ga teng. Blokning aylanish o'qiga nisbatan inerstiya momenti I ga teng. $R_3 = 2r_2$; $r_2 = 2r/3$; $m_2 = m/3$; $m_3 = m/6$; $I = 2mr^2$ deb qarab, sistemaning harakat differentsial tenglamasi tuzilsin. Krivoship 5 ning massasi e'tiborga olinmasin.



24.10-RASM.

Yechish. Sistemaning holati kulak 1 ning aylanish burchagi φ bilan bir qiymatli aniqlanadi. Haqiqatan ham agar kulak 1 ni qo'zg'almas deb qarash, u holda sistema qo'zg'almas bo'ladi. Bino-barin, sistemaning erkinlik darajasi birga teng. Kulakning aylanish burchagi φ ni umumlashgan koordinata uchun tanlab olamiz: $q = \varphi$. U holda kulakning burchak tezligi $\dot{q} = \dot{\varphi}$.

Bu geometrik mulohazalarni analitik usulda ham izohlash mumkin. Qaralayotgan sistema kulak 1, tishli reyka 2, blok 3 va spamik 4 dan tashkil topgan bo'lib, ularga quyidagi golonimli bog'lanishlar qo'yilgan:

$$y_B = -2r \cos \varphi \quad (1)$$

$$v_C = R_3 \dot{\varphi} \quad (2)$$

$$v_A = r_3 \dot{\varphi} \quad (3)$$

$$x_{1A}^2 + y_{1A}^2 = r_1^2 \quad (4)$$

Bunda y_B - B nuqtaning ordinatasi, v_C - reyka va blok C nuqtasining tezligi, $\dot{\varphi}$ - blokning burchak tezligi, v_A - blok va spamik A nuqtasining tezligi, (1) tenglama tishli reykaning B nuqtasi doimo

kulakka tegib turishini, (2) tenglama tishli reyka va blok tishlashgan C nuqtada harakat sirpanmasdan sodir bo'lishini, (3) esa blok A nuqtasining tezligi ilgarilama harakatdagi sparnik A nuqtasining tezligiga tengli-gini, (4) tenglama A nuqta r_1 radiusli aylana bo'ylab harakatlanishini ifodalaydi.

Kulak 1, O_1 nuqtadan o'tuvchi gorizontal o'q atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun uning holati aylanish burchagi φ bilan aniqlanadi. Tishli reyka vertikal yo'naltiruvchi bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatda bo'lgani uchun uning holati B nuqtaning ordinatasi y_B ; blokning holati O_2 nuqta atrofidagi aylanish burchagi φ_2 ; sparnikning holati esa x_{1z}, y_{1z} koordinatalar bilan aniqlanadi. Shunday qilib, sistemaning holati beshta $\varphi, y_B, \varphi_2, x_{1z}, y_{1z}$ parametrlar bilan aniqlanadi va ular orasida to'rtta golonimli bog'lanishlar mavjud. Demak, sistemaning erkinlik darajasi 1 ga teng. Rasmda kulakka ta'sir etuvchi juft momenti M , kulak, tishli reyka va sparniklarning og'irlik kuchlari $m\vec{g}, m_s\vec{g}, m_1\vec{g}$ larni tasvirlaymiz.

Kulak φ burchakka aylanganda tishli reyka $h = 2r(1 - \cos\varphi)$ masofaga vertikal pastga siljiydi; blok

$$\varphi_2 = \frac{h}{R_1} = \frac{3}{2}(1 - \cos\varphi) \quad (5)$$

burchakka aylanadi.

Kulakka M moment yo'nalishida $\delta\varphi$ mumkin bo'lgan ko'chish bersak kulak markazining koordinatasi uchun $y_C = -r\cos\varphi$ tenglik o'rinli bo'lgani tufayli, uning vertikal bo'yicha mumkin bo'lgan ko'chishi quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta y_C = r \sin\varphi \delta\varphi$$

(1) ga ko'ra tishli reykaning B nuqtasi

$$\delta y_B = \delta y_C = 2r \sin\varphi \delta\varphi$$

ko'chish oladi; (5) ga asosan blok $\delta\varphi_2 = \frac{3}{2} \sin\varphi \delta\varphi$ burchakka aylanadi; $y_{1z} = r_1 \cos\varphi_2$ bo'lgani uchun sparnik

$\delta y_{1z} = \delta y_{1z} = -r_1 \sin\varphi_2 \delta\varphi_2 = -r \sin\varphi \sin\left[\frac{3}{2}(1 - \cos\varphi)\right] \delta\varphi$ ga ko'chadi. Bunda manfiy ishora A nuqta yuqoriga ko'chishini ifodalaydi. Bu ko'chishlarda $M, mg, m_s g, m_1 g$ lar ishlarining yig'indisini topamiz.

$$\begin{aligned} \delta A &= M\delta\varphi + mg\delta y_D + m_2 g\delta y_{C_2} + m_4 g\delta y_{C_4} = \\ &= \left\{ M + mgr \sin \varphi + \frac{m}{3} g \cdot 2r \sin \varphi - \frac{m}{6} gr \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \right\} \delta\varphi = \\ &= \left\{ M + \frac{5}{3} mgr \sin \varphi - \frac{m}{6} gr \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \right\} \delta\varphi. \end{aligned}$$

Natijada φ umumlashgan koordinataga mos bo'lgan umumlashgan kuch quyidagicha aniqlanadi:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M + \frac{5}{3} mgr \sin \varphi - \frac{m}{6} gr \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \quad (6)$$

Sistemaning kinetik energiyasi

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (7)$$

formuladan aniqlanadi. T_1, T_2, T_3, T_4 mos ravishda kulak, reyka, blok va spamiklar kinetik energiyalari.

Kulak, O_1 nuqtadan o'tuvchi gorizontal o'q atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun

$$T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2}$$

Gyuygens-Shteyner teoremasiga ko'ra,

$$I_1 = I_0 + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

bo'lgani tufayli

$$T_1 = \frac{3}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 \quad (8)$$

Tishli reyka to'g'ri chiziqli harakatda bo'lgani uchun

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Bunda $m_2 = m/3$ va (1) ga ko'ra

$$\dot{y}_2 = 2r\dot{\varphi} \sin \varphi$$

bo'lgani sababli

$$T_2 = \frac{2}{3} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \quad (9)$$

Blok O_2 nuqtadan o'tuvchi gorizontal o'q atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun $T_3 = \frac{I \dot{\varphi}_3^2}{2}$ Bunda $I = 2mr^2$ hamda (5) ga ko'ra

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{3}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (10)$$

bo'lgani sababli

$$T_2 = \frac{9}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \quad (11)$$

Sparnik 4 ilgarihlama harakat qiladi. Shu sababli

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Bunda $m_1 = m/6$ hamda (3) va (10) ga ko'ra

$$T_1 = \frac{1}{12} m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \quad (12)$$

hosil bo'ladi.

(8), (9), (11) va (12) ni (7) ga qo'yib, sistemaning kinetik energiyasini umum-lashgan koordinata va umumlashgan tezliklarning funktsiyasi sifatida aniqlaymiz:

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) \quad (13)$$

Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini tuzish uchun zarur bo'lgan kinetik energiyaning hosilalarini hisoblaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \dot{\varphi} \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) + 6 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Berilgan sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (15)$$

ko'rinishda yozib, (6) va (14) ni e'tiborga olsak,

$$m r^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) + 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = M + \frac{5}{3} m g r \sin \varphi - \frac{m}{6} g r \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right]$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Natijada sistema harakat differensial tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$m r^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) + 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + \frac{m}{6} g r \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] - \frac{5}{3} m g r \sin \varphi = M$$

24.14-§. Gamilton — Ostrogradskiy prinsipi

Aytaylik, Lagranj funktsiyasi $L = T - U$ ga teng mexanik sistemaning holati q_1, q_2, \dots, q_n umumlashgan koordinatalar bilan aniqlansin. Lagranj funktsiyasi bilan

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (24.49)$$

tenglik vositasida bog'langan S dinamik kattalikka Gamilton ta'siri deyiladi.

Lagranj funkstiyasi $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$ bo'lgani tufayli Gamilton ta'sirini hisoblash uchun $t_0 \leq t \leq t_1$ vaqt oraliq'ida q_1, q_2, \dots, q_n funkstiyalar berilgan bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda, Gamilton ta'siri sistemaning harakatiga bog'liq funkstional-dan iborat.

Mexanik sistemaning harakatini n o'lchovli fazoda koordinatalari q_1, q_2, \dots, q_n ga teng bitta nuqtaning harakati bilan xarakterlash mumkin. Aytaylik, $t = t_0$ paytda sistemaning holati n o'lchovli fazoda A nuqta, $t = t_1$ vaqtda esa B



24.11-rasm.

nuqtaning holat-lari bilan aniqlansin, hamda sistemaning harakat traektoriyasi AB egri chiziq bilan ifodalansin (24.11-rasm). Xuddi shu $t - t_0$ vaqt ichida sistema 24.15-rasmda shtrix bilan ko'rsatilgan kinematik mumkin bo'lgan traektoriyalar bo'ylab ham harakatla-nishi mumkin. AB g sistemaning haqiqiy traektoriyasi deyiladi.

Gamilton prinstipi vositasida sistemaning ikkita A va B holatlari orasida kine-matik mumkin bo'lgan traektoriyalar ichidan xuddi shu holatlar orasidagi haqiqiy harakat traektoriyasini ajratish mumkin. Gamilton prinstipi quyidagicha ifodalana-di: *sistemaning ikkita A va B holatlari orasidagi haqiqiy harakati, xuddi shu holatlar orasidagi va aynan shu vaqt oraliq'ida sodir bo'ladigan kinematik mumkin bo'lgan harakatlardan shunday xususiyati bilan farq qiladiki, haqiqiy harakat uchun Gamilton ta'sirining variastiyasi nolga teng yoki boshqacha aytganda, sis-temaning haqiqiy harakati uchun Gamilton ta'siri stasionar qiymatga ega bo'ladi, ya'ni*

$$\delta S = 0 \quad (24.50)$$

Bu prinstip stasionar bog'lanishlar qo'yilgan sistema uchun 1834-1835 yillarda U. Gamilton tomonidan bayon etilgan. Lekin stasionar bo'lmagan bog'lanishlar qo'yilgan umumiy holda bu prinstipni M. V. Ostrogradskiy 1848 yilda bayon et-gan. Shu sababli bu prinstipga Gamilton - Ostrogradskiy prinstipi ham deyiladi.

Golonimli bog'lanishlar qo'yilgan sistema uchun bu prinstipni qo'llashda solishtirilayotgan harakatlar aynan bir xil vaqt ichida sodir

bo'ladi deb qaraladi. Shu sababli $\delta t = 0$ deb olinadi. Bunday variatsiyaga izoxron variatsiya deyiladi. Gonomli bog'lanishlar qo'yilgan sistema uchun izoxron variatsiya va vaqt bo'yicha olingan hosila kommutativlik xususiyatiga ega:

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{dq}{dt} \quad (24.51)$$

Lagranjning ikkinchi xil tenglamalaridan Gamilton prinsipini keltirib chiqaramiz. Erkinlik darajasi p ga teng va potentsialli kuchlar ta'siridagi sistemaning haqiqiy harakati uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini (24.48) ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Bu tenglamalarning har birini δq_i ga ko'paytirib qo'shsak,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0 \quad (24.52)$$

(24.51) ni etiborga olsak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

Buni (24.52) ga qo'yib,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \quad (24.53)$$

munosabatni olamiz.

Lagranj funktsiyasi $L = L(t, q, \dot{q})$ hamda ko'rilayotgan holda $\delta t = 0$ bo'lgani uchun

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \delta L$$

Shu sababli (24.53) ni quyidagicha ifodalaymiz:

$$d \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \delta L dt$$

Bu tenglikning ikkala tomonini sistemaning A holatiga mos keluvchi $t = t_0$ va-qtan to sistemaning B holatiga mos keluvchi $t = t_1$ vaqt-gacha integrallaymiz:

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt$$

A va B nuqtalar qo'zg'almas bo'lgani uchun $[\delta q_i]_k = 0$ va $[\delta q_i]_l = 0$. Binobarin, sistemaning haqiqiy harakati uchun

$$\int_k^l \delta L dt = 0$$

yoki variatsiya izoxron bo'lgani uchun

$$\delta \int_k^l L dt = 0 \quad (24.54)$$

tenglik o'rinli bo'ladi

(24.54)da $S = \int_k^l \delta L dt$ bo'lishini hisobga olsak,

$$\delta S = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Gamilton ta'siri [ish x vaqt] birigida (SI sistemasida kgm^2/s da) o'lchanadi.

24.15-§. Kanonik tenglamalar

Yuqorida ko'rganimizdek, Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari umumlashgan koordinatalarga nisbatan ikkinchi tartib n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu tenglamalar sistemasini $2n$ ta birinchi tartib tenglamalar bilan almashtirish mumkin. ekanligini isbotlaymiz.

Buning uchun *umumlashgan impuls* deb ataladigan va Lagranj funktsiyasi L yoki sistemaning kinetik energiyasi T bilan

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (24.55)$$

yoki (24.47) ga ko'ra

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + b_i \quad (24.56)$$

tengliklar vositasida bog'langan p_i dinamik kattaliklarni kiritamiz.

(24.56) da $a_{ij} \neq 0$ bo'lgani uchun barcha \dot{q}_j larni p_i lar orqali ifodalash mumkin. Shu sababli L funktsiyani faqat p_i va q_i lar orqali ifodalaymiz.

Gamilton funktsiyasi deb ataluvchi

$$H = -L + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \quad (24.57)$$

funktsiyani kiritsak, bu funktsiyaning variastiyasi ychun

$$\delta H = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \delta p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{q}_i \quad (24.58)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(24.58) da (24.55) dan $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ni e'tiborga olsak, uning o'ng tomonidagi ik-kinchi va to'rtinchi hadlarning yig'indisi nolga teng. bundan tashqari, Lagranjning ikkinchi xil tenglamasiga ko'ra

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

bo'ladi. Binobarin,

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \delta p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i \quad (24.59)$$

(24.56) vositasida (24.57) da barcha \dot{q}_i larni yo'qotib, N funksiyaning variastiyasini hisoblaymiz:

$$\delta H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \quad (24.60)$$

(24.59) va (24.60) ga asosan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i$$

Golonimli sistema uchun δq_i va δp_i lar o'zaro bog'liq bo'lmagan hamda oxir-gi tenglik ularning ixtiyoriy qiymatlarida o'rinli bo'lgani uchun ular oldidagi koef-fitsientlar mos ravishda teng bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (24.61)$$

(24.61) tenglamalar *Gamiltonning kanonik tenglamalari* deyiladi.

Agar sistema nuqtalariga stasionar bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, u holda (24.47) ga ko'ra sistemaning kinetik energiyasi umumlashgan tezliklarning bir jinsli kvadratik funktsiyasidan iborat bo'ladi, binobarin, Eylemning bir jinsli funktsiyalar haqidagi teoremasiga ko'ra

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu holda Gamilton funkstiyasi uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T + U) = T - U = T + H \quad (24.62)$$

ya'ni stasionar bog'lanish qo'yilgan holda Gamilton funkstiyasi sistemaning to'liq energiyasiga teng bo'ladi.

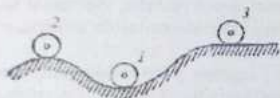
24.16-§. Mexanik sistemaning ustuvor muvozanati haqida tushuncha

Mexanik sistemaning muvozanatini 3 turga bo'lish mumkin: ustuvor, noustuvor va befarq muvozanat.

Agar muvozanat holatidagi mexanik sistema nuqtalariga kichik boshlang'ich ko'chish va kichik boshlang'ich tezlik berish natijasida sistema nuqtalari muvozanat holati yaqinida tebranma harakatda bo'lsa, sistemaning bunday muvozanati *ustuvor muvozanat*; muvozanat holatidan uzoqlasha borsa, *noustuvor muvozanat* deyiladi.

Agar mexanik sistemani muvozanat holatidan kichik og'irish natijasida mexanik sistema yangi holatda xam muvozanatda qolsa, sistemaning bunday holati befarq muvozanat deyiladi.

24.12-rasmda tasvirlangan stilyndning 1-holati ustuvor, 2-holati noustuvor va 3-holati befarq muvozanatga misol bo'la oladi.



24.12-rasm.

Aytaylik, golonom bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistema holati q_1, q_2, \dots, q_n umumlashgan koordinatalar bilan aniqlansin.

Umumlashgan koordinatalarni sistemaning muvozanat holatidan boshlab hisoblaymiz, ya'ni muvozanat holatida barcha q_1, q_2, \dots, q_n koordinatalarini nolga teng deb qaraymiz.

Vaqtning biror t_0 paytida sistemani muvozanat holatidan og'irib, sistemaning shu paytdagi umumlashgan koordinatalari va umumlashgan tezliklarini q_{i0} va \dot{q}_{i0} istalgan t paytdagisini esa q_i va \dot{q}_i bilan belgilaymiz.

Sistemaning ustuvor muvozanatiga aniqroq ta'rif berish uchun sistemaning umumlashgan koordinatalari va umumlashgan tezliklarining son qiymatini o'l-chovsiz kattalikka keltiramiz.

Agar istalgancha kichik musbat son ε ga bog'liq shunday $\eta > 0$ sonni topish mumkin bo'lsaki,

$$|q_{i0}| \leq \eta, \dot{q}_{i0} \leq \eta, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.63)$$

bo'lganda $t > t_0$ vaqt uchun

$$|q_i| < \varepsilon \quad (24.64)$$

shartlar bajarilsa, sistemaning bunday muvozanat holati *Lyapunov ta'rifiga ko'ra ustuvor muvozanat* deyiladi.

24.17-§. Lagranj-Dirixle teoremasi

Yuqorida ko'rganimizdek, potentsialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistemaning muvozanat shartlari (24.30') ga muvofiq

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \quad (24.65)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu tenglamalardan ko'ramizki, potentsialli kuchlar ta'siridagi sistemaning muvozanat holatlariga sistema potentsial energiyasining ekstremal qiymatlari mos keladi. Lekin (24.30') tenglamalar vositasida sistema muvozanati-ning ustuvorligini aniqlay olmaymiz.

Lagranj 1788 yilda golonimli va ideal bog'lanishlar qo'yilgan, potentsialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema ustuvor muvozanatining etarli shartlari quyidagi teorema bilan ifodalanishini ko'rsatgan va isbotlagan.

Potentsialli kuchlar ta'siridagi sistemaning potentsial energiyasi minimum qiymatga ega bo'ladigan muvozanat holatlari ustuvordir.

Bu teoremaning qat'iy isboti 1847 yilda Lejen Dirixle tomonidan berilgan. Shu sababli bu teorema Lagranj — Dirixle teoremasi deb ham ataladi.

Agar potentsial energiya tarkibida ayrim umumlashgan koordinatalar oshkor ravishda qatnashmasa, u holda mazkur koordinatalarga nisbatan sistema befarq muvozanatda bo'ladi.

Masalan, gorizontal yasovchiga ega bo'lgan stilindrik sirt ustidagi og'ir moddiy nuqtaning muvozanati qaralayotganda x o'qni sti-

lindning yasovchisi bo'ylab yo'naltirsak, x koordinataga nisbatan nuqtaning muvozanati befarq muvozanatdan iborat bo'ladi.

Potensialli kuchlar ta'siridagi, erkinlik darajasi birga teng bo'lgan sistemaning muvozanati bitta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad (24.66)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Sistemaning qaralayotgan muvozanat holati ustuvor ekanligini aniqlash uchun sistemaning potensial energiyasi bu holatda minimum qiymatga ega bo'lish-bo'l-masligini tekshirish kerak.

Agar $q = q_0$ muvozanat holatida

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} > 0 \quad (24.67)$$

bo'lsa, potensial energiya minimum qiymatga erishadi.

Agar

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} = 0 \quad (24.68)$$

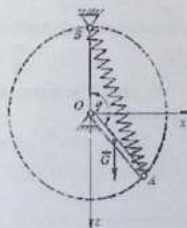
bo'lsa, ikkinchi hosila potensial energiyaning minimum qiymatga ega bo'lish alomatini ifodalay ol-maydi. Bu holda potensial energiyaning navbatdagi hosilalarini hisoblashga to'g'ri keladi.

Agar potensial energiyaning birinchi nolga teng bo'lmagan hosilasi juft tartibli va musbat qiymatga ega bo'lsa, u holda $q = q_0$ muvozanat holatida potensial energiya minimum qiymatga ega bo'ladi, binobarin, sistemaning bu muvozanat holati ustuvor muvozanatdan iborat bo'ladi.

Agarda potensial energiyaning birinchi nolga teng bo'lmagan hosilasi toq tartibga ega bo'lsa, u holda $q = q_0$ da na minimum va na maksimum mavjud bo'l-maydi.

Potensial energiya minimum qiymatga ega bo'lmaganda sistema muvozanatini A.M. Lyapunov teoremlari vositasida aniqlanadi.

24.5-masala. Qo'zg'almas O sharni atrofida aylana oladigan og'irligi G va uzunligi l ga teng OA sterjenning uchiga



24.13-rasm.

AB prujina biriktirilgan (24.13- rasm). Agar cho'zilmagan prujining uzunligi l va prujining bikirlik koeffitsienti c ga teng bo'lsa, sterjenning ustuvor muvozanat holati aniqlansin.

Yechish. Sterjenning holatini φ burchak bilan aniqlash mumkin. Shu sababli umumlashgan koordinata uchun $q = \varphi$ burchakni olamiz. Sistemaning potentsial energiyasi sterjen og'irlik kuchining potentsial energiyasi Π_1 va deformatsiyalanuvchi prujining potentsial energiyasi Π_2 larning yig'indisidan iborat

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

Bunda

$$\Pi_1 = -Gz_c, \quad \Pi_2 = \frac{cl^2}{2}$$

bo'lib, z_c va h lar

$$z_c = \frac{1}{2} \cos(180 - \varphi) = -\frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$h = AB - l = 2l \sin \frac{\varphi}{2} - l = l(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

Natijada sistemaning potentsial energiyasi uchun

$$\Pi = \frac{Gl}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} cl^2 (2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1)^2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Potentsial energiyaning umumlashgan koordinata φ bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini aniqlaymiz:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \left[(2cl - G)l \sin \frac{\varphi}{2} - cl^2 \right] \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{1}{2} (2cl - G)l \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} (2cl - G)l \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{cl^2}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Sistemaning muvozanat holatida

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0; \quad \left[(2cl - G)l \sin \frac{\varphi}{2} - cl^2 \right] \cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

Bu tenglikdan sistemaning mumkin bo'lgan ikkita muvozanat shartlarini olamiz

$$1) (2cl - G)l \sin \frac{\varphi}{2} - cl^2 = 0; \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{cl}{2cl - G}; \quad 2) \cos \frac{\varphi}{2} = 0, \quad \frac{\varphi}{2} = 90^\circ, \varphi = 180^\circ.$$

Sistema ustuvor muvozanatda bo'lishi uchun

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$$

shart bajarilishi zarurligini nazarda tutib, sistemaning ustuvor muvozanat holatida G va cl orasida qanday munosabat mavjud bo'lishini har ikkala holda tekshirib ko'ramiz:

1) $\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{cl}{2cl-G}$ bo'lganda

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_1} = \frac{l(cl-G)(3cl-G)}{2(2cl-G)}$$

Bunda

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} < 1, \frac{cl}{2cl-G} < 1, G < cl$$

bo'lgani tufayli $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_1} > 0$ shart bajariladi. Binobarin, sistemaning φ_1 burchak

ka mos muvozanat holati ustuvordir.

2) $\varphi_2 = 180^\circ$ bo'lsa,

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} = \frac{(G-cl)l}{2}$$

U holda $G > cl$ shart bajarilganda

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} > 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi va sistemaning bunday muvozanat holati ustuvordir.

24.18- §. Sistemaning ustuvor muvozanati yaqinidagi kinetik va potentsial energiyalari

Agar sistema nuqtalariga golonimli stasionar bog'lanishlar qo'yilsa, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ hamda $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ bo'ladi. Buni nazarda tutib, (24.47) ga asosan mazkur sistemaning kinetik energiyasi uchun

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (24.69)$$

formulani olamiz. Bunda A_{ij} koeffitsientlar umumlashgan koordinatalarning funk-stiyasidan iborat hamda $A_{ij} = A_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)

Agar sistemaning muvozanat xolati ustuvor bo'lsa, sistemaning bunday holati uchun potentsial energiya minimum qiymatga ega

bo'ladi. Potensial energiya ixtiyoriy o'zgarmasgacha aniqlanganini tufayli koordinatalar boshini sistemaning mazkur muvozanat holatida olsak, bu holatda potensial energiyani nolga teng deb qarash mumkin:

$$\Pi_0 = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (24.70)$$

$A_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$ koeffitsientlar va $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ potensial energiyani $q_i = 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$ muvozanat holati yaqinida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$A_j = (A_j)_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial^2 A_j}{\partial q_k \partial q_l} \right)_0 q_k q_l + \dots \quad (24.71)$$

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots \quad (24.72)$$

Sistemaning ustuvor muvozanati yaqinidagi kichik harakatini tekshirishda uning kinetik va potensial energiyasi tarkibidagi q_i va \dot{q}_i larga nisbatan uchinchi va undan yuqori tartibli kichik miqdorlarni e'tiborga olmaymiz. U holda (24.71) da faqat $(A_j)_0$ birinchi had bilan chegaralanishga to'g'ri keladi. Chunki (24.69) ga asosan qolgan boshqa hadlarni $\dot{q}_i \dot{q}_j$ ga ko'paytirganda uchinchi va undan yuqori tartibli kichik miqdorlarni olamiz. Natijada sistemaning kinetik energiyasi uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (24.73)$$

bunda $a_{ij} = (A_j)_0$ koeffitsientlar o'zgarmas bo'lib, $a_{ij} = a_{ji}$ munosabatlarni qanoatlantiradi.

(24.72) da (24.70) va (24.30) larni nazarda tutib, uchinchi va undan yuqori tartibli kichik miqdorlarni e'tiborga olmasak,

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j \quad (24.74)$$

bo'ladi, bunda

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (24.75)$$

o'zgarmas bo'lib, *bikirlilik koeffitsientlari* deyiladi va $c_{ij} = c_{ji}$ munosabatlar o'rinli

bo'ladi.

Ma'lumki, ushbu ko'rinishdagi

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (24.76)$$

ikkinchi darajali bir jinsli ko'phad kvadratik forma deyiladi.

Faqat musbat qiymatga ega va x_1, \dots, x_n o'zgaruvchilarning barchasi nolga teng qiymatlarni qabul qilgandagina nolga teng bo'ladigan kvadratik forma *musbat aniqlangan kvadratik forma* deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra, sistemaning kinetik energiyasi musbat kvadratik formadan iborat bo'ladi. Shuningdek, muvozanat holatida $\Pi_0 = 0$ va muvozanat holati yaqini-

da potentsial energiya musbat, ya'ni

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j > 0 \quad (24.77)$$

bo'lgani uchun u ham muvozanat holati yaqinida musbat aniqlangan kvadratik formadan iborat bo'ladi.

Istalgan kvadratik formaning musbat aniqlanganligi quyidagi *D. D. Silvestr* (1814—1897) *kriteriyasi* orqali aniqlanadi: kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun mazkur forma matritsasining barcha bosh diagonal minorlari, ya'ni

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (24.78)$$

kattaliklar musbat bo'lishi zarur va yetarli.

Bu kriteriyadan foydalanib Lagranj-Dirixle teoremasini quyidagi tartibda qo'llash mumkin: potentsial energiyaning muvozanat holati yaqinida q_1, q_2, \dots, q_n larning darajasi bo'yicha ikkinchi darajali kichik miqdorgacha aniqlikda qatorga yoyib, koeffitsientlar c_{ij} larni topib, determinantlarni tuzamiz. Agar $\Delta_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) shartlar bajarilsa, sistemaning muvozanat holati ustuvor bo'ladi.

24.6- masala. 24.14-rasm, a da tasvirlangan mayatniklar sistemasi vertikal muvozanat holatining ustuvorligi tekshirilsin: birinchi mayatnik sterjenining uzunligi $4h$, ikkinchisidiki $3h$ va uchinchisidiki esa $2h$ ga teng. Hamma mayatniklarning massalari va prujinalarning bikirligi bir xilda bo'lib mos ravishda m va c ga teng. Prujinalar birlashtirilgan nuqtalardagi mayatnik sharchalarining og'irlik markazlariga-

cha bo'lgan masofalar h ga teng. Sterjenlarning massalari hisobga olinmasin, sharchalar esa moddiy nuqtalar deb qaralsin; mayatniklar vertikal vaziyatda bo'lganda prujinalar kuchlanmagan holatda bo'ladi.

Yechish. Sistemaning erkinlik darajasi 3 ga teng. Umumlashgan koordinatalar uchun mayatnik sterjenlarining vertikalidan og'ish burchaklarini olamiz (24.14- rasm, b)

$$q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2, q_3 = \varphi_3$$

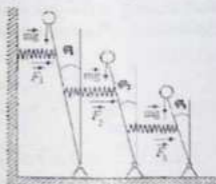
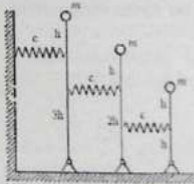
Prujinalarning elastiklik kuchlarini $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ bilan belgilasak, bu kuchlarning miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$F_1 = 3ch\varphi_1, F_2 = 2ch(\varphi_2 - \varphi_1), F_3 = ch(\varphi_3 - \varphi_2)$$

Sistemaning potentsial energiyasini deformatsiyalangan prujinalarning potentsial energiyasi Π_1 va og'irlik kuchlari potentsial energiyalari Π_{11} ning yig'in-disidan iborat deb qaraymiz:

$$\Pi_1 = \frac{9h^2}{2}c\varphi_1^2 + \frac{4h^2}{2}c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2}c(\varphi_3 - \varphi_2)^2;$$

$$\Pi_{11} = -4mgh(1 - \cos\varphi_1) - 3mgh(1 - \cos\varphi_2) - 2mgh(1 - \cos\varphi_3);$$



24.14- rasm.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{11} = \frac{9h^2}{2}c\varphi_1^2 + 2h^2c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2}c(\varphi_3 - \varphi_2)^2 - 4mgh(1 - \cos\varphi_1) - 3mgh(1 - \cos\varphi_2) - 2mgh(1 - \cos\varphi_3)$$

Potentsial energiyani $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ lar darajasi bo'yicha qatorga yoyamiz va bunda

$$\cos\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} + \dots, \cos\varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} + \dots, \cos\varphi_3 = 1 - \frac{\varphi_3^2}{2} + \dots$$

munosabatlar o'rinli bo'lishini e'giborga olamiz. Agar uchinchi va undan yuqori tartibli kichik miqdorlarni e'tiborga olmasak, sistemaning potentsial energiyasi

$$H = \frac{9h^2}{2} c \dot{\varphi}_1^2 + 2h^2 c (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{h^2}{2} c (\varphi_1 - \varphi_2)^2 - 2mgh\varphi_1^2 - \frac{3}{2} mgh\varphi_1^2 - mgh\varphi_2^2$$

formula yordamida aniqlanadi.

(24.75) ga asosan bikirlik koeffitsientlarini hisoblaymiz:

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1^2} \right)_0 = 13h^2 c - 4mgh, c_{22} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_2^2} \right)_0 = 5h^2 c - 3mgh,$$

$$c_{33} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_3^2} \right)_0 = h^2 c - 2mgh, c_{12} = c_{21} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right)_0 = -4h^2 c,$$

$$c_{13} = c_{31} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} \right)_0 = 0, c_{23} = c_{32} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3} \right)_0 = -h^2 c.$$

Silvestr kriteriyasini qo'llab, quyidagi ustuvor muvozanat shartlarini olamiz:

$$1) \Delta_1 = c_{11} > 0, 13h^2 c - 4mgh > 0$$

(1)

$$2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 13h^2 c - 4mgh & -4h^2 c \\ -4h^2 c & 5h^2 c - 3mgh \end{vmatrix} > 0$$

$$49h^4 c^2 - 59mgh^3 c + 12m^2 g^2 h^2 > 0,$$

(2)

$$3) \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, 36h^5 c^3 - 153mgh^4 c^2 + 130m^2 g^2 h^3 c - 24m^3 g^3 h^2 > 0 \quad (3)$$

Shunday qilib, sistemaning ustuvor muvozanat shartlari (1), (2), (3) tengsizliklar bilan ifodalanadi.

24.19-§. Erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaning ustuvor muvozanati yaqinidagi kichik tebranishlari

Erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaga qo'yilgan gonomli bog'lanishlar stasionar bog'lanishlardan iborat bo'lsa, bunday sistemaning muvozanat holati yaqinidagi kinetik va potentsial energiyalari (24.73) va (24.74) ga asosan quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, H = \frac{1}{2} c q^2 \quad (24.79)$$

bunda $c = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \right)_0$

Aytaylik, $c > 0$ bo'lsin. Bu holda potentsial energiya minimumga ega bo'ladi va Lagranj — Dirixle teoremasiga ko'ra, sistemaning muvozanati ustuvor bo'ladi.

Ko'riyatgan hol uchun (24.79) ni nazarda tutib, Lagranjniing ikkinchi xil tenglamasi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

ni tuzsak,

$$a\ddot{q} = -cq$$

yoki

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \quad (24.80)$$

Bunda

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (24.81)$$

(24.80) tenglama (17.2) ga o'xshashdir. (17.2) bitta moddiy nuqtaning garmonik harakatini, (24.80) esa erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaning harakatini xarakterlaydi.

(24.80) tenglamaning umumiy echimini (17.3) va (17.7) ga o'xshash bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagi ikki xil ko'rinishda izish mumkin

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

yoki

$$q = a \sin(kt + \alpha) \quad (24.82)$$

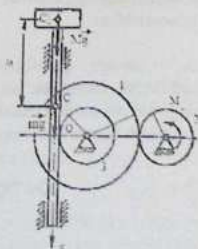
(24.81) tenglik yordamida tebranishlarning doiraviy chastotasi hisoblanadi.

Tebranishlar davri uchun

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (24.83)$$

formula o'rinli bo'ladi.

24.7- masala. Massasi M ga teng bo'lgan yuk, 2 hamda bir-biriga mahkam biriktirilgan 1 va 3 tishli g'ildiraklar yordamida harakatga keltiriladigan m massali tishli reyka uchiga o'rnatilgan (24.15 - rasmi). 1 va 3 tishli g'ildiraklarning inerstiya momentlari I_1 , 2 g'ildirakniki esa I_2 ; radiuslari mos



24.15-rasmi.

ravishda R_1 , r , R_2 ga teng, 2 - g'ildirak bikirlik koefitsienti s ga teng va rasmda shartli ravishda spiral prujina tarzida berilgan etaklovchi valga birlashtirilgan.

Sistemaning erkin tebranish chastotasi aniqlansin.

Yechish. Sistemaning holatini etaklovchi valning aylanish burchagi φ_1 bilan aniqlash mumkin. Binobarin, sistemaning erkinlik darajasi birga teng bo'ladi. Umumlashgan koordinata uchun $q = \varphi_1$ ni olamiz. Boshlang'ich paytda tishli reykaning og'irlik markazi uning r radiusli g'ildirak bilan tishlashgan O nuqtasida bo'lsin. Yani $t = 0$ da $x = 0$, $x_1 = -a$ bo'lsin. Bunda x_1 bilan yukning boshlang'ich koordinatasi belgilangan.

Rasmda yuk va tishli reykalarning og'irlik kuchlari Mg va mg lami hamda etaklovchi valning buralishga qarama-qarshi yo'nalgan elastiklik juft momenti M_1 ni tasvirlaymiz.

Reykaning og'irlik markazi C holatda bo'lganda uning koordinatasi x , yukning koordinatasi $x - a$ ga teng bo'ladi; g'ildirak 2 esa $\varphi_{20} + \varphi_1$ burchakka aylanadi. Bunda φ_{20} bilan g'ildirak 2 ning statik muvozanatiga mos aylanish burchagi belgilangan.

Agar φ_1 burchakni kichik deb qarasaq, u holda g'ildirak 2 ga miqdor jihatdan

$$M_1 = c(\varphi_{20} + \varphi_1)$$

ga teng elastiklik juft momenti ta'sir etadi.

Sistemaning potentsial energiyasi yuk va tishli reyka og'irlik kuchlarning potentsial energiyalari Π_1 , Π_2 hamda etaklovchi valning elastiklik momenti potentsial energiyasi Π_3 laming yig'indisidan iborat

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

$$\text{Bunda } \Pi_1 = -mgx, \Pi_2 = -Mg(x - a), \Pi_3 = \frac{1}{2} c(\varphi_{20} + \varphi_1)^2 - \frac{c\varphi_{20}^2}{2}$$

bo'lib, x , φ_1 va φ_2 lar orasida quyidagi munosabat mavjud bo'ladi:

$$x = r\varphi_1 = r \frac{R_1}{R_2} \varphi_2$$

Shunday qilib, sistemaning potentsial energiyasi uchun quyidagi ifodani olamiz:

Sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamasini ko'rishda yozib, (1) va (4) ni (5) ga qo'ysak,

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = a\varphi_2 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a\varphi_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}$$

yoki

$$a\varphi_2 = -c\varphi_2$$

bunda

$$\varphi_2 + k^2\varphi_2 = 0,$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{c}{I_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + I_2 + (M+m)r^2}}$$

sistemaning kichik tebranishlar doiraviy

24.20-§. Erkinlik darajasi birga tebranuvchi tebranishlar

Texnikada uchraydigan ko'pgina erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemalar tashqari, muhitning

ko'rinishdagi chiziqli qo'shimcha kuchlari uchraydi. Bunda μ qarshilik koeffitsientini harakat differensial tenglamalarida

formadagi Lagranjning ikkinchi xil tenglamasini

bunda Q^* sistemada mavjud bo'lgan kuchlarni ifodalaydi.

Ya'ni

(24.20)

holatida
lik o'rinli
erugiyasi uchun

hisoblaymiz.

(1)

erugiyasi minimum qiymatga

erugiyasi ko'ra, $\varphi_2 = 0$ atrofida

$$T_1 + T_2 \quad (2)$$

nda 1, 3 va 2 g'ildiraklarning, T_1 esa

energiyasini ifodalaydi.

o'zg'almas o'qlar atrofida aylanma

x o'q bo'ylab to'g'ri chiziqli harakatda

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2.$$

$$T_3 = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2$$

$$\varphi_1 = \frac{R_2}{R_1} \varphi_2, \dot{x} = r\varphi_1 = r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2$$

va (2) ni quyidagicha yozamiz.

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + I_2 + (M+m)r^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \right] \dot{\varphi}_2^2 \quad (3)$$

$T = I_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + I_2 + (M+m)r^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$ belgilash kiritsak, kinetik

energiyasi uchun quyidagi ifodalarni olamiz.

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = a\dot{\varphi}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a\ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (4)$$

Sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamasini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \quad (5)$$

ko'rishda yozib, (1) va (4) ni (5) ga qo'ysak.

$$a\ddot{\varphi}_2 = -c\varphi_2$$

yoki

$$\ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 = 0,$$

bunda

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{c}{I_2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + I_1 + (M+m)r^2}}$$

sistemaning kichik tebranishlar doiraviy chastotasini ifodalaydi.

24.20-§. Erkinlik darajasi birga teng bo'lgan sistemaning so'nuvchi tebranma harakati

Texnikada uchraydigan ko'pgina masalalarni echishda erkinlik darajasi birga teng mexanik sistema nuqtalariga potentsialli kuchlardir tashqari, muhitning

$$\vec{R}_s = -\mu_s \vec{v}_s = -\mu_s \dot{\vec{r}}_s \quad (24.84)$$

ko'rinishdagi chiziqli qarshilik kuchi ta'sir etadigan hollar uchraydi. Bunda μ_s qarshilik koeffitsientini ifodalaydi. Sistemaning harakat differensial tenglamasini tuzish uchun

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (24.85)$$

formadagi Lagranj tenglamalaridan foydalanamiz. (24.85) da

$$Q = Q^s + Q^r, \quad (24.86)$$

bunda Q^s sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi potentsialli kuchlarga mos, Q^r esa qarshilik kuchiga mos umumlashgan kuchlarni ifodalaydi.

Ya'ni

$$Q^r = -\frac{\partial H}{\partial q} = -cq \quad (24.87)$$

(24.22) ga asosan

$$Q^s = \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \quad (24.88)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(24.88) da $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}}$ munosabat o'rinli bo'lishini nazarda tutib, \bar{R}_i ning qiy-matini qo'yamiz.

$$Q^s = - \sum_{i=1}^N \mu_i \bar{r}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \bar{r}_i^2}{2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \quad (24.89)$$

(24.89) dagi $\Phi = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \bar{r}_i^2}{2}$ ga *dissipativ funktsiya* yoki *Reley funktsiyasi* deyiladi. Bu funktsiya o'zining tuzilishi bo'yicha sistemaning kinetik energiyasiga o'xshash, lekin unda nuqtalarning massalari o'rnida qarshilik koeffitsientlari qat-nashadi.

Φ funktsiyani q va \dot{q} orqali ifodalaymiz.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \dot{r}_i^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2, \quad (22.90)$$

bunda $B(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \right)^2$ o'zgaruvchi bo'lib, uni $q = 0$ atrofida q ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz:

$$B(q) = B_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (24.91)$$

Agar uchinchi va undan yuqori tartibli kichik miqdorlarni e'tiborga olmasak, $B_0 = \mu$ belgilash kiritib, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 \quad (24.92)$$

(24.79) va (24.92) ga asosan, Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini tuzish uchun zarur bo'lgan kinetik energiyaning hosilalarini va Q^s ni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0. \quad (24.93)$$

$$Q^s = - \frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\mu q \quad (24.94)$$

(24.86), (24.87), (24.93), (24.94) larni (24.85) ga qo'yib, *erkinlik darajasi birga teng sistemaning muhimning chiziqli qarshiligi ta'siridagi so'muvchi tebranma ha-rakat differentsial tenglamasini* quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}$$

yoki

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0 \quad (24.95)$$

bunda $\frac{c}{a} = k^2$, $\frac{\mu}{a} = 2n$ belgilashlar kiritilgan.

(24.95) tenglama moddiy nuqtaning soʻnuvchi tebranma harakat differensial tenglamasi (17.14) ga oʻxshash, uni integrallash 17.3-§ da batafsil bayon etilgan.

24.21-§. Erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaning majburiy tebranma harakati

Erkinlik darajasi birga teng mexanik sistema nuqtalariga potentsialli kuch, muhitning tezlikka proporsional qarshilik kuchi va vaqtning funktsiyasidan iborat uygʻotuvchi kuch taʼsir etsin. Uygʻotuvchi kuchga mos umumlashgan kuch

$$Q_1 = H \sin(pt + \delta) \quad (24.96)$$

formula yordamida aniqlanadigan holni qaraymiz. Bu holda (24.87), (24.94) va

(24.96) ga asosan, Q umumlashgan kuch quyidagicha aniqlanadi:

$$Q = Q^e + Q^e + Q_1 = -cq - \mu\dot{q} + H \sin(pt + \delta). \quad (24.97)$$

(24.93) va (24.97) ni (24.85) ga qoʻysak,

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q} + H \sin(pt + \delta)$$

yoki

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (24.98)$$

tenglamani olamiz. Bunda $H_0 = \frac{H}{a}$.

(24.98) tenglama tezlikka proporsional qarshilik kuchi va vaqtning funktsiyasidan iborat uygʻotuvchi kuch taʼsirida boʻlgan, erkinlik darajasi birga teng sistemaning muvozanat holati yaqinidagi kichik majburiy tebranma harakat differensial tenglamalarini ifodalaydi. Bu tenglama xuddi shunday kuchlar taʼsiridagi nuqtaning majburiy tebranma harakat differensial tenglamasiga aynan oʻxshash.

Shunday qilib, erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaning muvozanat holati yaqinidagi kichik harakatlarini oʻrganish moddiy nuqtaning harakatini oʻrganishga keltiriladi.

Ustuvor muvozanat holati uchun (24.103) kvadratik formani aniqlangan formadan iborat bo'lib, u (24.78) Silvestri qat'iolantiradi:

$$c_{11} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$$

Ko'riyotgan sistema uchun

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \end{aligned} \right\}$$

ko'rinishdagi Lagranj tenglamalarini tuzishda potensial energiya-larning hositalarini hisoblashini hisobga olamiz va natijada:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned}$$

tenglamalarni olamiz. Shunday qilib, erkinlik darajasi ikkiga teng mexanik sistemadagi kichik tebranma harakatlar to'g'risida ikkinchi tartibli o'zgarmas sistemadan iborat bo'ladi.

Ko'rinishida $q_1 = A \sin(\omega t + \phi)$ domaylari bo'lib, harakatlar...

24.23 - §

Dinamikaning ikkinchi darajali harakat dif-ferensial tenglamalarini boshlang'ich shartlar bilan bo'lgan holatda yoki sarni boshlang'ich shartlar bilan sistemani o'zgarish uchun...

lanishlar
mexanik
oranishlarini
sistemaning
talarni olamiz.
hamda \dot{q}_1, \dot{q}_2 lar
or jihatdan kichik

sistemaning kinetik
nadi:

$$\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + a_{22}(q_1, q_2) \dot{q}_2^2 \quad (24.99)$$

oldi q_1, q_2 koordinatalarning energiyani ikkinchi darajali kichik bo'lsak, a_{ij} larni q_1, q_2 ning yoyganda, nohchi tartibli kichik bo'lgan bo'lib keladi:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(0,0) &= a_{11} \\ a_{22}(0,0) &= a_{22} \\ a_{12}(0,0) &= a_{12} \end{aligned} \right\} \quad (24.100)$$

darajasi ikkiga teng bo'lgan sistemaning o'zgarmas koeffitsientli kvadratik forma

$$\frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2) \quad (24.101)$$

bo'lganda kinetik energiya musbat qiymatga ega bo'ladi. (24.101) kvadratik forma (24.78) Silvestri qat'iolantiradi. Ko'riyotgan sistema uchun bu shartlar

$$a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (24.102)$$

formula yordamida erkinlik darajasi ikkiga teng sistemaning energiyasi aniqlanadi:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) \quad (24.103)$$

Ustuvor muvozanat holati uchun (24.103) kvadratik forma musbat aniqlangan formadan iborat bo'lib, u (24.78) Silvestr kriteriyasini qanoatlantiradi:

$$c_{11} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0 \quad (24.104)$$

Ko'rilayotgan sistema uchun

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= -\frac{\partial II}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -\frac{\partial II}{\partial q_2} \end{aligned} \right\} \quad (24.105)$$

ko'rinishdagi Lagranj tenglamalarini tuzish uchun kinetik va potensial energiya-larning hosilalarini hisoblaymiz hamda

$$a_{12} = a_{21}, c_{12} = c_{21} \quad (24.106)$$

bo'lishini hisobga olamiz va natijada:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.107)$$

tenglamalarni olamiz.

Shunday qilib, erkinlik darajasi ikkiga teng bo'lgan potentsialli kuchlar ta'siri-dagi mexanik sistemaning ustuvor muvozanati yaqinidagi kichik tebranma harakat differentsial tenglamalari ikkita ikkinchi tartibli o'rgarmas koeffitsientli bir ji-nqli tenglamala sistemasidan iborat bo'ladi. Bu tenglamalarning umumiy echimi-ni

$$q_1 = A \sin(kt + \varepsilon), q_2 = B \sin(kt + \varepsilon) \quad (24.10)$$

ko'rinishida izlaymiz. Bunda A , B , k va ε lar integrallas doimiylari bo'lib, harakatning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi.

24.23-§. Ustuvor harakat haqida tushuncha

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini echish natijasida sistema harakat dif-ferentsial tenglamalarining berilgan kuchlar va boshlang'ich shartlarga mos echi-mini aniqlaymiz. Biroq masalada berilgan boshlang'ich shartlar haqiqatda bir oz o'zgarishi mumkin bo'lgan hollarni ham qarashga to'g'ri keladi. Masalan, snaryad, raketa yoki samolyotning boshlang'ich tezligi hamisha hisoblangan boshlang'ich tezlik bilan ustma-ust tushavermaydi. Bundan tashqari, sistema harakati davomida unga masalani echishda nazarda tutilmagan oniy kuchlar yoki vaqtincha kuchlar ta'sir etadigan hollar ham uchraydi. Masalan, samolyot uchayotganda havoning zichligi

o'zgarishi natijasida qarshilik kuchi o'zgarishi yoki boshqa qo'shimcha kuchlar ta'sir etishi mumkin. Boshlang'ich payt uchun bunday qo'shimcha kuchlarning ta'siri to'xtagan paytni olib, ikkinchi holni birinchi holga keltirish mumkin.

Berilgan kuchlar va shartlarga mos bo'lgan harakatni *asosiy harakat*, berilgan kuchlar va o'zgargan boshlang'ich shartlarga mos bo'lgan harakatni esa, *uyg'otilgan harakat* deb ataymiz. Asosiy harakat sodir bo'ladigan boshlang'ich shartlar bi-*lan* o'zgargan boshlang'ich shartlar orasidagi farq kichik bo'lganda, uyg'otilgan harakatning asosiy harakatga yaqin bo'lishi muhim amaliy ahamiyatga ega. Shu ma'noda asosiy harakatni ustuvor deb qarash mumkin.

Sistemaning ustuvor harakatini aniqroq ta'riflash uchun holati q_1, q_2, \dots, q_n ko-ordinatalar bilan aniqlanadigan va erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan mexanik sis-temaning harakat differensial tenglamalarini quyidagi $s = 2n$ ta birinchi tartibli differensial tenglamalarga keltiramiz:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_s), \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (24.109)$$

Bunda y_i sistema nuqtalarining koordinatalari, tezliklari yoki ularning biror funkstyasidan iborat qandaydir parametrlarni ifodalaydi.

Aytaylik,

$$y_j = f_j(t)$$

berilgan $t = t_0$ da $y_i = y_{i0}$ boshlang'ich shartlarga mos bo'lgan (24.109) tenglamalarining xususiy echimini ifodalasin. Bu xususiy echimga mos harakatni asosiy harakat uchun olsak, (24.109) tenglamaning boshqa har qanday boshlang'ich shartlardagi xususiy echimlariga mos harakatlar esa uyg'otilgan harakatlarni ifodalaydi. Uyg'otilgan harakatning asosiy harakatdan og'ishi y_i larning ayirmasi bilan aniqlanadi.

Ustuvor harakatga A. M Lyapunov tomonidan berilgan ta'riflarni keltiramiz.

Agar istalganicha kichik musbat ε son uchun unga bog'liq shunday musbat η son topilsaki, boshlang'ich $t = t_0$ paytda

$$y_i(t_0) - f_i(t_0) \leq \eta \quad (24.110)$$

shartlar bajariladigan barcha uyg'otilgan harakatlar uchun

$$|y_j(t) - f_j(t)| \leq \varepsilon \quad (24.111)$$

tengsizliklar bajarilsa, sistemaning bunday asosiy harakati ustuvor deyiladi.

Agar biror qayd qilingan ε son uchun istalgancha kichik shunday $\eta < \varepsilon$ sonni topish mumkin bo'lsaki, (24.110) tengsizlik bajariladigan birorta uyg'otilgan xa-rakat uchun vaqtning biror paytida

$$|y_j(t) - f_j(t)| = \varepsilon \quad (24.112)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, sistemaning bunday harakati noustuvor harakat deyiladi.

24.24-§. Uyg'otilgan harakat differensial tenglamalari

Harakatning ustuvorligini o'rganish uchun harakat tenglamasida

$$x_j = y_j(t) - f_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (24.113)$$

tenglik yordamida aniqlanadigan yangi o'zgaruvchiga o'tamiz. Bunda $f_j(t)$ asosiy harakatga mos bo'lgan (24.109) tenglamaning xususiy echimini; x_j esa asosiy harakatdan og'ishini ifodalaydi. Yangi o'zgaruvchilar orqali ifodalangan quyidagi tenglamalar

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, x_2, \dots, x_s) = Y_j(t, x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_s + f_s) - Y_j(t, f_1, f_2, \dots, f_s) \quad (24.114)$$

uyg'otilgan harakat differensial tenglamalari deyiladi.

x_j o'zgaruvchilar orqali (24.110) va (24.111) tengsizliklarni

$$|x_j(t_s)| \leq \eta, \quad (24.115)$$

$$|x_j(t)| < \varepsilon \quad (24.116)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Shu sababli ustuvor harakatga yana quyidagi ta'rifni berish mumkin.

Agar istalgancha kichik musbat ε son uchun shunday musbat η son topilsaki, boshlang'ich $t - t_0$ paytda (24.115) tengsizliklar bajariladigan barcha uyg'otilgan harakatlar uchun (24.116) tengsizliklar o'rinli bo'lsa, sistemaning bunday asosiy harakati ustuvor deyiladi.

Agar asosiy harakat ustuvor bo'lsa va barcha uyg'otilgan harakatlar uchun (24.115) ni qanoatlantiruvchi shunday istalgancha kichik η son topilsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = 0 \quad (24.117)$$

shartlar bajarilsa, u holda asosiy harakat asimptotik ustuvor harakat deyiladi.

24.8- masala. Harakati

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x - x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y - x^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

tenglamalar bilan ifodalanadigan nuqtaning muvozanat holati yaqinidagi uyg'otilgan harakat tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Sistemaning muvozanat holati

$$\left. \begin{aligned} y - x - x^2 &= 0 \\ 3x - y - x^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tenglamalar vositasida aniqlanadi. Bu tenglamalarni birgalikda chib, quyidagi ik-kita muvozanat holatini aniqlaymiz.

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 0, y_1 = 0, \\ x_2 = 1, y_2 = 2 \end{aligned} \right\}$$

$x_1 = 0, y_1 = 0$ muvozanat holatiga mos uyg'otilgan harakat tenglamalarini chiqarish uchun

$$y = y_1 + \eta, x = x_1 + \xi$$

tengliklar bilan aniqlanadigan yangi o'zgaruvchilarga o'tamiz. Uyg'otilgan harakat differensial tenglamalari xuddi (1) ga o'xshash bo'lib, faqat unda yangi o'zgaruvchilar qatnashadi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta - \xi - \xi^2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= 3\xi - \eta - \xi^2 \end{aligned} \right\}$$

$x_2 = 1, y_2 = 2$ muvozanat holati yaqinidagi harakat tenglamalarini chiqarish

uchun x va y o'rniga

$$y = 2 + \eta, x = 1 + \xi$$

tengliklar bilan aniqlanadigan ξ va η o'zgaruvchilarni kiritamiz. Bu holga mos uyg'otilgan harakat tenglamalari

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta - 3\xi - \xi^2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi - \eta - \eta^2 \end{aligned} \right\}$$

ko'rinishda yoziladi.

24. 25-§. Harakatning ustuvorligi haqidagi Lyapunov teoremlari

Lyapunov harakatning ustuvorligi aniqlanadigan ikkita usulni ko'rsatgan.

Birinchi usul (24.114) uyg'otilgan harakat differensial tenglamalarining echimlarini cheksiz qator tarzida ifodalashdan iborat bo'lib, bu usul (24.113) teng-lamalarining ba'zi xususiy hollari uchun qo'llanadi. Birinchi usulni qo'llashda juda ko'p hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladn. Shu sababli harakatning ustuvorligini aniqlashda ikkinchi usuldan foydalaniladi. Lyapunovning ikkinchi usuli ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi va Lyapunov funkstiyasi deb ataladigan biror V funkstiyani topishga keltiriladi. Kelgusida koordinatalar boshi atrofida aniqlangan x_1, x_2, \dots, x_n o'zgaruvchilarning funkstiyasi $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ustida to'xtalamiz. Bu funkstiyani bir qiymatli, faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ da nolga teng va uzluksiz xusu-siy hosilalarga ega deb qaraymiz.

Ta'riflar 1. Agar $h > 0$ qancha kichik bo'lmasin

$$|x_i| \leq h \quad (24.11)$$

sohada V funkstiya faqat bitta aniq ishorali (aniq musbat yoki ar-manfiy) qiymatlarni qabul qilsa va faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ da nolga teng bo'lsa, u holda $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkstiya (24.118) sohada *aniq ishorali funkstiya* deyiladi.

2. Agar V funkstiya (24.118) sohada faqat bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa hamda $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ da ham nolga teng bo'la olsa, u holda $V =$

$-V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkstiya mazkur sohada o'zgarmas (musbat yoki manfiy)

ishorali funkstiya deyiladi.

3. Agar h qanchalik kichik bo'lmasin (24.118) sohada $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkstiya ham musbat, ham manfiy qiymatlarni qabul qila olsa, u holda $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkstiya mazkur sohada *o'zgaruvchi ishorali funkstiya* deyiladi.

Quyidagi Lyapunovning birinchi teoremasi asosiy harakat ustuvorligining etarli shartini ifodalaydi:

Agar uyg'otilgan harakat differentsial tenglamalari uchun aniq ishorali shunday $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkstiyani topish mumkin bo'lsaki, mazkur tenglamalarda qatnashuvchi V funkstiyaning to'liq hosilasi V ga qarama-qarshi o'zgarmas ishorali yoki aynan nolga teng bo'lsa, u holda asosiy harakat ustuvordir.

Quyidagi ikkinchi teorema yordamida harakatning asimptotik ustuvorligi aniqlanadi.

Agar uyg'otilgan harakat differentsial tenglamalari uchun shunday aniq ishorali $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkstiyani topish mumkin bo'lsaki, mazkur tenglamalarda qatnashuvchi V funkstiyaning vaqt bo'yicha to'liq hosilasi ham V ga qarama-qarshi aniq ishorali funkstiyadan iborat bo'lsa, u holda asosiy harakat asimptotik ustuvordir.

24.9-masala. Agar uyg'otilgan harakat tenglamalari

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - 3z - x(y - 2z)^2, \\ \dot{y} &= -2x + 3z - 3yz, \\ \dot{z} &= 2x - y + y^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ko'rinishda berilsa, asosiy harakatning ustuvorligi aniqlansin.

Yechish. Lyapunov funkstiyasini quyidagicha tanlab olamiz.

$$V = 2x^2 + y^2 + 3z^2.$$

U holda

$$\frac{dV}{dt} = 4xz + 2yz + 6zz \quad (2)$$

yoki x, y, z larning qiymatini (1) dan keltirib qo'ysak,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4zy - 12xz - 4x^2(y - 2z)^2 - 4zy + 6yz - 6zy^2 + 12xz - 6yz + 6zy^2 = \\ &= -4x^2(y - 2z)^2. \end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt} \leq 0$ (bunda tenglik ishorasi koordinatalar boshi hamda $x=0$ va

$z=2x$ tekisliklarda o'rinli) bo'lgani uchun $\frac{dV}{dt}$ o'zgarmas ishorali manfiy funkstiyadan iborat bo'ladi. Demak, Lyapunovning birinchi teoremasiga asosan, asosiy harakat ustuvordir.

24.10-masala. Agar uyg'otilgan harakat tenglamalari

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - x^2, \\ \dot{y} &= -x - y^2 \end{aligned} \right\}$$

ko'rinishda berilsa, $x - u = 0$ koordinatalar boshi yaqinidagi asosiy harakatning asimptotik ustuvor bo'lishi isbotlansin.

Yechish. Lyapunov funkstiyasini aniq ishorali musbat funkstiya shaklida quyi-dagicha tanlab olamiz: $V = x^2 + y^2$. U holda V ning vaqt bo'yicha hosilasi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}x + \frac{dV}{dy}y = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4)$$

o'zgarmas ishorali manfiy funkstiya bo'lgani uchun koordinatalar boshi yaqinida asosiy harakat Lyapunovning ikkinchi teoremasiga ko'ra asimptotik ustuvor bo'ladi hamda bu holatdan kichik og'dirilgan sistema vaqtning o'tishi bilan bu holatga yaqinlasha boradi.

24.26- §. Birinchi yaqinlashishdagi ustuvor muvozanat

Ko'pincha uyg'otilgan harakat differensial tenglamalarining echimini aniqlash murakkab bo'lgani uchun harakatning ustuvorligini birinchi yaqinlashish usuli bilan ham aniqlanadi. Bu usulda harakatning ustuvorligini aniqlash uchun uyg'otilgan harakat differensial tenglamalarida chiziqli hadlar alohida ajratib yoziladi:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + Z_j(x_1, \dots, x_n), \quad (24.119)$$

bunda $a_{jk} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right)_{x_1=x_2=\dots=x_n=0}$ bo'lib, $Z_j(x_1, \dots, x_n)$ esa ikkinchi va unda yuqori tartibli x_j larni o'z ichiga olgan hadlarni ifodalaydi.

Birinchi yaqinlashishda ustuvorlikni aniqlash uchun (24.119) da chiziqsiz hadlarni e'tiborga olmay

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \quad (24.120)$$

tenglamalar qaraladi va ularning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^2 + A_1\lambda^2 + \dots + A_n = 0 \quad (24.121)$$

tuziladi. U holda harakatning ustuvorligi aniqlanadigan quyidagi Lyapunov teoremlari o'rinli bo'ladi.

1-teorema. Agar birinchi yaqinlashishdagi sistema xarakteristik tenglamasi-ning barcha ildizlari manfiy haqiqiy qismga ega bo'lsa, u holda uyg'otilgan harakat tenglamasidagi yuqori tartibli hadlar qanday bo'lishidan qat'i nazar asosiy harakat ustuvor, shu bilan birga asimptotik ustuvor bo'ladi.

2-teorema. Agar birinchi yaqinlashishdagi sistema xarakteristik tenglamasi-ning hech bo'lmaganda bitta ildizi musbat haqiqiy qismga ega bo'lsa, u holda uy-g'atilgan harakat tenglamasidagi ikkinchi va undan yuqori tartibli hadlarni har qanday tanlanishiga qaramay, asosiy harakat noustuvor bo'ladi.

Xarakteristik tenglama ildizlarining ishorasini aniqlashda quyidagi Gurvis teoremasidan foydalaniladi.

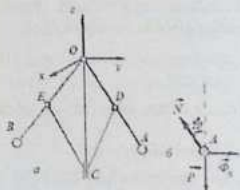
Teorema. n - tartibli haqiqiy koeffitsientli

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

tenglama barcha ildizlari manfiy haqiqiy qismga ega bo'lishi uchun quyidagi

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (24.122)$$

determinantlarning barchasi musbat bo'lishi zarur va yetarlidir. Bunda $i > s$ bo'l-sa, $a_i = 0$.



24.16-rasm.

24.11-masala. Uatt regulyatori uzunliklari l ga teng va O nuqtada shamirli bi-riktirilgan OA va OB sterjenlardan tashkil topgan bo'lib, bu sterjenlarning uchiga m massali sharchalar biriktirilgan (24.16-rasm, a). Vertikal o'q bo'yicha sirpana oladigan C mufta CE va CD sterjenlar vositasida sharlar o'ratilgan sterjenlarga shamirlar bilan biriktirilgan.

Sharlar moddiy nuqtalar deb qaralsin. Burchak tezlik ortgan sari sharlar bir-biridan qochadi va C mufta yuqoriga ko'tariladi, burchak tezlik kamaysa, sharlar bir-biriga yaqinlashadi va C mufta pastga tushadi.

Mufta va sterjenlarning og'irligini e'tiborga olmay regulyator harakatining us-tuvorligi aniqlansin. Aylanuvchi qismlar-ning (sharlar bu hisobga kirmaydi) vertikal o'qqa nisbatan inerstiya momenti J_0 ga teng φ_0 burchak bilan aniqlanadigan asosiy harakattan regulyatorni φ burchakka og'ishi natijasida hosil bo'ladigan tiklovchi moment

$$M_z = -k(\varphi - \varphi_0)$$

ga teng. Bunda k — o'zgarmas musbat koeffitsient.

Yechish. Regulyatorning erkinlik darajasi ikkiga teng. Umumlashgan koordinatalar uchun OC o'q atrofidagi aylanish burchagi β va OA , OB sterjenlarning OAB tekislikka perpendikulyar gorizontal o'q atrofidagi aylanish burchagi φ ni olamiz. Regulyator o'zgarmas $\beta = \varphi_0$ burchak tezlik bilan aylan-ganda φ_0 burchakni aniqlaymiz. Buning uchun sharlarning nisbiy muvozanatini tekshirish kifoya (24.16-rasm, b). Sharlarga ta'sir etuvchi og'irlik kuchi \vec{P} va reaksiya kuchi \vec{N} qatoriga normal inertiya kuchi $\vec{\Phi}_s$ ($\Phi_s = ml\omega_s^2 \sin \varphi_0$) ni qo'shsak, bunday kuchlar sistemasini muvozanatda deb qarash mumkin.

Bu kuchlarni \vec{N} ga perpendikulyar AK o'qqa proekstiyalasak,

$$\Phi_s \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0$$

yoki Φ_s ning qiymatini qo'ysak,

$$ml\omega_s^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0$$

Bundan

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l \cos \varphi_0} \quad (1)$$

Shunday qilib, regulyator OC o'q at-rofida berilgan ω_s burchak tezlik bilan ay-lansa, u holda OA va OB sterjenla vertikalga φ_0 burchak ostida og'gan holda harakatlanadi. Bu harakat asosiy harakat deb ataymiz.

Sistemaning harakat differentsial tenglamasini tuzish uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalaridan foydalanamiz.

Umumlashgan kuchlarni hisoblaymiz. Regulyatorga sharlarning og'irlik kuchlari va M_z tiklovchi moment ta'sir etadi.

Sharlar og'irlik kuchlarining potentsial energiyasi ixtiyoriy o'zgarmasgacha aniqlik bilan

$$H = -2mgl \cos \varphi$$

formula yordamida aniqlanadi. Shu sababli sharlarning og'irlik kuchlariga mos bo'lgan Q_φ umumlashgan kuch manfiy ishora bilan olingan potentsial energi-yaning φ bo'yicha xususiy hosilasiga teng bo'ladi.

$$Q_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -2mgl \sin \varphi \quad (2)$$

Tiklovchi M_z momentga mos umumlashgan kuchni Q_φ bilan

belgilasak, Q_β ni elementar ish ifodasidagi $\delta\beta$ mumkin bo'lgan ko'chish oldidagi koeffitsientga teng deb qarash mumkin:

$$\delta A_1 = M_z \delta\beta$$

Binobarin,

$$Q_\beta = M_z = -k(\varphi - \varphi_0) \quad (3)$$

Sistemaning kinetik energiyasini hisoblaymiz:

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \dot{\beta}^2 + I_2 \dot{\varphi}^2)$$

Bunda I_1 regulyator aylanuvchi qismlarining (sharlar bu hisobga kirmaydi) z o'qqa nisbatan inerstiya momenti I_0 bilan φ burchakka bog'liq sharlarning z o'qqa nisbatan inerstiya momentlari yig'indisiga teng:

$$I_1 = I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi.$$

Sharlarning x o'qqa nisbatan inerstiya momenti

$$I_2 = 2ml^2$$

Shunday qilib, sistemaning kinetik energiyasi umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$T = \frac{1}{2}[(I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi)\dot{\beta}^2 + 2ml^2 \dot{\varphi}^2].$$

Berilgan sistema uchun

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= Q_\beta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ko'rinishdagi Lagranjniig II xil tenglamalarini tuzish uchun zarur bo'lgan kinetik energiyaning hosilalarini hisoblaymiz va (2), (3) bilan (4) ga qo'ysak,

$$4ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\beta} + (I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi) \dot{\beta} = -k(\varphi - \varphi_0), \quad (5)$$

$$2ml^2 \ddot{\varphi} - 2ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\beta}^2 = -2mgl \sin \varphi.$$

Sistemaning (1) asosiy harakat yaqinidagi kichik tebranishlarini qaraymiz. Buning uchun quyidagi almashtirishni kiritamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + x, \quad \beta = \beta_0 + y = \alpha_0 + y \quad (6)$$

Bunda x va y lar φ va β o'zgaruvchilarning kichik orttirmalarini ifodalaydi. (6) ni (5) ga kiritib, asosiy harakat yaqinidagi kichik harakatlarni tekshirish uchun barcha hadlarni birinchi tartibli kichik miqdorgacha aniqlik bilan hisoblaymiz. Bu-ning uchun $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1$ deb faraz qilamiz. Natijada quyidagini yozish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} (I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi_0) \ddot{y} + 2ml^2 \sin^2 \varphi_0 \beta_0 \dot{x} + kx &= 0, \\ x - \beta_0 \sin 2\varphi_0 \cdot y + \left(\frac{g}{l} \cos \varphi_0 - \beta_0^2 \cos 2\varphi_0 \right) x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Shunday qilib, sistemaning asosiy harakati yaqinidagi kichik harakatlari uchun (7) ko'rinishidagi ikkita o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini olamiz. Ularni echish uchun mos xarakteristik tenglama

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Bunda

$$a_0 = \frac{I_0}{2ml^2} + \sin^2 \varphi_0, a_1 = 0,$$

$$a_2 = \sin^2 \varphi_0 \beta_0^2 \left(1 + 2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{l_0}{2ml^2} \right),$$

$$a_3 = \frac{k}{2ml^2} \sin 2\varphi_0 \beta_0.$$

Bu xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishini ifodalovchi Gurvist shartlari

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

ko'rinishda yoziladi. Ko'rilayotgan holda $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 = 0$ bo'lgani uchun Gurvist shartlari qanoatlanmaydi, binobarin, regulyatorning harakati nous-tuvor bo'ladi. Bu fakt eksperimnt yo'li bilan ham tasdiqlangan. Shu sababli boshqarish sistemasiga qo'shimcha zvenolarni kiritishga to'g'ri keladi.

24.27- §. Harakatni optimal boshqarish haqida tushuncha

Texnikada ob'ektlarning harakatini boshqarish va boshqarishning eng yaxshi usulini tanlash alohida ahamiyatga ega. Hozirgi kunda boshqariladigan ob'ektlar deyarli har qadamda uchraydi: avtomobil, samolyot, regulyatorlar bilan jihozlangan turli elektropriborlar ana shular jumlasidandir.

Boshqariluvchi ob'ektni bir holatdan boshqa holatga turlicha usullarda o'tkazish mumkin. Shundan kelib chiqib, ma'lum ma'noda eng qulay yo'l bilan o'tishni aniqlashga keltiriladigan optimal boshqarish masalasiga duch kelamiz.

Mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha kuchlar boshqaruvchi — odam (yoki avtomatik qurilmalar) vositasida

boshqarilishi mumkin. Masalan, sa-molyotning harakatini uchuvchi yoki avtopilot ta'sirida boshqarish mumkin. Texnikada uchraydigan bunday masalalar boshqarish funkstiyasi qatnashadigan masa-lalar deyiladi. Agar boshqarish funkstiyasi va ta'sir etuvchi kuchlar ma'lum bo'lsa, u holda harakatni boshqarish berilgan ob'ektning mazkur kuchlar ta'siridagi hara-katini aniqlashga doir mexanikaning oddiy masalasiga keltiriladi.

Boshqarishning optimalligi oldindan belgilangan sifat belgisiga qarab aniqla-nadi. Masalan, ikki punkt orasida uchadigan samolyotning eng qisqa vaqtda man-zilga etishini boshqarish masalasida sifat belgisi uchishga sarf bo'lgan vaqt, mak-simal yuk tashish masalasida esa sifat belgisi tashilgan yukning og'irligi bilan ifo-dalanadi.

Ko'pincha mexanik sistemaning harakat differentsial tenglamalari

$$\frac{dx_j}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_s, u_1, u_2, \dots, u_s), (j = 1, 2, \dots, s) \quad (24.123)$$

yoki

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (24.124)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga keltiriladi. Bunda x_1, x_2, \dots, x_s lar stemaning berilgan ondagi holati va tezligini ifodalovchi miqdorlar, u_1, u_2, \dots, u_s lar esa boshqarish pa-rametrlarini ifodalaydi. Masalan, o'g'ri chiziqli harakatdagi avtomobilning hara-katini uning bosib o'tgan yo'li s va harakat tezligi v bilan xarakterlash mumkin. Bu kattaliklar vaqtning funkstiyasi sifatida o'zgaradi va ular dvigatelning tortish kuchi F ni haydovchi tomondan o'zgartirish orqali boshqariladi. Bu masalada F boshqaruvchi parametрни ifodalaydi.

Odatda, boshqarish parametrlari u_1, u_2, \dots, u_s lar ixtiyoriy bo'lmay, ularga ma'lum shartlar qo'yiladi. Masalan, i — avtomobil dvigatelin-ing tortish kuchi bo'lsa, u parametr $0 \leq u \leq u_1$ ko'rinishdagi shartni qanoatlantirishi kerak.

Boshlang'ich $t = t_0$ paytda sistema x_0 holatda bo'lib, $t = t_1$ paytda uni x_1 holatga olib kelish talab qilinsa, boshqarish masalasi

$$\frac{dx}{dt} = f[x, u(t)]$$

differentsial tenglamalarni ushbu

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

chegaraviy shartlarda echimga ega bo'ladigan $u(t)$ boshqarish funkstiyasini tan-lashga keltiriladi. Bu masalaning echimi $x(t)$ bo'lsa, boshqarishning sifat belgisi

$$J = \int_a^b f_0[x(t), u(t)] dt \quad (24.125)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Harakat differensial tenglamalari (24.123) yoki (24.124) tenglamalar bilan ifo-dalanadigan mexanik sistemaning harakatini optimal boshqarish masalasi (24.125) funkstionalning mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini aniqlashga keltiriladi.

Nazorat savollari:

1. Bog'lanishlar va ularning klassifikastiyasi
2. Mumkin bo'lgan ko'chish
3. Sistemaning erkinlik darajasi
4. Ideal bog'lanishlar
5. Mumkin bo'lgan ko'chish priistipini oddiy mashinalarga qo'llash.
6. Sistemaning umumlashgan koordinatalari
7. Umumlashgan kuchlar
8. Dinamikaning umumiy tenglamasi.
9. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari
10. Potensialli kuchlar ta'sirida Lagranjning ikkinchi xil tengmalari
11. Gamilton—Ostrogradskiy prinstipi
12. Kanonik tenglamalar
13. Mexanik sistemaning ustivor muvozanati
14. Lagranj—Dirixle teoremasi
15. Ustivor harakat haqida
16. Harakatning ustivorligi xaqidagi Lyapunov teoremalari
17. Harakatni optimal boshqarish haqida

25- BOB. ZARBA NAZARIYASI

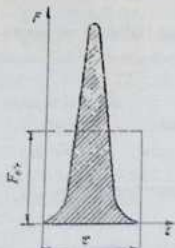
Tayanch soʻzlar: Zarba, zarba nazariyasining asosiy tenglamasi, Kelvin teoremasi, tiklovchi koefitsient, markaziy zarba, Karno teoremasi, zarba markazi.

25.1-§. Zarba nazariyasining asosiy tushunchalari

Juda kichik vaqt ichida sistemaning ayrim yoki barcha nuqtalarining tezligi, bi-nobarin, harakat miqdori chekli kattalikka oʻzgarsa, bunday hodisa *zarba* deyiladi.

Zarba sodir boʻladigan vaqt *zarba vaqti* deyiladi. Zarba vaqti τ sekundning mingdan bir yoki undan kichik ulushiga teng boʻladi.

Mexanik sistema nuqtalariga birdaniga bogʻlanish qoʻyilganda yoki sistema bogʻlanishdan bir zunda boʻshatilganda zarba hodisasi sodir boʻladi. Masalan, il-garilama harakatdagi jism qoʻzgʻalmas jism bilan toʻqnashganda zarba sodir boʻlib, bunda qoʻzgʻalmas jism birdaniga qoʻyilgan bogʻlanish vazifasini oʻtaydi. Sportchi tramlindan sakrash paytida ham zarba sodir boʻladi, bunda zarba sportchi bogʻlanishdan (tramlindan) boʻshatilgan (ajralgan) paytda sodir boʻladi. Shuningdek, toʻp otilganda yoki snaryad portlaganda ham zarba sodir boʻladi.



25.1- rasmi.

Zarba davrida vujudga keluvchi va toʻqnashuvchi jismlarga juda kichik vaqt ichida taʼsir etib, oʻta katta qiymatga erishadigan va impuls chekli boʻlgan kuch *zarbali kuch* deyiladi. Agar kuch zarbali kuchdan ibo-rat boʻlsa, odatda bunday kuchning oʻzgarish qonuni maʼlum boʻlmaydi, lekin bu kuch modulining taqribiy grafigini 25.1-rasmdagidek tasvirlash mumkin. Zarbali kuch zarba vaqtida juda tez orta borib, maksimal qiymatga erishadi, soʻngra zarba davri oxirigacha tez surʼatda kamayadi.

Koʻpincha zarbali kuchning batafsil oʻzgarish qonunini aniqlashga ehtiyoj tugʻilmay, balki zarba davridagi kuch impulsini aniqlash muhim ahami-yatga ega boʻladi. Ushbu

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt \quad (25.1)$$

formula yordamida aniqlanadigan vektor kattalik *zar-bali kuch impulsi* deyiladi. Zarbali kuch impulsi 25.1-rasmda tasvirlangan *zarbali kuch grafigi* hamda abs-stissa o'qi t bilan chegaralangan shtrixlangan yuza or-qali ifodalanadi.

Ba'zida zarbali kuchning ta'sirini tasavvur qilish uchun zarba vaqtida o'zgarmasdan qoladigan va zar-bali kuch impulsi ta'sirini bera oladigan hamda

$$S = F_{av} \cdot \tau \quad (25.2)$$

formula yordamida aniqlanadigan o'rtacha zarbali kuch F_{av} kiritiladi.

Texnikada zarba hodisasidan bolg'alash, shtampovka, tayanch qoziqlar qoqish-da va boshqa sohalarda foydalaniladi.

25.2-§. Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi

Massasi m ga teng moddiy nuqtaga juda kichik τ vaqt ichida zarbali \vec{F} kuch va zarbali bo'lmagan vaqtning funktsiyasidan iborat \vec{Q} kuch ta'sir etsin. Nuqtaning zarbadan oldingi tezligini \vec{u} zarbadan keyingi tezligini \vec{u}' bilan belgilasak, zarba vaqti ichida harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema asosan

$$m\vec{u}' - m\vec{u} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt + \int_0^{\tau} \vec{Q} dt \quad (25.3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(25.3) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi zarbali kuch im-pulsi \vec{S} ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi uchun Lagranjning o'rta qiymat haqidagi teoremasini qo'llasak,

$$\int_0^{\tau} \vec{Q} dt = \vec{Q}_{av} \cdot \tau$$

Bunda \vec{Q}_{av} bilan \vec{Q} kuchning $(0, \tau)$ oraliqda qabul qiladigan o'rtacha qiymati

belgilangan. \vec{Q}_{av} chekli kattalik, τ esa kichik qiymatga ega bo'lgani tufayli $\vec{Q}_{av} \cdot \tau \approx 0$ deb olish mumkin. Ya'ni zarba vaqtida zarbali bo'lmagan kuchlarning impulsini zarbali kuch impulsiga nisbatan e'tiborga olmaslik mumkin. Shunday qi-lib, zarba vaqtida muqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani quyi-dagicha

yozish mumkin:

$$m\bar{u} - m\bar{u}_0 = \bar{S} \quad (25.4)$$

ya'ni zarba vaqtida nuqta harakat miqdorining o'zgarishi nuqtaga ta'sir etuvchi zarbali kuch impulsiga teng.

(25.4) tenglama zarba nazariyasining asosiy tenglamasi deyiladi.

Agar nuqtaga bir vaqtning o'zida bir necha zarbali kuchlar ta'sir etsa, (25.4) da mazkur zarbali kuchlar impulslarining geometrik yig'indisi olinadi.

Bu tenglama differentsial tenglamadan iborat bo'lmay, balki chekli miqdorlar qatnashadigan algebraik tenglamadan iborat.

By tenglama vositasida zarbali impuls ma'lum bo'lganda zarba vaqtida nuqta tezligining o'zgarishini yoki zarbadan oldingi va zarbadan keyingi nuqtaning tezliklari berilganda zarbali kuch impulsini aniqlash mumkin.

Xuddi shuningdek, kelgusida uchraydigan zarba nazariyasiga oid barcha tenglamalar differentsial tenglamalardan iborat bo'lmay, balki algebraik (chekli) tenglamalardan tashkil topadi.

(25.4) ni Dekart koordinata o'qlariga proekstiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} mu_x - mv_x &= S_x, \\ mu_y - mv_y &= S_y, \\ mu_z - mv_z &= S_z \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

ya'ni zarba vaqtida nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas o'qdagi proekstiyasining o'zgarishi shu nuqtaga ta'sir etuvchi zarbali kuch impulsining mazkur o'qdagi proekstiyasiga teng.

Agar zarbali kuch impulsi ma'lum bo'lsa, u holda (25.4) dan foydalanib, nuqta-ning zarbadan keyingi tezligini aniqlaymiz:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \frac{\bar{S}}{m} \quad (25.6)$$

tenglamadan ko'ramizki, zarbadan keyingi tezlik zarbadan oldingi tezlikdan chekli kattalikka farq qiladi. Zarba vaqti τ juda kichik va bu vaqt ichida nuqtaning tezligi chekli miqdorga o'zgarгани tufayli zarba vaqtida nuqtaning ko'chishi juda kichik bo'ladi va odatda uni e'tiborga olinmaydi. Shunday qilib, zarba vaqtida nuqta ko'chishga ulgurmaydi.

25.3-§. Zarba vaqtida sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

Aytaylik, N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema berilgan bo'lsin. Zarba vaqtida zarbali bo'lmagan kuchlarning impulsini e'tiborga olmaslik mumkin bo'lgani uchun sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning impulsini tashqi va ichki zarbali kuchlar impulsidan tashkil topgan deb qarash mumkin. Agar sistema ixtiyoriy M nuqtasining zarbadan oldingi va zarbadan keyingi tezliklarini mos ravishda \vec{v}_i va \vec{u}_i bilan belgilasak, zarba nazariyasining asosiy tenglamasiga ko'ra

$$m_i \vec{u}_i - m_i \vec{v}_i = \vec{S}_i^* + \vec{S}_i^* \quad (25.7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda \vec{S}_i^* , \vec{S}_i^* lar mos ravishda ichki va tashqi zarbali kuchlar impulsini ifodalaydi. Sistema uchun bunday tenglamalardan N tasini yozib va ularni hadlab qo'shsak,

$$\sum m_i \vec{u}_i - \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{S}_i^* + \sum \vec{S}_i^*$$

Bunda

$$\sum m_i \vec{u}_i = \vec{Q}, \quad \sum m_i \vec{v}_i = \vec{Q}_0$$

mos ravishda sistemaning zarbadan keyingi va zarbadan oldingi harakat miqdorlarini ifodalaydi. Bundan tashqari, ichki kuchlarning xususiyatiga ko'ra, $\sum \vec{S}_i^* = 0$ bo'lgani uchun

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_i^* \quad (25.8)$$

Bu tenglama zarba vaqtida sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: zarba vaqtida sistema harakat miqdorining o'zgarishi, sistema nuqtalariga qo'yilgan tashqi zarbali kuchlar impulsining yig'indisiga teng.

Agar

$$\sum \vec{S}_i^* = 0$$

bo'lsa, (25.8) ga ko'ra

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 \quad (25.8')$$

ya'ni faqat ichki zarbali kuchlarning impulsini zarba vaqtida butun sistemaning harakat miqdorini o'zgartirib olmaydi.

(25.8) ni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} Q_1 - Q_{1s} &= \sum S_{1s}^* \\ Q_2 - Q_{2s} &= \sum S_{2s}^* \\ Q_3 - Q_{3s} &= \sum S_{3s}^* \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

(25.9) dan ko'ramizki, $\sum S_{is}^* = 0$ bo'lsa,

$$Q_1 = Q_{1s}$$

ya'ni agar tashqi zarbali kuch impulslarining biror o'qdagi proekstiyasi nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdorining mazkur o'qdagi proekstiyasi zarba vaqtida o'zgarmasdan qoladi.

(21.6) ga ko'ra

$$\vec{Q} = M\vec{u}_c, \vec{Q}_s = M\vec{v}_c \quad (25.10)$$

bunda M — butun sistema massasi, \vec{u}_c, \vec{v}_c lar mos ravishda sistema massalar markazining zarbadan keyingi va zarbadan oldingi tezliklarini ifodalaydi. (25.9) ni nazarda tutib, (25.8) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$M(\vec{u}_c - \vec{v}_c) = \sum \vec{S}_i^* \quad (25.11)$$

(25.11) tenglama zarba vaqtida sistema massalar markazi harakat miqdori-ning o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: zarba vaqtida sistema massalar markazi harakat miqdorining o'zgarishi sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi zarbali kuch impulslarining geometrik yig'indisiga teng.

Xususiyl holda $\sum S_{is}^* = 0$ bo'lsa, (25.11) ga ko'ra

$$\vec{u}_c = \vec{v}_c$$

Demak, tashqi zarbali kuch impulslarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, sistema massalar markazining zarbadan keyingi va zarbadan oldingi tezliklari o'zgarmasdan qoladi.

(25.11) ni koordinata o'qlariga proekstiyalab quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} M(u_{cs} - v_{cs}) &= \sum S_{1s}^* \\ M(u_{cs} - v_{cs}) &= \sum S_{2s}^* \\ M(u_{cs} - v_{cs}) &= \sum S_{3s}^* \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

25.4- §. Zarba vaqtida nuqta va sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema

Yuqorida ko'rganimizdek, zarba vaqtida nuqta ko'chishga ulgurmaydi. Shu sababli zarbadan oldingi va keyingi nuqtaning radius-vektorini \vec{r} bilan belgilab, zarba nazariyasining asosiy tenglamasi (25.4) ni \vec{r} ga vektorli ko'paytsak, quyidagini olamiz:

$$\vec{r} \times m\vec{u} - \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{S}$$

Bu munosabat zarba vaqtida nuqta kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi. Zarba vaqtida nuqta kinetik momentining biror markazga nisbatan o'zgarishi nuqtaga qo'yilgan zarbali kuch impulsining mazkur markazga nisbatan momentiga teng. Bu teoremani N ta nuqtadan tashkil topgan sistemaning har bir nuqtasi uchun qo'llasak,

$$\vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v - \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{r}_v \times \vec{S}_v + \vec{r}_v \times \vec{S}'_v, (v = \overline{1, N}) \quad (25.13)$$

tenglamalar o'rinli bo'ladi. (25.13) tenglamalarni qo'shamiz:

$$\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v - \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{S}'_v, (v = \overline{1, N})$$

bunda sistemaning O markazga nisbatan zarbadan keyingi va zarbadan oldingi kinetik momentlarini va tashqi zarbali kuchlar impulslarining O markazga nisbatan momentlarining yig'indisi eslasak, hamda ichki kuchlar xossasi $\sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v) = 0$ ga ko' quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\vec{K}_O - \vec{K}_O^* = \sum \vec{M}_O(\vec{S}'_v) \quad (25.14)$$

Bu tenglik zarba vaqtida sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: zarba vaqtida sistema kinetik momentining biror markazga nisbatan o'zgarishi sistema nuqtalariga qo'yilgan zarbali kuchlar impulslarining mazkur markazga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

Agar

$$\sum \vec{M}_O(\vec{S}'_v) = 0$$

bo'lsa, (25.14) ga ko'ra,

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^*$$

ya'ni faqat ichki kuchlarning impulsi zarba vaqtida sistema kinetik momentini o'zgartira olmaydi.

(25.14) ni koordinata o'qlariga proektsiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} K_x - K_x^0 &= \sum M_x(\vec{S}_i^*), \\ K_y - K_y^0 &= \sum M_y(\vec{S}_i^*), \\ K_z - K_z^0 &= \sum M_z(\vec{S}_i^*) \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

25.5-§. Zarba vaqtida zarbali kuchning ishi haqidagi Kelvin teoremasi

Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi (25.4) dan foydalanib, zarbali kuchlar-ning zarba vaqtidagi ishini hisoblash mumkin.

(25.4) ni dastlab \vec{u} ga, keyin \vec{v} ga ko'paytirib, qo'shib va natijani 2 ga bo'lsak,

$$\frac{m\vec{u}^2}{2} - \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{1}{2} \vec{S}(\vec{u} + \vec{v}) \quad (25.16)$$

Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoreмага asosan (25.16) tenglikning chap tomoni unga ta'sir etuvchi kuchning ishi ga teng. Shu sababli

$$A = \frac{1}{2} \vec{S}(\vec{u} + \vec{v}) \quad (25.17)$$

(25.17) tenglama kuchning ishini mazkur kuch impulsi va nuqtaning o'rtacha tezligi orqali aniqlaydigan *Kelvin teoremasini* ifodalaydi: *biror vaqt oralig'ida nuqtaga qo'yilgan kuchning ishi, kuchning mazkur vaqt oralig'idagi impulsi bilan nuqtaning boshlang'ich va oxirgi tezliklari yig'indisi skalyar ko'paytmasining yarmiga teng.*

Kelvin teoremasini nuqtaning har qanday harakatlariga ham qo'llash mumkin.

Mexanik sistema uchun Kelvin teoremasini keltirib chiqarishda sistemaning har bir nuqtasi uchun (25.17) ga o'xshash tenglamalarni yozib, ular o'zaro qo'shuladi:

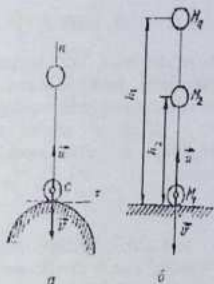
$$\sum A_i = \frac{1}{2} \sum \vec{S}_i(\vec{u}_i + \vec{v}_i) \quad (25.18)$$

25.6-§. Jismning qo'zg'almas sirtga urilishidagi to'g'ri zarba. Tiklovchi koeffitsientni tajriba yo'li bilan aniqlash

Agar jism massalar markazining tezligi qo'zg'almas sirtga urilishi oldida sirt bilan jism uriladigan nuqtada qo'zg'almas sirtga

o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalsa, bunday zarba to'g'ri zarba deyiladi.

Aytaylik, boshlang'ich tezlik-siz erkin tushayotgan va massasi m ga teng shar qo'zg'almas gorizontal tekislikka \bar{u} tezlik bilan urilsin (25.2-rasm). Bunday to'g'ri zarbada sharning zarbadan keyingi tezligi \bar{u} sirtga o'tkazilgan Cn normal bo'yicha yuqoriga yo'naladi. Zarba vaqtini ikki davrga bo'lish mumkin: birinchi davmi τ_1 bilan belgilasak, bu vaqt mobaynida sharning tezligi nol bo'lguncha, u deformatsiyalanadi; ikkinchi τ_2 davrida esa elastiklik kuchi ta'sirida, butunlay bo'lmasada, shar o'z shaklini tiklaydi va \bar{u} tezlik bilan sirtidan qapchiydi. Shu sababli zarba vaq-ti $\tau = \tau_1 + \tau_2$ bo'ladi.



25.2-rasm.

Shar qo'zg'almas tekislikka urilganda bo'ladigan to'g'ri zarbada sharning zarbadan keyingi va oldingi tezligi miqdorlarining o'zaro nisbatiga teng kattalik zarbadagi tiklovchi koeffitsient deyiladi va k bilan belgilanadi:

$$k = \frac{u}{\bar{u}} \quad (25.19)$$

Agar $k=1$ bo'lsa, bunday zarba *absolyut elastik zarba* deyiladi. Bu holda $u = -\bar{u}$ bo'lib, zarba natijasida sharning tezligi zarbadan oldingi tezlik yo'nalishiga qarama-qarshi yo'naladi.

Agar $k=0$ bo'lsa, bunday zarba *absolyut elastik bo'lmagan zarba* deyiladi. Bunday zarbadan keyingi sharning tezligi $u=0$ bo'ladi.

Tiklovchi koeffitsient $0 < k < 1$ bo'lgan hollardagi zarba *elastik zarba* deyiladi.

Zarba vaqtining birinchi davrida silliq sirtning sharga ta'sir etuvchi o'zgaruvchi zarbali reaktsiya kuchini \bar{N}_1 ikkinchi davridagisini \bar{N}_2 bilan belgilaylik. U holda har ikkala vaqt oralig'i uchun zarba nazariyasining asosiy tenglamasi (25.4) ni tuzib, normalga proektsiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} 0 - (-mv) &= S_1, \\ mu - 0 &= S_2 \end{aligned} \right\}$$

hosil bo'ladi, bunda $S_1 = \int_0^{t_1} N_1 dt$, $S_2 = \int_0^{t_2} N_2 dt$ birinchi va ikkinchi zarba davrlariga mos bo'lgan reakstiya kuchlarining zarbali impulsini ifodalaydi. Zarbali bo'l-magan kuchlarning, masalan, og'irlik kuchining zarba vaqtidagi impulsini e'ti-borga olmaymiz.

(25.19) ni nazarda tutib, bu teng-liklardan tiklovchi koeffitsient va zarbali impuls orasidagi quyidagi munosabatni olamiz:

$$k = \frac{S_2}{S_1} \quad (25.20)$$

ya'ni *shar qo'zg'almas sirtga urilgandagi to'g'ri zarbada zarba vaqtining ikkinchi davriga mos zarbali kuch impulsining bi-rinchi davridagi zarbali kuch impulsiga nisbati tiklovchi koeffitsientga teng bo'ladi.*

Tiklovchi koeffitsient tajriba usulida quyidagicha aniqlanadi. Sinalayotgan jism materialidan yasalgan sharcha h_1 balandlikdan xuddi shunday materialdan (yoki boshqa sinaluvchi materialdan) yasalgan salmoqli gorizonta lplitaga boshlang'ich tezliksiz tashlanadi (25.2-rasm, b). Zarbadan keyin sharcha h_2 balandlikka ko'tari-ladi.

M, M_1 uchastka uchun kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremani qo'l-lab, sharchaning zarbadan oldingi tezligini aniqlaymiz.

$$v = \sqrt{2gh_1}$$

Xuddi shuningdek, M, M_2 uchastka uchun bu teoremani qo'llasak, sharchaning zarbadan keyingi tezligi uchun $u = \sqrt{2gh_2}$ formula o'rinni bo'ladi. t va v ning qiy-matlarini (25.19) ga qo'yib tiklovchi koeffitsientni aniqlaymiz.

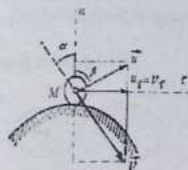
$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad S_2 = \quad (25.21)$$

Quyidagi jadvalda katta tezlik bilan to'qnashuvchi ayrim jismlarning tiklovchi

koeffitsientlari qiymati berilgan:

To'qnashuvchi jismlar	k
Yog'och shar rezinaga urilganda	0,26
Yog'och sharlar o'zaro urilganda	0,50
Po'lat sharlar o'zaro urilganda	0,56
Shisha sharlar o'zaro urilganda	0,94

Agar shar qo'zg'almas sirtga urilgan paytda uning massalar markazining tezligi urilish nuqtasida qo'zg'almas sirtga o'tkazilgan nor-mal bilan α burchak tashkil etsa, bunday zarba *qiyshiq zarba* deyiladi (25.3-rasm). $\alpha = 0$ bo'lsa, to'g'ri zarba sodir bo'ladi. α burchak *tushish burchagi* deyiladi. Umumiy holda shar sirtga urilgandan keyin unga o'tkazilgan Mn normalga β burchak ostida qapchiydi. β burchakka *qaytish burchagi* deyiladi.



25.3-rasm.

Agar sirtni ideal silliq sirdan iborat deb qarasaq, zarbali reaksiya kuchi sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'naladi va urinmadagi proekstiyasi nolga teng bo'ladi. Bu holda zarba nazariyasining asosiy tenglamasi (25.4) ni urinmaga proekstiyalasak,

$$mu_x - mv_x = 0$$

yoki

$$u_x = v_x \quad (25.22)$$

Qiyshiq zarbada

$$k = \frac{u_x}{v_x} \quad (25.23)$$

ga teng kattalikka *tiklovchi koeffitsient* deyiladi. Bunda u_x va v_x orqali tezliklar-ning normaldagi proekstiyalarining absolyut qiymati belgilangan.

(25.23) dan

$$|u_x| = k|v_x| \quad (25.24)$$

(25.22) va (25.24) ga asosan shar markazining zarbadan keyingi tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$u = \sqrt{u_t^2 + u_n^2}$$

25.3-rasmdan

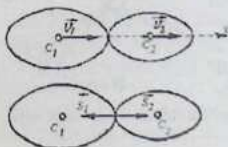
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_t}{v_n}, \operatorname{tg} \beta = \frac{v_t}{u_n} = \frac{v_t}{k v_n} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$

Shunday qilib,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha. \quad (25.26)$$

Bu formula vositasida qaytish burchagi bilan tushish burchagi orasidagi munosabat aniqlanadi.

25.7-§. Ikkita jismning to'g'ri markaziy zarbasi



25.4-rasm.

Agar ikkita jism bir-biriga uriladigan nuqtalaridagi umumiy normal jism-larning massalar markazi orqali o'tsa hamda zarba oldidagi jismlarning tezliklari mazkur umumiy normal bo'yicha yo'nalsa, bunday zarba *to'g'ri markaziy zarba* deyiladi.

Massalari m_1, m_2 ga teng ikkita jism zarbadan oldin ham, keyin ham ilgari hamda harakatda bo'lsin. Bunday jismlarning to'g'ri markaziy zarbasini tekshiramiz. Jismlarning zarbadan oldingi tezliklari u_1, u_2 ga teng bo'lib, jismlar urilganda urinish nuqtasida o'tkazilgan umumiy normal bo'yicha yo'nalsin (25.4-rasm).

Agar jismlar bir tomonga harakatlansa, zarba sodir bo'lishi uchun $v_1 > v_2$ shart bajarilishi kerak. Jismlarning massasi, zarbadan oldingi tezliklari va zarbadagi tiklovchi koeffitsient ma'lum bo'lganda zarbadan keyingi jismlar massalar markazining tezligi va zarbali impulsni aniqlaymiz. Tashqi zarbali impulslar ta'sir etmagani tufayli (25.8') ga asosan quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2.$$

ya'ni sistemaning zarbadan oldingi va zarbadan keyingi harakat miqdorlari o'zaro teng bo'ladi. Bu vektorli tenglikni jismlarning massalar markazini tutashiruvchi $C_1 x$ o'qqa proektsiyalasak,

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}. \quad (25.27)$$

Bu tenglamada u_{1x}, u_{2x} ikkita noma'lum qatnashadi. Agar tiklovchi koefhisti-ent berilgan bo'lsa, bu noma'lumlarni aniqlash uchun yana bitta qo'shimcha teng-lamani olish kerak. Zarbadan keyin ikkinchi jismning tezligi birinчисiga nisbatan ortgani tufayli $u_{1x} < u_{2x}$ jismlarning to'g'ri zarbasida tiklovchi koefhistient jismlar-ning zarbadan keyingi va zarbadan oldingi nisbiy tezliklarining nisbatiga teng bo'ladi

$$k = \frac{|u_{1x} - u_{2x}|}{|v_{1x} - v_{2x}|} = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \quad (25.28)$$

bunda $v_{1x} > v_{2x}$ deb qaraymiz. (25.28) dan

$$u_{2x} - u_{1x} = k(v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.29)$$

tenglikni olamiz. (25.27) va (25.29) tenglamalarni birgalikda ehib, jismlarning zarbadan keyingi tezliklarini aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \\ u_{2x} &= v_{2x} + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \end{aligned} \right\} \quad (25.30)$$

Hagarilama harakatdagi jismlar urilganda hosil bo'ladigan \vec{S}_1, \vec{S}_2 ($\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$) zarbali impulslarni aniqlash uchun jismlarning birortas masalan, birinچisi uchun (25.3) ni qo'llaymiz. U holda ikkita jismda tashkil topgan sistema uchun ichki hi-soblangan zarbali impulsi birinchi jism uchun tashqi impulsdan iborat bo'ladi. Nati-jada

$$m_1(u_{1x} - v_{1x}) = S_{1x}, S_{1x} = -S_{2x} \quad (25.31)$$

yoki (25.30) ga asosan

$$S_{1x} = -S_{2x} = -(1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.32)$$

Agar jismlarning ikkinچisi qo'zg'almas bo'lsa, u holda (25.30) va (25.32) da $v_{2x} = 0$ bo'lgani tufayli

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \\ u_{2x} &= (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}, \\ S_{1x} &= -S_{2x} = -(1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (25.33)$$

Quyidagi xususiy hollarni ko'ramiz:

1 Absolyut elastik bo'lmagan zarba ($k = 0$). Bu holda (25.30) ga ko'ra

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} \quad (25.34)$$

ya'ni *absolyut elastik bo'lmagan zarbadan keyin jismlar bir xil tezlik bilan hara-katlanadi*, boshqacha aytganda, absolyut elastik bo'lmagan zarba natijasida ikkala jism bir-biridan ajralmay, bir xil tezlik bilan harakatlanadi.

Bu holda zarbali kuch impulsi uchun

$$S_{1x} = -S_{2x} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.35)$$

formula o'rinli bo'ladi.

2 Absolyut elastik zarba ($k=1$). Bu holda (25.30) va (25.32) ga acosan

$$\left. \begin{aligned} S_{1x} &= -S_{2x} = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned} \right\} \quad (25.36)$$

(25.35) va (25.36) formulalarni solishtirib, absolyut elastik zarbadagi zarbali impuls miqdori absolyut elastik bo'lmagan zarbadagi impuls miqdoriga nisbatan ikki baravar katta bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Jismlarning massalari teng ($m_1 = m_2$) bo'lgan xususiy holda (25.36) dan quyi-dagini olamiz:

$$u_{1x} = v_{2x}, u_{2x} = v_{1x}$$

Ya'ni absolyut elastik zarbada ikkita bir xil massali jismlar to'qnashishi natijasida ularning tezliklari almashadi. Agar ikkinchi jism tinch holatda bo'lib, birinchi jism unga kelib urilsa,

$$u_{1x} = 0, u_{2x} = v_{1x}$$

ya'ni zarbadan keyin ikkinchi jism xuddi birinchi jism ega bo'lgan tezlik bilan harakatlanadi; birinchi jism esa tinch holatda bo'ladi.

25.1-masala. Bir xildagi ikkita A va B elastik shar bir-biriga qarab harakatlanadi. Urilishdan oldingi tezliklar nisbati qanday bo'lganda A

shar urilishdan keyin to'xtab qoladi? Zarba vaqtidagi tiklovchi koef-fis-tient k ga teng.

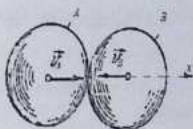
Yechish. x o'qni sharlar markazini tu-tashtiruvchi chiziq bo'yicha \vec{v}_x yo'nalgan tomonga yo'naltiramiz (25.5-rasm). U holda (25.30) formulaning birinchisida

$v_{1x} = v_{2x}, v_{2x} = -v_{1x}, m_1 = m_2 = m, u_{1x} = 0$ bo'lishini e'tiborga olsak,

$$0 = v_{1x} - \frac{1}{2}(1+k)(v_{1x} + v_{2x}),$$

bundan sharlarning urilishdan oldingi tezliklari nisbatini aniqlaymiz:

$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = \frac{1+k}{1-k}.$$



25.5 - rasm.

25.8-§. Zarba vaqtida kinetik energiyaning yo'qolishi.

Karno teoremasi

Ikkita jismning to'g'ri markaziy zarbasida $|S_{1x}| = |S_{2x}| = S$, belgilash kiritsak, u holda har qaysi jismga ta'sir etuvchi zarbali impulslar va tiklovchi koef-fis-tient (25.31) va (25.28) ga ko'ra quyidagicha aniqlanadi:

$$m_1(u_{1x} - v_{1x}) = S, m_2(u_{2x} - v_{2x}) = -S, k = \frac{u_{2x} - v_{2x}}{u_{1x} - v_{1x}} \quad (25.3)$$

(25.29) ni nazarda tutib, (25.37) ning birinchisini $u_{1x} + kv_{1x}$ ga, ikkinchisini $u_{2x} + kv_{2x}$ ga ko'paytirib, olingan tenglamalarni qo'shsak,

$$m_1(u_{1x} - v_{1x})(u_{1x} + kv_{1x}) + m_2(u_{2x} - v_{2x})(u_{2x} + kv_{2x}) = 0 \quad (25.38)$$

Bu tenglamani boshqacha ko'rinishda yozish uchun quyidagi ayniyatlardan foydalanamiz:

$$u_{1x}(u_{1x} - v_{1x}) = \frac{1}{2}(u_{1x}^2 - v_{1x}^2) + \frac{1}{2}(u_{1x} - v_{1x})^2$$

$$kv_{1x}(u_{1x} - v_{1x}) = \frac{1}{2}k(u_{1x}^2 - v_{1x}^2) - \frac{1}{2}k(u_{1x} - v_{1x})^2$$

ularni qo'shsak,

$$(u_{1x} - v_{1x})(u_{1x} + kv_{1x}) = \frac{1}{2}(1+k)(u_{1x}^2 - v_{1x}^2) + \frac{1}{2}(1-k)(u_{1x} - v_{1x})^2 \quad (25.39)$$

Xuddi shuningdek, quyidagi formula ham o'rinli bo'ladi:

$$(u_{2x} - v_{2x})(u_{2x} + kv_{2x}) = \frac{1}{2}(1+k)(u_{2x}^2 - v_{2x}^2) + \frac{1}{2}(1-k)(u_{2x} - v_{2x})^2 \quad (25.40)$$

(25.39) va (25.40) ni e'tiborga olib, (25.38) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1+k)[(m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2) - (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2)] + \frac{1}{2}(1-k) \\ & -k[m_1(u_{1x} - v_{1x})^2 + m_2(u_{2x} - v_{2x})^2] = 0. \end{aligned} \quad (25.41)$$

Bunda

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 u_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2),$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_1 v_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2)$$

lar mos ravishda sistemaning zarbadan oldingi va zarbadan keyingi kinetik energiyalarini ifodalaydi.

$$T = \frac{1}{2}[m_1(u_{1x} - v_{1x})^2 + m_2(u_{2x} - v_{2x})^2]$$

kattalik esa zarba natijasida yo'qotilgan tezlikka mos kinetik energiyani ifodalaydi.

Yuqoridagi belgilashlarni nazarda tutib, (25.41) ni quyidagicha o'zish mumkin:

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} T \quad (25.42)$$

(25.42) tenglik ikkita jismning to'g'ri markaziy elastik zarbasida kinetik energiyaning yuqolishiga oid Karno teoremasini ifodalaydi: elastik zarbada yo'qotilgan kinetik energiya, yo'qotilgan tezlikka mos kinetik energiyaning $\frac{1-k}{1+k}$ qismiga teng.

Absolyut elastik zarba uchun $k=1$ va $T_1 = T_2$, ya'ni absolyut elastik zarbada kinetik energiya yo'qolmaydi. Absolyut elastik bo'lmagan zarba uchun $k=0$ bo'ladi va

$$T_1 - T_2 = T \quad (25.43)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu holda kinetik energiya maksimal darajada yo'qoladi (potensial va issiqlik energiyalariga aylanadi).

(25.43) tenglik absolyut elastik bo'lmagan zarba uchun Karno teoremasini ifodalaydi: absolyut elastik bo'lmagan zarbada yo'qotilgan kinetik energiya yo'qotilgan tezlikka mos kinetik energiyoga teng.

Absolyut elastik bo'lmagan zarba natijasida jismlar bir xil u tezlikka ega bo'ladi:

$$u_{1s} = u_{2s} = u,$$

Shu sababli (25.37) ning birinchi ikkita tenglamasini

$$m_1(u_s - v_{1s}) = S_s, m_2(u_s - v_{2s}) = -S_s, \quad (25.44)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamalardan

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \frac{m_1 v_{1s} + m_2 v_{2s}}{m_1 + m_2}, \\ S_s &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1s} - v_{2s}) \end{aligned} \right\} \quad (25.45)$$

(25.44) ni e'tiborga olib, yo'qotilgan tezlikka mos kinetik energiya uchun

$$T = \frac{S_s^2}{2m_1} + \frac{S_s^2}{2m_2} = \frac{S_s^2}{2m_1 m_2} (m_1 + m_2) \quad (25.46)$$

ifodani olamiz. (25.46) ga S_s ning qiymatini (25.45) dan keltirib qo'ysak,

$$T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{1s} - v_{2s})^2 \quad (25.47)$$

T ning bu qiymatini (25.43)ga qo'yib, absolyut elastik bo'lmagan jism uchun Kar-no teoremasini yana quyidagicha yozish mumkin:

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{1s} - v_{2s})^2 \quad (25.48)$$

(25.48) ni ikkinchi jism qo'zg'almas bo'lgan hol uchun qo'llaymiz. U holda $v_{2s} = 0$ bo'lgani sabab

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_{1s}^2$$

yoki ko'rilayotgan holda $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2$ bo'lgani uchun

$$T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1$$

Bu formulalardan foydalanib, sandon ustiga qo'yilgan qizdirilgan metallga uri-layotgan bolg'aning foydali ish koeffitsientini aniqlash mumkin. Bolg'aning mas-sasi m_1 , qizdirilgan metall va sandonning birgalikdagi massasi m_2 ga teng bo'lsin. Qizdirilgan metallni absolyut elastik bo'lmagan jism deb qarash mumkin. Bu holda metallni deformastiyalash uchun sarf bo'lgan $T_1 - T_2$ yo'qotilgan kinetik

energiya foydali hisoblanadi: $T_1 - T_2$ ni bolg'aning kinetik energiyasi T_1 ga nisbati bolg'a-ning foydali ish koeffitsientini ifodalaydi:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (25.50)$$

(25.50)dan ko'ramizki, bolg'aning massasi sandon massasiga nisbatan etarli-cha kichik bo'lganda uning foydali ish koeffitsienti katta bo'ladi.

25.9-§. Zarbali kuchlarning qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi va telis parallel harakatdagi jismga ta'siri

Aytaylik, qattiq jism qo'zg'almas z o'q atrofida ω_0 burchak tezlik bilan aylana-yotgan bo'lsin. Bunday jismga zarbali kuchning ta'sir etishi natijasida uning bur-chak tezligi qanday o'zgarishini ko'rib chiqamiz. Shu maqsadda zarba vaqtida z o'qqa nisbatan kinetik momentning o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi (25.15) ning uchinchi tenglamasidan foydalanamiz:

$$K_z - K_z^0 = \sum M_z(\vec{S}_i^0) \quad (25.51)$$

(25.51) ga asosan, qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qi-ga nisbatan kinetik momenti

$$K_z = I_z \omega, K_z^0 = I_z \omega_0$$

formulalar yordamida aniqlanadi. K_z, K_z^0 ning bu qiymatlarini (25.51) ga qo'ysak,

$$I_z(\omega - \omega_0) = \sum M_z(\vec{S}_i^0) \quad (25.52)$$

Bundan

$$(\omega - \omega_0) = \frac{\sum M_z(\vec{S}_i^0)}{I_z} \quad (25.53)$$

Binobarin, qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismga tashqi zarbali kuchlar ta'sir etishi natijasida uning burchak tezligining o'zgarishi, tashqi zarbali kuch im-pulslarining mazkur o'qqa nisbatan momentlari yig'indisining xuddi shu o'qqa nisbatan jism inerstiya momentiga nisbatiga teng.

Zarbali kuchlarning tekis parallel harakatdagi jismga ta'sirini aniqlash uchun jismning massalar markazi harakatlanadigan tekislikda x va y o'qlarni o'tkazamiz. Jismning tekis parallel harakatini jism massalar markazining ilgari-lama harakati va massalar markazi orqali

harakat tekisligiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi o'qqa nisbatan aylanma harakatlarning yig'indisidan iborat deb qarash mumkin.

Aytaylik, massalar markazining zarbadan oldingi tezligi v_c jismning burchak tezligi esa ω_c ga teng bo'lsin. U holda (25.12) ga asosan massalar markazi tezligi-ning x va y o'qlari bo'yicha o'zgarishi aniqlanadigan quyidagi ikkita tenglamani olamiz

$$\left. \begin{aligned} m(u_{O_c} - v_{O_c}) &= \sum S_{O_c}^x \\ m(v_{O_c} - v_{O_c}) &= \sum S_{O_c}^y \end{aligned} \right\} \quad (25.54)$$

Agar jismning massalar markazi orqali harakat tekisligiga perpendikulyar ra-vishda z o'qni o'tkazsak, zarba vaqtida z o'q ko'chishga ulgurmaydi, shu sababli z o'qqa nisbatan zarba vaqtida kinetik momentning o'zgarishi (25.52) ga asosan

$$I_{O_c}(\omega - \omega_c) = \sum M_{O_c}(S_i^z) \quad (25.55)$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib, tashqi zarbali impulslar ta'sirida tekis parallel harakatdagi ji -sm massalar markazining zarbadan keyingi tezligi (25.54), jism burchak tezligi-ning zarba vaqtidagi o'zgarishi (25.55) formulalar yordamida aniqlanadi.

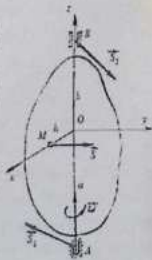
25.10-§. Zarba markazi

Aytaylik, qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning biror M nuqtasiga tashqi zarbali impuls \vec{S} ta'sir etsin. Bu impuls ta'sirida tayanch nuqtalarida \vec{S}_1, \vec{S}_2

zarbali reaksiya impulslari hosil bo'ladi va tayanch nuqtalariga zarbali bosimlar ta'sir etadi. Koordinata o'qlarini quyidagicha tanlaymiz: z o'qni zarbadan oldingi jismning burchak tezligi ω_c bo'ylab yo'naltiramiz. Oxy tekislikni zarbali impuls qo'yilgan M nuqta orqali, x o'qni OM bo'ylab yo'naltiramiz (25.6-rasm). U holda M nuqtaning koordinatalari quyidagiga teng bo'ladi:

$$x_M = OM = h, y_M = 0, z_M = 0$$

Zarba vaqtida jism ko'chishga



25.6-rasm.

ulgurmagan tufayli jism bilan bog'langan $Oxyz$ koordinatalar sistemasini zarba vaqtida qo'zg'almas deb qarash mumkin.

A va B tayanchlardan Oxy tekislikkacha bo'lgan masofalarni mos ravishda a va b bilan belgilaymiz. O nuqtaga nisbatan zarba vaqtida sistema harakat miqdori-ning o'zgarishi va kinetik momentning o'zgarishi haqidagi teoremlarni ifodalov-chi (25.10) va (25.14) tenglamalarni tuzamiz:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} - \bar{Q}_0 &= \bar{S} + \bar{S}_1 + \bar{S}_2, \\ \bar{K}_0 - \bar{K}_0^0 &= \bar{M}_0(\bar{S}) + \bar{M}_0(\bar{S}_1) + \bar{M}_0(\bar{S}_2) \end{aligned} \right\} \quad (25.56)$$

Aytaylik, jism zarbadan oldin va zarbadan keyin 25.6-rasmda tasvirlangan $\bar{\omega}_0$ vektori yo'nalishiga mos aylansin. U holda

$$\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega,$$

$$\omega_m = \omega_n = 0, \omega_{oz} = \omega_x$$

va

$$u_{C_x} = -\omega y_{C_x}, u_{C_y} = \omega x_{C_x}, u_{C_z} = 0,$$

$$v_{C_x} = -\omega y_{C_x}, v_{C_y} = -\omega x_{C_x}, v_{C_z} = 0.$$

(22.35) ga ko'ra,

$$K_x = -I_x \omega, K_y = -I_y \omega, K_z = I_z \omega,$$

$$K_x^0 = -I_x \omega_x, K_y^0 = -I_y \omega_y, K_z^0 = -I_z \omega_z$$

Bu munosabatlarni e'tiborga olib, (25.56) ni ko-ordinata o'qlariga proekstiyalasak,

$$\left. \begin{aligned} -M y_{C_x} (\omega - \omega_x) &= S_x + S_{1x} + S_{2x}, \\ M x_{C_x} (\omega - \omega_x) &= S_y + S_{1y} + S_{2y}, \\ 0 &= S_z + S_{1z}, \\ -I_x (\omega - \omega_x) &= a S_{1y} - b S_{2y}, \\ -I_y (\omega - \omega_x) &= -a S_{1x} + b S_{2x} - h S_x, \\ I_z (\omega - \omega_x) &= h S_x \end{aligned} \right\} \quad (25.57)$$

(25.57) tenglamalarning birinchi beshtasi vositasida zarbali reaksiya impuls-larining proekstiyalari: $S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}, S_{2x}, S_{2y}, S_{2z}$ lar aniqlanadi; oxirgi tenglama vositasi-da jismning zarba vaqtidagi burchak tezligining o'zgarishi aniqlanadi.

Qanday shartlar bajarilganda tashqi zarbali impulslar ta'sir etganda tayanch nuqtalarida zarbali reaksiya impulsi hosil bo'lmashligini

ko'rib chiqamiz. Bu holda $S_{1x}, S_{2x}, S_{1y}, S_{2y}, S_{1z}$ lar nolga teng bo'lishi kerak. Natijada (25.57) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} -My_c(\omega - \omega_0) &= S_{1x}, \\ Mx_c(\omega - \omega_0) &= S_{1y}, \\ 0 &= S_{1z}, \\ -I_x(\omega - \omega_0) &= 0, \\ -I_y(\omega - \omega_0) &= -hS_{2z}, \\ I_z(\omega - \omega_0) &= hS_{2z} \end{aligned} \right\} \quad (25.58)$$

(25.58) dan tayanch nuqtalarida zarbali reaksiya kuchlari hosil bo'lmaydigan izla-nayotgan shartlarni olamiz:

1. (25.58) ning uchinchi tenglamasiga ko'ra zarbali kuch impulsi aylanish o'qi-ga perpendikulyar bo'lishi kerak;

2. $S_z = 0$ bo'lgani uchun (25.58) ning to'rtinchi va beshinchi tenglamalariga asosan, $I_x = I_y = 0$, ya'ni Oz aylanish o'qi bu o'qning Oxy tekisligi bilan kesishgan nuqtasida bosh inertiya o'qidan iborat bo'lishi kerak;

3. (25.58) ning birinchi va ikkinchi tenglamalardan ko'ramizki, $S_x x_c + S_y y_c = 0$ yoki $\vec{r}_c \vec{S} = 0$ bo'lishi kerak; boshqacha aytganda, jism massa markazining radius-vektori \vec{r}_c hamda zarbali impuls \vec{S} vektorlari o'zaro perpendikulyar bo'lishi kerak, ya'ni zarbali kuch impulsi aylanish o'qi va massalar markazi orqali o'tuvchi tekislikka perpendikulyar yo'nalishi zarur.

4. (25.58) ning ikkinchi va oltinchi tenglamalariga binoq quyidagi tenglik o'rinli bo'lishi kerak:

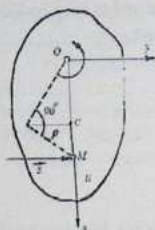
$$x_c h = \frac{I_z}{M} = \rho^2, \quad (25.59)$$

bunda ρ jismning aylanish o'qiga nisbatan inertiya radiusini ifodalaydi. (25.58) formula yordamida zarbali impuls qo'yiladigan M nuqtaning holati aniqlanadi:

$$h = \frac{I_z}{Mx_c}. \quad (25.60)$$

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradigan M nuqta zarba markazi deyiladi.

Agar jism moddiy simmetriya tekisligi P ga ega bo'lsa, yuqoridagi shartlar soddalashadi. Bu holda aylanish o'qi moddiy simmetriya



25.7-rasm.

tekisligi Π bilan kesish-gan O nuqtada inertiya bosh o'qidan iborat bo'ladi hamda jismning og'irlik mar-kazi C ham P tekishkda yotadi (25.7-rasm). Ko'rilayotgan xususiy holda zarba ta-yanch nuqtalariga ta'sir etmashgi uchun quyidagi shartlar bajarihshi kerak:

1) Zarbah impuls Π tekishkda yotishi va OC ga perpendikulyar bo'lishi ke-rak;

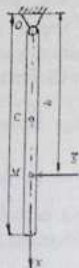
2) zarbali impuls \bar{S} ning ta'sir chizig'idan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa

$$h = OM = \frac{I_x}{Mx_c} \quad (25.61)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(25.61) dan ko'ramizki, zarba markazi aylanish o'qiga mos bo'lgan silkinish markazi (22.4-§) bilan ustma-ust tushishi kerak.

Zarba markazini aniqlash texnikada ko'p qo'llani-ladi. Masalan, materiallarning mustahkamligini dinamik sinash uchun qo'llaniladigan zarba mashinasida zarba markazini aniqlash alohida ahamiyatga ega.



25.8-rasm.

25.2-masala. Zarba markazini aniqlashda ishlatiladigan as-bobda massasi m va uzunligi l ga teng sterjen uning O uchidan unga perpendikulyar ravishda o'tuvchi qo'zg'almas gorizontal o'q atrofida aylana oladi. 25.8-ra-smda tasvirlangan muvozanat holatida zarba impuls sterjen va aylanish o'qiga perpendikulyar yo'nalgan zarba beriladi. Zarba markazi va sterjenning zarbadan keyingi burchak tezligi aniqlansin.

Yechish. x o'qni sterjen bo'ylab vertikal pastga yo'naltirib, (25.60) ga asosan O nuqtadan zarba markazigacha bo'lgan $h = OM$ masofani aniqlaymiz:

$$h = OM = \frac{I_x}{Mx_c} = \frac{2ml^2}{3ml} = \frac{2}{3}l$$

Zarba oldida sterjen tinch holatda ($\omega_0 = 0$) bo'lishini e'tiborga olib, (25.55) formula vositasida sterjenning zarbadan keyingi burchak tezligini aniqlaymiz.

$$\omega = \frac{Sb}{I_x} = \frac{\frac{2}{3}l}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{2S}{ml}$$

25.3-masala. Zarba mashinasi radiusi $r = 0,1$ m va qalinligi $\delta = 0,05$ m bo'lgan A po'lat diskdan va diametri $d = 0,02$ m va uzunligi $l = 0,9$ m bo'lgan doiraviy B po'lat sterjendan iborat. O o'qqa zarba tegmasligi uchun urilayotgan C brus O aylanish o'qi yotgan gorizontal tekislikdan qanday h masofaga o'tirilishi kerak? Zarba gorizontal yo'nalishda beriladi deb qaralsin (25.9-rasm).

Yechish. Sterjen va diskning og'irligini \bar{P}_1, \bar{P}_2 bilan belgilasak,

$$P_1 = \gamma l \frac{\pi d^2}{4}, P_2 = \gamma \pi r^2 \delta$$

Bunda γ - birlik hajmga to'g'ri kelgan po'latning og'irligi. O nuqtadan sistemaning massalar markazigacha bo'lgan masofa

$$OC = \frac{P_1 \frac{l}{2} + P_2(l+r)}{P_1 + P_2}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bundan tashqari,

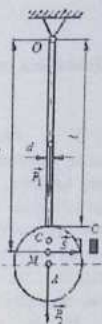
$$r^2 = \frac{I_x}{M} = \frac{P_1 \frac{l^2}{3} + P_2(l+r)^2 + P_2 r^2}{P_1 + P_2}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Olingan ifodalarni

$$h = OM = \frac{r^2}{OC}$$

formulaga qo'ysak,

$$h = 0,934 \text{ m.}$$



25.9- rasm.

Nazorat savollari:

1. Zarba nazariyasining asosiy tushunchalari
2. Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi
3. Zarba vaqtida sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.
4. Zarba vaqtida kinetik momentning o'zgarishi haqida teorema.
5. Zarba vaqtida zarbali kuchning ishi haqidagi Kelvin teoremasi
6. Tiklovchi koeffitsientni tajriba yo'li bilan aniqlash.
7. Karno teoremasi.
8. Zarba markazi.

1-ilova 1-Topshiriq.

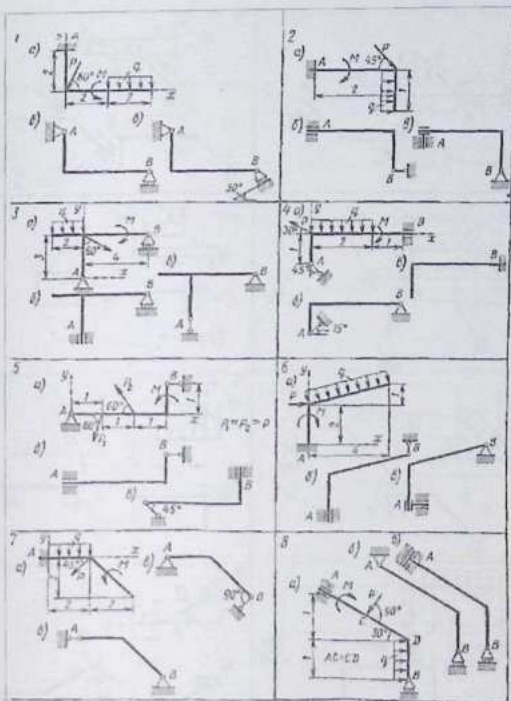
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi. Qattiq jismning tayanch reaksiyalarini aniqlash

1-4 chizmalarda o'qi siniq chiziqdan iborat bo'lgan brus qo'zg'aluvchan stilin-drli bog'lanishga, qo'zg'almas stilindrli bog'lanishga, og'irligi hisobga olinmagan sterjenli bog'lanishga qo'zg'almas qilib qotirilgan, qo'zg'aluvchan qilib qotirilgan va buraladigan qilib qotirilgan bog'lanishlarga ega. Har bir variantda brusni mah-kamlashning uchta usuli ko'rsatilgan. Berilgan yuklamalar (kuchlar, momentlar) va o'lchamlar uchala holda ham bir xil (1-jadvalga qarang).

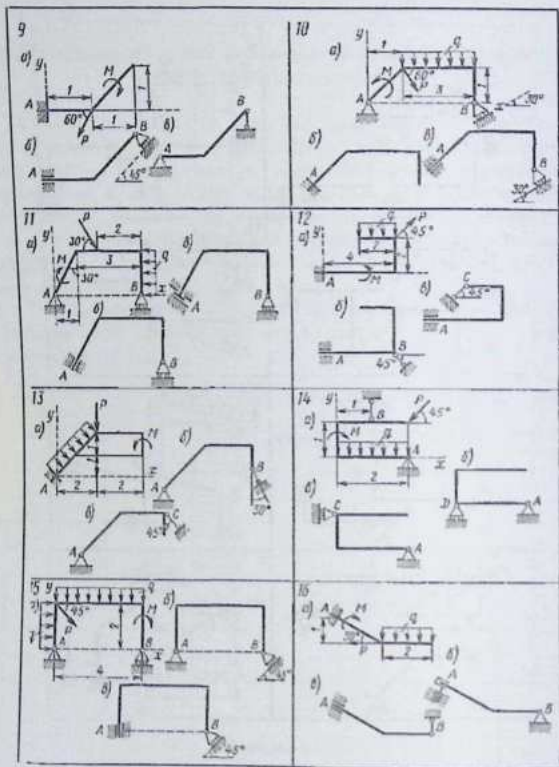
Har bir variantdagi qolgan reaksiya kuchlari, tekshiriladigan reaksiya kuchi modul jihatdan eng ki-chik qiymatga ega bo'lgan sxemada topilsin.

1-jadval

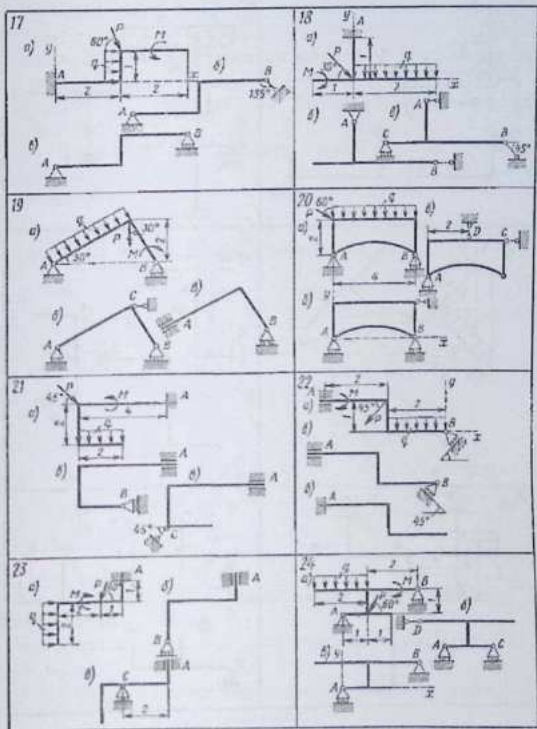
Variant raqami	P kN	M kN·m	q kN/m	Tekshiri- layotgan reaksiya	Variant raqami	P kN	M kN·m	q kN/m	Tekshiri- layotgan reaksiya
1	10	6	2	Y_A	16	12	6	2	M_A
2	20	5	4	M_A	17	20	4	3	Y_A
3	15	8	1	Y_B	18	14	4	2	X_A
4	5	2	1	Y_B	19	16	6	1	R_B
5	10	4	—	X_B	20	10	—	4	Y_A
6	6	2	1	M_A	21	20	10	2	M_A
7	2	4	2	X_A	22	6	6	1	Y_A
8	20	10	4	R_B	23	10	4	2	M_A
9	10	6	—	Y_A	24	4	3	1	Y_A
10	2	4	2	X_A	25	10	10	2	X_A
11	4	10	1	R_B	26	20	5	2	M_A
12	10	5	2	Y_A	27	10	6	1	X_A
13	20	12	2	Y_A	28	20	10	2	Y_A
14	15	4	3	Y_A	29	25	—	1	M_A
15	10	5	2	X_A	30	20	10	2	R_B



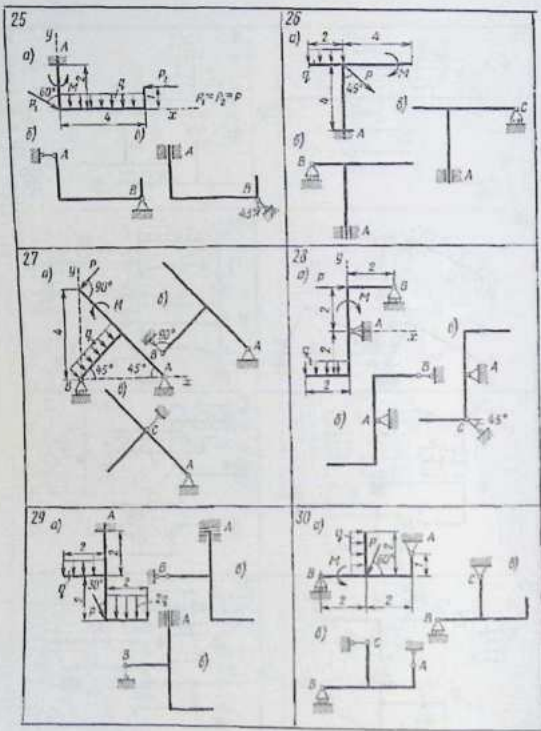
1-chizma.



2-chizma.



3-chizma.



4-চিত্রমা.

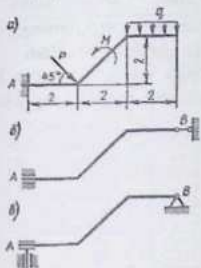
1-Topshiriqni bajarish namunasi.

Berilgan: brusni bog'lanish sxemalari (5- chizma a, \bar{a}, \bar{a}) ; $P = 5 \text{ kN}$; $M = 8 \text{ kNm}$, $q = 1,2 \text{ kN/m}$. Qotirmadagi M_A moment moduli eng kichik son qiymatga ega bo'la-digan sxemani aniqlang va shu sxemadagi boshqa reaktsiya kuchlari aniqlansin.

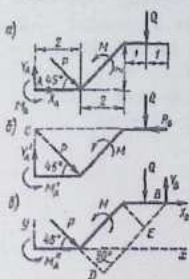
Yechish: 1. A nuqtadan AXY kordinata o'qlarini o'tkazamiz (6-chizma a, \bar{a}, \bar{a}).

2. Taqsimlangan kuchlarni $Q = 2 \cdot q = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN}$ kuch bilan almashtirib, bu kuchni shaklda ko'rsatamiz.

3. AX o'qi bilan 45° burchak tashkil qilgani uchun \vec{P} kuchni $P_x = P \cos 45^\circ$, $P_y = P \sin 45^\circ$ tashkil etuvchilarga almashtiramiz.



5-chizma.



6-chizma.

4. Bog'lanishlarning ta'sirlarini reaktsiya kuchlari bilan almashtiramiz:

\bar{a} - sxemada X_A, Y_A, M_A , \bar{a} - sxemada Y_A, M_A, R_B , \bar{a} - sxemada X_B, Y_B, M_B .

5. Har bir sxema uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{ix} = X_A + P \cos 45^\circ = 0$$

\bar{a} sxema uchun: $\sum F_{iy} = Y_A - P \sin 45^\circ - Q = 0$

$$\sum m_i(\vec{F}_i) = M_A - 2 \cdot P \sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0$$

$$\sum F_{ix} = P \cos 45^\circ - R_B = 0$$

$$\text{\textcircled{a}} \text{ sxema uchun: } \sum F_{iy} = Y'_A - P \sin 45^\circ - Q = 0$$

$$\sum m_c(\vec{F}_i) = M'_A + M - 5Q = 0$$

$$\sum F_{ix} = X_B + P \cos 45^\circ = 0$$

$$\text{\textcircled{b}} \text{ sxema uchun: } \sum F_{iy} = Y_B - Q - P \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum m_b(\vec{F}_i) = M'_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0$$

Chizmadan $BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,24 \text{ m}$.

6. Tuzilgan tenglamalarni echib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\text{\textcircled{a}} \text{ sxemada: } X_A = -3,54 \text{ kN}, \quad Y_A = 7,53 \text{ kN}, \quad M_A = 11,07 \text{ kNm}$$

$$\text{\textcircled{b}} \text{ sxemada: } Y'_A = 5,94 \text{ kN}, \quad R_B = 3,54 \text{ kN}, \quad M'_A = 4 \text{ kNm}$$

$$\text{\textcircled{c}} \text{ sxemada: } X_B = -3,54 \text{ kN}, \quad Y_B = 7,53 \text{ kN}, \quad M'_B = -31,6 \text{ kNm}$$

Demak, $\text{\textcircled{a}}$ sxemada \vec{X}_A vektor, $\text{\textcircled{b}}$ sxemada \vec{X}_B M'_A larning yo'nalishi ularning shaklda ko'rsatilgan yo'nalishlariga teskari bo'ladi.

Masaladan olingan echimlarga asosan brusni $\text{\textcircled{b}}$ sxema bo'yicha mahkamlan-ganda qotirmadagi M_A moment moduli eng kichik son qiymatga ega bo'ladi.

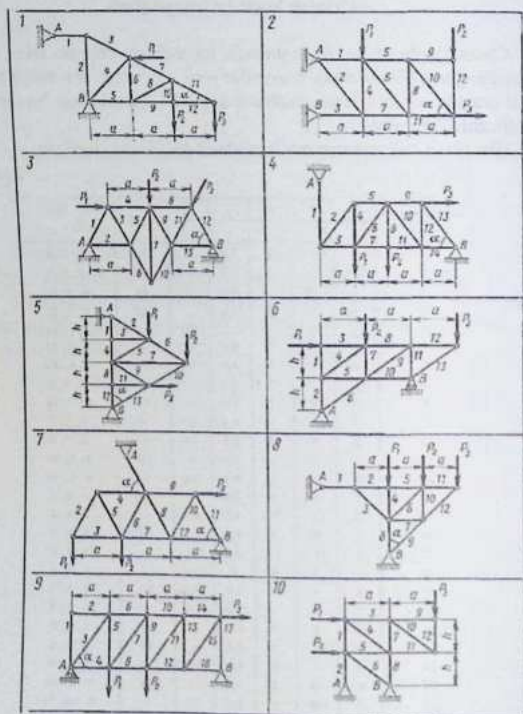
**Tekis fermaning tayanch reaksiyalarini va sterjenlaridagi
zo'riqish kuch-larini aniqlash**

Chizmalarda A va B nuqtalarda tayanchlari bo'lgan tekis ferma tasvirlangan (7-9 chizma). Sterjenlar soni $-k$, tugunlar soni $-n$ bo'lib, ular orasida $\kappa = 2n - 3$ mu-nosabat mavjud bo'lgani uchun, bu fermalar statik aniq fermalardir.

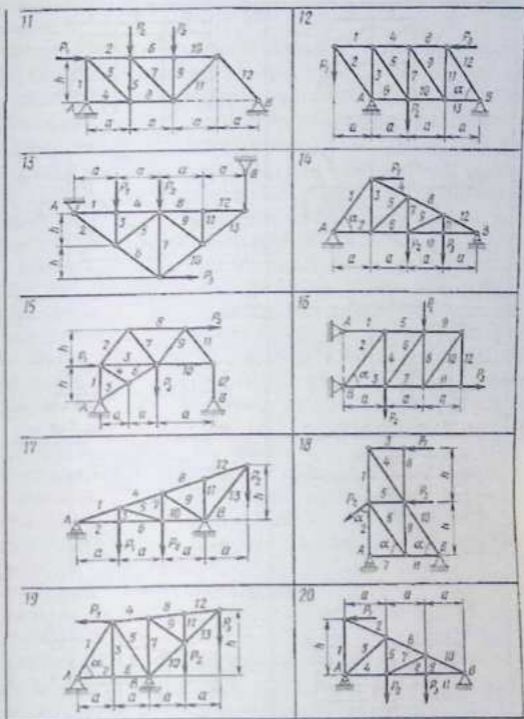
Hisoblash uchun zarur ma'lumotlar 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval

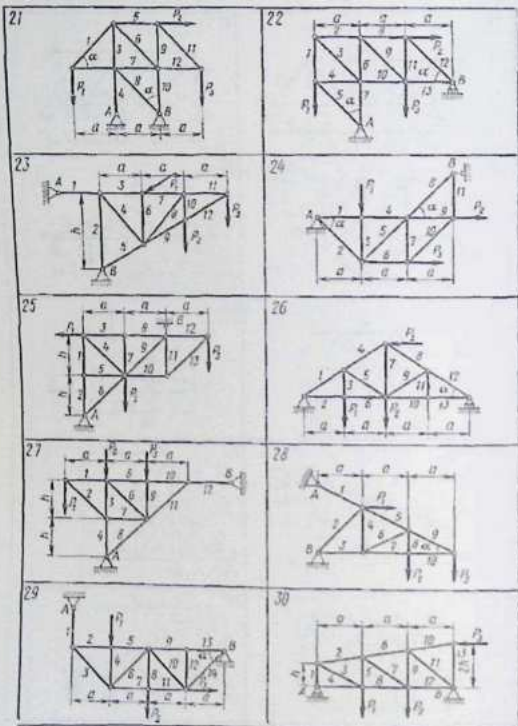
Variant raqami	P_1	P_2	P_3	a	h	α , grad	Sterjen raqami
	kV			m			
1	4	9	2	2,0	—	30	3, 8, 9
2	10	3	4	2,5	—	60	2, 5, 7
3	2	12	6	3,0	—	60	4, 5, 10
4	10	10	5	4,0	—	60	5, 6, 11
5	2	4	2	—	2,0	60	4, 5, 10
6	3	7	5	4,0	3,0	—	8, 9, 11
7	4	6	3	4,0	—	6,0	4, 6, 12
8	5	7	7	3,2	—	45	3, 4, 5
9	10	8	2	5,0	—	60	6, 7, 12
10	3	4	5	4,4	3,3	—	3, 5, 7
11	2	6	8	2,5	3,0	—	2, 7, 8
12	5	7	2	4,0	—	60	4, 5, 10
13	4	6	2	4,8	3,6	—	4, 5, 10
14	3	5	5	3,0	—	60	5, 6, 8
15	2	2	10	4,0	6,0	—	2, 6, 9
16	5	6	2	5,0	—	60	3, 5, 6
17	4	4	10	4,0	6,0	—	4, 7, 8
18	5	2	8	—	5,0	60	1, 4, 8
19	2	4	10	5,0	10,0	60	4, 5, 7
20	2	3	5	4,0	6,0	—	5, 6, 8
21	3	2	7	6,0	—	45	5, 8, 9
22	8	2	9	4,0	—	45	2, 6, 8
23	5	8	8	4,0	9,0	30	4, 7, 9
24	6	10	2	3,6	—	45	4, 5, 10
25	7	10	5	4,4	3,3	—	8, 10, 11
26	8	12	2	4,0	—	30	4, 5, 9
27	9	4	6	4,0	3,0	—	5, 9, 11
28	10	5	3	5,0	—	30	3, 5, 6
29	12	3	2	6,0	—	45	5, 6, 11
30	5	10	4	4,0	2,0	—	6, 7, 12



7-*chizma.*



8-chizma.



9-chizma.

2-Topshiriqni bajarish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Topshiriqni bajarish uchun A , B nuqtalardagi reaktsiya kuchlarini aniqlash kerak. Bu 1-Topshiriqni bajarish tartibiga asosan amalga oshiriladi.

Berilgan fermaning tayanch reaktsiyalari aniqlanganidan so'ng uning barcha sterjenlaridagi zo'riqish kuchlarini tugunni qirqish usuh asosida aniqlash kerak. Buning uchun har gal eng ko'pi bilan zo'riqish kuchlari noma'lum bo'lgan ikki sterjen tutashgan tugun qirqiladi va bu tugun muvozanati tekshiriladi. $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$ muvozanat tenglamalari tuzilib, ulardan bu ikki sterjen zo'riqish kuchi aniqlanadi. So'ng yangi tugun, eng ko'pi bilan tutashgan sterjenlarning ikkitasining zo'riqishi noma'lum bo'lgan tugun qirqiladi va bu sterjenlarning zo'riqish kuchlari topiladi.

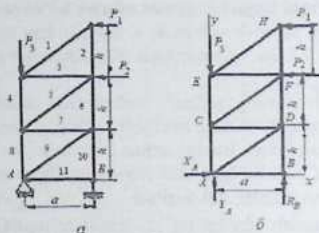
2-jadvalning oxirgi ustunida uchta sterjen raqami ko'rsatilgan bo'lib, bu sterjenlardagi zo'riqishlarni Ritter usuli yordamida aniqlash kerak. Buning uchun fermani zo'riqishi aniqlanishi kerak bo'lgan sterjen va boshqa ikki sterjen, hammasi bo'lib uch sterjen orqali ikki qismga ajratamiz. Kuchlar kam qatnashgan tomonning muvozanatini tekshiramiz. Ritter nuqtasiga nisbatan moment tenglamasi yoki o'qlarga nisbatan proektsiya tenglamasini tuzib har bir sterjen zo'riqishini har bir tenglamadan, boshqa sterjenlar zo'riqishiga bog'liqsiz holda topamiz.

2-jadvalning oxirgi ustunida raqami ko'rsatilgan uchta sterjen zo'riqishini Ritter usulida aniqlab, topilgan zo'riqishlarni tugun qirqish usuli bilan topilgan zo'riqish kuchlariga teng ekanligi ishonch hosil qilamiz, ya'ni har ikki usulda bir xil natijaga ega bo'lamiz.

2 – Topshiriqni bajarish namunasi

Berilgan: fermaning sxemasi (10-chizma, a); $R_1 = 2 \text{ kN}$, $R_2 = 4 \text{ kN}$, $R_3 = 6 \text{ kN}$; $a = 4,0 \text{ m}$; $h = 3,0 \text{ m}$.

Yechish. 1. *Tayanch reaktsiyalarini aniqlash.* Fermaga qo'yilgan tashqi kuchlarni ko'rsatamiz: aktiv (berilayotgan) $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ kuchlar hamda A va B tayanchlarining reaksiyalari (10-chizma, b).



10-chizma.

A tayanch reaksiyasining ta'sir chizig'i noma'lum bo'lgani uchun uning koor-dinata o'qlari bo'yicha tashkil etuvchilari \bar{X}_A, \bar{Y}_A ni aniqlaymiz.

B tayanch sterjendan iborat; uning reaksiyasi ta'sir chizig'i ma'lum — u ta'yanch sterjeni bo'ylab yo'nalgan.

Fermaga qo'yilgan kuchlarning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + R_B \cdot a = 0, \\ \sum X_i = 0; \quad X_A - P_1 - P_2 = 0, \\ \sum Y_i = 0; \quad Y_A + R_B - P_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Bu tenglamalardan $R_B = -10,5 \text{ kN}$; $Y_A = 6,0 \text{ kN}$; $X_A = 16,5 \text{ kN}$.

2. *Ferma sterjenlaridagi kuchlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash.*

i nomerli sterjendagi kuchni S_i bilan, sterjenning tugunga qo'yilgan reaksiya-sini esa S_{iM} bilan belgilaymiz. M va N tugunlarni birlashtiruvchi sterjen uchun $S_{iM} = -S_{iN}$, lekin $S_{i,MN} = S_{i,NM} = S_i$.

Har bir tugun uchun ikkita muvozanat tenglamasini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0 \quad (2)$$

Bu tenglamalardan tayanch reaksiyalarini ham aniqlash mumkinligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, tayanch reaksiyalarini oldindan aniqlash shart emas. Haqiqatan ham, tugunlar 7 ta (A, B, C, D, E, F, H), demak, tenglamalar 14 ta, noma'lumlar ham 14 ta, ya'ni sterjenlardagi 11 ta kuch va tayanch reaksiyalarining 3 ta tashkil etuvchisi mavjud. Avval topilgan tayanch reaksiyalaridan echimni tekshi-rishda foydalanish mumkin.

H tugundan boshlaymiz:

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$-P_1 - S_{1H} \cos \alpha = 0;$$

$$-S_{1H} \sin \alpha - S_{2H} = 0.$$

bundan $S_{1H} = S_1 = -2,5$ kN ni aniqlaymiz, demak sterjen siqilgan va $S_{2H} = S_2 = 1,5$ kN.

E tugun uchun

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$S_{4L} \cos \alpha + S_{3L} = 0;$$

$$S_{4L} \sin \alpha - P_3 - S_{4E} = 0;$$

$$\text{bundan } S_{3E} = S_3 = 2,0 \text{ kN, } S_{4E} = S_4 = -7,5$$

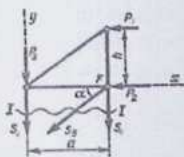
kN ni topamiz, demak 4-sterjen siqilgan.

So'ngra boshqa tugunlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

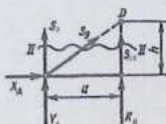
Sterjenlardagi kuchlar jadvalini (3-jadval) keltiramiz.

3-jadval

Sterjen raqami	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Kuchning ishorasi	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	
Kuch, kN	2,5	1,5	2,0	7,5	7,5	6,0	6,0	12,0	7,5	10,5	0



11-chizma.



12-chizma.

3. *Ferma sterjenlaridagi kuchlarni kesish usuli (Ritter usuli) bilan aniqlash.* 4, 5 va 8 sterjenlardagi kuchlarni aniqlash talab qilinadi.

Ritter usuliga binoan har bir kuch alohida tenglamadan topilishi va u boshqa

sterjenlardagi kuchlar orqali ifodalanmasligi kerak.

S_4 va S_5 kuchlarni aniqlash uchun fermanni I-I kesim bilan ikkiga bo'lingan, deb faraz qilamiz (11-chizma)

Fermaning yuqori qismiga qo'yilgan kuchlarning muvozanatini ko'rib chiqamiz. Olib tashlangan quyi qismining yuqori qismiga ta'siri S_4 , S_5 va S_6 kuchlar bi-lan amalga oshiriladi.

S_4 ni aniqlash uchun S_5 va S_6 kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishuvchi F nuq-taga (sterjen 4 uchun Ritter nuqtasi) nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz:

$$\sum M_F(\vec{Q}_i) = 0; \quad S_4 \cdot a + P_3 \cdot a + P_1 \cdot h = 0$$

Bundan $S_4 = -7,5$ kN.

S_5 ni aniqlash uchun, S_4 va S_6 zo'riqishlarni tenglamaga kiritmaslik maqsadida, kuchlarni x o'qiga proeksiyalaymiz:

$$\sum X_i = 0; \quad -P_1 - P_3 - S_5 \cos \alpha = 0$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz: $S_5 = -7,5$ kN.

S_8 kuchni aniqlash uchun II—II kesimni o'tkazamiz (bu kesimni 8, 7 va 6 ster-jenlar orqali o'tkazish ham mumkin edi). Fermaning quyi qismiga qo'yilgan kuch-larning muvozanatini tekshirib chiqamiz (12-chizma).

D tugun 8 sterjen uchun Ritter nuqtasi bo'lib, bu nuqtada S_9 va S_{10} kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishadi va shuning uchun mazkur kuchlar quyidagi tenglamada ishtirok etmaydi:

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = 0; \quad -S_8 \cdot a - Y_A \cdot a + X_A \cdot h = 0.$$

Bundan $S_8 = -12,0$ kN ni topamiz.

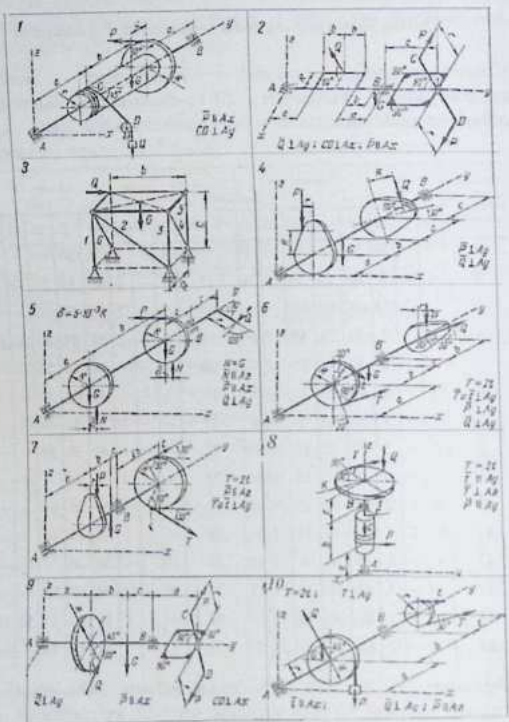
Qattiq jismning tayanch reaksiyalarini aniqlash

Konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. Konstruksiyaning sxema-lari 13-15-chizmalarda ko'rsatilgan. Hisoblash uchun kerakli ma'lumotlar 4-jad-valda keltirilgan.

4-jadval

Variant raqami (13-15- chizmalar)	Kuchlar, kN			O'lchamlar, sm					Variant raqami (13-15- chizmalar)	Kuchlar, kN			O'lchamlar, sm				
	Q	T	G	a	b	c	R	r		Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	—	20	20	30	10	15	5	16	4	—	2	50	30	—	—	—
2	4	—	2	20	10	30	10	10	17	2	—	1	15	10	20	20	5
3	20	—	18	400	400	450	—	—	18	6	—	2	60	40	60	—	—
4	3	—	2	30	20	40	15	10	19	—	8	2	20	30	40	20	15
5	5	—	3	30	40	20	20	10	20	4	—	—	60	60	20	—	—
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	—	—	40	60	30	—	—
7	—	3	1	30	10	5	18	6	22	—	—	5	20	50	30	—	—
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	—	—	4	40	30	50	—	—
9	5	—	3	20	15	10	30	40	24	5	—	2	—	—	—	—	—
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	—	—	3	50	50	60	—	—
11	—	2	1	20	30	15	15	10	26	—	—	1	20	60	40	—	—
12	4	—	1	25	20	8	15	10	27	10	—	—	50	30	50	—	—
13	10	—	5	40	30	20	25	15	28	35	—	32	400	200	200	—	—
14	—	2	1	30	90	20	30	10	29	—	4	3	15	20	15	15	10
15	3	—	2	60	20	40	20	5	30	5	—	—	40	40	10	—	—

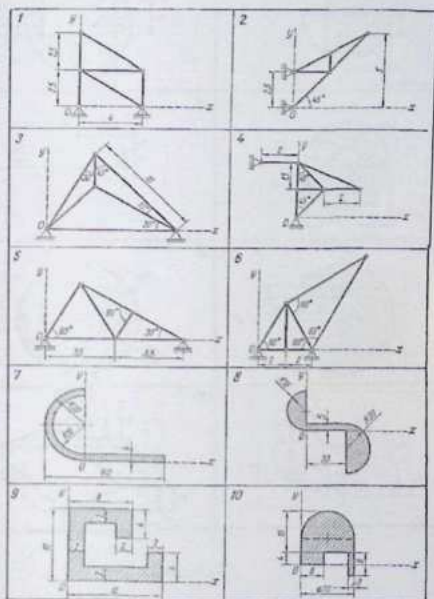
Eslatmalar: 1) 16, 18, 22—26-variantlarda oshiq-moshiqlar romning AB to-moni bo'ylab siljishiga qarshilik ko'rsatmaydi, deb hisoblansin. 2) 20 va 21 -variantlarda o'zaro tegib turgan sirtlar mutlaq silliq, deb hisoblansin.



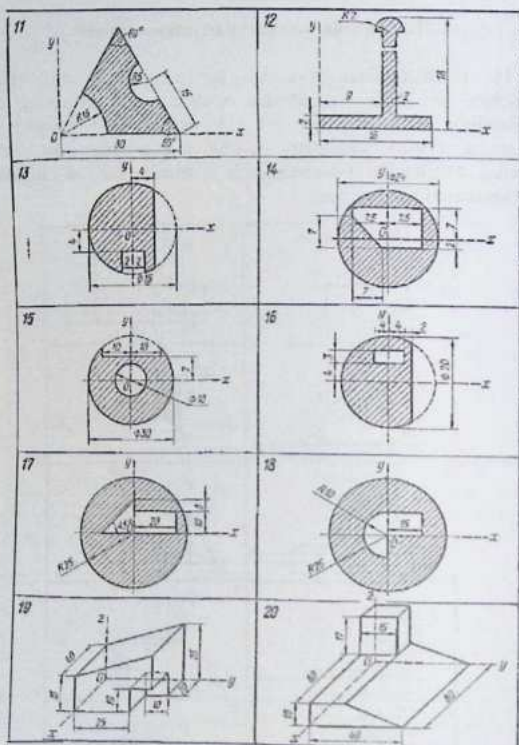
13-chizma.

Jism og'irlik markazi vaziyatini aniqlash.

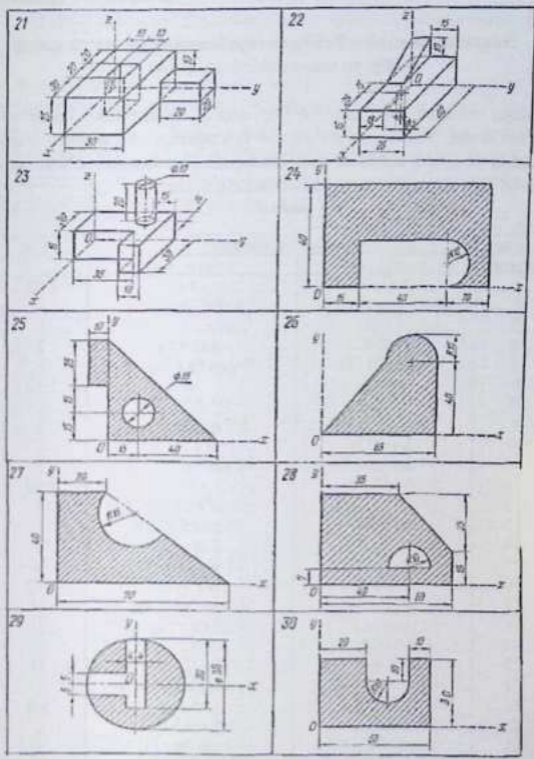
16—18-chizmalarda ko'rsatilgan bir xil taqsimlangan og'irlikdagi ingichka bir jinsli sterjenlardan tuzilgan tekis fermaning (1—6 variantlar), tekis shaklning (7—18 va 24—30-variantlar) yoki hajmning (19-23 variantlar) og'irlik markazining koordinatalari topilsin. O'lchamlar 1-6-variantlarda metrlarda, 7—30-variantlarda esa santimetrlarda berilgan.



16-chizma.



17-chizma.



18-chizma.

2-ilova 1-Topshiriq.

Nuqta harakatining berilgan tenglamalariga ko'ra uning tezligi va tez-anishini aniqlash

Nuqta harakati berilgan bo'lib, uning kinematik faktorlarini aniqlash lozim. Traektoriyasini va $t = t_1$ vaqtidagi M_1 nuqtasi tezligi, tezlanishi va egrilik radiusini aniqlash kerak. Topshiriqni echish uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar 1 - jadvalda keltirilgan.

1-jadval

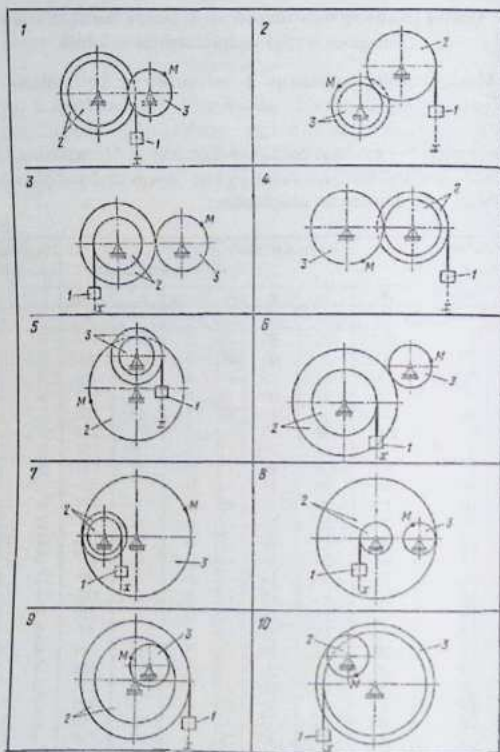
Variant raqami	Harakat tenglamasi		t_1, s
	$x=x(t), sm$	$y=y(t), sm$	
1	$-2t^2+3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3)+2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3)-3$	1
11	$-4t^2-1$	$-3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$-5 \cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6)-5$	$-7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6)-2$	$6 \cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	1/4
23	$3-3t^2+1$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4 \cos(\pi t/3)-1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6)+2$	$-8 \sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3)-2$	$-2 \sin(\pi t^2/3)+3$	1

Qattiq jismning ilgarilanma va aylanma harakatlarida uning nuqtasi tezligi va tezlanishini aniqlash

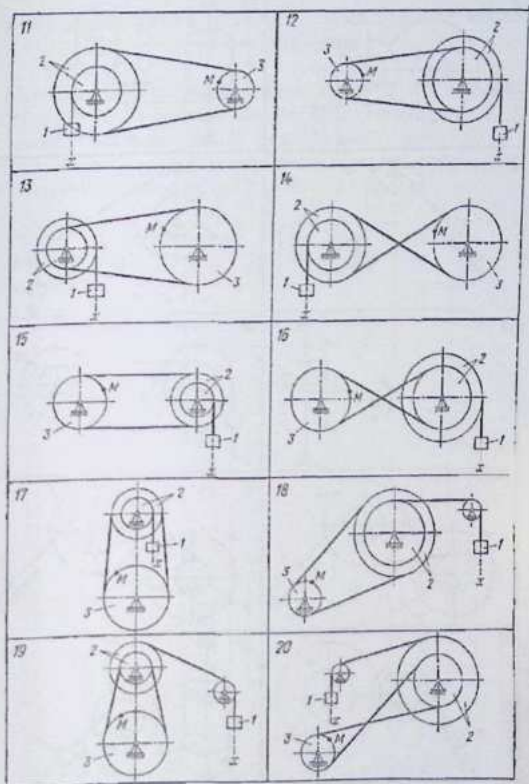
Mexanizmning sxemalari 1-3-chizmalarda ko'rsatilgan, kerakli ma'lumotlar esa 2-jadvalda keltirilgan. 1- yukning harakat tenglamasi $x=c_2t^2 + c_1t + c_0$ ko'ri-rishga ega. Yukning harakat tenglamasi, shuningdek $t = t_1$ vaqt onida yukning hamda M nuqtaning tezlik va tezlanishlari topilsin. c_0 , c_1 va c_2 koeffitsientlar 2-jadvalda berilgan boshlang'ich shartlardan aniqlanadi.

2-jadval

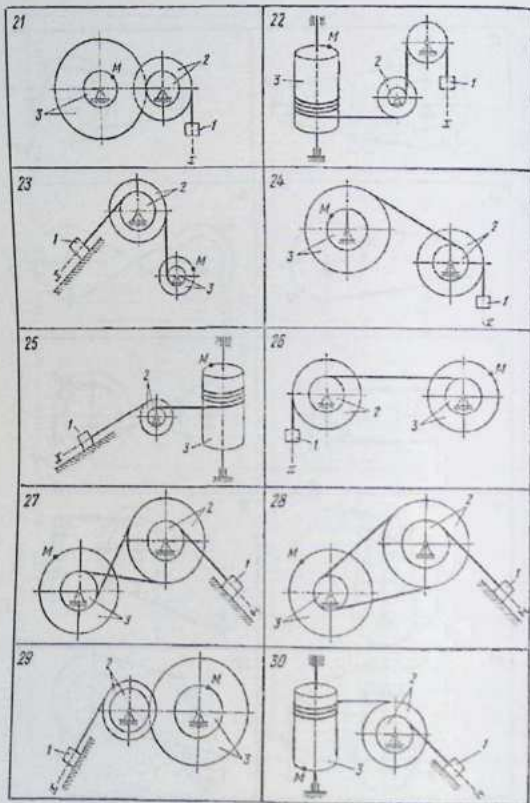
Variant raqami	Radiuslar, sm				1- yuk tezligi va koordinatalari			Hisob uchun vac onlari s.	
	R_2	r_2	R_1	r_1	v_{0x} , sm	v_{0y}	x_0 , sm	t_2	t_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	60	45	36	-	2	122	173	3	2
2	80	-	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	-	8	6	40	4	2
4	58	45	60	-	4	4	172	4	3
5	80	-	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	-	7	16	215	4	2
7	45	35	105	-	8	5	124	4	3
8	35	10	10	-	6	2	111	3	2
9	40	30	15	-	10	7	48	2	1
10	15	-	40	35	5	3	129	4	?
11	40	25	20	-	9	8	65	2	
12	20	15	10	-	5	10	179	3	
13	30	20	40	-	7	0	557	5	?
14	15	10	15	-	6	3	80	2	1
15	15	10	15	-	5	2	189	4	2
16	20	15	15	-	4	6	220	4	3
17	15	10	20	-	8	4	44	2	1
18	20	15	10	-	3	12	211	4	1
19	15	10	20	-	5	10	505	5	3
20	25	15	10	-	10	8	277	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	-	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	194	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	-	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	862	4	2
27	40	18	40	18	5	10	193	2	1
28	40	20	40	15	8	5	347	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	-	10	7	128	2	1



1-chizma.



2-chizma.



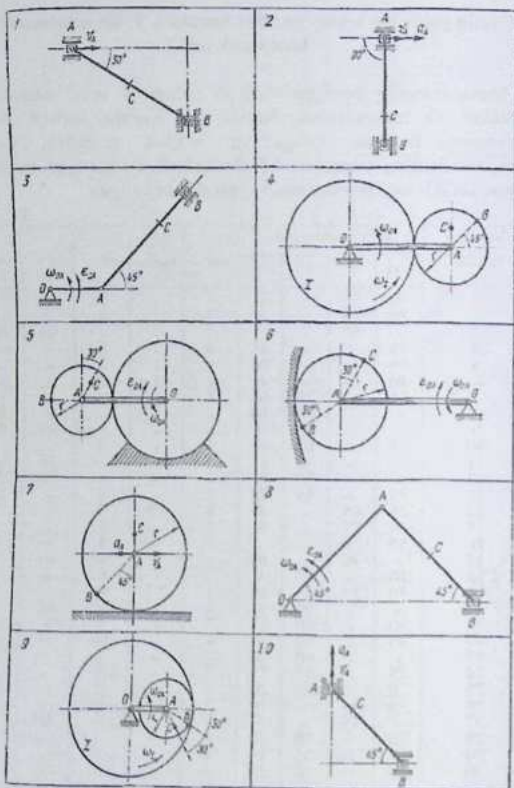
3-*chizma.*

Qattiq jismning tekis - parallel harakati. Tekis mexanizmnining kinematik tahlili

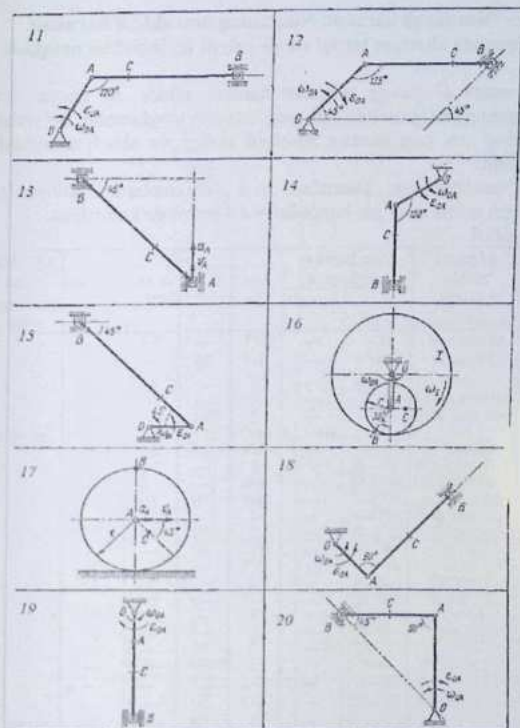
Mexanizmnining berilgan vaziyati uchun B va C nuqtalarning tezliklari va tezla-nishlari, hamda shu nuqtalar tegishli bo'lgan zvenoning burchak tezligi va burchak tezlanishi topilsin. Mexanizmlarning sxemalari 4-5 chizmalarda ko'rsatilgan, hiso-blash uchun kerakli ma'lumotlar esa 3 - jadvalda keltirilgan.

3 - jadval

Variant raqami	O'lchamlar, sm				ω_{OA} rad/c	ω_1 rad/c	ε_{OA} rad/c ²	v_B sm/s	a_B sm/s ²
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2.5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1.2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-



4-*chizma.*



5-chizma.

2-ilova 4-Topshiriq.

**Murakkab harakat. Nuqtaning murakkab harakati.
Nuqtaning absolyut tezligi va ab-solyut tezlanishini aniqlash.**

M nuqta *D* jismga nisbatan harakat qiladi. *M* nuqta nisbiy harakatining va *D* jism harakati-ning berilgan tenglamalari bo'yicha *M* nuqtaning $t=t_1$ vaqt onidagi absolyut tezligi va absolyut tezlanishi aniqlansin.

Mexanizmlarning sxemalari 6-8 chizmalarda ko'rsatilgan, hisoblash uchun zarur ma'lumot-lar esa 4-jadvalda keltirilgan.

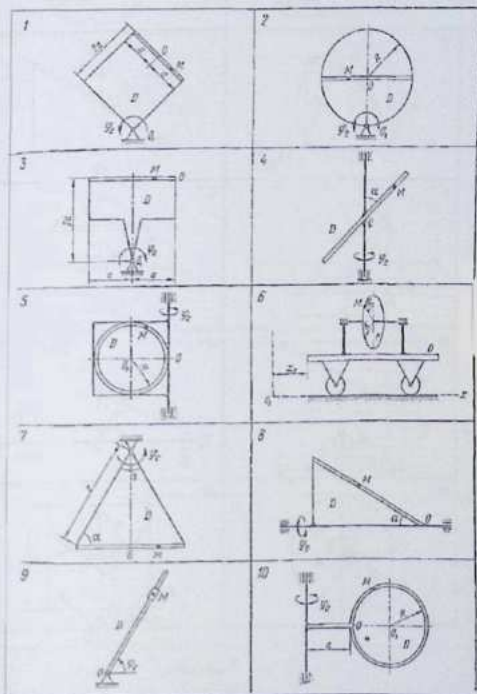
4-jadval

Var. №	<i>M</i> nuqta nisbiy harakat tenglamasi	Jism harakat tenglamasi		t_1, s	R, sm	a, sm	$\alpha, grad$	Qo'shimcha ma'lumot-lar
		φ_z $\varphi_z(t)$	$x-x_0(t)$					
1	$18 \sin(\pi t/4)$	$2t^2 - t^4$	—	2/3	—	25	—	$\omega = 0.15$
2	$20 \sin \pi t$	$0.4t^2 +$	—	5/3	20	—	—	
3	$6t^3$	$2t + 0.5t^2$	—	2	—	30	—	
4	$10 \sin(\pi t/6)$	$0.6t^2$	—	1	—	—	60	
5	$40\pi \cos(\pi t/6)$	$3t -$	—	2	30	—	—	
6	—	—	$3t + 0.27$	10/3	15	—	—	
7	$20 \cos 2 \pi t$	$0.5t^2$	—	3/8	—	40	60	
8	$6(t + 0.5t^2)$	$t^2 - 5t$	—	2	—	—	30	
9	$10(1 + \sin 2 \pi t)$	$4t + 1.6t^2$	—	1/8	—	—	—	
10	$20 \pi \cos \pi t$	$1.2t - t^2$	—	4/3	20	20	—	
11	$25 \sin \pi t$	$2t^2 -$	—	4	—	25	—	
12	$15 \pi^{1/3}$	$5t - 4t^2$	—	2	30	30	—	
13	$120 \pi t^2$	$8t^2 - 3t$	—	1/3	40	—	—	
14	$3 + 14 \sin \pi t$	$4t - 2t^2$	—	2/3	—	—	30	
15	$5 \cdot (t^2 + t)$	$0.2t^3 + t$	—	2	—	60	45	
16	$20 \sin \pi t$	$t - 0.5t^2$	—	1/3	—	20	—	
17	$8t^3 + 2t$	$0.5t^2$	—	1	—	40	—	
18	$10t + t^3$	$8t - t^2$	—	2	—	—	60	
19	$6t + t^3$	$t + 3t^2$	—	2	40	—	—	
20	$30 \pi \cos \pi t$	$6t + t^2$	—	3	60	—	—	
21	$25 \pi (t + t^2)$	$2t - 4t^2$	—	1/2	25	—	—	
22	$10 \pi \sin \pi t$	$4t - 0.2$	—	2/3	30	—	—	
23	$6 \pi t^2$	—	—	1	18	—	—	
24	$75\pi(0.1t)$	$2t - 0.3t^2$	—	1	30	—	—	
25	$15 \sin(\pi t/3)$	$10t -$	—	5	—	—	—	
26	$8 \cos(\pi t/2)$	$-2 \pi t^2$	—	3/2	—	—	45	
27	—	—	$50 t^2$	2	75	—	—	
28	$2.5 \pi t^2$	$2t^3 -$	—	2	40	—	—	

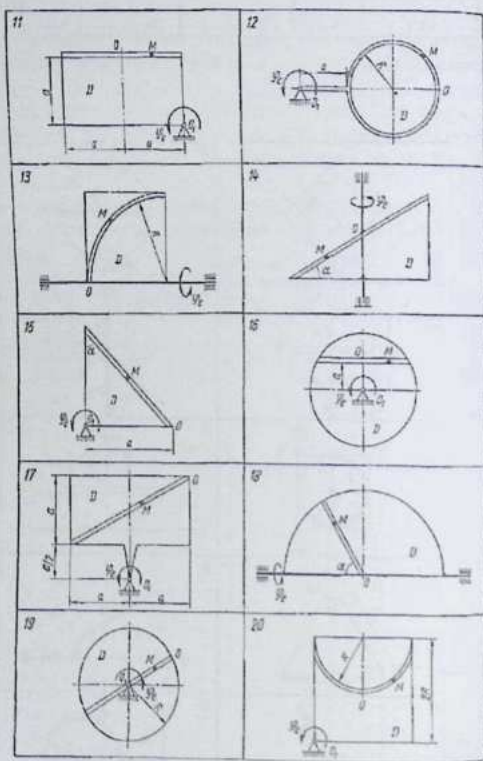
$\omega = \pi^2/6,$
 $O_1O_2 = O_2A$

α

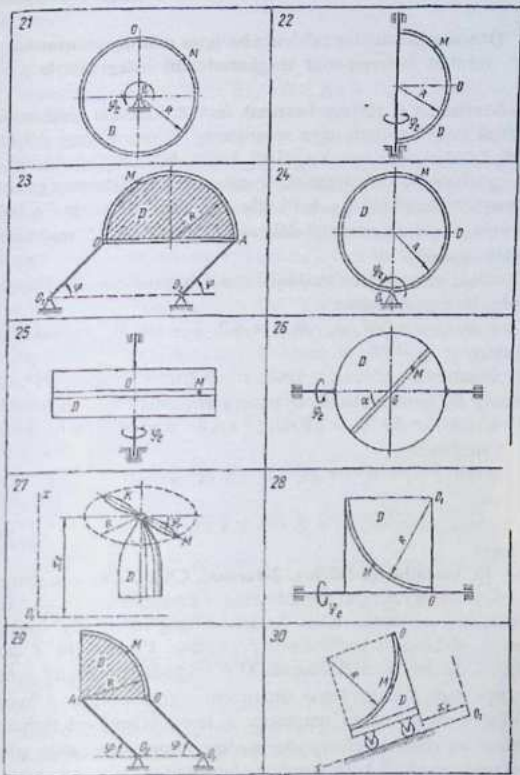
29	$5 \pi t^3/4$	—	—	2	30	—	—	$\varphi_2 = \pi t^3/8;$ $O_1 O_2 = 4t$
30	$4 \pi t^2$	—	$t^3 + 4t$	2	48	—	—	



6-*chizma.*



7-chizma.



8-chizma.

O'zgarmas kuchlar ta'sirida bo'lgan moddiy nuqtaning xarakat differensial tenglamalarini integrallash

1—5-variantlar (1-chizma, 1-sxema). Jism A nuqtadan gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi qiya tekislikning l uzunlikdagi AB qismi bo'ylab τ s. davomida harakat qiladi. Uning boshlang'ich tezligi v_A . Jismning tekislik bo'ylab sirpanish ish-qalanish koeffitsienti f ga teng.

B nuqtada jism tekislikni v_C tezlik bilan tark etadi va havoda T s. bo'lib, gorizontga β burchak ostida qiyalangan BD tekislikning C nuqtasiga v_C tezlik bilan tushadi.

Masalani echishda jism moddiy nuqta deb qabul qilinsin. Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

1-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 0$, $f = 0,2$; $l = 10$ m, $\beta = 60^\circ$, τ va h aniqlansin.

2-variant. : $\alpha = 15^\circ$, $v_A = 2$ m/s, $f = 0,2$; $h = 4$ m, $\beta = 45^\circ$. l va nuqtaning BC qismidagi traektoriyasining tenglamasi tuzilsin.

3-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 2,5$ m/s; $f = 0$, $l = 8$ m, $d = 10$ m, $\beta = 60^\circ$. v_C va τ aniqlansin.

4-variant. : $v_A = 0$, $\tau = 2$ s, $l = 9,8$ m; $\beta = 60^\circ$, $f = 0$. α va T aniqlansin.

5-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 0$, $l = 9,8$ m; $\tau = 3$ s, $\beta = 45^\circ$. f va v_C aniqlansin.

6 – 10 variantlar (1-chizma, 2-sxema). Chang'ichi gorizontga α burchak ostida qiyalangan trampilning l uzunlikdagi AB qismining A nuqtasiga v_A tezlik bilan keladi. Chang'ining AB qismidagi sirpanish ish-qalanish koeffitsienti f ga teng. Chang'ichi A dan B gacha τ s. davomida harakatlanadi. U B nuqtada trampinni v_B tezlik bilan tark etadi. T s. dan keyin chang'ichi gorizont bilan β burchak tashkil qiluvchi tog'ning C nuqtasiga v_C tezlik bilan kelib tushadi.

Masalani echishda chang'ichi moddiy nuqta, deb qabul qilinsin va havoning qarshilik kuchi hisobga olinmasin.

6-variant. : $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ s; $h = 40$ m; $\beta = 30^\circ$. l va v_C aniqlansin.

7-variant. : $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ m/s; $l = 5$ m; $\beta = 45^\circ$. v_B va T aniqlansin.

8-variant. : $v_A = 21$ m/s; $f = 0$; $\tau = 0,3$ s; $v_B = 20$ m/s; $\beta = 60^\circ$. α va d aniqlan-sin.

9-variant. : $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ s; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ m; $\beta = 45^\circ$. v_B va v_A aniqlansin.

10-variant. : $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$. $v_A = 12$ m/s; $d = 50$ m; $\beta = 60^\circ$. τ va chang'ichining BC qismidagi traektoriyasining tenglamasi aniqlansin.

11—15-variantlar (1-chizma, 3-sxema). Motostikl A nuqtada v_A tezlikka ega bo'lib, gorizontal bilan α burchak tashkil qiluvchi l uzunlikdagi AB qism bo'ylab τ s. davomida ko'tariladi. Motostikl butun AB qism davomida doimiy P kuch ta'siri-rida harakatlangan holda B nuqtaga kelib v_B tezlikka ega bo'ladi va T s. davomida havoda bo'lib, eni d bo'lgan jarlikdan uchib o'tadi hamda C nuqtaga v_C tezlik bilan kelib tushadi. Motostiklning motostiklchi bilan birgalikdagi massasi m .

Masalani echishda motostiklchi motostiklchi bilan birga moddiy nuqta, deb hisoblan-sin va harakatga qarshilik kuchlari inobatga olinmasin.

11-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $P \neq 0$, $l = 40$ m, $v_A = 0$, $v_B = 4,5$ m/s; $d = 3$ m va h aniqlansin.

12-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $P = 0$, $l = 40$ m, $v_B = 4,5$ m/s; $h = 1,5$ m. v_A va d aniqlan-sin.

13-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $m = 400$ kg, $v_A = 0$, $\tau = 20$ s, $d = 3$ m, $h = 1,5$ m. P va l aniqlansin.

14-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $m = 400$ kg, $P = 2,2$ kN, $v_A = 0$, $l = 40$ m, $d = 5$ m. v_B va v_C aniqlansin.

15-variant. : $\alpha = 30^\circ$, $v_A = 0$, $P = 2$ kN, $l = 50$ m, $h = 2$ m, $d = 4$ m. T va m aniqlansin.

16—20-variantlar (1-chizma, 4-sxema). Tosh nishablikning gorizontal bilan α

burchak tashkil qiluvchi va uzunligi l bo'lgan AB qismi bo'ylab τ s. davomida sir-panadi. Uning boshlang'ich tezligi v_A . Toshning nishablik bo'ylab sirpanish ishqala-nish koeffitsienti f teng. Tosh B nuqtada v_B tezlikka ega bo'lib, T s. dan keyin C nuqtada vertikal joylashgan himoya devoriga borib uriladi. Masalani echishda tosh moddiy nuqta, deb qabul qilinsin. Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

16-variant. : $\alpha=30^\circ$; $v_A=1$ m/s; $l=3$ m; $f=0,2$; $d=2,5$ m. h va T aniqlansin.

17-variant. : $\alpha=45^\circ$; $l=6$ m, $v_B=2v_A$, $\tau=1$ s, $h=6$ m. d va f aniqlansin.

18-variant. : $\alpha=30^\circ$; $l=2$ m, $v_A=0$, $f=0,1$, $d=3$ m. h va τ aniqlansin.

19-variant. : $\alpha=15^\circ$; $l=3$ m, $v_B=3$ m/s, $f \neq 0$, $\tau=1,5$ s; $d=2$ m. v_A va h aniqlansin.

20-variant. : $\alpha=45^\circ$, $v_A=0$, $f=0,3$; $d=2$ m, $h=4$ m. l va τ aniqlansin.

21—25-variantlar (1-chizma, 5-sxema). Jism gorizont bilan α burchak tashkil qi-luvchi qiya tekislikning l uzunlikdagi AB qismi bo'ylab A nuqtadan harakat qiladi. Uning boshlang'ich tezligi v_A . Sirpanish ishqalanish koeflitsienti f ga teng. τ s. dan keyin jism B nuqtada v_B tezlik bilan qiya tekislikni tark etadi va gorizont tekislikning C nuqtasiga v_C tezlik bilan tushadi. Bunda u havoda T s. vaqt mobaynida bo'ladi.

Masalani echishda jism moddiy nuqta, deb qabul qilinsin va havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

21-variant. : $\alpha=30^\circ$, $f=0,1$; $v_A=1$ m/s, $\tau=1,5$ s; $h=10$ m, v_B va d aniqlansin.

22-variant. : $v_A=0$, $\alpha=45^\circ$, $l=10$ m, $\tau=2$ s. f va BC qismda traektoriyaning tenglamasi aniqlansin.

23-variant. : $f=0$, $v_A=0$, $l=9,81$ m; $\tau=2$ s, $h=20$ m. α va T aniqlansin.

24-variant. : $v_A=0$, $\alpha=30^\circ$, $f=0,2$; $l=10$ m, $d=12$ m. τ va h aniqlansin.

25-variant. : $v_A=0$, $\alpha=30^\circ$, $f=0,2$; $l=6$ m, $h=4,5$ m. τ va v_C aniqlansin.

26—30-variantlar (1-chizma, 6-sxema). Jism A nuqtada v_A tezlikka ega bo'lib, l uzunlikdagi gorizont AB qism bo'ylab τ s. davomida harakatlanadi. Jismning tekislik bo'ylab sirpanish ishqalanish koeflitsienti f ga teng. Jism B nuqtada v_B tezlik bilan tekislikni tark etadi va havoda T s. vaqt davomida bo'lib, C nuqtaga v_C tezlik bilan tushadi. Masalani echishda jism moddiy nuqta, deb qabul qilinsin. Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

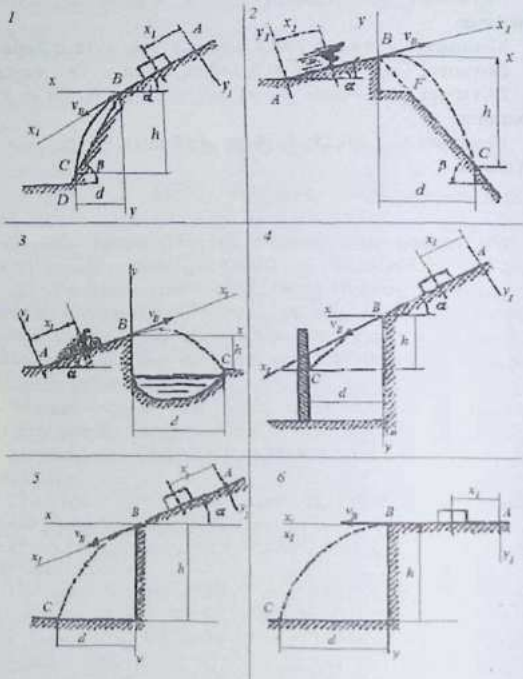
26-variant. : $v_A = 7 \text{ m/s}$, $f = 0,2$; $l = 8 \text{ m}$, $h = 20 \text{ m}$. d va v_C aniqlansin.

27-variant. : $v_A = 4 \text{ m/s}$, $f = 0,1$; $\tau = 2 \text{ s}$, $d = 2 \text{ m}$. v_B va h aniqlansin.

28-variant. : $v_B = 3 \text{ m/s}$, $f = 0,3$; $l = 3 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$. v_A va T aniqlansin.

29-variant. : $v_A = 3 \text{ m/s}$. $v_B = 1 \text{ m/s}$, $l = 2,5 \text{ m}$; $h = 20 \text{ m}$. f va d aniqlansin.

30-variant. : $f = 0,25$; $l = 4 \text{ m}$; $d = 3 \text{ m}$; $h = 5 \text{ m}$. v_A va τ aniqlansin.



1-*chizma.*

Moddiy nuqta tebranma harakatini taxlil qilish

1-5-variantlar (2-chizma). m_D massali D yukning (2 va 4-variantlar) yoki massalari m_D va m_E bo'lgan D va E yuklar sistemasining (1, 3, 5-variantlar) x o'qi bo'yicha harakat tenglamasi topilsin. Sanoq boshi D yukning yoki mos ravishda D va E yuklar sistemasining tinch vaziyatida (prujinalarning statik deformatsiyasi holatida) olinsin. Yuklarni birlashtirib turuvchi sterjen og'irliksiz va deformatsiyalanmaydi deb hisoblansin.

1-variant. D yuk ($m_D = 2$ kg) har birining bikirlik koeffitsienti $c = 3$ N/sm bo'lgan ikkita bir xil parallel prujinaga osilgan AC taxtachaga mahkamlangan, D yuk mahkamlangan nuqta prujinalarning o'qlaridan teng masofalarda joylashgan. Biror vaqt onida D yukka E yuk ($m_E = 1$ kg) osib qo'yiladi. Yuklar sistemasining harakatiga qarshilik kuchi tezlikka proporsional: $R = 12v$ (N), bu erda v — tezlik (m/s). Mutlaq bikir AB taxtachaning va unga mahkamlangan dempfer qismining massasi hisobga olinmasin.

2-variant. D ($m_D = 1$ kg) va E ($m_E = 2$ kg) yuklarni birlashtirib turuvchi sterjen kesib yuborilgan ondan boshlab B nuqta (ketma-ket ulangan prujinalarning yuqori uchi) $\xi = 1,5 \sin 18 t$ (sm) qonun bo'yicha harakat qila boshlaydi (ξ o'q vertikal bo'ylab pastga yo'nalgan). Prujinalarning bikirliklari $c_1 = 12$ N/sm, $c_2 = 36$ N/sm.

3-variant. D yuk ($m_D = 0,8$ kg) AB taxtachaning F nuqtasiga mahkamlangan va bikirlik koeffitsienti $c_1 = 10$ N/sm bo'lgan prujinaga osilgan. Taxtacha bikirlik koeffitsientlari $c_2 = 4$ N/sm, $c_3 = 6$ N/sm bo'lgan ikkita parallel prujinaga osib qo'yilgan. F nuqta bu prujinalarning o'qlaridan a va b masofalarda joylashgan: $a/b = c_1/c_2$. Biror vaqt onida D yukka E yuk ($m_E = 1,2$ kg) osib qo'yiladi. Xuddi shu vaqt onida yuklar sistemasiga pastga yo'nalgan $v_0 = 0,2$ m/s tezlik beriladi. Mutlaq bikir AB taxtachaning massasi hisobga olinmasin.

4-variant. Ikkita bir xil parallel prujinaning D ($m_D = 0,5$ kg) va E ($m_E = 1,5$ kg) yuklar ta'siridagi statik deformatsiyasi $f_{st} = 4$ sm. Yuklar prujinalarga mutlaq bikir AB taxtacha yordamida osilgan. Biror vaqt onida yuklarni birlashtirib turuvchi sterjen kesib yuboriladi. D yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional $R = 6v$ (N), bu erda v — tezlik (m/s). Taxtachaning va unga mahkamlangan dempfer qismining massasi hisobga olinmasin.

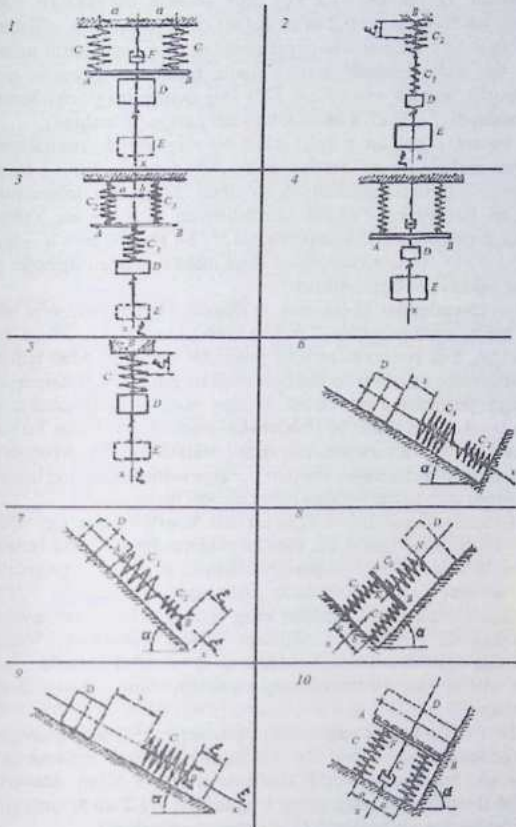
5-variant. Bikirlik koeffitsienti $c=4$ N/sm bo'lgan prujinaga osig'liq D yukka ($m_D = 1,6$ kg) E yuk ($m_E = 2,4$ kg) osilgan ondan boshlab B nuqta (prujinaning yu-qori uchi) $\xi=2\sin 5t$ (sm) qonun bo'yicha harakatlana boshlaydi (ξ o'qi vertikal bo'ylab pastga yo'nalgan).

6—10-variantlar (2-chizma). m massali D yukning gorizont bilan α burchak tash-kil qiluvchi qiya tekislik bo'ylab harakat tenglamasi uni prujinaga yoki prujinalar sistemasiga kelib tegish onidan boshlab topilsin; bunda yuk keyingi harakati davomida prujinalardan ajralmaydi deb faraz qilinsin. Sanoq boshi uchun yukning tinch vaziyati (prujinalarning statik deformatsiyasi holati) qabul qilinib, uning harakati x o'qiga keltirilsin.

6-variant. D yuk ($m_D = 4$ kg) qiya tekislik bo'ylab ($\alpha = 30^\circ$) boshlang'ich tezliksiz $s=0,1$ m masofani o'tib, bikirlik koeffitsientlari $c_1=48$ N/sm, $c_2=24$ N/sm bo'lgan de-formastiyalanmagan, ketma-ket ulangan prujinalarga borib uriladi.

7-variant. Biror vaqt onida D yuk ($m=2$ kg) $c_1=12$ N/sm, $c_2=6$ N/sm bikirlik koeffitsientlariga ega bo'lgan deformatsiyalanmagan, ketma-ket ulangan prujinalarning A uchiga boshlang'ich tezliksiz ulab qo'yiladi. Xuddi shu ondan boshlab($t=0$) prujinalarning ikkinchi B uchi qiya tekislik bo'ylab ($\alpha = 45^\circ$) $\xi = 0,02 \sin 20t$ (m) qonun bo'yicha harakat qila boshlaydi (ξ o'qi qiya tekislik bo'ylab pastga yo'nalgan).

8-variant. $c_1=4$ N/sm va $c_2= 6$ N/sm bikirlik koeffitsientlariga ega bo'lgan 1 va 2 parallel prujinalar mutlaq bikir AB taxtacha bilan birlashtirilgan bo'lib, uning K nuqtasiga bikirlik koeffitsienti $c_3= 15$ N/sm bo'lgan 3 prujina mahkamlangan. K nuqta 1 va 2 prujinalarning o'qlaridan a va b masofalarda joylashgan: $a/b=c_2/c_1$. 1, 2 va 3 prujinalar deformatsiyalanmagan 1,5 kg massali D yuk 3 prujinaning N uchiga ulanadi. Xuddi shu onda D yukka qiya tekislikka ($\alpha = 45^\circ$) parallel ravishda pastga yo'nalgan $v_0=0,5$ m/s tezlik beriladi. AB taxtachaning massasi hisobga olinmasin,



2-chizma.

9-variant. D yuk ($m = 1,2$ kg) qiya tekislik bo'ylab ($\alpha = 30^\circ$) boshlang'ich tez-liktsiz $s = 0,2$ m masofani o'tib, bikirlik koeffitsienti $c = 4,8$ N/sm bo'lgan deforma-stiyalanmagan prujinaga borib uriladi. Xuddi shu ondan boshlab ($t = 0$) B nuqta (prujinaning pastki uchi) qiya tekislik bo'ylab $x = 0,03 \sin 12 t$ (m) qonun bo'yi-cha harakat qila boshlaydi (ξ o'qi qiya tekislik bo'ylab pastga yo'nalgan).

10-variant. D yuk ($m = 1$ kg) ikkita bir xil parallel prujinalarning uchlarini birlashtiruvchi mutlaq bikir AB -taxtachaning o'rtasiga boshlang'ich tezliktsiz mahkamlab qo'yiladi. Prujinalar deformatsiyalanmagan. Prujinalarning bikirlik koeffitsientlari $c = 1,5$ N/sm, Yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional $R = 8v$ (N), bu erda v — tezlik (m/s), $\alpha = 60^\circ$. AB taxtachaning va unga mahkamlangan dempfer qismining massasi hisobga olinmasin.

11— 15-variantlar (3-chizma). m massali D yuk gorizont tekislikda E o'q, atrofida aylana oluvchi vaznsiz sterjenning uchiga mahkamlangan. Yuk prujina bilan yoki prujinalar sistemasi bilan birlashtirilgan. Sterjenning chizmada ko'rsatilgan tinch turgan holati deformatsiyalanmagan prujinalarga mos keladi. Moddiy nuqta sifatida qabul qilindigan D yuk to'g'ri chiziqli bo'ylab harakatlanadi, deb hisoblab, bu yukning harakat tenglamasi aniqlansin (yukning tekislik bo'ylab sirpanish ishqalanishi hisobga olinmasin). Harakat x o'qiga keltirilsin, sanoq boshi qilib yukning tinch turgan holatiga mos keluvchi nuqta olinsin.

11-variant. D yuk ($m = 2,4$ kg) bikirlik koeffitsientlari $c_1 = 1$ N/sm va $c_2 = 1,4$ N/sm bo'lgan ikkita parallel prujinaning uchlarini birlashtiruvchi AB taxtachaning F nuqtasiga birlashtirilgan. F nuqta prujinalarning o'qlaridan a va b masofalarda joylashgan: $a/b = c_2/c_1$. D yuk chizmada ko'rsatilgan vaziyatidan chap tomonga $\lambda = 2$ sm qiymatga og'diriladi va boshlang'ich tezliktsiz qo'yib yuboriladi. Yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional: $R = 6v$ (N), bu erda v — tezlik (m/s). Mutlaq bikir AB taxtachaning va dempfering massasi hisobga olinmasin.

12-variant. Biror vaqt onida prujinaning $x = 2$ sm qiymatigacha siqib ushlab tutilgan D yuk ($m_D = 3$ kg) boshlang'ich tezliktsiz qo'yib yuboriladi. Prujinaning bikirlik koeffitsienti $c = 9$ N/sm. Shu ondan boshlab ($t = 0$) B nuqta (prujinaning o'ng uchi) $\xi = 1,2 \sin 8t$ (sm) qonun bo'yicha harakat qila boshlaydi (ξ o'q chapga yo'nalgan).

13-variant. D yuk ($m = 1$ kg) bikirlik koeffitsienti $c = 12$ N/sm bo'lgan prujinaning uchiga mahkamlangan bo'lib, bu prujinaning

ikkinchi uchi AB taxtachaning F nuqtasi bilan birlashtirilgan. AB taxtachaga har birining bikirlik koeffitsienti $c=13$ N/sm bo'lgan ikkita parallel prujinaning uchlarini bog'laydi. F nuqta parallel prujinalarning o'qlaridan teng masofalarda joylashgan. Yukka ED sterjenning chizmada ko'rsatilgan vaziyatidan o'ng tomonga yo'nalgan $v_0=0,5$ m/s tezlik beriladi. Yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional: $R=12v$ (kN), bu erda v — tezlik.

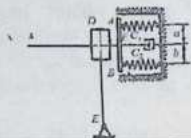
14-variant. D yuk ($m=1,5$ kg) bir tomoni bilan $c_1=4,4$ N/sm bikirlik koeffitsientiga ega bo'lgan prujinaning uchiga, ikkinchi tomoni bilan bikirlik koeffitsientlari $c_2=2$ N/sm, $c_3=8$ N /sm bo'lgan ikkita ketma-ket ulangan prujinaning uchiga mahkamlangan. Yuk chizmada ko'rsatilgan vaziyatidan chap tomonga $\lambda=2,5$ sm qiymatga og'dirilib, qo'yib yuboriladi va shu onda unga o'ng tomonga yo'nalgan $v_0=0,4$ m/s boshlang'ich tezlik beriladi.

15-variant. D yuk ($m=1$ kg) ketma-ket ulangan prujinaning A uchiga mahkamlangan. Prujinalarning ikkinchi B uchi $\xi=1,8 \sin 12t$ (sm) qonun bo'yicha harakatlanadi (ξ o'qi chapga yo'nalgan). Prujinalar bikirlik koeffitsienti $c_1=4$ N/sm, $c_2=12$ N/sm. $t=0$ da yuk deformatsiyalanmagan prujinalarga moe keluvchi tinchlik vaziyatida turadi.

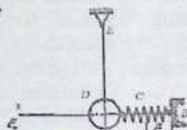
16—20-variantlar (3-chizma). m_D massali D yukning (17 va 19-variantlar) yoki m_D va m_E massali D va E yuklar sistemasining (16, 18, 20-variantlar) harakat tenglamasi topilsin (bu harakat x o'qiga keltirilsin). Sanoq boshi D yukning yoki moe ravishda D va E yuklar sistemasining tinch vaziyatida (prujinalarning statik deformatsiyasi vaziyatida) olin-sin. D va E yuklar birgalikdagi harakatlarida ajralib ketmaydi, deb faraz qilinadi.

16-variant. Ustida D yukni ($m_D=10$ kg) ushlab turuvchi 1 prujir nuqtada ikkita 2 va 3 parallel prujinalarning uchlarini birlashtirib tu chi AB taxtachaga tayanadi. 1, 2 va 3 prujinalar koeffitsienti (N/sm): 200, $c_2=160$, $c_3=140$. F nuqta 2 va 3 prujinalarning o'qlaridan a va masofalarda joylashgan: $a/b=c_3/c_2$. D yukning ustiga E yuk ($m_E=20$ kg) qo'yiladi va shu bilan bir vaqtda yuklar sistemasiga pastga yo'nalgan $v_0=0,4$ m/s tezlik beriladi. AB taxtachaning massasi hisobga olinmasin.

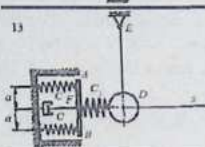
11



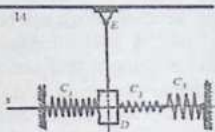
12



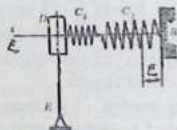
13



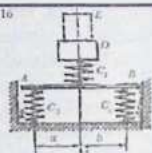
14



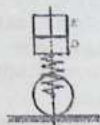
15



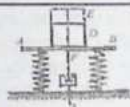
16



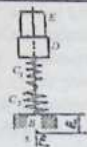
17



18



19



20



3-chizma.

17-variant. Biror vaqt onida E yuk D yukning ustidan olinadi (ikkala yuk ham prujinaning statik deformastiyasiga mos keluvchi tinch holatda turibdi). D va E yuklar sistemasining prujina ustidagi xususiy tebranishlarining siklik chastotasi $k=20$ rad/s, massalar nisbati $m_D/m_E=2/3$.

18-variant. Ikkita bir xil parallel prujinalardan har birining D yuk ($m_D=20$ kg) ta'siridagi statik deformastiyasi, $f_{stD}=2$ sm. Biror vaqt onida D yukning ustiga E yuk ($m_E=10$ kg) qo'yiladi. Yuklarning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional: $R=60\sqrt{3}v$ (N), bu erda v -tezlik (m/c). Mutlaq bikir taxtachaning va u bilan bog'langan dempfer qismining massasi hisobga olinmasin.

19-variant. Ikkita D va E yuk ($m_D=15$ kg, $m_E=25$ kg,) $c_1=250$ N/sm va $c_2=375$ N/sm bikirlik koeffitsientlariga ega bo'lgan ketma-ket ulangan prujinalarning ustida tinch turibdi. E yuk olingan ondan boshlab prujinalarning tayanch nuqtasi B $\xi=0,5 \sin 30t$ (sm) qonun bo'yicha harakat qila boshlaydi (ξ o'qi vertikal bo'ylab pastga yo'nalgan).

20-variant. Prujinaning statik deformastiyaga mos keluvchi tinch holatda bo'lgan D yukning ustiga vaqtning biror onida E yuk ko'yiladi. Xuddi shu onda yuklar sistemasiga pastga yo'nalgan $v_0=0,3$ m/s tezlik beriladi. D yukning prujina ustidagi xususiy tebranishlarining siklik chastotasi $k_D=24$ rad/s, massalar nisbati $m_E/m_D=3$.

21—25-variantlar (4-chizma). m massali D yukning gorizontal bilan α burchak tashkil qiluvchi silliq qiya tekislik bo'ylab harakat tenglamasi harakat x o'qiga keltirilgan holda topilsin. Sanoq boshi qilib yukning tinch turgan holati (prujinalarning statik deformastiya holati) qabul qilin-sin.

21-variant. Biror vaqt onida D yuk ($m=2$ kg) $c_1=7$ N/sm va $c_2=3$ N/sm bikirlik koeffitsientlarga ega bo'lgan deformastiyalanmagan prujinalarning uchlariga mahkamlanadi. Shu bilan bir vaqtda yukka qiya tekislik ($\alpha=45^\circ$) bo'ylab pastga yo'nalgan $v_0=0,4$ m/s tezlik beriladi.

22-variant. D yuk qiya tekislikning ($\alpha=30^\circ$) ustida prujinaning statik deformastiyasi $f_{st}=2$ sm ga mos keluvchi tinch vaziyatda turadi. Biror vaqt onida ($t=0$) B nuqta (prujinaning yuqori uchi) $\xi=0,01 \sin 10t$ (m) qonun bo'yicha harakat qila boshlaydi (ξ o'qi tekislik bo'ylab pastga yo'nalgan).

23-variant. D yuk ($m=3$ kg) ikkita deformastiyalanmagan parallel prujinalarning

uchlarini birlashtiruvchi AB taxtachaning F nuqtasiga mahkamlanadi va boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuboriladi. Prujinalarning bikirlik koef-fitsientlari $c_1=2$ N/sm va $c_2=4$ N/sm. F nuqta prujinalarning o'qlaridan a va b masofalarda joylashgan: $a/b = c_2/c_1$, $\alpha=60^\circ$. Yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional: $R=12v$ (N), bu erda v — tezlik (m/s). AB taxtachaning va dempfeming massasi hisobga olinmasin.

24-variant. Biror vaqt onida D yuk ($m=1$ kg), $c_1=12$ N/sm va $c_2=4$ N/sm bikirlik koefitsientlariga ega bo'lgan deformastiyalanmagan ketma-ket ulangan prujinalar-ning A uchiga mahkamlanadi va boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuboriladi. Shu bilan bir vaqtda ($t=0$) prujinalarning ikkinchi B uchi $\xi = 1,5 \sin 10t$ (sm) qonun bo'yicha ha-rakat qila boshlaydi. ξ o'qi qiya tekislik ($\alpha=30^\circ$) bo'ylab pastga yo'nalgan.

25-variant. Ikki ta bir xil parallel prujinalarning uchlari AB taxtacha bilan birlashtirilgan. Har bir prujinaning qiya tekislik ($\alpha=30^\circ$) ustida yotgan D yuk ($m=1,5$ kg) ta'siridagi statik deformastiyasi $f_{st}=4,9$ sm. Biror vaqt onida D yukka qiya tekislik bo'ylabab yuqoriga yo'nalgan $v_0=0,3$ m/s boshlang'ich tezlik beriladi. Yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional: $R=6v$ (N), bu erda v — tezlik, (m/s). Mutlaq bikir AB taxtachaning va u bilan bog'langan dempfer qismining massasi hisobga olinmasin.

26—30-variantlar (4-chizma). Plitaning massasini e'tiborga olmasdan uni mutlaq bikir, deb hisoblab, t massali D jismining harakat tenglamasi o'rtaga urilgan ondan boshlab tuzilsin. Keyingi harakati davomida plitadan ajralmaydi deb, faraz qilingan holda topilsin. Yukning harakati x o'qiga keltirilsin. Sanoq boshi qilib bu yukning tinch holatdagi vaziyati (prujinalarning statik deformastiya holatida) olinsin.

26-variant. Plita $c_1=600$ N/sm va $c_2=400$ N/sm bikirlik koefitsientlariga ega bo'lgan ikki ta parallel prujinaning ustida yotibdi. D yuk ($m=50$ kg) plitaning prujina o'qlaridan a va b masofalarda joylashgan F nuqtasiga $h=0,1$ m balandlikdan boshlang'ich tezliksiz tushadi: $a/b=c_2/c_1$.

27-variant. Ustiga plita qo'yilgan ikki ta parallel prujinadan har bir bining bikirlik koefitsienti $c=130$ N/sm. D yuk ($m=40$ kg) plitaning o'rtasiga qo'yiladi va prujinalarning deformastiyalanmagan vaziyatida boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuboriladi. Yukning harakatiga qarshilik tezlikka proporsional: $R=400v$ (H). Bu erda v — tezlik (sm/s). Plitaning va dempfeming massasi hisobga olinmasin.

28-variant. D yuk plitaning ustiga $h=5$ sm balandlikdan tushadi. Prujinaning bu yuk ta'siridan statik egilishi $f_{st}=1$ sm.

29-variant. Plita bikirlik koeffitsientlari $c_1=c_2=c=400$ N/sm bo'lgan ikkita bir xil parallel 1 va 2 prujinalarning ustida yotibdi. Biror vaqt onida D yuk ($t=200$ kg) plitaning o'rtasiga o'rnatiladi va shu bilan bir vaqtda $c_3=200$ N/sm bikirlik koeffitsientiga ega bo'lgan deformastiyalanmagan prujinaga mahkamlab qo'yiladi. Xuddi shu vaqt onida (deformastiyalanmagan prujinalarda) yukka pastga yo'nalgan $v_0=0,6$ m/s tezlik beriladi.

30-variant. Biror vaqt onida D yuk ($m=100$ kg) plitaning ustiga o'rnatiladi va (deformastiyalanmagan prujinalarda) boshlang'ich tezlik-siz qo'yib yuboriladi. Xuddi shu ondan boshlab B nuqta (prujinaning pastki uchi) $\xi=5 \sin 20 t$ (sm) qonunga muvofiq vertikal bo'yicha harakat qila boshlaydi (ξ o'qi pastga yo'nalgan). Prujinaning bikirlik koeffitsienti $c=2000$ N/sm.

Topshiriqni bajarish namunasi.

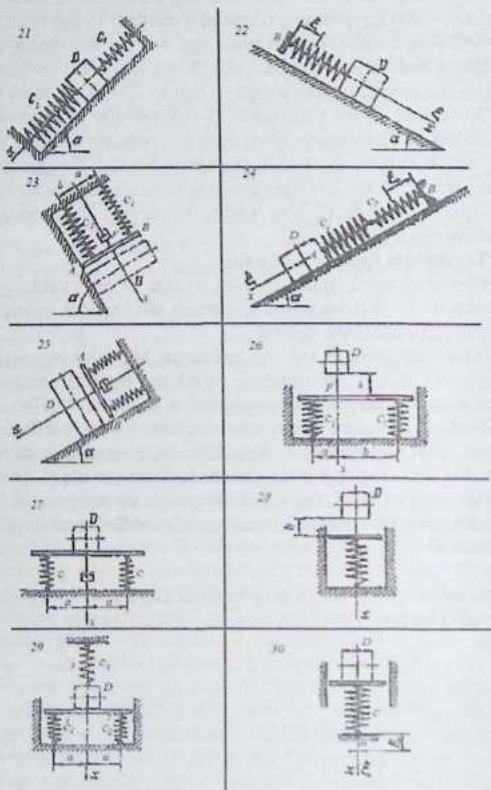
Massalari $m_D=2$ kg va $m_E=3$ kg bo'lgan D va E yuklar gorizontga nisbatan $\alpha=30^\circ$ burchak ostida qiyalangan silliq tekislik ustida $c=6$ N/sm bo'lgan prujinaga tiralib turibdi.

Biror vaqt onida E yuk olib tashlanadi. Shu bilan bir vaqtda prujina pastki uchi B qiya tekislikda $\xi=0,02 \sin 10t$ (m) qonun bo'yicha harakat qila boshlaydi. D yukning harakat tenglamasi topilsin.

Yechish: Masalani echish uchun nuqtaning harakat differensial tenglamalaridan foydalanamiz. Koordinata sistemasining boshini yuk D ning B nuqta o'zining o'rta vaziyatida olamiz. x o'qini qiya tekislik bo'ylab tepaga (D yukning E yuk olingandan keyingi harakati tomonga) yo'naltiramiz. D yukning harakati quyidagi differensial tenglama bilan ifodalanadi:

$$m_D \ddot{x} = \sum X_i$$

bu erda $\sum X_i$ — D yukka ta'sir qiluvchi kuchlar: G_D — og'irlik kuchi, N — qiya tekis-



4-чизма.

likning normal reaksiyasi va P prujina elastik kuchining x o'qiga proektsiyalari-ning yig'indisi (5-chizma, a).

Shunday qilib,

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - P$$

bunda $P = c(x - f_{ctD} - \xi)$, f_{ctD} - prujining D yuk ta'siridagi statik deformatsiyasi, ξ - prujinaning pastki uchi mahkamlangan nuqtaning $\xi = d \sin pt$ ($d=0,02$ m; $r=10$ rad/s) qonun bo'yicha ko'chishi.

Prujinaning statik deformatsiyasi f_{ctD} ni D yukning qiya tekislik ustidagi tinch holati tenglamasidan topamiz (5-chizma, b):

$$\sum X_i = 0; \quad -G_D \sin \alpha + P_0 = 0$$

$$\text{yani} \quad -G_D \sin \alpha + c f_{ctD} = 0; \quad \text{bundan} \quad f_{ctD} = G_D \sin \alpha / c.$$

Bu tenglikka asosan D yukning harakat differensial tenglamasi

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - c(x - f_{ctD} - \xi),$$

quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m_D \ddot{x} + cx - cd \sin pt.$$

Tenglamani barcha xaddarini m_D ga bo'lib, quyidagi $c/m_D = k^2$, $cd/m_D = h$ belgilashlarni kiritib, differensial tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\ddot{x} + k^2 x - h \sin pt$$

Bu bir jinsli bo'lmagan tenglamani echimi bir jinsli tenglamani umumiy echimi x^* va mazkur bir jinsli bo'lmagan tenglamani xususiy echimi x^{**} dan tashkil topadi:

$$x = x^* + x^{**}$$

Bir jinsli tenglamani umumiy echimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

Bir jinsli bo'lmagan tenglamani xususiy echimi:

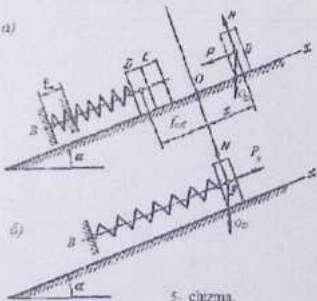
$$x^{**} = [h / (k^2 - p^2)] \sin pt$$

Umumiy integral

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + [h / (k^2 - p^2)] \sin pt$$

C_1 va C_2 integrallash doimiylarining qiymatlarini aniqlash uchun quyidagi \dot{x} uchun tenglamani tuzamiz:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + [hp / (k^2 - p^2)] \cos pt$$



5-chizma.

va masalaning boshlang'ich shartlaridan foydalanamiz.

Tekshirilayotgan harakat prujining D va E yuklar ta'siridagi deformatsiyasi statik deformatsiyadan iborat bo'lgan ondan ($t=0$) boshlanadi. Sanoq boshi O ning qabul qilingan vaziyatida D yukning boshlang'ich koordinatasi $x_0 = -f_{\text{stat}}$, bunda $f_{\text{stat}} = G_E \sin \alpha / c$ — prujining E yuk ta'siridagi statik deformatsiyasi.

Shunday qilib, $t=0$ da $x_0 = -f_{\text{stat}}, \dot{x}_0 = 0$. $x = x(t)$ va $\dot{x} = \dot{x}(t)$ tenglamalarni $t=0$ da yozamiz:

$$x_0 = C_1, \dot{x}_0 = C_2 k + hp / (k^2 - p^2)$$

$$C_1 = -f_{\text{stat}}, C_2 = hp / [k(k^2 - p^2)]$$

Endi D yukning harakat tenglamasi:

$$x = -f_{\text{stat}} \cos kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \sin pt$$

Tenglamaga kiruvchi kattaliklarning son qiymatlarini topamiz:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{600}{2}} = 17,3 \text{ c}^{-1}, f_{\text{stat}} = \frac{G_E \sin \alpha}{c} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{600} = 0,0245 \text{ m}$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{c \Delta}{m_D (k^2 - p^2)} = \frac{600 \cdot 0,02}{2(300 - 200)} = 0,03 \text{ m}$$

$$\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = \frac{0,03 \cdot 10}{17,3} = 0,0173 \text{ m}$$

Demak, yukning harakat tenglamasi:

$$x = -2,45 \cos 17,3t - 1,73 \sin 17,3t + 3 \sin 10t \text{ (cm)}$$

Harakat miqdorining o'zgarishi to'g'risidagi teoremani moddiy nuqta-ning tezligini aniqlashga tadbiiq etish

m massali jismga gorizontal bilan α burchak tashkil qiluvchi qiya tekislik bo'ylab tepaga yo'nalgan v_0 boshlang'ich tezlik berilgan. Jismga o'sha tomonga qarab yo'nalgan P kuch ta'sir qiladi. Kuchning o'zgarish qonuni $P=P(t)$ ni va sirpanish ishqalanish koeffitsienti f ni bilgan holda jismning t_1, t_2, t_3 vaqt onlarida tezligi aniqlansin va olingan natija harakat differensial tenglamasi yordamida t_1 vaqt oni uchun tekshirilsin. Echlsh uchun zarur ma'lumotlar 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Figura №	m , kg	v_0 , m/s	t_1	t_2	t_3	P_0	P_1	P_2	P_3	α , grad	f
			s			N					
1	35	5,4	4	10	18	100	200	150	250	25	0,10
2	30	0	0	10	15	200	160	160	180	37	0,25
3	25	0	4	10	16	200	200;120	120	0	21	0,10
4	10	4,5	5	10	16	0	180	40	100	32	0,12
5	16	9,0	4	8	16	120	120;0	0	160	24	0,08
6	40	4,0	4	8	12	400	300	300	0	40	0,06
7	20	8,0	5	8	11	0	300	0	0	25	0,20
8	16	7,6	6	11	13	75	200	0	0	23	0,12
9	12	0	0	10	14	100	140	0	0	20	0,20
10	50	12,0	2	8	12	0	300	200	200	27	0,08
11	10	5,0	0	10	16	50	100	100	200	35	0,24
12	12	3,0	3	9	14	60	180	120	120	42	0,15
13	10	8,0	4	12	16	0	150	150	100	30	0,18
14	20	8,5	5	8	15	40	100	150	0	23	0,07
15	14	9,0	7	12	18	0	140	0	100	18	0,15
16	20	3,0	5	9	17	300	150	100	100	39	0,12
17	24	10,0	6	10	15	0	180	60	140	15	0,20
18	15	15,0	8	16	20	110	150	0	90	26	0,22
19	15	7,2	3	10	10	150	110	90	120	30	0,30
20	22	8,2	2	9	11	70	110	110	50	15	0,15
21	15	10,0	8	12	16	0	200;0	0;200	100	28	0,14
22	11	6,0	7	9	14	160	0	0;100	120	31	0,11
23	12	4,5	5	10	16	50	120	40	80	21	0,22
24	10	7,0	4	14	29	100	50	50	0	18	0,09
25	18	0	8	10	16	180	160;0	0;140	180	33	0,17
26	8	9,0	4	8	12	0	150	0	120	45	0,10
27	17	5,0	7	10	18	190	170;0	100	280	38	0,21
28	9	7,5	4	12	17	0	140;70	100;70	70	26	0,20
29	20	9,5	5	6	11	0	400	400;100	200	15	0,25
30	10	10,2	6	7	10	120	70	0	120	33	0,15

Kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremani mexanik sistema-ning harakatini o'rganishga tadbiiq etish

Mexanik sistema tinch holatdan og'irlik kuchi ta'sirida harakatga keladi; sistema-ning boshlang'ich holati 6—8-chizmalarda ko'rsatilgan. Jism 1 ning ishqalanish ku-chini (1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) variantlarda va sirpanmasdan g'ildiraydi-gan jism 3 ning dumalashga qarshiligini (2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29-variantlar) hisobga olib, boshqa qarshilik kuchlarini hamda cho'zilmaydi deb faraz qilingan iplarning massalarini hisobga olmagan holda jism 1 ning tezligini u bosib o'ttan yo'l s ga teng bo'lgan vaqt oni uchun aniqlang.

Topshiriqda quyidagi belgilashlar qabul qilingan: m_1, m_2, m_3, m_4 — jism 1, 2, 3, 4 larning massalari; R_2, r_2, R_3, r_3 — katta va kichik aylanalarning radiuslari; t_{2z}, t_{3z} — jism 2, 3 larning og'irlik markazidan o'tgan gorizont o'qlariga nisbatan inerstiya radiuslari; α, β — tekisliklarning gorizontga og'ish burchaklari; f — sirpanishdagi ishqalanish koeffitsienti; δ — yumalashdagi ishqalanish koeffitsienti.

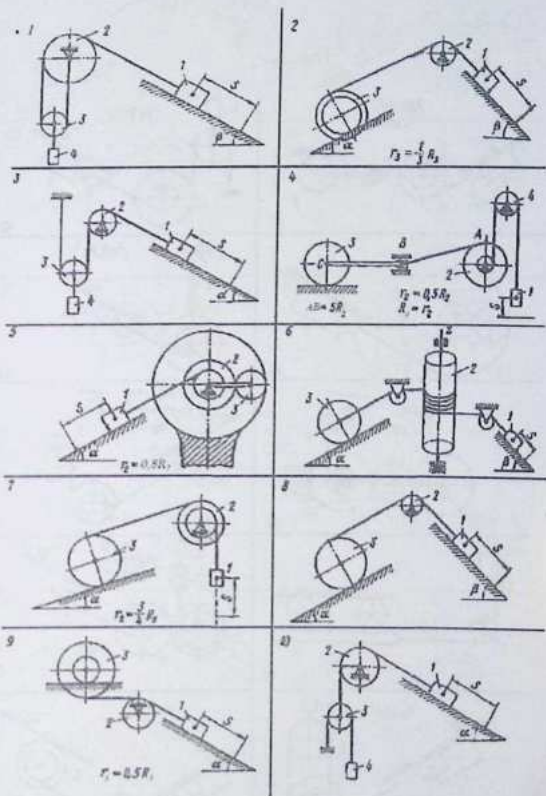
Echish uchun zarur ma'lumotlar quyidagi 2-jadvalda keltirilgan.

Jadvalda inerstiya radiuslari ko'rsatilmagan bloklar va katoklar tutash bir jinsli silindrlar deb qaralsin. Iplarning nishab qismlari mos qiya tekisliklarga parallel.

Var. taqim	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	l_{20}	l_{21}	α	β	f	δ , sm	ε , m	Hisoblash
	kg				sm		sm		grad					
1	m	$4m$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	-	-	-	-	60	-	$\frac{0.1}{0}$	-	2	<i>AB, BC</i> zvenolar va polzun massasi hisobga olinmagan Etakchi massasi hisoblanmagan To'rtta g'ildirak har birining massalari bir xil Etakchi massasi hisoblanmagan Shuning 3 ingichka bir jinsli sterjen deb qaraladi
2	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$		30		20	30	45		$\frac{0.2}{2}$	$\frac{0.2}{0}$	2	
3	m	m	$\frac{1}{2}m$	m	-	-	-	-	45	-	$\frac{0.1}{0}$	-	2	
4	m	$2m$	$\frac{40}{m}$	m	20	40	18	-	-	-	$\frac{0.3}{0}$	$\frac{0.1\pi}{0}$		
5	m	$2m$	m	-	20	15	18	-	60	-	$\frac{0.1}{2}$	-	$\frac{0.28}{\pi}$	
6	m	$3m$	m	-	-	28	-	-	30	45	$\frac{0.1}{0}$	$\frac{0.2}{8}$	1.5	
7	m	$2m$	$\frac{2m}{\frac{1}{2}m}$	-	16	23	14	-	30	-	$\frac{0.2}{0}$	-	2	
8	m	$\frac{1}{2}m$		-	-	30	-	-	30	45	$\frac{0.1}{5}$	$\frac{0.2}{0}$	1.75	
9	m	$\frac{2m}{\frac{1}{2}m}$	$\frac{9m}{\frac{1}{2}m}$	-	30	-	20	30	-	$\frac{0.1}{2}$	$\frac{0.2}{5}$	$\frac{0.2}{1.5}$	1.5	
10	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$		-	-	-	-	60	-	$\frac{0.1}{0}$	-	3	
11	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	-	-	30	-	25	30	45	$\frac{0.1}{0}$	$\frac{0.2}{1}$	2.5	

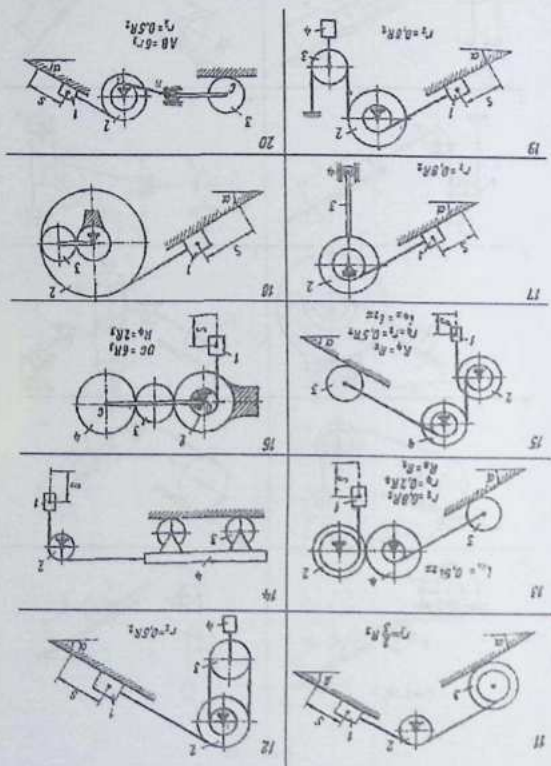
											7	0		
12	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	m	30	-	20	-	30	-	$\frac{0.2}{0}$	-	2.5	<i>AB, BC</i> zvenolar va polzun massasi hisobga olinmagan Etakchi massasi hisoblanmagan <i>AB, BC</i> zvenolar va polzun massasi hisobga olinmagan Etakchi massasi hisoblanmagan 2 va 5 blokli massa va merziya momentlari bir xil Shuning 3 ingichka bir jinsli sterjen deb qaraladi Shuning 3 ingichka bir jinsli sterjen deb qaraladi
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	-	30	-	$\frac{0.2}{4}$	$\frac{0.2}{0}$	2	
14	m	$\frac{1}{2}m$	$5m$	$4m$	-	25	-	-	-	-	$\frac{0.2}{0}$	-	2	
15	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{4m}{\frac{1}{2}m}$	$\frac{1}{2}m$	20	15	18	-	60	-	$\frac{0.2}{5}$	-	1.5	
16	m				10	12	-	-	-	-	-	-	0.05π	
17	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	20	-	15	-	60	-	$\frac{0.1}{0}$	-	0.16π	
18	m	$5m$	m	-	35	15	32	-	60	-	$\frac{0.1}{5}$	-	0.2π	
19	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	m	24	-	20	-	60	-	$\frac{0.1}{5}$	-	1.5	
20	m	$2m$	$\frac{20}{m}$	-	20	15	16	-	30	-	$\frac{0.1}{0}$	$\frac{0.2}{0}$	$\frac{0.2\pi}{1}$	
21	m	m	$\frac{2m}{\frac{1}{2}m}$	-	20	20	16	-	30	45	$\frac{0.2}{0}$	$\frac{0.3}{2}$	1.2	
22	m			-	20	10	-	-	60	-	$\frac{0.1}{7}$	-	0.1π	
23	m	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	20	-	28	-	30	-	$\frac{0.1}{0}$	-	1	

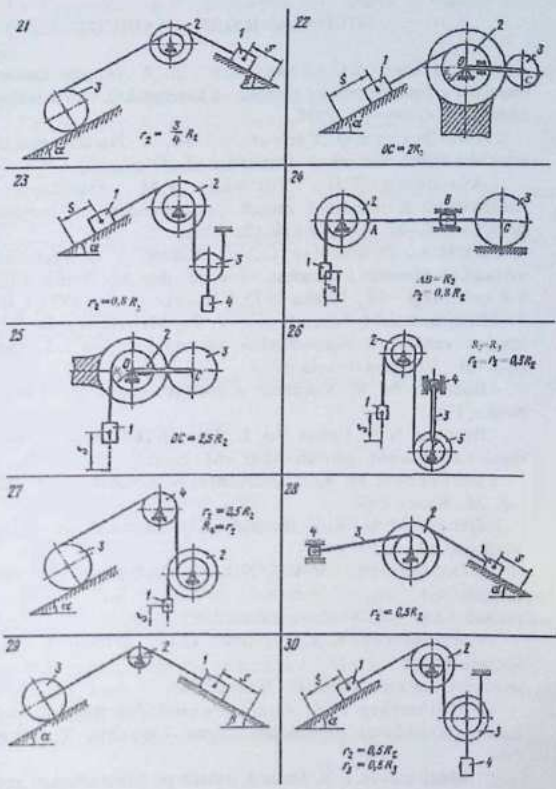
24	m	$3m$	20	m	-	20	30	18	-	-	-	$0,6$	$0,08$
25	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{4}m$	m	-	16	20	-	-	-	-	-	$0,04$
26	m	$\frac{1}{4}m$	m	$\frac{1}{2}m$	m	30	-	20	-	-	-	-	$0,6\pi$
27	m	m	$6m$	$\frac{1}{2}m$	m	20	20	16	-	30	-	$0,2$	2
28	m	$2m$	$3m$	m	m	20	-	14	-	60	-	$0,1$	$0,1\pi$
29	m	$\frac{1}{4}m$	$\frac{1}{8}m$	m	m	-	35	-	15	30	$0,2$	$0,2$	$2,4$
30	m	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{10}m$	$\frac{1}{2}m$	m	26	20	18	30	-	$0,1$	-	2



6-chizma

7-chizma.





8-chizma.

FOYDALANILGAN ADABIYOT

1. Aziz-Qoriev S.Q., Yangurazov Sh. X. Nazariy mexanikadan masalalar echish metodikasi (Statika va kinematika). Qayta ishlangan 2-nashri. - T.: O'qituvchi, 1974.
2. Aziz-Qoriev S.Q., Yangurazov Sh. X. Nazariy mexanikadan masalalar echish metodikasi (Dinamika). - T.: O'qituvchi, 1967.
3. Ayzenberg T.B., Voronkov I.M., Osestkiy V. N. Rukovodstvo k resheniyu zadach po teoreticheskoy mexanike. - 6-e stereotip, izd. - M.: Visshaya shkola, 1968.
4. Bat M.I., Djanelidze G.Yu., Kelzon A. S. Teoreticheskaya mexanika v primerax i zadachax. - 7-e izd., dop. M.: Nauka, 1975, t. I; - 6-e izd., dop. - M.: Nauka, 1975, t. II; - M.: Nauka, 1973, t. III.
5. Brajnichenko N.A., Kan V. L., Minstburg B. B. [i dr.]. Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. - 3-e izd., pererab. i dop. - M.: Visshaya shkola, 1974.
6. Butenin N. V. Vvedenie v analiticheskuyu mexaniku. - M.: Nauka, 1971.
7. Butenin N.V., Lunst Ya. L., Merkin D. R. Kurs teoreticheskoy mexaniki. - 2-e izd., pererab. i dop. - M.: Nauka, 1979. tt. I, II.
8. Voronkov I.M. Kurs teoreticheskoy mexaniki. - 13-e stereotip, izd. - M.: Nauka, 1966.
9. Gernet M.M. Kurs teoreticheskoy mexaniki. - 2-e izd. - M.: Visshaya shkola, 1973.
10. Dobronravov V.V., Nikitin V.V. Kurs teoreticheskoy mexaniki 4-e izd., pererab. i dop. - M.: Visshaya shkola, 1983.
11. Kolesnikov K.S., Blyumin G.D., Drong V. I. [i dr.]. Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. - M.: Nauka, 1983.
12. Mesherskiy I. V. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. - Ruscha 30-nashriga muvofiq lashtirilgan 2-nashri. - T.: O'qituvchi, 1967.
13. Mesherskiy I. V. Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. - 35-e izd., pererab. - M.: Nauka, 1981.
14. Targ S. M. Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki. 9-e izd. - M.: Nauka, 1974.

15. Shoxaydarova P., Shoziyotov Sh., Zoirov J. Nazariy mexanika -chi, T.: O'qituvchi, 1981.
16. Yablonskiy A. A. Kurs teoreticheskoy mexaniki. -6-e izd. ispr. - M. Visshaya shkola, 1984, ch.2.
17. Yablonskiy A. A., Nikiforova V.M. Kurs teoreticheskoy mexaniki.-6-e izd., M.: Visshaya shkola. 1984, ch. 1.
18. Yablonskiy A. A., Noreyko S. S., Volfson S.A. [i dr.]. Sbornik zadaniy dlya kursovix rabot po teoreticheskoy mexanike. - 3-e izd. ispr.-M.: Visshaya shkola, 1978.
19. O'rozboev M.T. Nazariy mexanika asosiy kursi.-Qayta ishlangan 3-nashri. - T.: O'qituvchi, 1966.
20. Rashidov T., Shoziyotov Sh., Mo'minov Q. Nazariy mexanika asoslari. -1-nashri. -T.: O'qituvchi, 1990.
21. Mirsaidov M.M., Boymurodova L.I., Giyasova N.T. Nazariy mexanika. O'quv qo'llanma - T.: O'zbekiston, 2008.
22. Boymurodova L. I., Ziyayev F. B. Nazariy mexanika (Metodik ko'rsatmalar va nazorat topshiriqlar). "TQXIMMI", T., 1995.
23. Kepe O.E. "Sbornik korotkix zadach po teoreticheskoy mexanike"- M."Visshaya shkola", 1989
24. Kenjaev. Nazariy mexanika. Misol va masalalar. 1-qism. Statika. Toshkent, Cho'lpon nashr. 2018.
25. X. To'raev. Nazariy mexanika. Statika va kinematika. Samarqand davlat universiteti. 2012.
26. Karimov K.A., Xabibullaeva X.N. "Mexanik sistema harakatini o'rganishda sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llash". Uslubiy ko'rsatma. TDTU, 2013.
27. Karimov K.A., Xabibullaeva X.N. «Harakat differensial tenglamalarini integrallash» Uslubiy ko'rsatma. T.:TDTU, 2010.

28. Karimov K.A., Xabibullaeva X.N. «Tebranma harakatlar» Uslubiy ko'rsatma. TDTU, 2012.
29. Petuxov N и др. Teoreticheskaya mexanika. Kazan nas. iss.технолог. uni- versitet, 2012.
30. I.V. Bogomaz. Teoreticheskaya mexanika. tom1. 2011.
31. Н.А. Эрдеди. Teoreticheskaya mexanika. Mos.gos.tex.универс. 2014.
32. O. Vorotina Teoreticheskaya mexanika. Dinamika.Sbornik zadach. Mos- kva izd. Assosiasii str. vuzov. 2011
33. V. Drong. Kurs Teoreticheskoy mexaniki. Moskva. izd. MGТУ im.Bauma- na. 2011r.
34. N.I. Gorbach. Teoreticheskaya mexanika. Dinamika., Minsk. «Visheysha- ya shkola» 201224.Lukashevich N. K. Teoreticheskaya mexanika — 2-e izd., ispr. i dop. — Moskva : Izdatelstvo Yurayt, 2019. — 266 s.
35. Vilke V. Г. Teoreticheskaya mexanika— 4-e izd., ispr. i dop. — Moskva : Izdatelstvo Yurayt, 2019. — 311 s.
36. A.Ruina, R. Pranap. «Introduction to statics and dynamics », Oxford University Press, 2013.
37. V.I. Szolga, «Theoretical mechanics», Berlin, part-1, 2013.
38. V.I. Szolga, «Theoretical mechanics», Berlin, part-2, 2013.
39. F.Smith and W.R.Longley «Theoretical mechanics », NEW YORK-LON- DON. 2014.

Glossariy

Atamaning o'zbek tilida nomlanishi	Atamaning ingliz tilida nomlanishi	Atamaning rus tilida nomlanishi	Atamaning ma'nosi yoki tarifi
Nazariy mexanika	Theoretical mechanics	Теоретическая механика	Jismlarning o'zaro tasiri, muvozanati va mexanik harakati qonuniyatlarini o'rganuvchi fan.
Muvozanat	Balance	Равновесие	Biror qo'zg'almas sanoq sistemasiga nisbatan tinch vaziyat.
Mexanik harakat	Mechanics motion	Механическое движение	Nuqta yoki jismlarning o'zaro ko'chishi
Safatika	Statics	Статика	Kuch, kuchlar sistemasi, kuchlar sistemasining muvozanati, ishqalanish, fermalar va ularni hisoblash usullari hamda og'irlik markazi va ularni aniqlash usullarini o'rganadigan bo'lim.
Kinematika	Kinematics	Кинематика	Mexanik harakatni shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarga bog'lamasdan o'rganadigan bo'lim.
Dinamika	Dynamics	Динамика	Mexanik harakatni shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarni hisobga olib o'rganadigan bo'lim.
Moddiy nuqta	Material point	Материальная точка	Massaga ega bo'lgan, moddiy nuqta
Absolyut qattiq jism	Absolute rigid body	Абсолютное твердое тело	Kuch ta'siridan ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmasdan qoladigan jism
Erkin jism	Free body	Свободное тело	Ixtiyoriy yo'nalishda harakatlanadigan jism
Kuch	Force	Сила	Jismlarning o'zaro ta'siri
Kuchlar sistemasi	Force systems	Система сил	Ta'sir etuvchi bir necha kuch
Teng ta'sir etuvchi kuch	Equivalent force	Равнодействующая	Kuchlar sistemasining ta'sirini yolg'iz o'zi bera oladigan kuch

		сила	
Muvozanatlash uv-chi kuchlar sistemasi	Balancing system of forces	Уравновешивающая система сил	O'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar
Bog'lanishdagi jism	Not free body	Несвободное тело	Harakati yoki holati biror sababga ko'ra cheklab qo'yilgan jism
Bog'lanish reakstiya kuchi	Force of reactions of communication	Сила реакции связи	Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'siri
Kesishuvchi kuchlar sistemasi	Concurrent force system	Система сходящихся сил	Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar.
Kuchning o'qqa proelstiyasi	Projection of force to an axis	Проекция силы на ось	Kuch modulini o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi kosinusiga ko'paytmasi
Kuchning nuqtaga nisbatan momenti	Moment of a force with respect to a point	Момент силы относительно точки	Kuch modulini elka(moment markazidan kuchning ta'sir chizig'igacha eng qisqa masofa)ga ko'paytmasi.
Juft kuch	Pair of forces	Пара сил	Miqdorani teng, ta'sir chiziqlari parallel va qarama-qarshi yo'nalgan ikkita kuch
Juft kuch momenti	Moment of pair forces	Момент пары сил	Juft kuch tashkil etuvchilaridan birining juft kuch elkasiga ko'paytmasi
Bosh vektor	Resultant vector	Главный вектор	Ixtiyoriy kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi
Bosh moment	Resultant moment	Главный момент	Kuchlar sistemasining biror keltirish markaziga nisbatan momentlari vektor yig'indisi
Sirpanishdagi ishqalanish	Sliding friction	Трение скольжения	Sirpanayotgan jismlarning o'zaro tegib turgan yuzalarida hosil bo'lgan ishqalanish
Dumalashdagi ishqalanish	Rolling friction	Трение качения	Dumalayotgan jismlarning dumalashga qarshi-lik ko'rsatuvchi kuch
Fermalar	Farms	Фермы	Steyenlarni shamirlar vositasida

			biriktirilishi-dan hosil qilingan konstruktiviya
Nuqta harakati	Point movements	Движения точки	Nuqtaning boshlang'ich holatidan ohirgi holati-ga vaqtga bog'liq holda aniq bir holda o'tishi
Nuqta traektoriyasi	Trajectory of particle	Траектория точки	Vaqt o'tishi bilan nuqtaning fazoda qoldirgan izi
Nuqta tezligi	velocity of point	Скорость точки	Harakat qonumidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila
Qattiq jismning il-garilanma harakati	Translation movements of the rigid body	Поступательное движение твердого тела	Jismda olingan har qanday kesma vaq o'z-o'ziga parallel qolishi
Qattiq jismning aylanma harakati	Rotation motion of rigid body	Вращательное движение твердого тела	Harakatlanuvchi qattiq jismning ikkita nuqtasi doimo qo'zg'almasdan qolishi
Burchak tezlik	Angular velocity	Угловая скорость	Aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila
Burchak tezlanish	Angular acceleration	Угловое ускорение	Aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosila
Qattiq jismning tekis parallel harakati	Plane-parallel motion of rigid body	Плоскостное движение твердого тела	Barcha nuqtalari berilgan ko'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlanuvchi jismning harakatiga
Tezliklar only markazi	The instant centre of speeds	Мгновенный центр скоростей	Berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan nuqta
Nuqtaning nisbiy harakati	Relative movement of a point	Относительное движение точки	Nuqtaning qo'zg'aluvchan sanoq sistemasiga nisbatan harakati
Ko'chirma harakat	Portable movement of a point	Переносное движение	Qo'zg'aluvchi sanoq sistemasining qo'zg'almas sanoq sistemasiga nisbatan harakati

		ТОЧКИ	
Nuqtaning murakab harakati	Absolute movement of a point	Сложное движение точки	Nuqtaning bir necha sanoq sistemalariga nis-batan harakati
Koriolis tezlanishi	Coriolis acceleration	Ускорение Кориолиса	Ko'chirma harakat aylanma harakatdan iborat bo'lganida hosil bo'ladigan tezlanish.
Moddiy nuqtaning harakat differentsial tenglamasi	The differential equation of movement of a material point	Дифференциальное уравнение движения материальной точки	Harakat tenglamasining differentsial ko'rinishi
Boshlang'ich shartlar	Entry conditions	Начальные условия	Harakatning boshlanish vaqtiga mos keluvchi koordinata va tezlik
Qaytaruvchi kuch	Restoring force	Восстанавливающая сила	Moddiy nuqtani muvozanat holatiga qaytaruvchi kuch
Qarshilik kuchi	Force resistance	Сила сопротивления	Muhitning xususiyatlarini hisobga oluvchi kuch
Uyg'otuvchi kuch	Revolting force	Возмущающая сила	Moddiy nuqtaga davriy ta'sir qilgan holda harakatni takrorlanishini taminlovchi kuch
Tebranish amplitudasi	Amplitude of oscillation	Амплитуда колебаний	Moddiy nuqtaning muvozanat holatidan eng katta og'ish masofasi
Tebranish davri	Period of oscillation	Период колебаний	Bir marta to'liq tebranish uchun ketgan vaqt
Tebranish chastotasi	Frequency of oscillation	Частота колебаний	1 sekund vaqt ichidagi to'liq tebranishlar soni
Rezonans	Resonance	Резонанс	Tebranayotgan sistema xususiy chastotasi bilan tashqi davriy uyg'otuvchi kuch chastotasi teng bo'lgan holda tebranish amplitudasining oshishi
Massalar	Centre of	Центр	Sistemada massalar taqsimotini

markazi	weights	масс	xarakterlovchi nuqta
Inerstiya momenti	Inertia moment	Момент инерции	Sistemaning aylanma harakatida massa taqsi-motini xarakterlovchi kattalik
Kuch impulsi	Force impulse	Импульс силы	Kuchning o'z ta'sir vaqtiga ko'paytmasini ifodalovchi vektor kattahk
Harakat miqdori	Quantity of movement	Количество движения	Nuqta yoki jism massasini o'z tezligi ko'paytmasiga teng vektor kattahk
Kuchning ishi	Force work	Работа силы	Kuchning ko'chish yo'nalishidagi tashkil etuvchisini ko'chishga ko'paytmasi
Kinetik energiya	Kinetic energy	Кинетическая энергия	Moddiy nuqta yoki qattiq jism massasini o'z tezligi kvadratiga ko'paytmasining varmi

MUNDARIJA

1-nashriga so'z boshi.....	3
2-nashriga so'z boshi.....	3
Ki rish	5
I QISM. QATTIQ JISM STATIKASI.....	10
1- bob. Statikaning asosiy tushunchalari va aksiomalari	10
1.1-§. Statikaning asosiy tushunchalari.....	10
1.2-§. Statika aksiomalari.....	11
1.3-§. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari	14
2- b ob. Kesishuvchi kuchlar sistemasi.....	18
2.1- §. Kesishuvchi kuchlarni geometrik qo'shish	18
2.2- §. Uch kuchning muvozanati haqidagi teorema	19
2.3- §. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish	20
2.4- §. Kuchning tekislikdagi va o'qdagi proekstiyasi	21
2.5- §. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda aniqlash	22
2.6- §. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanati	23
3- bob. Tekislikdagi parallel kuchlar va juftlar nazariyasi	28
3.1- §. Ikkita parallel kuchni qo'shish	28
3.2-§. Juft kuch haqida tushuncha	30
3.3-§. Kuch momentining algebraik qiymati	30
3.4-§. Juft kuchning momenti	32
3.5-§. Ekvivalent juftlar haqidagi teorema	33
3.6-§. Bir tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shish. Tekislikdagi juftlarning muvozanat shartlari.....	34
4- b o b. Tekislikdagi kuchlar sistemasi.....	36
4.1-§. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma	36
4.2-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti.....	37
4.3-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchiga kel- tirish. Varinon teoremasi.....	39
4.4-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	40

4.5-§. Tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari.....	42
4.6-§. Richagning muvozanati.....	43
4.7-§. Statik aniq va statik noaniq masalalar.....	44
4.8-§. Taqsimlangan kuchlar.....	44
4.9-§. Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanati	48
4.10-§. Ishqalanish. Sirpanishdagi ishqalanish.....	51
4.11-§. Dumalashdagi ishqalanish	54
5-b o b. Fermalarni hisoblash usullari	58
5.1- §. Ferma haqida tushuncha	58
5.2- §. Ferma sterjenlari zo'riqishlarini tugunlarni kesish usulida aniqlash	60
5.3- §. Ritter usuli	62
6-b o b. Fazodagi kuchlar sistemasi	66
6.1- §. Kuchning nuqtaga nisbatan moment-vektori	66
6.2- §. Kuchning o'qqa nisbatan momenti	67
6.3- § Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish
6.4- §. Juftni parallel tekislikka ko'chirish haqidagi teorema.....
6.5- §. Juftning momenti vektori.....
6.6- §. Fazodagi juftlarni qo'shish
6.7- §. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish.....	74
6.8- §. Fazodagi kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentining analitik ifodalari.....	76
6.9- §. Fazodagi kuchlar sistemasining invariantlari.....	77
6.10-§.Fazodagi kuchlar sistemasi bitta juftga yoki teng ta'sir etuvchiga keltiriladigan hollar. Varinon teoremasi.....	78
6.11-§. Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish.....	81
6.12-§. Markaziy o'q tenglamasi.....	82
6.13-§. Fazodagi kuchlar sistemasini ikkita o'zaro kesishmaydigan kuchlarga keltirish.....	85

6.14-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	85
6.15-§. Bir nuqtasi bilan mahkamlangan qattiq jismning muvozanat shartlari..	88
6.16-§. Ikkita nuqtasi mahkamlangan qattiq jismning muvozanat shartlari....	89
7-bob. Parallel kuchlar markazi va og'irlik markazi.....	92
7.1- §. Parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlash.	
Parallel kuchlar markazi	92
7.2- §. Jismning og'irlik markazini aniqlash.....	94
7.3- §. Og'irlik markazini aniqlash usullari	97
7.4- §. Oddiy shaklli ba'zi bir jinsli jismlar og'irlik markazini aniqlash....	100
7.5- §. Gyulden teoremlari	105
II QISM. KINEMATIKA	107
8-bob. Nuqta kinematikasi	107
8.1- §. Asosiy tushunchalar	107
8.2- §. Nuqta harakatini aniqlash usullari	109
8.3- §. Nuqtaning tezligi.....	113
8.4- §. Nuqtaning tezlanishi	119
8.5- §. Nuqta harakatining xususiy hollari	126
9-b o b. Qattiq jismning ilgari lama va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylan-	
ma harakatlari	132
9.1- §. Jismning ilgari lama harakati	132
9.2- §. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat renglamasi.....	134
9.3- §. Jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati burchak tezligi. Tekis aylanma harakat.....	135
9.4- §. Jism burchak tezlanishi. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat...	136
9.5- §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezligi.....	139
9.6- §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezlanishi.....	141
10-bob. Qattiq jismning tekis parallel harakati.....	145

10.1-§. Qattiq jismning tekis larallel harakatini aniqlash. Tekis shaklning harakat tenglamalari.....	145
10.2-§. Tekis shaklning ko'chishiga oid teorema.....	14
10.3-§. Tekis shakl nuqtalarining tezliklari.....	148
10.4-§. Tezliklar oniy markazi.....	150
10.5-§. Tezliklar oniy markazi aniqlanadigan ba'zi hollar.....	152
10.6-§. Hentroidalar.....	156
10.7-§. Tekis shakl nuqtasining tezlanishini qutb usulida aniqlash.....	156
10.8-§. Qutb usuli bilan tekis shakl nuqtalarining tezlanishlarini aniqlashga oid masalalar.....	158
10.9-§. Tezlanishlar oniy markazi.....	165
11-bob. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakati...	168
11.1-§. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamalari. Eyler burchaklari.....	168
11.2-§. Eyler-Dalamber teoremasi.....	171
11.3-§. Oniy aylanish o'qi. Aksoidlar.....	172
11.4-§. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakatdagi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi.....	173
11.5-§. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezligi.....	174
11.6-§. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jism nuqtasi tezlanishi.....	178
11.7-§. Oniy burchak tezlanish vektorlari.....	179
11.8-§. Eylerning kinematik tenglamalari.....	183
12-bob. Erkin qattiq jismning harakati.....	186
12.1-§. Erkin jism harakatining kinematik tenglamalari.....	186
12.2-§. Erkin jism nuqtasining tezligi.....	189
12.3-§. Erkin jism nuqtasining tezlanishi.....	190
13-bob. Nuqtaning murakkab harakati	191
13.1-§. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va absolyut harakatlari.....	191
13.2-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo'shish haqidagi teorema.....	193

13.3-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezlanishlarini qo'shish haqidagi Koriolis teoremasi.....	196
13.4-§. Murakkab harakatdagi nuqtaning nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishlari.....	198
13.5-§. Nuqtaning murakkab harakatiga oid masalalar.....	200
14-bo b. Qattiq jismning murakkab harakati.....	204
14.1-§. Umumiy mulohazalar.....	204
14.2-§. Jismning ilgariy harakatlarini qo'shish haqidagi teorema.....	205
14.3-§. Jismning kesishuvchi o'qlar atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish.....	206
14.4-§. Jismning ikkita parallel o'q atrofidagi aylanma harakatlarini qo'shish.....	207
14.5-§. Silindrik tishli uzatmalar.....	213
14.6-§. Jismning ilgariy va aylanma harakatlarini qo'shish.....	218
III QISM. DINAMIKA.....	224
15-bob. Dinamikaning asosiy qonunlari.....	224
15.1-§. Dinamika predmeti.....	224
15.2-§. Klassik mexanikaning asosiy qonunlari.....	226
16-bob. Erkin moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari va dinamikaning ikki asosiy masalasi.....	230
16.1-§. Erkin moddiy nuqta harakatining differentsial tenglamalari.....	230
16.2-§. Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasi.....	233
16.3-§. Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasini echishga doir masalalar.....	235
16.4-§. Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi.....	237
echishga doir masalalar.....	240
16.6-§. Moddiy nuqtaning sodda hollardagi to'g'ri chiziqli harakat differentsial tenglamalarini integrallash.....	247
17-bob. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tebranma harakati.....	255
17.1-§. Umumiy mulohazalar.....	255

17.2-§. Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati.....	255
17.3-§. Tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati.....	266
17.4-§. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati.....	266
17.5-§. Nuqtaning tepkili tebranishlari.....	269
17.6-§. Rezonans xodisasi.....	272
18-b o b. Bog'lanishdagi moddiy nuqtaning harakati.....	275
18.1-§. Bog'lanishdagi nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi.....	275
18.2-§. Qo'zg'almas silliq sirt ustidagi nuqtaning harakati. Lagranjning birinchi xil tenglamalari.....	276
18.3-§. Silliq egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning harakat differensial tenglamalari.....	277
18.4-§. Berilgan egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy koordinata o'qlaridagi ifodasi.....	278
18.5-§. Matematik tebrangich.....	279
19-bob. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat dinamikasi.....	282
19.1-§. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat differensial tenglamalari. Ko'chirma va Koriolis inerstiya kuchlari.....	282
19.2-§. Klassik mexanikaning nisbiylik prinsipi.....	284
19.3-§. Nuqtaning nisbiy muvozanati. Vaznsizlik.....	285
19.4-§. Jismlarning muvozanati va harakatiga Yer aylanishining ta'siri.....	286
20- b o b. Mexanik sistema dinamikasiga kirish.....	292
20.1-§. Mexanik sistema. Mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarni klassifikatsiya qilish.....	292
20.2-§. Sistemaning massalar markazi.....	294
20.3-§. Inerstiya momentlari.....	296
20.4-§. Jismlarning parallel o'qlarga nisbatan inerstiya momentlari haqidagi Gyuygens — Shteyner teoremasi.....	299
20.5-§. Bir jinsli ba'zi jismlarning inerstiya momentlarini hisoblash.....	301
20.6- §. Jismlarning berilgan nuqtadan o'tuvchi o'qlarga nisbatan	

inerstiya momentlari.....	304
20.7- §. Inerstiya ellipsoidi.....	306
20.8- §. Inerstiya bosh o'qlarining xususiyatlari.....	307
21-b o b. Dinamikaning umumiy teoremlari.....	313
21.1- §. Mexanik sistemaning harakat differentsial tenglamalari	313
21.2- §. Moddiy nuqtaning va sistemaning harakat miqdori. Kuch impulsi.	315
21.3- §. Nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.....	318
21.4- §. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.....	322
21.5- §. Sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema	325
21.6- §. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani suyuqlikning stasionar oqimiga tatbiqi. Eyler tenglamasi.....	328
21.7-§. O'zgaruvchan massali jism haqida tushuncha.....	331
21.8- §. I. V. Meshcherskiy tenglamasi.....	331
21.9- §. Siolkovskiy formulasi.....	334
21.10-§. Moddiy nuqta harakat miqdorining momenti va sistemaning kinetik momenti.....	336
21.11-§. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teorema	338
21.12-§. Nuqtaning markaziy kuch ta'siridagi harakati. Yuzalar honuni	340
21.13-§. Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema	343
21.14-§. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni	345
21.15-§. Murakkab harakatdagi sistemaning kinetik momenti	347
21.16-§. Sistema massalar markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema	349
21.17-§. Kuchning ishi va quvvati.....	350
21.18-§. Teng ta'sir etuvchining ishi	352
21.19-§. Ayrim hollarda kuchning ishini hisoblash	353
21.20-§. Qattiq jismga qo'yilgan kuchlarning ishi.....	356
21.21-§. Moddiy nuqta va sistema kinetik energiyasi. Kyonig teoremasi.....	361
21.22-§. Qattiq jismining kinetik energiyasi	362
21.23-§. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema.....	365

21.24-§. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema.....	367
21.25-§. Potensialli kuch maydoni.....	370
21.26-§. Teng potensialli sirt. Kuch chiziqlari	371
21.27-§. Potensial energiya.....	372
21.28-§. Kuch funkstiyasini aniqlashga oid misollar.....	373
21.29-§. Moddiy nuqta va mexanik sistema uchun energiyaning saqlanish qo- nuni	374
22-bob. Qattiq jism dinamikasi	377
22.1- §. Qattiq jism dinamikasining asosiy masalalari	377
22.2- §. Qattiq jismning ilgarihlama harakat differensial tenglamalari.....	378
22.3- §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanna harakatdagi qattiq jismning harakat differensial tenglamasi.....	379
22.4- §. Fizik tebrangich.....	380
22.5- §. Jismlarning inerstiya momentlarini tajriba usuli bilan aniqlash.....	382
22.6- §. Qattiq jismning tekis parallel harakat differensial tenglamalari.....	385
22.7- §. Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning harakati va asosiy dinamik sarakteristikalari.....	389
22.8- §. Eylemning dinamik tenglamalari.....	397
22.9- §. Qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jism uchun dinamikaning asosiy masalalari.....	39
22.10-§. Erkin giroskopning harakati	395
22.11-§. Rezal teoremasi.....	396
22.12-§. Giroskopning elementar nazariyasi.....	397
23-b o b. Dalamber prinstipi.....	404
23.1- §. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinstipi.....	404
23.2- §. Mexanik sistema uchun Dalamber prinstipi.....	407
23.3- §. Qattiq jism inerstiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti.....	409
23.4- §. Jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanganda podshipniklarning dinamik reaksiya kuchlarini aniqlash.....	411
23.5- §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismni statik va dina-	

mik muvozanatlash.....	413
24-bob. Analitik mexanika	419
24.1- §. Bog'lanishlar va ularning klassifikatsiyasi.....	419
24.2- §. Mumkin bo'lgan ko'chish. Sistemaning erkinlik darajasi	422
24.3- §. Kuchning mumkin bo'lgan ko'chishdagi elemengar ishi. Ideal bog'lanishlar.....	426
24.4- §. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi	427
24.5- §. Mumkin bo'lgan ko'chish priistipini oddiy mashinalarga qo'llash.....	430
24.6- §. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llashga oid masalalar.....	431
24.7- §. Sistemaning umumlashgan koordinatalari	433
24.8- §. Umumlashgan kuchlar.....	435
24.9- §. Sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanat shartlari.....	436
24.10- §. Dinamikaning umumiy tenglamasi. Dalamber—Lagranj prinsipi.....	440
24.11- §. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari	442
24.12- §. Potensialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun Lagranjning ikkinchi xil tenglamalari.....	446
24.13- §. Lagranjning ikkinchi xil tenglamalarini qo'llashga oid masalalar.....	446
24.14- §. Gamilton—Ostrogradskiy prinsipi.....	450
24.15- §. Kanonik tenglamalar.....	453
24.16- §. Mexanik sistemaning ustuvor muvozanati haqida tushuncha	455
24.17- §. Lagranj—Dirixle teoremasi.....	456
24.18- §. Sistemaning ustuvor muvozanati yaqinidagi kinetik va potensial energiyalari.....	459
24.19- §. Erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaning ustuvor muvozanati yaqinidagi kichik tebranishlari.....	463
24.20- §. Erkinlik darajasi birga teng bo'lgan sistemaning so'nuvchi tebranma harakati	467
24.21- §. Erkinlik darajasi birga teng mexanik sistemaning majburiy tebranma harakati	469
24.22- §. Erkinlik darajasi ikkiga teng mexanik sistemaning ustuvor	

muvozanati yaqinidagi kichik tebranishlari	47
24.23- §. Ustivor harakag haqida tushuncha	47
24.24- §. Uyg'otilgan harakat differensial tenglamalari.....	48
24.25- §. Harakatning ustuvorligi xaqidagi Lyapunov teoremlari.....	47
24.26- §. Birinchi yaqinlashishdagi ustivor muvozanat.....	47
24.27- §. Harakatni optimal boshqarish haqida tushuncha.....	48
25-bob. Zarba nazariyasi	48
25.1- §. Zarba nazariyasining asosiy tushunchalari.....	48
25.2- §. Zarba nazariyasining asosiy tenglamasi	485
25.3- §. Zarba vaqtida sistema harakag miqdorining o'zgarishi haqi- dagi teorema	487
25.4- §. Zarba vaqtida nuqta va sistema kinetik momentining o'zgarishi xaqidagi teorema	489
25.5- §. Zarba vaqtida zarbali kuchning ishi haqidagi Kelvin teoremasi.....	490
25.6- §. Jismning qo'zg'almas sirtga urilishidagi to'g'ri zarba. Tik- lovchi koeffitsientni tajriba yo'li bilan aniqlash	490
25.7- §. Ikkita jismning to'g'ri markaziy zarbasi.....	491
25.8- §. Zarba vaqtida kinetik energiyaning yo'qolishi. Kamo teoremasi.....	497
25.9- §. Zarbali kuchlarning qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi va tekis parallel harakatdagi jismga ta'siri	500
25.10-§. Zarba markazi	501
1-ilova.1-topshiriq.....	506
1-ilova.2-topshiriq.....	511
1-ilova.3-topshiriq	521
1-ilova.4-topshiriq.....	525
2-ilova.1-topshiriq.....	528
2-ilova.2-topshiriq.....	529
2-ilova.3-topshiriq.....	533
2-ilova.4-topshiriq.....	536
3-ilova.1-topshiriq.....	540

3-ilova.2-topshiriq	545
3-ilova.3-topshiriq	557
3-ilova.4-topshiriq	558
Foydalanilgan adabiyotlar	565
Glossariylar	568

